پرویز شهریاری

از تاریخ دانش و فن

چندجمله‌ای‌ها

چند جمله‌ای‌ها، یکی از مفهوم‌هایی است که مقام اول را در ریاضیات دارد. چند جمله‌ای با یک متغیر به‌تابعی گفته می‌شود که به‌این صورت باشد:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

عدد n توان چندجمله‌ای است. وقتی مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها را در نظر بگیریم، ویژگی‌های آن‌ها، درست شبیه ویژگی‌های عددهای درست است. در واقع مجموع، تفاضل و حاصل ضرب چند جمله‌ای‌ها، خود یک چند جمله‌ای است. در ضمن از قانون‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و سرایت‌پذیری پیروی می‌کنند. نسبت دو چندجمله‌ای، همیشه یک چندجمله‌ای نیست و برای آن‌ها، مانند عددها، باید «تقسیم با باقی مانده» را به‌حساب آورد، یعنی برای هر دو چند جمله‌ای $P_n(x)$ و $Q_m(x)$ ($m \leq n$)، یک چند جمله‌ای مانند $D_{n-m}(x)$ که خارج قسمت و $R_k(x)$ ($k<m$) که باقی مانده نامیده می‌شود، وجود دارد و همیشه این برابری برقرار است:

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot D_{n-m}(x) + R_k(x)$$

در حالتی که $Q(x)=x-a$ باشد، باقی مانده‌ی $R_0(x)$ از درجه‌ی صفر، یعنی عدد است. در پایان سده‌ی هجدهم، ریاضی‌دان فرانسوی «اتین بدلی بزو» (Bezout) (۱۷۳۰-۱۷۸۳) ثابت کرد، این باقی مانده برابر است با $P(a)$.

با وجود این، چند جمله‌ای‌ها ساختار بغرنج‌تری از عددهای درست دارند. یکی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها، عبارت است از انتخاب (x) به‌گونه‌ای که به‌ازای آن چند جمله‌ای برابر صفر شود. این مقدار x ریشه‌ی چندجمله‌ای نامیده می‌شود. ریشه‌ی چند جمله‌ای‌های درجه اول را مردم مصر باستان و میان‌دورود و عیلام هم می‌توانستند پیدا کنند. ریاضی‌دانان بابلی با ریشه‌ی چندجمله‌ای درجه دوم هم آشنا بودند، یعنی می‌توانستند معادله‌ی درجه دوم را حل کنند. البته به‌این نکته باید توجه داشت که ریاضی‌دانان باستانی از حرف برای نشان دادن چندجمله‌ای معادله استفاده نمی‌کردند و همه چیز را با

توصیف شرح می‌دادند.

خیام ریاضی‌دان ایرانی، بیش‌تر به‌یاری هندسه و مقطع‌های مخروطی، بسیاری از معادله‌های درجه سوم را حل کرد. ولی برای حل جبری معادله‌ی درجه‌ی سوم باید تا سده‌ی شانزدهم انتظار کشید، گرچه جمشید کاشانی برای پیدا کردن سینوس یک درجه، راهی جبری برای جواب تقریبی معادله‌ی درجه‌ی سوم پیدا کرد. جمشید کاشانی در سده‌ی پانزدهم میلادی می‌زیست.

تاریخ پیدایش دستوری برای حل معادله‌ی درجه‌ی سوم، سطرهای غم‌انگیزی را در تاریخ ریاضیات تشکیل می‌دهد. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که هر معادله‌ی درجه‌ی سوم را، با تغییر متغیر آن، می‌توان به‌این صورت درآورد:

$$x^3 + px = q$$

این معادله را برای مقدارهای مثبت p و q، فه‌رو (Dal Ferro) (۱۴۶۵-۱۵۲۶) حل کرد. ولی در آن زمان، عددهای منفی هنوز از طرف ریاضی‌دانان به‌رسمیت شناخته نشده بود و معادله‌ها را در حالت منفی بودن p یا q یا هر دو، به‌این صورت‌ها می‌نوشتند:

$$x^3 + q = px$$

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x^2 = px + q$$

«فه‌رو» روش حل را به‌داماد و شاگردش «آ. فی یوره» اطلاع داد. «فی یوره»، ریاضی‌دان مشهور ایتالیایی «نیکولو تارتاگلیا» (۱۴۹۹-۱۵۵۷) را به‌مسابقه به‌خاطر حل معادله‌ی درجه سوم، دعوت کرد. چندروز پیش از آغاز مسابقه، تارتاگلیا راه حل کلی معادله‌ی درجه سوم را پیدا کرد و در ۲ ساعت مدت

اسحاک نیوتن

مسابقه، هر ۳۰ معادله‌ای را که به‌او پیشنهاد شده بود، حل کرد. رقیب او حتا یکی از ۳۰ معادله را نتوانست حل کند.

رابطه‌ای که تارتاگلیا برای حل معادله‌ی

$$x^3 + px + q = 0$$

پیدا کرده بود، به‌این صورت است:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

که به‌رابطه‌ی کاردان مشهور شده است، به‌نام ریاضی دان دیگر ایتالیایی «ج. کاردانو» (۱۵۰۱-۱۵۷۶) که در واقع آن را از تارتاگلیا گرفته بود و در کتاب خود به‌چاپ رساند. به‌زودی یکی از شاگردان کاردانو به‌نام «ل. فه‌راری» (۱۵۲۲-۱۵۶۵) دستوری برای حل معادله‌ی درجه‌ی چهارم پیدا کرد. البته ۸۰ سال پیش از فه‌راری، «پالوئو و لمس»، ریاضی‌دان اسپانیایی راه حل معادله‌ی درجه‌ی چهارم را کشف کرده بود که درست به‌همین دلیل. در سال ۱۴۸۶ بنابر تصمیم «توماس تورکیماگا» که ریاست

مرکز تفتیش عقاید اسپانیا را به‌عهده داشت، محکوم به‌مرگ و به‌خرمن آتش سپرده شد.

بعد از دو سده در نوشته‌های لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، روفینی (۱۷۶۵-۱۸۲۲) و آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹) نشان داده شد که نمی‌توان رابطه‌ای کلی برای یافتن ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی پنجم و معادله‌های از درجه‌ی بالاتر (با بیان رادیکال) پیدا کرد. و در کارهای اوالیست گالوا (۱۸۱۱-۱۸۳۲) روشن داده شد که به‌یاری آن می‌توان چند جمله‌ای‌هایی را مشخص کرد، که بتوان ریشه‌های آن‌ها را با رادیکال‌ها معین کرد.

پیشرفت بعدی نظریه‌ی چندجمله‌ای‌ها به‌وارد شدن عددهای مختلط در ریاضیات مربوط می‌شود. در سال ۱۷۹۹ کارل فردریک گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ریاضی‌دان برجسته‌ی آلمانی قضیه‌ای را ثابت کرد که به‌«قضیه‌ی اصلی جبر» معروف شد: هرچند جمله‌ای که از درجه‌ای غیراز صفر باشد، دست کم یک ریشه (حقیقی یا موهومی) دارد. از آن جا و براساس قضیه‌ی بِزو نتیجه می‌شود که هر معادله‌ی درجه‌ی n درست n ریشه دارد (که در بین آن‌ها ممکن است ریشه‌های برابر هم وجود داشته باشد).

هم‌چنین در سده‌ی شانزدهم، فرانسوا ویِت (۱۵۴۰-۱۶۰۳) ریاضی‌دان فرانسوی رابطه‌ی بین ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

را با ضریب‌های چندجمله‌ای به‌دست آورد:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$$

....

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n$$

که به‌دستورهای ویِت معروف‌اند و برای حالتی که برخی (یا همه‌ی) ریشه‌ها هم مختلط باشند، درست است. دستورهای ویِت را برای سه جمله‌ای درجه دوم x^2+px+q می‌شناسیم:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1x_2 = q$$

چندجمله‌ای‌ها ساده‌ترین و فراوان‌ترین تابع‌ها در ریاضیات‌اند. براساس رفتار آن‌ها، می‌توان به‌سادگی از آن‌ها مشتق و یا انتگرال گرفت. در بسیاری حالت‌ها، برای این که قانون‌مندی مربوط به‌بستگی یک تابع مجهول را نسبت به‌متغیر خود پیدا کنند، فرض می‌کنند که این تابع، یک چندجمله‌ای باشد و به‌یاری آن ویژگی‌های تابع را به‌تقریب پیدا می‌کنند. چنین چندجمله‌ای را در زمان خود، نیوتُن (۱۶۴۳-۱۷۲۷) پیشنهاد کرد و به‌همین جهت آن را «چندجمله‌ای میان‌گیری نیوتُن» می‌نامند. این

بقیه زیر صفحهٔ ۳۰۳