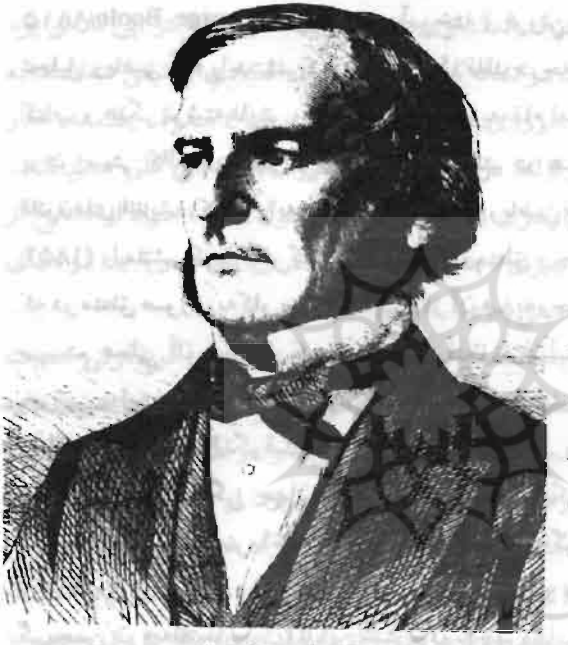
مارتین گاردنر
برگردان: هرمز شهریاری

از منطق ارسطویی تا منطق ریاضی

- جبر بول -



جرج بول - بانی منطق ریاضی

ارسطو را باید به‌حق بنیان‌گذار منطق دانست. گرچه ارسطو منطق را بر پایه‌ی قیاس بنا نهاده و در حقیقت تمام توجهش را به‌قیاس منطقی محدود کرده بود، ولی به‌هر رو شالوده‌ی بنای منطق توسط او بود که ریخته شد.

با قیاس منطقی می‌توان به‌استنباط موضوعی یا امری، از راه مقایسه دست یافت. باورنکردنی است، این قیاس که امروزه بخش ناچیزی از منطق به‌شمار می‌آید. به‌مدت ۲۰۰۰ سال زمینه‌ی اصلیِ مطالعات منطقی را تشکیل می‌داد آن چنان که در ۱۷۹۷ امانوئل کانت نوشت، قیاس تجسم کاملی از حکمت و فلسفه است.

پیکره‌ی منطق ارسطویی را صغرا، کبرا و نتیجه تشکیل می‌دهد. از دو جمله‌ی «دیوار موش دارد» (صغرا) و «موش گوش دارد» (کبرا)، چنین استنتاج می‌شود که «دیوار گوش دارد» (نتیجه).

زمانی برتراند راسل درباره‌ی استنتاج چنین گفت: «فرض بر این گرفته می‌شود که شما از پیش می‌دانید انسان فناپذیر است و همچنین این که سقرات یک انسان است، پس نتیجه می‌گیرید: سقرات فناپذیر است». راسل می‌گوید با این که روش درست استنتاج جز این نمی‌تواند باشد، با این حال اکنون دیگر از این شیوه کمتر استفاده می‌شود. راسل ادامه می‌دهد

تنها موردی که به‌آن برخورد کرده مطلبی است که در ویژه‌نامه‌ی فکاهی نشریه‌ی مایند (روزنامه‌ی فلسفیِ انگلیسی) به‌مناسبت کریسمس ۱۹۰۱ آمده است: «فیلسوفی آلمانی که آگهی‌های مجله، او راگیج کرده بود، سرانجام چنین استدلال کرد: همه چیز در این مجله شوخی است، آگهی‌ها در این مجله‌اند، پس آگهی‌ها شوخی هستند». راسل در جایی دیگر نوشت: «اگر می‌خواهید منطق‌دان بشوید این نکته را ـ که زیاد هم نمی‌توانم روی آن تکیه کنم ـ به‌شما گوشزد می‌کنم که به‌دنبال یادگیریِ منطق سنتی نروید. تلاشی که در این راه در زمان ارسطو انجام گرفت قابل تقدیر است. ولی ارزش و اعتبار آن به‌همان اندازه‌ی اعتبار کیهان‌شناسیِ بتلمیوسی است».

درخشش منطق سنتی در حقیقت از زمانی رو به‌کاهش نهاد که در ۱۸۴۷، جرج بول (۱۸۶۴ ـ ۱۸۱۵ George Boole)، فرزند خودآموخته و فروتن یک کفشگر انگلیسی، «منطق و تجزیه تحلیل ریاضیِ آن» را منتشر کرد. گرچه بول فاقد درجه‌ی تحصیلات دانشگاهی بود، ولی این کتاب و دیگر نوشته‌هایش، کافی بود که او را به‌مقام استادیِ ریاضیات کوییز کالج (اکنون به‌نام یونیورسیتی کالج در شهر کُرکِ ایرلند) برساند. در همین جا بود که رساله‌ی «پژوهشی در قانون‌های اندیشه، که بر پایه‌ی آن‌ها، نظریه‌های ریاضیِ منطق و احتمال بنا نهاده شده‌اند» (لندن ۱۸۵۴) را منتشر کرد. فکر کلیِ ریاضی کردن منطق و جانشین کردن نماد، به‌جای کلیه واژه‌هایی که در منطق صوری به‌کار می‌رفت، پیش از آن هم به‌وجود آمد، بود. اما بول نخستین کسی بود که سیستم عملیِ آن را برقرار کرد. روی هم‌رفته، نه فیلسوفان و نه ریاضی‌دانان آن زمان روی خوشی به‌این موفقیت چشم‌گیر، نشان ندادند و شاید یکی از دلیل‌هایی که بول به‌طور جدی دنباله‌ی کارهایش را نگرفت، نیز همین بود.

بول در ۴۹ سالگی جهان را بدرود گفت، او در یک روز بارانی، پس از یک سخن‌رانی با لباس‌های خیس، به‌سرماخوردگی و سپس ذات‌الریه گرفتار و از همین بیماری از پای درآمد. نام و خاطره‌ی او پس از درگذشتش به‌وسیله‌ی همسر و پنج دخترش زنده نگهداشته شد. نورمن گریجمن در «به‌افتخار بول» از این شش زن با چهره‌هایی درخشان یاد می‌کند. همسر بول، ماری اِورِست کتاب‌های ساده‌ای درباره‌ی ریاضیات و آموزش و پرورش از دیدگاه شوهرش نوشت، از جمله‌ی آن‌ها می‌توان «فلسفه و سرگرمیِ جبر» را نام برد. دختر بزرگش ـ ماری ـ با چارلز هینتون ازدواج کرد. هینتون همان کشیش ریاضی‌دانی بود که نخستین داستان را درباره‌ی فضای دو بعدی به‌نام «سرزمین هموار» و همچنین کتاب‌هایی درباره‌ی فضای چهار بعدی به‌رشته‌ی تحریر درآورد.

مارگارت، مادرِ سر جفری تیلور ریاضی‌دان کمبریج شد. آلیسیا که فریفته‌ی گشت و گذار چارلز هینتون در فضاهای چند بعدی شده بود، به‌کشف‌های مهمی در این زمینه دست یافت.

لوسی به‌استادیِ شیمی نایل آمد. اتل لیلیان، جوانترین دختر به‌ازدواج ویلفرید وُی نیچ دانشمند لهستانی درآمد. آن‌ها در مان‌هاتان مقیم شدند، و در همان جا نیز اتل به‌سال ۱۹۶۰ جهان را ترک گفت. اتل لیلیان چندین داستان نوشت که از میان آن‌ها «خرمگس» آن چنان در روسیه مورد استقبال مردم قرار گرفت که سه اپرا روی آن تصنیف شد. در سال‌های اخیر نیز ملیون‌ها نسخه از آن در چین به‌فروش رفت. گریجمن در این باره می‌نویسد: «روس‌های امروزی از این درشگفتند که چرا غربی‌ها درباره‌ی اتل لیلیان وُی نیچ این داستان‌سرای بزرگ انگلیسی تا به‌این اندازه کم اطلاع‌اند».

چند نفری که به‌نبوغ و عظمت ابتکار بول پی بردند (به‌ویژه ارنست شرودر ـ ریاضی‌دان آلمانی) به‌سرعت دست به‌اصلاحاتی در نشانه‌گذاری‌های بول زدند. (بول که در این تلاش بود تا سیستمش را مشابهِ جبر سنتی درآورد، در نشانه‌گذاری‌های خود، استادیِ چندانی نشان نداده بود). نتیجه‌ی آن اصلاحات، جبر بول امروزی است. امروزه جبر بول معرف یک ساختار انتزاعیِ «فارغ از مضمون» است که می‌تواند در هر راهی، به‌صورت قاعده‌ای کلی عمل کند، ولی در اساس، برداشت ساده‌تر و روان‌تری از همان سیستم بول است. مراد از «فارغ از مضمون» این است که فرق نمی‌کند چه چیزی ـ چه در منطق و چه در ریاضیات و یا چه در دنیای فیزیکی ـ به‌نمادهای ساختار نسبت داده می‌شود.

مانند دیگر جبرهای ناب انتزاعی، به‌نمادهای بول می‌تواند مضمون‌های گوناگونی نسبت داده شود. خود بول در سیستمش به‌دسته‌هایی از اشیا با خواص معین، مضمون‌های جبری داده است و چنین دسته‌هایی را کلاس نامیده است. با این که در این کار در همان راه ارسطویی گام برداشته است، ولی خیلی فراتر از آن رفته و منطق قدیم را به‌بیرون از دایره‌ی تنگ قیاس گسترش داده است. از آن جا که نشانه‌گذاری‌های بولی، دیگر متروک شده، امروزه جبر بولی به‌صورت نمادهای نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشته می‌شود. مجموعه دارای همان مفهومی است که بول از کلاس برداشت می‌کرد، یعنی مجتمعی (گِردآیه‌ای) از «عنصرهای» منفرد. یک مجموعه می‌تواند متناهی باشد مانند ۱ و ۲ و ۳، یا گوشه‌های یک مکعب و یا سیاره‌های منظومه‌ی شمسی، همچنین یک مجموعه می‌تواند نامتناهی باشد، مانند مجتمع عددهای زوج و یا هر مجموعه‌ی دیگری از اشیای ناشمار. اگر مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی را مشخص کنیم و در نظر بگیریم که تمام زیر مجموعه‌هایش ـ به‌دلیل این که مشمول آن مجموعه هستند ـ رابطه‌هایی با هم دارند، می‌توانیم یک جبر بول از مجموعه‌ها درست کنیم. یادآور می‌شویم که زیر مجموعه‌ها شامل مجموعه‌ی تهی و خود مجموعه نیز می‌شود. مشمول نیز به‌این معنی است که برای نمونه: مجموعه‌ی ۱ و ۲ و ۳، مشمول مجموعه‌ی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵، است.

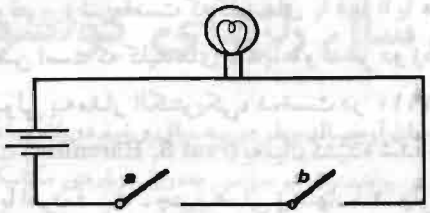
نشانه‌های جدیدی که در چنین جبری به‌کاری می‌رود عبارت است از: حرف‌های اول الفبای لاتین برای مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ها و عنصرها، U برای مجموعه‌ی عمومی (مجموعه‌ی مادر) و ϕ برای مجموعه‌ی تهی (مجموعه‌ی بدون عضو). اجتماع دو مجموعه‌ی a و b با نماد $\cup$ و اشتراک آن‌ها با $\cap$ نشان داده می‌شود (چند یا چندین اجتماع یا اشتراک نیز می‌تواند وجود داشته باشد). مکمل مجموعه‌ی a با $\bar{a}$ و اگر مجموعه‌ی a عضوی از مجموعه‌ی b باشد رابطه‌ی آن‌ها با $\in$ نمایش داده می‌شود.

چنانچه ذکر شد، سابقه‌ی تاریخی نمادهای جدید به‌نمادهای بول برمی‌گردد. بول هم برای عنصرها و کلاس‌ها و زیرکلاس‌ها حرف‌های الفبا، برای کلاس عمومی ۱، برای کلاس تهی o، برای اجتماع کلاس‌ها + و برای اشتراک کلاس‌ها × را برگزیده بود. برای نشان دادن مکمل x، بول $1-x$ را به‌کار برده بود. برای کلاس a که عضو کلاس b به‌شمار آید، نمادی اختیار نکرده بود ولی می‌توان آن را به‌صورت $a \times b = a$ نوشت یعنی اشتراک a و b همان a است.

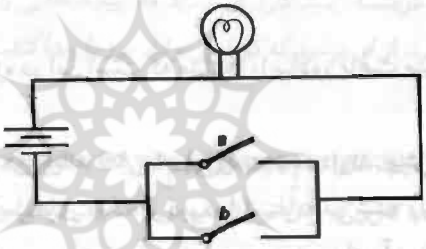
نخستین مضمونِ جبر بولی جدید، توسط خود بول پیشنهاد شده بود. او اشاره کرده بود که اگر «۱» به‌جای درست و «o» به‌جای نادرست گرفته شود، جمع‌بندیِ آن‌ها می‌تواند برای تعیین درستی یا نادرستیِ قضیه‌ها به‌کار رود. بول این برنامه را به‌طور جدی پی‌گیری نکرد ولی اخلافش آن را به‌اجرا درآوردند که اکنون به‌جبر گزاره‌ها مشهور است.

امروزه، گزاره را با p یا q یا r.... و درستی یا نادرستیِ آن را با T یا F نمایش می‌دهند. از ارتباط چند گزاره به‌یکدیگر، گزاره‌ی جدیدی نتیجه می‌شود که ارزش گزاره‌ی جدید از جمع‌بندیِ ارزشِ گزاره‌های نخستین به‌دست می‌آید. رابطهای گزاره‌ها به‌صورت نشانه‌هایی قراردادی نوشته می‌شود. $\Rightarrow$ نشانه‌ی مشروط دو گزاره است. وقتی که نوشته شود «$p \Rightarrow q$» خوانده می‌شود «اگر p آنگاه q» و همچنین «$q \Leftarrow p$» خوانده می‌شود «اگر و تنها اگر p آنگاه q». «$p \wedge q$» به‌معنیِ «p و q» و «$p \vee q$» به‌معنیِ «یا p یا q» است، رابط «$\equiv$» هم ارزیِ دو گزاره را می‌رساند.

در روزگار ما، جبر بولی کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. در نظریه‌ی گراف‌ها، نظریه‌ی ترکیبیاتی، نظریه‌ی اطلاعاتی، نظریه‌ی ماتریس... کاربرد آن به‌روشنی مشاهده می‌شود. یکی از کاربردهای مهم آن ـ در سال‌های اخیر ـ طراحی مدارهای منطقی است که به‌جبر کلیدی موسوم شده است. جبر کلیدی تنها به‌شبکه‌های الکتریکی محدود نمی‌شود، بلکه در انتقال هرگونه انرژی به‌کار گرفته می‌شود. در طول خطهای انتقال با نصب ابزارهایی، انرژی قطع و وصل می‌شود و یا از خطی به‌خط دیگر منتقل می‌شود. انرژی می‌تواند، برق، گاز، مایع و یا پرتوهای نوری باشد.

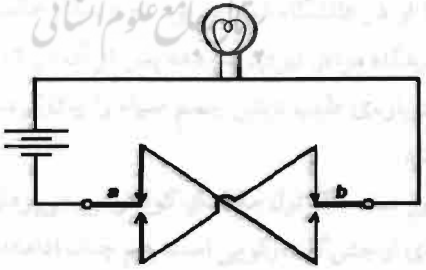


لامپ روشن است، زمانی که کلید a «و» کلید b هر دو زده شده باشد



لامپ روشن است، زمانی که کلید a «یا» کلید b یا هر دو زده شده باشد

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی



لامپ روشن است، زمانی که کلید a «یا» کلید b ولی نه هر دو زده شده باشد

انرژی در طول خط یا متحرک است یا ثابت که این را به‌زبان جبر بولی می‌توان به‌گزاره‌ای درست یا نادرست تعبیر کرد. به‌شکل توجه کنید. در هر یک از مدارها، الکتریسیته یا متحرک است (چراغ روشن است یعنی درست) یا ثابت است (چراغ روشن نیست یعنی نادرست). در مدار بالای شکل، چراغ وقتی روشن است که کلیدهای یا a یا b یا هر دو زده شده باشند. در مدار پایین وقتی چراغ روشن است که کلیدهای یا a یا b و نه هر دو زده شده باشد.

دادنِ مضمون جبر بولی به‌مدار الکتریکی، نخست در ۱۹۱۰ در یک مجله‌ی روسی به‌وسیله‌ی پاول اهرن فست (Paul S. Ehrenfest) به‌میان کشیده شده بود. در سال ۱۹۳۶ نیز در ژاپن ـ جدا و بدون ارتباط با اهرن فست ـ چنین عملی پیشنهاد شد. ولی نخستین مقاله‌ی مفصلی که این مضمون را به‌طراحان رایانه شناساند، مقاله‌ی «تجزیه و تحلیل فرمان‌ها (رله‌ها) و مدارهای کلیدی» بود که در جلد ۵۷ دسامبر ۱۹۳۸ نشریه‌ی «خلاصه مذاکرات مهندسین برق انستیتوی آمریکایی» توسط کلود شانون (Claude E. Shannon) نوشته شده بود. این مقاله بر مبنای رساله‌ی دکترای ۱۹۳۷ شانون از انستیتوی تکنولوژی ماساچوست تنظیم شده بود. از زمان انتشار مقاله‌ی شانون، جبر بولی، به‌عنوان یکی از ضروریات در طراحی رایانه به‌شمار می‌آمد.

حسن جبر کلیدی به‌ویژه در این است که مدارها را ساده و باعث صرفه‌جویی در سخت‌افزار می‌شود.

کلیدهای قطع و وصل در رایانه نقش اصلی را به‌عهده دارند. پیش از این، برای کلیدها از فرمان‌های مغناطیسی و لامپ‌های خلاء و دیودها استفاده می‌شد، ولی اکنون ترانزیستورها و سایر نیمه‌هادی‌ها ـ که دارای سرعت عمل بیشتری هستند ـ جای آن‌ها را گرفته‌اند.

بزرگ‌ترین خدمت جبر بول، گسترش منطق ریاضی و پدید آوردنِ فکر مدار منطقی و پا گرفتن رایانه است. رایانه‌ای که در دنیای امروز سراسر زندگی بشر را به‌شکل‌های گوناگون زیر چتر خود گرفته است.