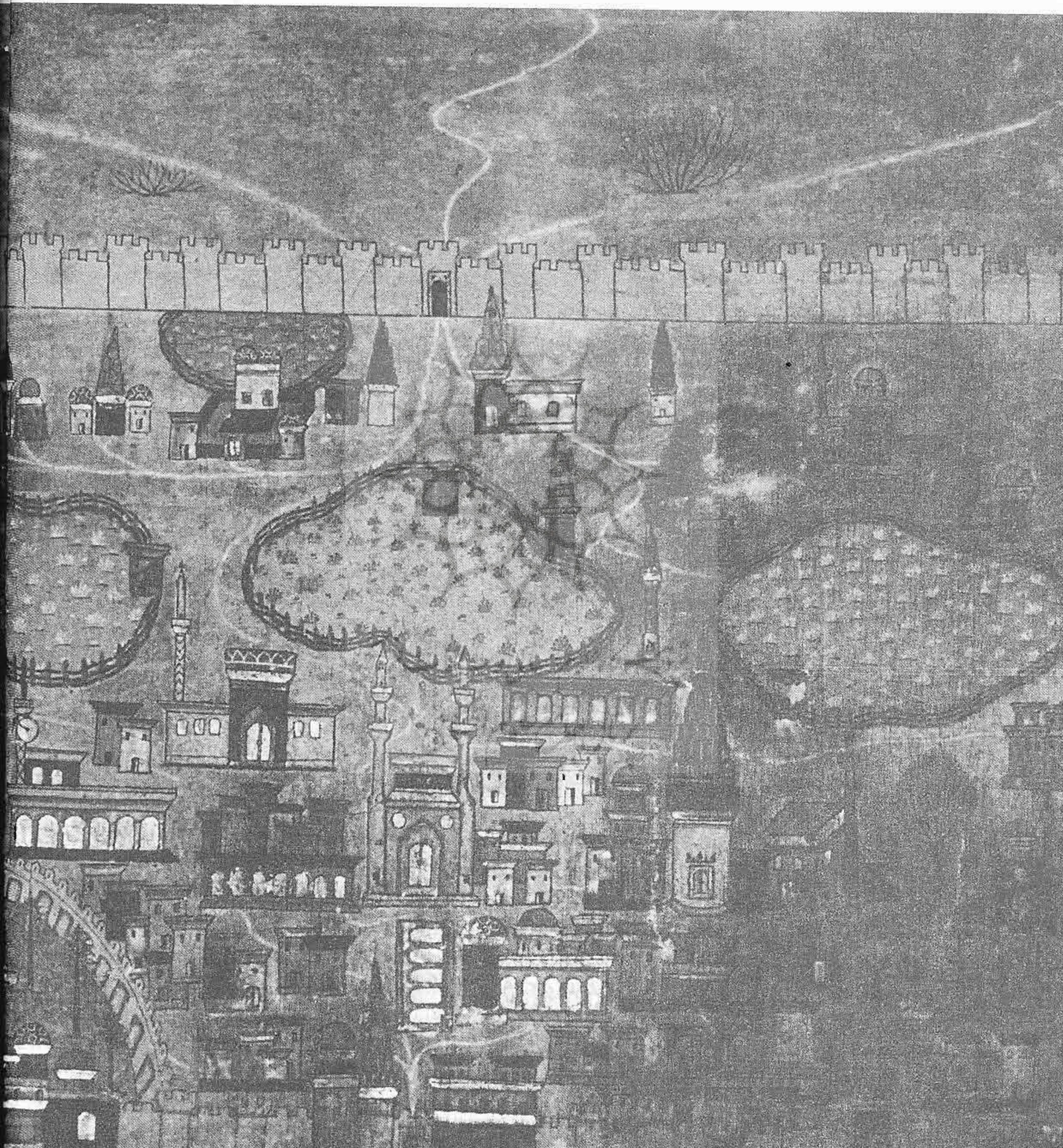
محل تلاقی هنـ



ـدسه و جبر

رشدی راشد، تاریخنگار علم، دربارهٔ نقش مسلمانان در تاریخ ریاضیات سخن می گوید.

آغاز ریاضیات اسلامی به نظر شما چگونه بوده است؟

پژوهش مسلمانان در ریاضیات ظاهراً در اوایل قرن نهم میلادی شروع شد. در آن زمان، نهضت ترجمهٔ آثار یونانی به عربی در اوج بود. مثلاً حجّاج بن مطر *اصول* اقلیدس و مجسطی بطلمیوس را ترجمه کرد و هلال بن هلال حمصی چهار مجلّد اول *مخروطات* آپولونیوس پرگایی را. آثاری چند از ارشمیدس، پاپوس و دیوفانتوس نیز در همین قرن به عربی ترجمه شد.

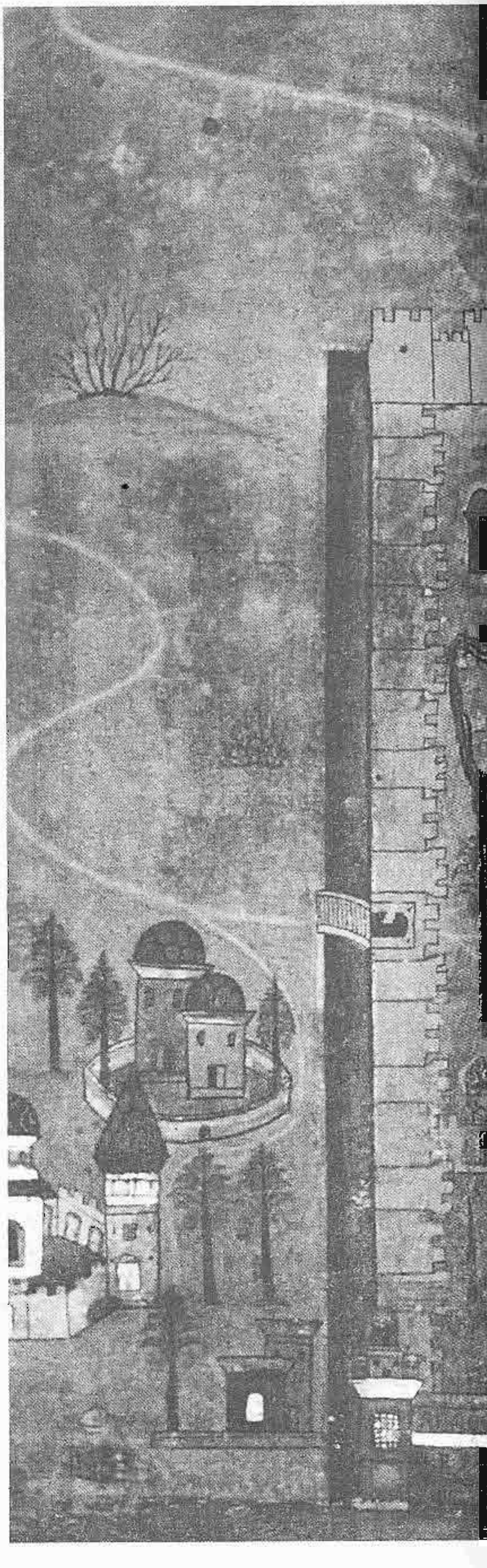
در این کار سترگ دو ویژگی مهم به چشم می‌خورد: یکی آنکه ترجمه‌ها را ریاضیدانان بزرگ انجام می‌دادند و دیگر آنکه این ترجمه‌ها از پیشرفته‌ترین پژوهشهای زمان ملهم بودند. مثلاً مجلدات پنجم تا هفتم *مخروطات* آپولونیوس را ریاضیدان بزرگ، ثابت بن قرّه (متوفی در ۹۰۱) ترجمه کرد. به علاوه، تمام شواهد دال بر این است که قسطا بن لوقا در حوالی ۸۷۰ میلادی به دلیل مطالعاتی که در معادلات سیاله انجام می‌شد. به ترجمهٔ *علم حساب* دیوفانتوس ترغیب شد[1].

بسیاری نمونه‌های دیگر می‌توان ذکر کرد که پیوندهای محکم چنین ترجمه‌هایی را با پژوهشهای ابتکاری جاری در این دورهٔ اوج انتشار ریاضیات هلنی به زبان عربی نشان می‌دهد.

خوارزمی معروفترین ریاضیدان مسلمان است. سهم او در تفکر ریاضی چه بود؟

در این زمان، یعنی در قرن نهم میلادی، در آکادمی یا «دارالحکمهٔ» بغداد، خوارزمی اثری نوشت که هم از لحاظ مضمون و هم از لحاظ اسلوب نشان دهندهٔ نقطهٔ آغاز تازه‌ای بود. نام اثر او کتاب *الجبر والمقابله*[2] بود، که جبر برای نخستین بار به عنوان یک شاخهٔ مجزا و مستقل ریاضی از آن پدید آمد. این پیشرفتی اساسی بود ومعاصران او نیز همین نظر را داشتند، چه به لحاظ اسلوب ریاضی جدیدش و چه به لحاظ ماهیت موضوع آن و مهمتر از همه به لحاظ اینکه مقدمهٔ پرمایه‌ای بود برای پیشرفتهای بعدی.

از لحاظ اسلوب، این اثر هم الگوریتمی بود زیرا مؤلف آن مجموعه‌ای از روشهای محاسباتی را ارائه داد، و هم برهانی. می‌بایست ریاضیات جدیدی ابداع کرد که هم کلیّت کافی داشته باشد تا بتواند با انواع فرمولبندیهای گوناگون سروکار بیابد و هم در عین حال مستقل از این فرمولبندیها

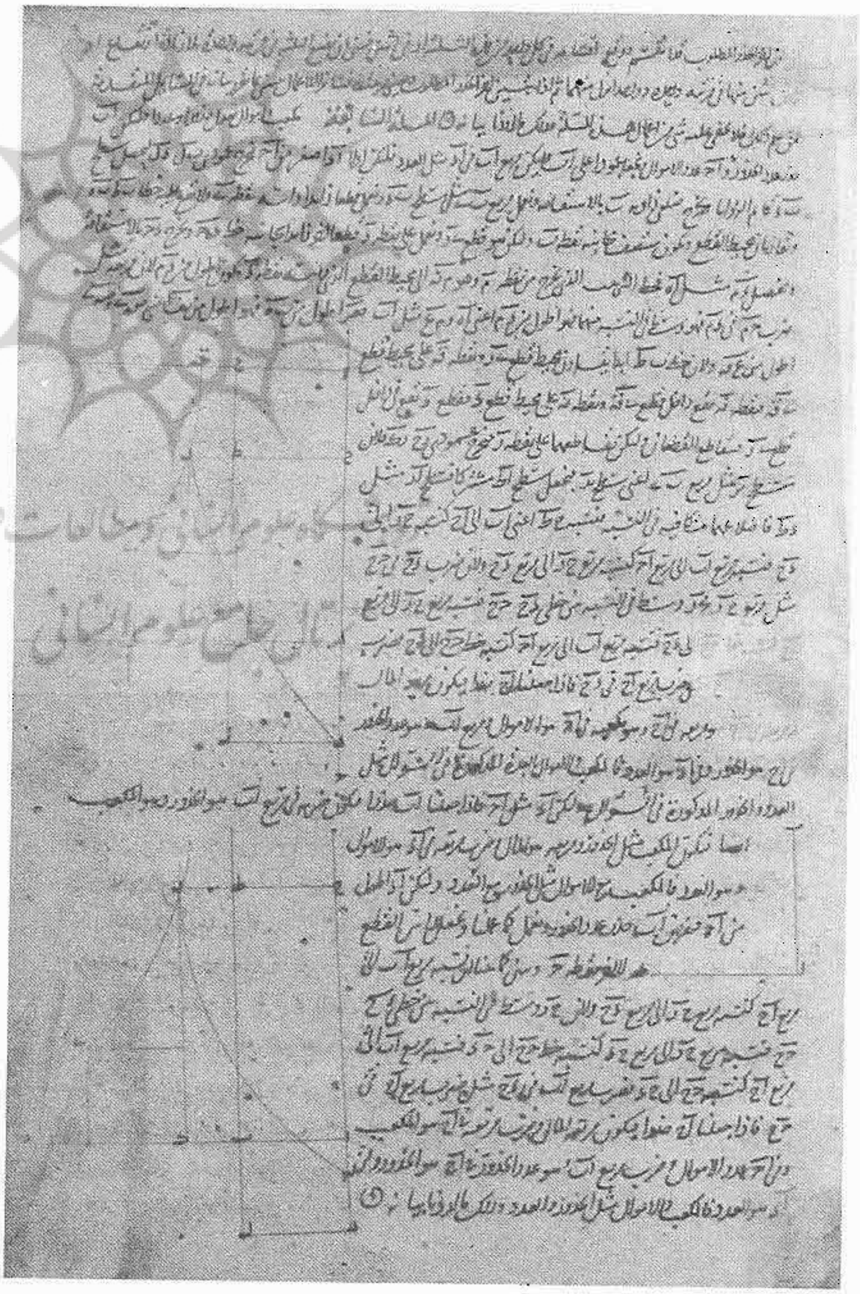


شهر بغداد در یک مینیاتور ترکی مربوط به سال ۱۵۳۴ میلادی.

بماند. در اثر خوارزمی، عبارت جبری را می‌شد به یک عدد یا کمیت اصم یا اندازهٔ هندسی تحویل کرد. این ریاضیات جدید و ترکیب روشهای برهانی و کاربردی در آن، به نظر متفکران زمان یک نوآوری و ابتکار چشمگیر بود.

تازگی مفاهیم و اسلوب جبر خوارزمی، که بر هیچ سنت شناخته شدهٔ قبلی تکیه نداشت، بسیار اهمیت دارد. جبر جدید جرقهٔ آغازین تلاش بزرگی بود که برای کاربرد یک شاخهٔ ریاضی در شاخهٔ دیگر از قرن نهم به بعد ادامه یافت. به عبارت دیگر، ضمن آنکه جبر به واسطهٔ دامنهٔ فراخ و مفهومهای جدیدش چنین کاربردهایی را ممکن کرد، این کاربردها نیز به واسطهٔ شمار و تنوعشان دائماً چهرهٔ ریاضیات را عوض کردند.

جانشینان خوارزمی به طور فزاینده‌ای حساب را در جبر و بالعکس، حساب و جبر را در مثلثات، جبر را در نظریهٔ اقلیدسی اعداد، و جبر را در هندسه و بالعکس به کار بردند.



قسمتی از رساله‌ای دربارهٔ معادله‌ها اثر شرف‌الدین طوسی (اواخر قرن دوازدهم ــ اوایل قرن سیزدهم). نسخهٔ خطی مربوط به سال ۱۲۹۷ میلادی است.

همهٔ این کاربردها راه را برای شاخه‌هایی جدید یا دست کم فصلهای جدیدی در تاریخ ریاضیات هموار کرد.

لطفاً مثال روشنی از مواجههٔ حساب و جبر ذکر کنید.

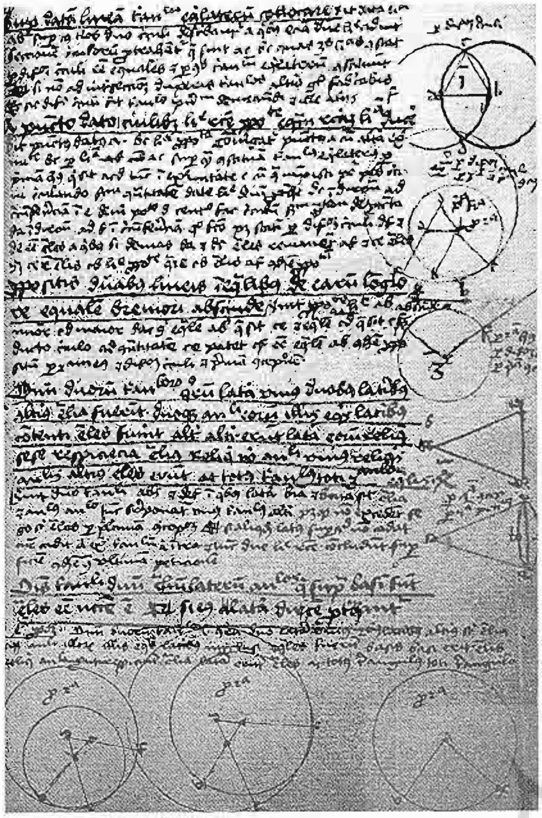
نمونه‌ای که فوراً به ذهن می‌آید، سهمی است که ریاضیدانان مسلمان در نظریهٔ کلاسیک اعداد داشتند.

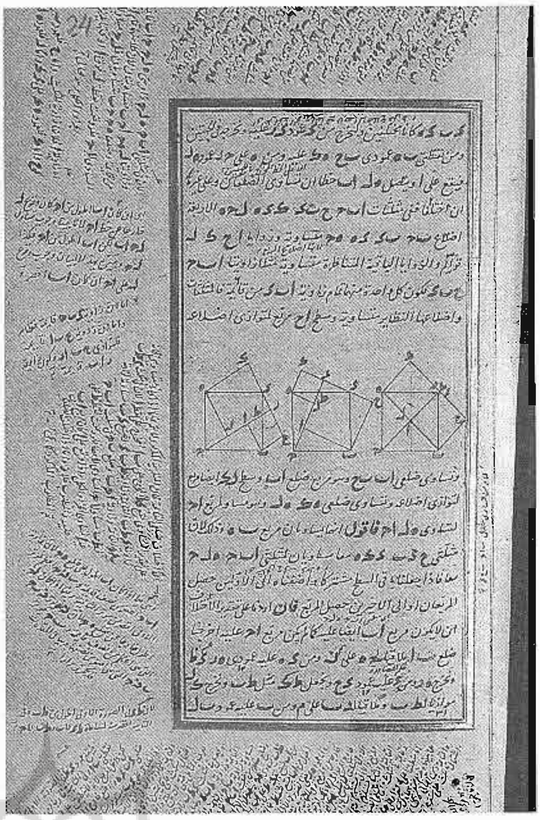
در اواخر قرن نهم، مهمترین متون یونانی در حساب، مانند مقاله‌های خود اقلیدس در این باب، *مدخل علم حساب* نیکوماخوس گراسایی، و علم حساب دیوفانتوس اسکندرانی، همه ترجمه شده بودند. در بحبوحهٔ این ترجمه‌ها، فصلهای دیگری در نظریهٔ اعداد گشوده شد که به تعبیری پاسخی به این ترجمه‌ها بودند. مثلاً در مورد نظریه اعداد متحابه دو گام مهم برداشته شد. گام نخست، در متن حساب اقلیدسی به مجموعه یافته‌های تازه‌ای انجامید و در همان حال، در اثر کاربرد جبر در نظریهٔ اعداد، گام دوم چند قرن بعد در ایجاد زمینه‌ای از نظریه اعداد که هیچ وامی به یونانیان نداشت به ثمر نشست. می‌توانیم دقیقتر به این دو جنبه بپردازیم.

با آنکه اقلیدس نظریهٔ اعداد تام را در پایان مقاله نهم *اصول* مطرح کرد، چه او و چه نیکوماخوس گراسایی نظریه اعداد متحابه را ارائه ندادند.[۳] ثابت بن قره که اثر نیکوماخوس را ترجمه کرد و ترجمه‌ای از اصول را مورد تجدید نظر قرار داد، مصمم شد در مورد این نظریه کار کند. او در این کار موفق شد و به اسلوب اقلیدسی محض، فرمول جالبی برای اعداد متحابه ارائه کرد که امروزه نام او را برخود دارد.

اگر رمز و رازی را که اعداد متحابه را احاطه کرده بود در نظر نگیریم و صرفاً به جنبهٔ ریاضی آن نگاه کنیم، می‌پذیریم که دست کم تا پایان قرن هفدهم، تاریخ اعداد متحابه فقط شامل اشارهٔ گذرایی به فرمول ابن قره و نقل آن توسط ریاضیدانان بعدی است ــ ریاضیدانان عرب زبانی چون انطاکی، بغدادی، ابن البنّاء، اموی، و کاشی که تفاوت موقعیت زمانی و مکانی‌شان نشانگر انتشار گستردهٔ فرمول ابن قره است. این فرمول بار دیگر در کارهای پیردوفرما در ۱۶۳۶ و در کارهای رنه دکارت در ۱۶۳۸ خود می‌نماید.

گام دوم از این جهت چشمگیر است که فیزیکدان و ریاضیدان معروف کمال‌الدین فارسی (متوفی در ۱۳۲۰ میلادی) مقاله‌ای نوشت که در آن خواست فرمول ابن قره را از طریق دیگری اثبات کند. کمال‌الدین فارسی، برهان جدیدش را بر شناخت نظام‌داری از مقسوم علیه‌های عدد تام و عملیاتی که بتوان با آنها انجام داد مبتنی کرد. این برهان متضمن تجدید سازمانی بود که نه فقط به تغییری در چشم‌انداز حساب اقلیدسی انجامید بلکه موضوعات جدیدی در نظریهٔ اعداد پدید آورد. از این رو، می‌شد از دوره‌ای غیرهلنی در تئوری اعداد سخن گفت.





چپ: قسمتی از یک ترجمهٔ لاتینی رسالهٔ خوارزمی دربارهٔ جبر در نسخه‌ای خطی مربوط به سال ۱۱۴۵ میلادی.
راست: شرحی بر *اصول هندسهٔ* اقلیدس از نصیرالدین طوسی (۱۲۷۴ ــ ۱۲۰۱). (نسخهٔ خطی فارسی مربوط به قرن پانزدهم)

رشدی راشد
فرانسوی، مدیر پژوهش در مرکز ملی پژوهشهای علمی (CNRS). او مؤلف بررسیهای متعددی دربارهٔ تاریخ ریاضیات عرب است. چندین مقالهٔ او در میان حساب و جبر، پژوهشهایی در تاریخ ریاضیات عرب (انتشارات له بل لتر، پاریس، ۱۹۸۴) منتشر شده است.

فارسی برای آنکه بتواند به این بررسی جدید از مقسوم علیه‌ها بپردازد، می‌بایست فاکتهایی را که در *اصول* اقلیدس مستتر بود آشکار کند. همچنین می‌بایست از پیشرفتهای جبر از زمان کرخی [کرجی] در قرون دهم و یازدهم و به‌خصوص از روشهای ترکیب استفاده کند. از این رو، روش فارسی به هیچ وجه به اثبات فرمول ابن قره محدود نمی‌شد، بلکه او توانست مطالعهٔ جدیدی را آغاز کند که با نخستین دو تابع حسابی سروکار داشت: مجموع مقسوم علیه‌های یک عدد تام و تعداد این مقسوم علیه‌ها.

این اسلوب که در آن از جبر و آنالیز ترکیبی در حساب اقلیدسی استفاده می‌شد، تا قرن هفدهم، دست کم تا ۱۶۴۰ میلادی، در اروپا رواج داشت. تحلیل استنتاجهای فارسی و روشهایی که او به کار برد نشان می‌دهد که در همان قرن سیزدهم می‌شد مجموعه‌ای از گزاره‌ها، یافته‌ها و تکنیکها را که به ریاضیدانان قرن هفدهم منسوب می‌دانیم به دست داد.

دربارهٔ رابطهٔ جدیدی که بین جبر و هندسه برقرار شد چه می‌گویید؟

دیدیم که منظرهٔ ریاضیات از قرن نهم به بعد تغییر کرد. ریاضیات تحول یافت و مرزهایش وسیعتر شد. حساب و هندسهٔ یونانی هرچه بیشتر اشاعه یافت. به علاوه، در کالبد خود ریاضیات هلنی قلمروهایی غیرهلنی پدید آمد. رابطهٔ بین شاخه‌های کهن دیگر به صورت اولیه باقی نماند و گروه‌بندیهای فراوان دیگری شکل گرفت. این تغییر الگو در درک تاریخ ریاضیات به طور اعم بسیار اهمیت دارد، زیرا رابطهٔ جدید بین جبر و هندسه به ظهور تکنیکهایی انجامید که قوهٔ عظیمی داشتند.

ریاضیدانان قرن دهم در عرصهٔ برگردان مسائل هندسی به زبان جبر و بالعکس به تلاش پرداختند. آنها مسائل دشواری را که نمی‌شد با خط‌کش و پرگار حل کرد، مانند تثلیث زاویه، درج واسطتین، و هفت ضلعی منتظم، به عبارات جبری برگرداندند. به علاوه، جبردانان و هندسه‌دانانی چون ابوالجود محمدبن لیث وقتی با مشکلات استفاده از رادیکالها برای حل معادلهٔ درجهٔ سه روبه‌رو شدند، توانستند به زبان هندسه متوسل شوند و از تکنیک منحنیهای متقاطع برای مطالعهٔ این نوع معادله استفاده کنند.

نخستین تلاشها در راه ایجاد مبنایی برای این تبدیلها با نام خیّام گره خورده است (حدود ۱۱۳۱ ــ ۱۰۴۸ میلادی). خیّام برای فراتر رفتن از حالات خاصی که مربوط به شکل خاصی از معادلهٔ درجهٔ سوم بود، نظریهٔ معادله‌های جبری با درجهٔ کمتر یا مساوی سه را ارائه داد که درعین حال مدل جدیدی برای فرمول‌بندی معادله‌ها به دست می‌داد. او سپس معادله‌های درجهٔ سوم را با استفاده از مقاطع مخروطی برای یافتن جوابهای مثبت حقیقی مورد مطالعه قرار داد. خیّام برای ارائهٔ این نظریه می‌بایست رابطهٔ جدید بین جبر و هندسه را پیش از آنکه بتواند فرمول‌بندی‌اش کند؛ وضوح کامل مجسم کند. از آن به بعد، نظریهٔ معادله‌ها، ولو هنوز ناپخته، برای پرکردن شکاف بین جبر و هندسه پدیدار شد.

خیام در رسالهٔ معروفش جبر دو کشف مهم ارائه داد که تاریخنگاران به غلط به دکارت منسوب کرده‌اند: یکی حلّ عمومی همهٔ معادله‌های درجهٔ سوم با استفاده از دو منحنی متقاطع، و دیگری امکان انجام محاسبه‌های هندسی با تعریف


زیکسو رصدخانهٔ مختصر
نمودند نزدیکی آن مقر
درو پانزده اهل علم گزین
شدند از پی خدمت تقی دین
بشد شیخ ما فاضل نکته دان

طول واحد، که مفهومی بنیادی به شمار می‌رود.

درحدود پنجاه سال پس از خیام، جانشینش شرف‌الدین طوسی گام دیگری به جلو برداشت. او برای اثبات وجود نقطهٔ تقاطع دو منحنی، وارد قلمرو مسائل یافتن و جدا کردن ریشه‌های معادله و پرداختن به شرایط وجود آنها شد. شرف‌الدین طوسی برای پیدا کردن جواب، مفهوم مقادیر ماکسیمم را برای عبارت جبری تعریف کرد و تلاش کرد مفهومها و روشهایی برای تعیین چنین «ماکسیممها»یی بیابد.

این کار نه تنها او را به ایجاد مفهومها و روشهایی چون مشتق کشاند (که البته در دوره‌های بعد چنین خوانده شد) بلکه واداشت که روش کارش را عوض کند. او به ضرورت استفاده از روشهای موضعی پی برد، حال آنکه پیش از او فقط خاصه‌های کلی چیزهای مورد مطالعه را در نظر می‌گرفتند. همهٔ این یافته‌ها و نظریهٔ فراگیرندهٔ آنها اهمیت آشکار دارد و غالباً به ریاضیدانانی منسوب شده است که چند قرن بعد ظهور کردند.

این بود ویژگیهای اصلی رابطهٔ متقابل جبر و هندسه. اما برای تکمیل تصویرمان، باید از دومانع که پیشرفت ریاضیات جدید را کند می‌کرد نام ببریم: یکی اکراه در استفاده از اعداد منفی در زمانی که هنوز تعریف نشده بودند، و دیگری نقیصه‌های نمادگذاری. این دو مسأله فکر ریاضیدانان بعدی را به خود مشغول کرد.

در تاریخنگاری سیاسی، بین دوران قدیم، قرون وسطی، رنسانس و عصر جدید تمایز قائل می‌شوند. به نظر شما این تقسیم‌بندی درمورد تاریخ ریاضیات و به خصوص سهم مسلمانان مناسب است؟

البته ریاضیات «قرون وسطایی» در تقابل با ریاضیات «جدید» بوده است. نخستین متون تاریخی ریاضیات لاتینی، بیزانسی و عرب و نیز هندی و چینی را می‌توان از هرگونه آثاری که در دورهٔ رنسانس پدید آمد متمایز دانست. اما به نظرم نمی‌آید که این دوگونگی چه ازلحاظ تاریخی و چه ازلحاظ معرفت شناختی مناسبتی داشته باشد. ریاضیات دنیای اسلام آشکارا ادامه و ثمرهٔ ریاضیات هلنی است و بذرهایش در ریاضیات هلنی پاشیده شده بود. این امر درمورد ریاضیاتی که از قرن دوازدهم به بعد در دنیای لاتینی پدید آمد نیز صادق است. همچنین، کاری را که هم به عربی و هم به لاتینی (یا ایتالیایی) بین قرن نهم و اوایل قرن هفدهم انجام شد نمی‌توان به دو دورهٔ جداگانه تقسیم کرد.

برعکس، تمام شواهد نشان می‌دهد که نوع ریاضیات موردنظر، همانند بوده است. دلیلش این است که امروزه می‌توانیم کار سمؤال در زمینهٔ جبر و محاسبهٔ عددی را در قرن دوازدهم با کار سیمون استوین در قرن شانزدهم مقایسه کنیم؛ یافته‌های فارسی در نظریهٔ اعداد را با یافته‌های دکارت؛ روشهای طوسی برای حل عددی معادله‌ها را با روشهای فرانسوا ویت در قرن شانزدهم، یا جستجوی طوسی برای ماکسیممها را با جستجوهای فرما، کار خازن در تحلیل دیوفانتوسی اعداد صحیح را در قرن دهم با کار باشه د میزیراک در قرن هفدهم، و غیره. اگر کار خوارزمی، ابوکامل، کرجی و دیگران را نادیده بگیریم، چگونه کار

راست، رصدخانهٔ استانبول در میناتوری ترکی متعلق به سال ۱۵۸۱ میلادی. چپ، عنوان یک نسخهٔ خطی مربوط به سال ۱۲۲۸ که در آن تئوری اعداد متحابه، که توسط ثابت بن قره (متوفی در ۹۰۱ میلادی) تنظیم شد، مطرح شده است.

لئوناردوی پیزایی و دیگر ریاضیدانان ایتالیایی قرون دوازدهم و سیزدهم را یا ریاضیات قرن هفدهم را می‌فهمیم؟

البته نیمهٔ دوم قرن هفدهم در اروپا با پیدایش روشهای جدید و قلمروهای تازه‌ای در ریاضیات همراه بود، اما این جهش لزوماً ناگهانی و یکباره نبود و در هر شاخه‌ای نیز همزمان نبود. وانگهی، خطوط فاصل به ندرت با آثار مؤلفان مختلف منطبق است؛ برعکس این خطوط فاصل از میان آن آثار می‌گذرد. مثلاً در نظریهٔ اعداد، نوآوریها برخلاف آنچه ادعا می‌شود، در استفادهٔ دکارت و فرما از روشهای جبری نهفته نیست، زیرا آنها یافته‌های فارسی را دوباره کشف کردند. جهش را در واقع با کار خود فرما درحوالی سال ۱۶۴۰، که روش «نزول نامتناهی» را ابداع کرد و بعضی شکلهای معادلهٔ درجهٔ دوم را مورد مطالعه قرار داد، می‌توان تشخیص داد.

در واقع از اواسط قرن هفدهم به بعد بود که تارهای درهم گره خورده به هم رسیدند و جهشهای اصلی در کار مستمر قابل تشخیص شدند. سهم ریاضیدانان مسلمان بدینگونه در الگوی منسجمی جای می‌گیرد که بین قرن نهم و نیمهٔ اول قرن هفدهم شکل گرفت. ■

ترجمهٔ رضا رضایی ساروی

۱. پنج کتاب آخر علم حساب دیوفانتوس عمدتاً به حل معادله‌های نامعین، یعنی معادله‌هایی با بیش از یک متغیر و تعداد زیادی جواب، اختصاص یافته است. *ویراستار*.

۲. لفظ جبر از عنوان این اثر مشتق شده که در قرون وسطی بارها به لاتینی ترجمه شد و تأثیری نیرومند بر علم غربی در قرون وسطی گذاشت. لفظ *الگوریتم* که نشان دهندهٔ هر روشی در محاسبه (مانند دستگاه دهدهی) است که متضمن سلسله مراحلی باشد، از شکل لاتینی شدهٔ نام خوارزمی گرفته شده است. *ویراستار*.

۳. عددی را تام می‌گویند که برابر با مجموع مقسوم علیه‌هایش (غیر از خودش) باشد (مثلاً ۱ + ۲ + ۳ = ۶؛ ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴ = ۲۸). دو عدد صحیح درصورتی که مجموع مقسوم علیه‌های کوچکتر از خود یکی از آن دو برابر با عدد دیگر باشد و بالعکس، اعداد متحابه نامیده می‌شوند. اعداد ۲۲۰ و ۲۸۴ متحابه‌اند و مدتهای دراز تنها اعداد متحابه‌ای بودند که شناخته می‌شدند.