دکتر حسنعلی غیور، دانشگاه اصفهان
دکتر حسین عساکره، دانشگاه زنجان

H. A. Ghayur, Ph.D
H. Asakereh, Ph.D

شماره مقاله: ۶۴۸

کاربرد مدل‌های فوریه در برآورد دمای ماهانه و آینده نگری آن
مطالعهٔ موردی : دمای مشهد

چکیده

به دلیل اهمیت و تأثیر دما بر شرایط محیطی و نیز نقش آن در برنامه‌ریزی‌های مبتنی بر دانسته‌های اقلیمی، الگوسازی رفتار دما به خصوص در سال‌های اخیر مورد توجه محافل علمی بوده است. میانگین ماهانهٔ دما همانند غالب عناصر اقلیمی رفتاری همراه با نوعی تموج و عمدتاً با حرکتی منظم و متناوب به بالا و پایین مشخص می‌شود. رفتارهای تناوبی به هر شکل که باشند، با استفاده از توابع سینوسی در فرکانس‌های مختلف با تقریب مناسب و قابل قبولی برآورد و پیش‌بینی می‌شوند. در این راستا مدل‌های فوریه از ابزارهای مفید و کارآ به شمار می‌آیند. در این مقاله ضمن معرفی روش‌های الگوسازی فوریه، یک الگوی فوریه برای متوسط ماهانهٔ دمای شهر مشهد، بر اساس یک سری ۱۰۶ ساله (۱۲۷۲ ماه) از ژانویه سال ۱۸۹۱ تا دسامبر سال ۱۹۹۶ تعیین می‌کنیم. داده‌های مربوط به دورهٔ مزبور از سه منبع اطلاعاتی استخراج و پردازش شده‌اند:

طی دورهٔ ۱۸۹۱-۱۹۵۰ میانگین ماهانهٔ دما از گزارش "سازمان جهانی هواشناسی" تحت عنوان: "گزارش جهانی هوا" استخراج شده است. در این گزارش دما به درجه فارنهایت ثبت گردیده بود. در دوره مذکور دو مرحله داده‌های مفقود (مجموعاً ۲۰ سال) طی دوره‌های ۱۸۹۵- ۱۹۰۴ (۱۰ سال) و ۱۹۴۱- ۱۹۵۰ (۱۰ سال) وجود داشته است. داده‌های مربوط به دوره‌های مزبور از شرکت ملی نفت- واحد اهواز اخذ گردیده است. از سال ۱۹۵۱ به بعد با تأسیس سازمان هواشناسی کشور میانگین دما در این ایستگاه تحت

نظارت سازمان مذکور به ثبت رسیده است. به منظور همخوانی دمای پیش از دهۀ ۱۹۵۰ و بعد از آن، دمای گزارش شده به وسیله سازمان جهانی هواشناسی به درجه سلسیوس تبدیل شده است. مدل تعیین شده شامل متغیر توضیحی رسته‌ای و یک متغیر توضیحی سینوسی- کسینوسی است. در واقع مؤلفه‌های سینوسی و کسینوسی، همساز (هارمونیک)هایی هستند که در شکل‌گیری رفتار سری تناوبی مؤثرند. تعداد این همسازها (مؤلفه‌های نوسانی) حداکثر نصف طول داده‌ها است. چرا که رفتار نوسانی حداقل از دو مؤلفه (سینوسی و کسینوسی) تشکیل شده است. در واقع هر همساز گویای یک روند روبه بالا و یک روند روبه پایین در یک سری زمانی است. بنابراین هر طول موج متوالی در سری زمانی تناوبی با یک همساز نشان داده می‌شود. برای تعیین مؤلفه‌های سینوسی- کسینوسی معنی‌دار با استفاده از دوره نگار، ترتیب اهمیت همسازها را تعیین می کنیم. سپس با جستجو در بین چند همساز مهم اول، چرخه‌های معنی‌دار پنهان را پیدا می کنیم. بر این اساس بهترین الگوی قابل برازش بر میانگین ماهانۀ دمای مشهد به وسیلۀ همساز یکصد و ششم ارایه شده است که در سطح ۰/۰۱ معنی‌دار است. پس از بررسی مدل به لحاظ درستی فرض‌ها، با استفاده از آن متوسط درجه حرارت ماهانه تا دسامبر ۲۰۰۴ پیش‌بینی و فواصل اطمینان ارایه گردیده است.

ضریب همبستگی و ضریب تعیین معیارهایی هستند که هریک به نحوی درصد موفقیت الگو را در توصیف سری نشان می‌دهند. در این الگو ضریب همبستگی ۰/۹۷۶ و ضریب تعیین ۹۵/۲ درصد و خطای استاندارد باقیمانده‌ها ۱/۹۱۲ محاسبه شده است.

لازم به توضیح است که سری علاوه بر روندی تناوبی، می‌بایست به لحاظ روند آزمون شود. اگر داده‌ها دارای شیبی حول خطی غیر افقی باشد، مؤلفه‌های مربوط می‌بایست به مدل اضافه شود. آزمون وجود روند برای شیب خطی، سهمی و درجۀ ۳ نیز عدم وجود روند را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن قسمت سیستماتیک الگوی برازش یافته، به عنوان مکانیزم مولد مقادیر آینده، متوسط درجه حرارت ماهانه از ژانویه ۱۹۹۷ تا دسامبر ۲۰۰۴ پیش‌بینی شد. در مورد هر یک از مقادیر پیش‌بینی شده با اضافه و کم کردن عدد ۳/۷۴۸ ± یک فاصلۀ اطمینان ۹۵ درصد برای پیش‌بینی مقادیر به دست می‌آید. حفظ رفتار تناوبی حول یک خط افقی و نیز وجود کرانه‌هایی قابل قبول با فاصلۀ ثابت در امتداد زمان شواهد دیگری بر نیکویی برازش مدل به حساب می‌آید.

تحت شرایط کلی که معمولاً برقرار است، روش‌های معرفی شده در این مقاله برای الگوسازی هر سری زمانی گسسته متساوی‌الفاصلهٔ تناوبی دیگر کاربرد دارد. برای سری‌های پیوسته نیز با تقسیم محور زمان به فواصل مساوی می‌توان سری پیوسته را به یک سری گسستهٔ متساوی الفاصله تبدیل کرد و از روش‌های معرفی شده، برای الگوسازی آن استفاده نمود.

کلید واژه‌ها: همساز، سری‌های فوریه، سری زمانی، دوره نگار، مشهد.

مقدمه

میانگین ماهانهٔ دما همانند غالب عناصر اقلیمی رفتاری همراه با نوعی تموج و عمدتا با حرکتی منظم و متناوب به بالا و پایین مشخص می‌شود. رفتارهای تناوبی به هر شکل که باشند، با استفاده از توابع سینوسی در فرکانس‌های مختلف با تقریب مناسب و قابل قبولی برآورد و پیش‌بینی می‌شوند. در این راستا مدل‌های فوریه از ابزارهای مفید و کارآ به شمار می‌آیند. اشپیگل (۱۳۶۹) و اسندون (۱۳۶۲) بنیادهای تئوریک و ریاضی این مدل‌ها را مورد بحث قرار داده‌اند. کاربردهای آماری این قبیل مدل‌ها به وسیلهٔ وئی (۱۳۷۶) مورد بحث قرار گرفته‌اند. براون و چرچیل (۱۳۷۶) کاربرد و توجیه این قبیل مدل‌ها را از دیدگاه فیزیکی تبیین و تشریح نموده‌اند.

به دلیل اهمیت و تأثیر دما بر شرایط محیطی و نیز نقش آن در برنامه‌ریزی‌های مبتنی بر دانسته‌های اقلیمی، الگوسازی رفتار دما به خصوص در سال‌های اخیر مورد توجه محافل علمی بوده است. رابسون (۱۹۹۷) اهمیت مدل‌سازی داده‌های اقلیمی تناوبی را از مهمترین گام‌های مدل‌سازی آماری اقلیم می‌داند (*Robeson, 1997*). ازجمله کارهای انجام شده در این زمینه، به کارگیری مدل‌های فوریه به وسیلهٔ الشال و میهوب (۱۹۹۶) به منظور برازش مدل بر دما و تابش و نیز استفاده از مدل‌های فوریه در توضیح و تشریح علل تغییرات دمایی در کشور مصر است (*El-Shal and Mayhoub, 1996*). خردمند نیا (۱۳۷۷) نیز مدل‌های فوریه دوسطحی را بر میانگین حداقل و حداکثر دمای ماهانهٔ شهراصفهان طی سال‌های ۱۳۶۵-۱۳۷۴ برازش داده است.

در این تحقیق سعی شده است روش برازش مدل‌های فوریه معرفی شود و بر این اساس و بر مبنای الگوریتم ارایه شده به وسیلهٔ کولی و توکی (۱۹۶۵) و براساس روش

خردمندنیا (۱۳۷۷) مدلی مناسب برای میانگین ماهانهٔ دمای ۱۰۶ سالهٔ مشهد ارایه گردیده و مقادیر احتمالی دمای آینده را برآورد شده است (*Cooley and Tukey, 1965*).

مواد و داده‌ها

در این نوشتار دمای ماهانهٔ ایستگاه مشهد از ژانویهٔ سال ۱۸۹۱ تا دسامبر سال ۱۹۹۶ (۱۲۷۲ ماه) استفاده شده است. داده‌های مربوط به دورهٔ مزبور از سه منبع اطلاعاتی استخراج و پردازش شده‌اند:

طی دورهٔ ۱۹۵۰ –۱۸۹۱ میانگین ماهانهٔ دما از گزارش "سازمان جهانی هواشناسی"[1] تحت عنوان: " گزارش جهانی هوا "[2] استخراج شده است. در این گزارش دما به درجه فارنهایت ثبت شده بود. در دوره مذکور دو مرحله داده‌های مفقود (مجموعاً ۲۰ سال) طی دوره‌های ۱۹۰۴- ۱۸۹۵ (۱۰ سال) و ۱۹۵۰- ۱۹۴۱ (۱۰ سال) وجود داشته است. داده‌های مربوط به دوره‌های مزبور از شرکت ملی نفت- واحد اهواز گرفته شده است. از سال ۱۹۵۱ به بعد با تأسیس سازمان هواشناسی کشور میانگین دما در این ایستگاه تحت نظارت سازمان مذکور به ثبت رسیده است. به منظور همخوانی دمای پیش از دههٔ ۱۹۵۰ و بعد از آن، دمای گزارش شده به وسیله سازمان جهانی هواشناسی به درجه سلسیوس تبدیل شده است.

بنیادها و روش‌ها

۱. نمایش فوریهٔ یک سری زمانی

جنبهٔ متمایز کنندهٔ رویدادهای تناوبی، الگوی تکراری در زمان است. دما نیز همانند تمامی عناصر اقلیمی این قبیل رویدادها را در بازه‌های زمانی مختلف تکرار نموده و دو وضعیت یکسان متوالی را در یک فاصلهٔ زمانی کمابیش برابر تجربه می کند. به طوری که مثلا دمای ژانویهٔ هر سال تقریبا مشابه دمای ژانویهٔ سال‌های پیش و آتی است... . همان‌گونه که می‌دانیم در رفتار تناوبی انتظار می‌رود پس از یک دور کامل، پیکربندی اولیه شکل گیرد. تناوب دوره‌های سرد و گرم، مرطوب و خشک در گذشتهٔ اقلیم گویای این قبیل رفتارها است. بسیاری از این رفتارها تدریجی و آرام و برخی دیگر اگرچه

1. World Meteorology Organization (WMO). 2. World Weather Report.

ناپایدار بوده‌اند اما حاوی یک روند مستمر و جاری می‌باشند (*رامشت، ۱۳۷۱*). بنابراین برخی رفتارهای نوسانی در بازه‌های زمانی نامعلوم و یا طولانی و برخی دیگر مثلا متوسط‌های ماهانه، هر ۱۲ ماه یکبار تکرار می‌شوند. از این رو اعتقاد بر این است که دما و دیگر عناصر اقلیمی حاوی دورهٔ تناوب نسبتا منظمی بوده است که طی آن در یک فاصلهٔ زمانی معین و نیز پس از گذشت دورهٔ نامعینی وضعیت یکسانی را به طور متناوب تکرار می کند (۱).

در این تحقیق مدل‌سازی مشخصه‌هایی مدنظر است که با آهنگ معینی تکرار می‌شوند. برای مثال متوسط ماهانهٔ دما در تمامی ژانویه‌ها، فوریه‌ها و غیره با تناوب ۱۲ ماه مورد توجه قرار می گیرد. در این مقیاس تموج و رفتاری منظم و متناوب به سمت بالا و پایین در مقادیر دما مشاهده می‌شود. می‌دانیم که رفتار موجی دمای ماهانه پاسخی طبیعی در برابر توزیع تناوبی انرژی گرمایی خورشید به شمار می‌رود. به هر حال یک سری زمانی تناوبی (مثلا میانگین ماهانهٔ دما) به طول n، ($\{z_t\}_{t=1}^{n}$) را می‌توان به فرم زیر نوشت :(*Maslen and Rockmore, 1997*)

$$z_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} (a_i \cos 2\pi f_i t + b_i \sin 2\pi f_i t) \qquad (۱)$$

که در آن z_t عنصر اقلیمی مورد بررسی (در اینجا دما است) در زمان t و fi فراوانی تکرار مشاهدات (عکس دوره بازگشت) است و با $f_i = \frac{i}{n}$ نشان داده می‌شود. در اینجا $i = 1 , 2, \ldots q$

رابطهٔ (۱) را نمایش فوریهٔ سری زمانی (zl ,z2 ,z3... zn) گوییم. همان‌گونه که در رابطهٔ بالا دیده می‌شود، مؤلفه‌های سینوسی و کسینوسی ($a_i \cos 2\pi f_i t + b_i \sin 2\pi f_i t$) حول یک میانگین ثابت (a0) رفتار سری را تعیین می کنند. بدین دلیل است که رابطهٔ فوق در توصیف پدیده‌های نوسانی اهمیت زیادی دارد. در واقع مؤلفه‌های سینوسی و کسینوسی، همساز (هارمونیک[3]) هایی هستند که در شکل‌گیری رفتار سری تناوبی مؤثرند. تعداد این همسازها (مؤلفه‌های نوسانی) حداکثر نصف طول داده‌ها (q) است. چرا که رفتار نوسانی حداقل از دو مؤلفه (سینوسی و کسینوسی) تشکیل شده است. در واقع هر همساز گویای یک روند رو به بالا و یک روند رو به پایین در یک سری زمانی است. بنابراین هر طول موج متوالی در سری زمانی تناوبی با یک همساز نشان داده

3. Harmonic.

می‌شود. همسازها در بخش ۳-۲ مورد بحث قرار می گیرند. چنان‌که آشکار است الگوی فوریه را نیز می‌توان به عنوان یک الگوی رگرسیون خطی در نظر گرفت که در آن تعداد ضرایب رگرسیون برابر طول سری می‌باشد. در رابطهٔ (۱) a0 ، ai و bi ضرایب فوریه نامیده می‌شوند و همانند یک رگرسیون چند متغیره با استفاده از روش کمترین مربعات خطا به دست می‌آیند (*Bevington, P,R, 1969; Johnston. J, 1960*). اگر طول دورهٔ آماری (n) فرد باشد آنگاه تعداد همسازها از رابطهٔ $q=\frac{(n-1)}{2}$ و ضرایب آن از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}z_t=\bar{z}$$

$$a_i=\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}z_t\cos 2\pi f_i t \qquad (۲)$$

$$b_i=\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}z_t\sin 2\pi f_i t$$

اگر طول دورهٔ آماری (n) زوج باشد آنگاه تعداد همسازها نصف طول دورهٔ آماری ($q=\frac{n}{2}$) خواهد بود و به استثنا دو ضریب aq و bq بقیهٔ ضرایب از روابط (۲) به دست می‌آیند. در این حالت دو ضریب aq و bq به شرح زیر تعیین می‌شوند:

$$a_q=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(-1)^t z \qquad (۳)$$

$$b_q=0$$

۲. همسازها

چنان‌که واضح است نمایش فوریه (۱) سری زمانی $\{z_t\}_{t=1}^{n}$ حاوی i همساز است. همساز i ام، موجی است با فرکانس پایه و به شکل nf0 بیان می‌شود. فرکانس پایه (f0) کوچکترین فرکانس مشخصهٔ یک الگوی تکراری در زمان است. اگر الگوی افت و خیز نخستین بار پس از یک فاصلهٔ زمانی (T) تکرار شود (دوره بازگشت)، فرکانس پایه $f_0=\frac{1}{T}$ خواهد بود (*بلت ترجمهٔ خرمی، ۱۳۷۴*).

بنا بر آنچه که گفته شد یک سری زمانی اقلیمی تناوبی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از همسازها به فرم زیر نیز ارایه نمود (*خردمند نیا، ۱۳۷۷*):

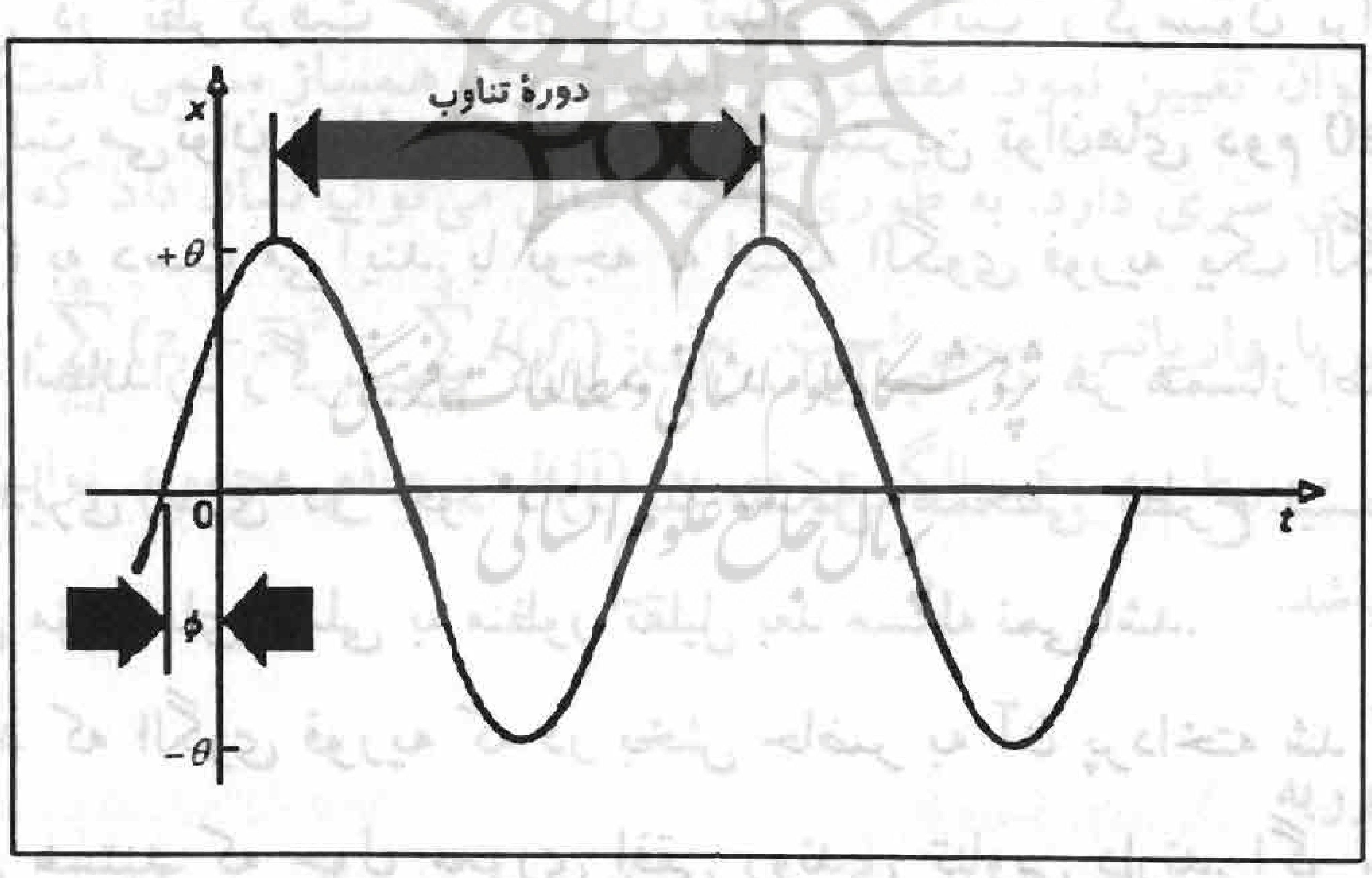
$$z_t=a_0+h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_q(t) \qquad (۴)$$

$$h_i(t)=a_i\cos 2\pi f_i t+b_i\sin 2\pi f_i t \qquad (۵)$$

که در آن h_i همساز i ام و f_i فرکانس همساز i ام نامیده می‌شوند. تعداد مشاهدات در یک چرخهٔ کامل از همساز i ام را پریود یا دورهٔ تناوب همساز i ام می‌نامند و بستگی زمانی حرکت نوسانی را نشان می‌دهد. مقدار آن برابر $\frac{n}{i} = \frac{1}{f_i}$ می‌باشد و به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$h_i(t) = \theta_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i) \qquad (۶)$$

که در آن: $2\pi f_i t$ فرکانس زاویه‌ای، ϕ_i زاویهٔ فاز است و مقدار آن بستگی به زمانی دارد که به عنوان صفر زمان انتخاب می‌شود و معمولا قرار می‌دهیم: $\phi_i = Arc\tan(\frac{a_i}{b_i})$ و θ_i دامنهٔ تغییرات است و به وسیلهٔ حداکثر انحراف از میانگین تعریف شده و به شکل $\theta_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ نشان داده می‌شود (*بلت ترجمهٔ خرمی، ۱۳۷۴*). مشخصات فوق در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱ اجزای یک هارمونیک (همساز)

تحت شرایط کلی معمولا یک سری زمانی از جمع یک مؤلفهٔ تصادفی (et) و یک مولفهٔ تناوبی (hi) تشکیل شده است. بنابراین جمع معدودی از q همسازِ ممکن تقریب خوبی برای توصیف این عناصر تلقی می‌شود. در این صورت تعیین تعداد معدودی از همسازها که از جمع آنها تقریب خوبی برای یک سری زمانی به دست آید، مدل‌سازی فوریه نامیده می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که همساز k ام یعنی $h_k(t)$ تقریب خوبی برای متوسط های دمای ماهانه در یک ایستگاه باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$z_t = a_0 + a_k \cos(2\pi \frac{k}{n} t) + b_k \sin(2\pi \frac{k}{n} t) + e_t \qquad (۷)$$

که درآن et مجموع q-1 همساز دیگر است که در مدل منظور نمی‌شود و در صورت نیکوئی برازش مدل سری مانا با توزیع نرمال و دو به دو ناهمبسته خواهد بود. رابطهٔ فوق را یک الگوی فوریه گوییم. ضروری است یادآوری شود که هرچند نمایش فوریهٔ یک دنبالهٔ متناهی مقوله‌ای صرفاً ریاضی است ولی تعیین آن تعداد معدود از همسازها که به لحاظ آماری معنی‌دار بوده و تقریب خوبی به دست دهد، در تعیین حالت کلی رفتار جو اهمیت بسیاری داشته و "رفتار کلی و غالب شرایط جوی" که در تعریف اقلیم بیان شده (*کاویانی و علیجانی، ۱۳۷۴*)، را به خوبی توصیف می‌نماید. در حقیقت غالبا تعداد کمی از همسازها برای بیان رفتار یک عنصر اقلیمی کفایت می کند (*رابسون، ۱۹۹۷*).

همان‌گونه که قبلا نیز نشان دادیم الگوی فوریه را نیز می‌توان به عنوان یک الگوی رگرسیون خطی در نظرگرفت که در آن تعداد ضرایب رگرسیون برابر طول سری می‌باشد. به سهولت می‌توان نشان داد که برآورد کمترین توان‌های دوم a0 ، ak و bk از روابط (۲) و(۳) به دست می‌آیند. با توجه به اینکه الگوی فوریه یک الگوی رگرسیون است روش‌های استاندارد رگرسیون کاربرد دارد. ازآنجا که هر همساز اطلاعات مستقلی راجع به تغییرپذیری سری در خود دارد لذا مشکل همخطی مطرح نیست و نیازی به استفاده از روش مؤلفه‌های اصلی به منظور تقلیل بعد مسأله نمی‌باشد.

توجه کنید که الگوی فوریه که در بخش حاضر به آن پرداخته شد کاندید مناسبی برای سری‌هایی هستند که حول محوری افقی روندی تناوبی دارند. اگر سری علاوه بر روندی تناوبی، دارای شیبی حول خطی غیر افقی باشد، دو فراسنج γ_0 و γ_1 از طریق مولفهٔ $\gamma_0 + \gamma_1 t$ می‌بایست به مدل اضافه شود. اگر سری علاوه بر روند تناوبی، دارای شیبی حول یک سهمی باشد، فراسنج‌های γ_0، γ_1 و γ_2 می‌بایست از طریق مؤلفه‌های $\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2$ به مدل اضافه گردد (*خردمند نیا، ۱۳۷۷*). در برخی متون پیشنهاد می‌شود که اگر سری‌های زمانی حاوی روند باشد، باقیمانده‌های مدل به وسیلهٔ یک مدل ARIMA برازش یافته (*رابسون، ۱۹۹۷*) و یا سری‌ها به وسیلهٔ تفاضل گیری ایستا گردیده (*خردمند نیا و عساکره، ۱۳۸۰*) سپس یک مدل فوریه بر آن برازش داد.

۳. تحلیل دوره‌نگار

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد مدل‌سازی فوریه با تعیین تعداد معدودی از همسازها انجام می گیرد. دوره نگار ابزاری مفید و مؤثر برای دستیابی به این منظور است. دوره نگار واریانس جزئی سری را برحسب فراوانی نشان داده این عامل مجموع تغییرات را به عنوان یک کلیت و در فرکانس‌های مختلف تحلیل می کند (*سازمان جهانی هواشناسی*، ۱۹۶۶) و شامل q مقدار I (fi) است. اگر طول دورهٔ آماری فرد باشد آنگاه:

$$I(f_i) = \frac{n}{2}(a_i^2 + b_i^2) \qquad i=1,2,\ldots,q \tag{۸}$$

و اگر طول دورهٔ آماری زوج باشد، آنگاه برای $i \in \{1,2,\ldots,q-1\}$ مقادیر I(fi) از رابطهٔ بالا به دست می‌آیند ولی برای i=q داریم: $I(f_q) = na^2q$ در روابط بالا aiها و biها ضرایب فوریه هستند که روش برآورد آنها قبلا بیان شد. نموداری که مقادیر I(fi) را در مقابل i نشان دهد دوره نگار نامیده می‌شود. با استفاده از دوره نگار ترتیب اهمیت همسازها را می‌توان تعیین نمود. مقصود از اهمیت یک همساز سهمی است که آن همساز از کل تغییرپذیری سری دارد. به طوری که به آسانی می‌توان نشان داد که مجموع q مقدار دوره نگار برابر با واریانس سری است. یعنی: $\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z})^2 = \sum_{i=1}^{q} I(f_i)$، در یک جدول تحلیل واریانس مربوط به یک الگوی فوریه I(fi) در واقع مجموع توان دوم متناظر با همساز i ام می‌باشد.

۴. الگوسازی فوریه

هر روش معقولی که برای تعیین همسازهای معنی‌دار به کار برده شود مستلزم جستجو در بین چند همساز مهم اول می‌باشد. همان‌گونه که بیان شد با استفاده از دوره نگار به سهولت می‌توان ترتیب اهمیت همسازها و در نتیجه چند همساز مهم اول را تعیین کرد. یک روش ساده و مؤثر در الگوسازی فوریه به این ترتیب است که همسازها را به ترتیب اهمیت یکی، یکی به مدل اضافه کنیم و فراسنج‌هایی که تفاوت معنی‌دار با صفر ندارند را حذف کنیم. عمل افزودن همساز جدید را تا جایی ادامه می‌دهیم که به همسازی برسیم که هر دو مؤلفهٔ کسینوسی و سینوسی آن نقش معنی‌داری در تغییرپذیری سری نداشته باشند. در اینجا عمل افزودن همساز جدید را متوقف نموده مدل آخری را به عنوان

یک مدل آزمایشی مناسب کاندید می کنیم. بالاخره مدل آزمایشی را از لحاظ درستی فرضیات بررسی همه جانبه می کنیم. در صورت لزوم مورد تعدیل قرار می‌دهیم تا به مدلی برسیم که از مرحلهٔ بررسی درستی فرضیات نیز موفق بیرون آید. در آزمون‌های فرض برابری ضرایب فوریه با صفر، هرچه که سطح معنی‌دار بودن را کوچک‌تر بگیریم مدل کوچک‌تری به عنوان مدل نهایی آزمایشی تعیین خواهد شد. تجارب الگوسازی فوریه حاکی از آن است که سری‌هایی که دارای یک روند آشکار تناوبی هستند سطح معنی‌دار ۰/۰۱ معمولا منجر به مدل معقولی می‌شود که به طورمتعادلی اصل کمترین توان‌های دوم باقیمانده و اصل امساک را ارضا نموده از مرحلهٔ بررسی درستی فرضیات نیز با موفقیت عبور می کند (*خردمند نیا، ۱۳۷۷*).

برازش الگوی فوریه بر متوسط دمای ماهانهٔ مشهد

همان گونه که در ۳-۲ بیان شد اگر سری علاوه بر روندی تناوبی، دارای شیبی حول خطی غیر افقی باشد، دو فراسنج γ_0 و γ_1 از طریق مؤلفهٔ $\gamma_0 + \gamma_1 t$ می‌بایست به مدل اضافه شود. اگر سری علاوه بر روند تناوبی، دارای شیبی حول یک سهمی باشد، فراسنج‌های γ_0، γ_1 و γ_2 می‌بایست از طریق مؤلفه‌های $\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2$ به مدل اضافه گردد. در نتیجه پیش از برازش مدل بر داده‌ها می‌بایست میانگین‌های دما به لحاظ وجود روند مورد بررسی قرار گیرند. در اینجا روند به روش چند جمله‌ای (خطی، سهمی و...) مورد آزمون قرار می گیرد.

۱. آزمون وجود روند در داده‌ها

به منظور تصویر تغییرات تدریجی، خطی راست از میان داده‌ها برازش داده می‌شود. این خط که متوسط تغییر به ازای هر سال را نشان می‌دهد از روش حداقل مربعات رگرسیون Yt (عنصر اقلیمی) بر t (زمان) به دست می‌آید (*کرایر، ترجمه نیرومند، ۱۳۷۱*):

$$\beta = \frac{\sum(t-\bar{t})(Y-\bar{Y})}{\sum(t-\bar{t})}$$

در روش محاسبه شیب خط اگر باقیمانده‌های رگرسیون تصادفی بوده یعنی خود همبستگی آنها کم و میانگین صفر و واریانس ثابت داشته باشد، خطای استاندارد β به شرح زیر به دست می‌آید (*Woodward And Gray, 1993*):

$$SE(\beta)=\sqrt{\frac{\sum(Y-a-\beta)^2}{(n-2)\sum(t-\bar{t})^2}}=\sqrt{\frac{12\sum(Y-a-\beta)^2}{(n-2)n(n^2-1)}}$$

در این فرمول: $\acute{\alpha} = Y - \beta t$

آزمون فرض صفر ($Ho: \beta 0 =$) که بیانگر عدم وجود شیب خط در مقادیر است، براساس $t_o=\frac{\beta}{SE(\beta)}$ بنا نهاده شده است. صحت فرض صفر بر این ایده استوار است که β توزیعی مشابه t استیودنت با $n-2$ درجه آزادی داشته باشد.

با توجه به روش فوق و با استفاده از نرم‌افزار SPSS/Win میزان شیب خط (β) ۰/۰۰۰۴۲۷ درجه به ازای هر سال و معادلهٔ شیب خط به صورت زیر حاصل شده است:

YT= 13.3+0.000427T

از آنجا که مقدار t مشاهده شده (to= ۰/۶۳۸) کمتر از t بحرانی (tc=۲/۳۳) است لذا شواهدکافی برای رد کردن فرض صفر ($Ho: \beta 0 =$) در سطح ۰/۰۱ درصد خطا وجود ندارد. آزمون وجود روند برای شیب سهمی و درجهٔ ۳ نیز نتایج مشابهی را نشان می‌دهد. قائمی و عساکره (۱۳۸۲) نشان داده‌اند که دمای مشهد در دورهٔ آماری مشابه و در سطح ۹۰ درصد اطمینان دارای روند خطی بوده است. اما براساس مدل ARIMA برازش یافته بر این داده‌ها، روند غیرقطعی بوده است. اما همان‌گونه که عنوان شد برای مدل‌سازی فوریه بهترین سطح اطمینان جهت آزمون وجود روند ۹۹ درصد تعیین شده است.

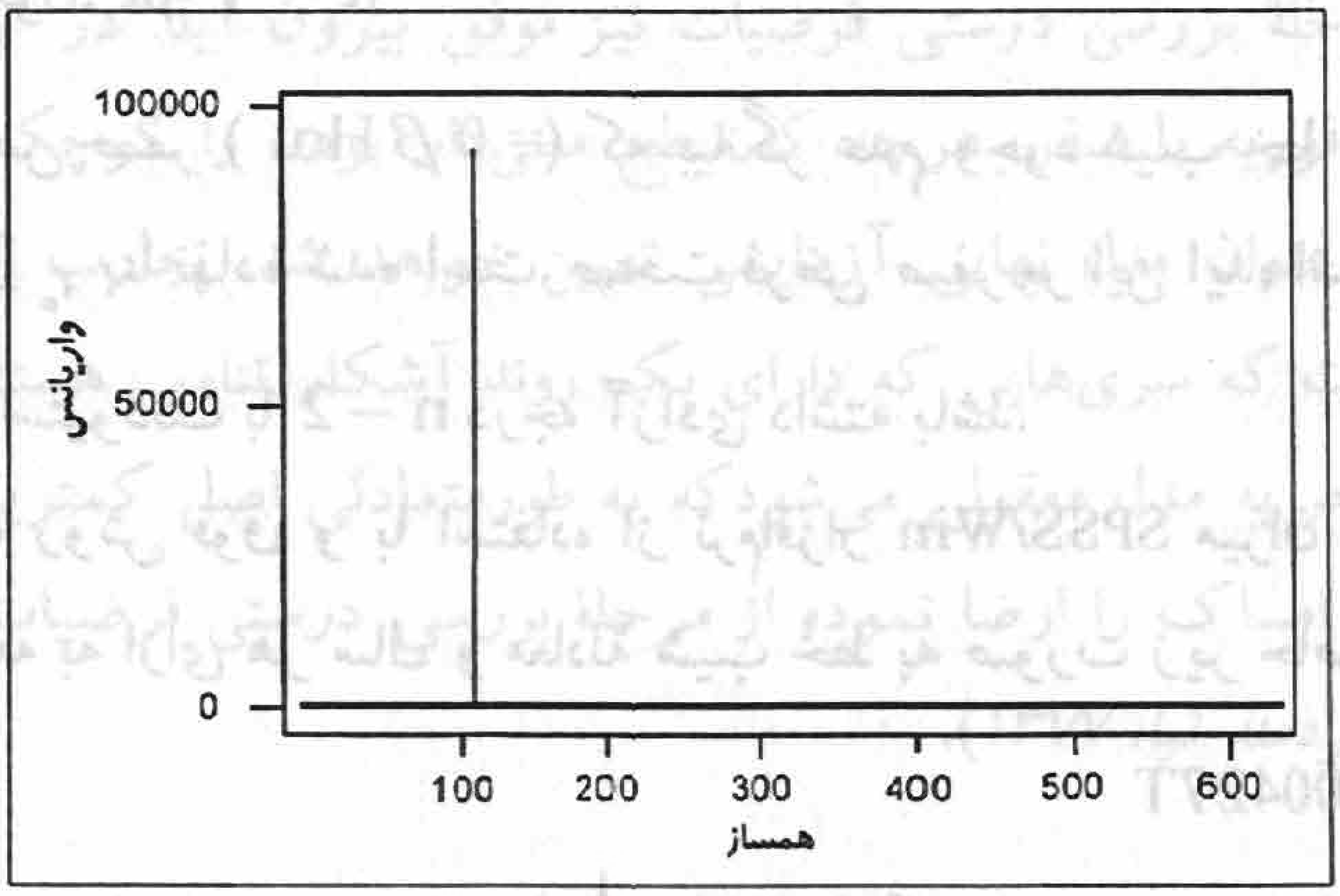
۲. وارسی و برازش الگوهای احتمالی

با عنایت به فرمول ۸ و با استفاده از نرم‌افزار Minitab/Win مقادیر مربوط به دوره نگار دمای مشهد برای ۶۳۶ مقدار محاسبه شده است. بخشی از نتایج محاسبات مربوط به دوره نگار متوسط درجه حرارت ماهانهٔ شهر مشهد در جدول ۱ مشاهده می گردد:

جدول ۱ فراوانی و دوره نگار دمای ماهانهٔ مشهد

رتبهٔ همساز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
فراوانی (fi)	۰/۰۸۳۳	۰/۰۸۳	۰/۰۸۲	۰/۲۵	۰/۱۶۶	۰/۰۸۴	۰/۱۶۴	۰/۰۰۲	۰/۱۷	۰/۰۰۳
دوره بازگشت ($\frac{1}{f_i}$)	۱۲	۱۲/۰۵	۱۲/۲	۴	۶	۱۱/۸۹	۶/۰۹	۵۰۰	۵/۸۹	۳۳۳/۳
دوره نگار ($I(f_i)$)	۹۲۷۴۶/۶	۱۸۷/۴	۸۲/۳	۷۲/۵	۶۶/۹	۶۲/۲	۶۱/۱	۵۰/۹	۵۰/۸	۴۷/۲

در اینجا داریم :۱۲۷۲ = n و۶۳۶ = q بنابراین جمعاً ۶۳۶ همساز داریم. شکل ۲ نشان‌دهندهٔ مقادیر مربوط به همسازهای مزبور می‌باشد.



شکل ۲ همسازهای دمای مشهد

با توجه به جدول ۱ و شکل ۲ ملاحظه می‌شود که ده همساز مهم اول به ترتیب اهمیت هارمونیک‌های ۱۰۶، ۱۰۵، ۱۰۴، ۳۱۸، ۲۱۲ و ... می‌باشند. درصورتی‌که بخواهیم سری را فقط با یک همساز تقریب بزنیم الگوی زیر کاندید مناسبی می‌باشد:

$$z_t = a_0 + a_{106}\cos(2\pi \frac{106}{1272} t) + b_{106}\sin(2\pi \frac{106}{1272} t) + e_t$$

برآورد فراسنج‌های a0 ، a106 و b106 و الگوی قیمت شده براساس روش کمترین مربعات خطای رگرسیون به صورت زیر است:

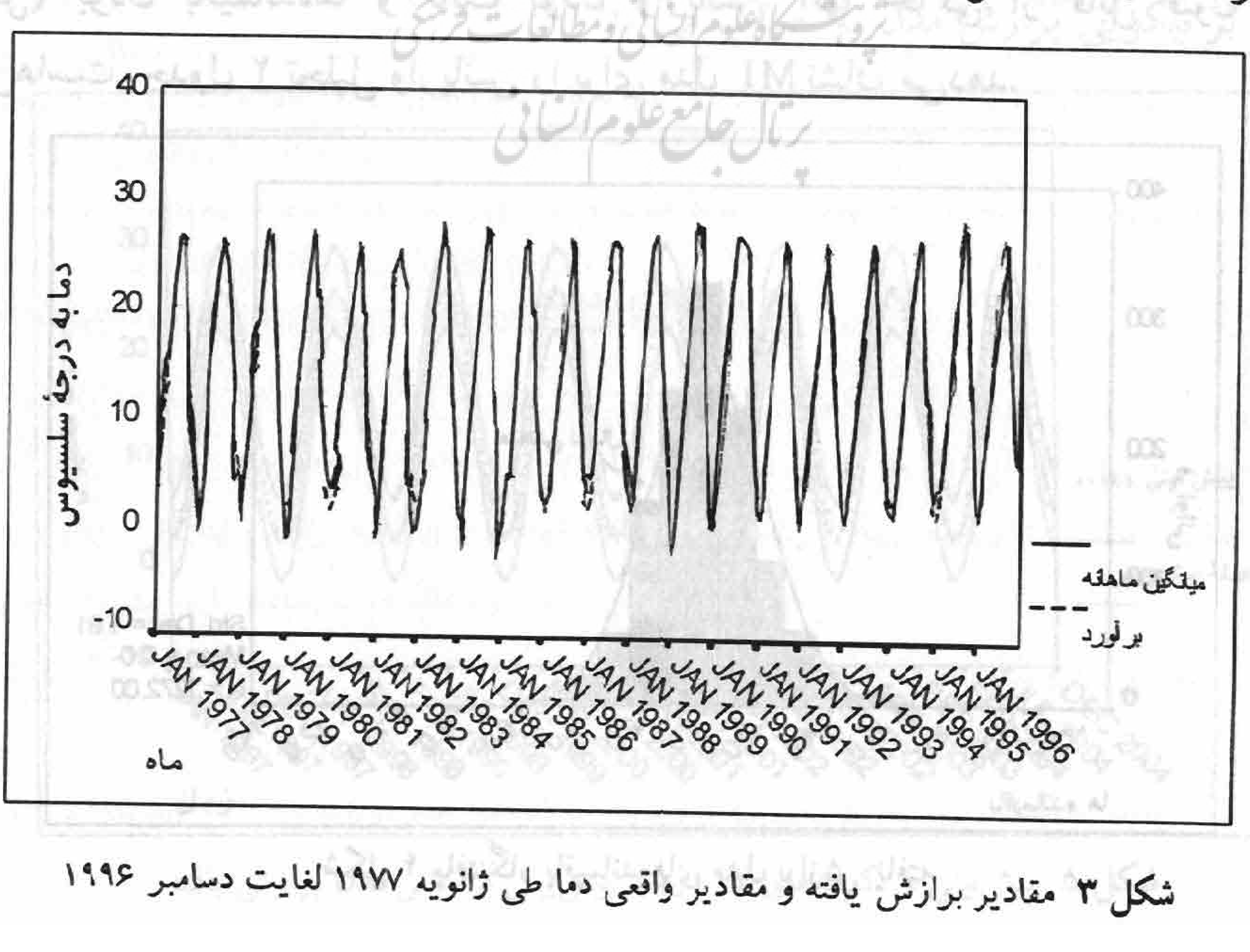
$$z_t = \underset{(0)}{13.5406} - \underset{(0)}{10.2676}\cos(2\pi \frac{106}{1272} t) - \underset{(0)}{6.35639}\sin(2\pi \frac{106}{1272} t) + e_t$$

در این مقاله اعدادی که در زیر برآورد فراسنج‌ها، در داخل پرانتز قرار دارند، مقادیر احتمال مربوط به آزمون برابری فراسنج‌ها با صفر می‌باشند. در الگوی اخیر با توجه به اینکه مقادیر احتمال برابر صفر هستند، لذا هریک از فرض‌های صفر a0 ، a106 و b106 با قاطعیت رد می‌شود. بنابراین ضرایب مزبور ضرایبی معنی‌دار به حساب می‌آیند. الگوی بالا را M1 می‌نامیم. اکنون همساز مهم بعدی را به مدل می‌افزاییم و این کار را تا زمانی که به همسازی برسیم که هر دو مؤلفهٔ کسینوسی و سینوسی آن معنی‌دار نیستند ادامه می‌دهیم.

همساز مهم بعدی، همساز ۱۰۵ (یکصد و پنجم) است. مدل برازش شده که شامل دو همساز ۱۰۶ و ۱۰۵ است به صورت زیر می‌باشد. این مدل را M2 می‌نامیم:

$$z_t = \underset{(0)}{13.5407} - \underset{(0)}{10.2676}\cos(2\pi\frac{106}{1272}t) - \underset{(0)}{6.35656}\sin(2\pi\frac{106}{1272}t) + \underset{(0.141)}{0.11166}\cos(2\pi\frac{105}{1272}t) - \underset{(0.429)}{0.06007}\sin(2\pi\frac{105}{1272}t) + e_t$$

با توجه به اینکه ۰/۱۴۱ < ۰/۰۱ لذا فرض H0 : a105=0 در مقابل H1 : a105 ≠ 0 در سطح ۰/۰۱ پذیرفته می‌شود. همچنین از آنجا که ۰/۴۲۹ < ۰/۰۱ است لذا دلایل کافی برای پذیرش فرض H1 : b105 ≠ 0 در مقابل H0 : a105=0 در سطح ۰/۰۱ وجود ندارد. از این رو ضرایب a_{105} و b_{105} حضور معنی‌داری در مدل بالا ندارند. بنابراین با توجه به اینکه به همسازی رسیده‌ایم که هر دو مؤلفهٔ کسینوسی و سینوسی آن معنی‌دار نیستند، عمل افزودن همساز جدید را متوقف نموده الگوی M1 را به عنوان برازنده‌ترین الگوی آزمایشی در نظر می گیریم. بر اساس این الگو دمای مشهد به وسیلهٔ یک مؤلفهٔ سینوسی و یک مؤلفهٔ کسینوسی و زاویه فاز تعیین می گردد. بر این اساس در هر موج دوازده ماه جای می گیرد که ۶ ماه آن مقادیر تمایل به بالای میانگین و ۶ ماه دیگر تمایل به پایین‌تر از میانگین دارند. مقادیر برازش یافته مربوط به الگوی تعیین شده همراه با سری مشاهده شدهٔ متوسط درجه حرارت ماهانهٔ شهر مشهد طی بیست سال آخر (از ژانویهٔ ۱۹۷۷ لغایت دسامبر ۱۹۹۶) در شکل ۳ ملاحظه می‌شود.

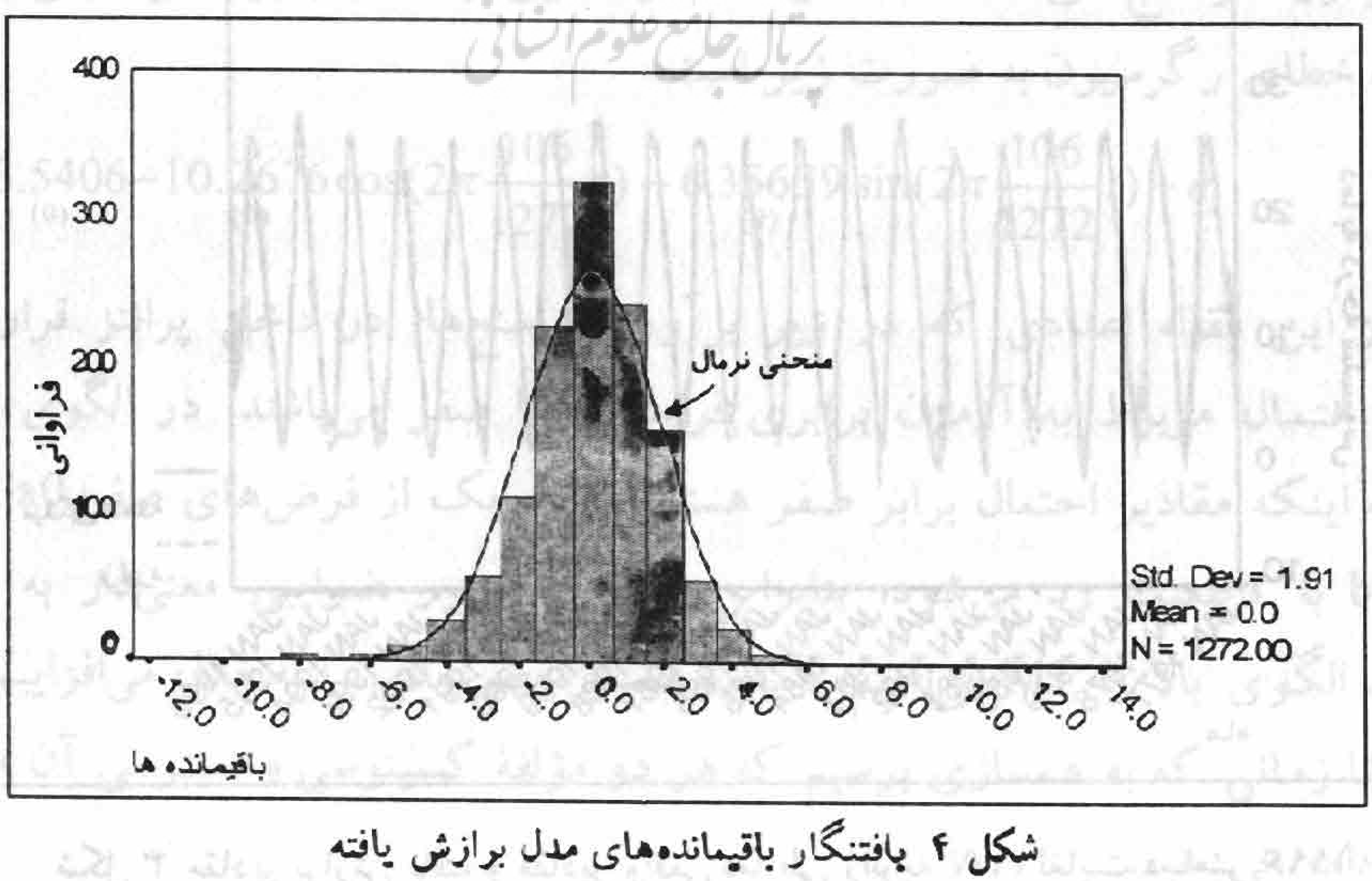


شکل ۳ مقادیر برازش یافته و مقادیر واقعی دما طی ژانویه ۱۹۷۷ لغایت دسامبر ۱۹۹۶

چنانکه در این شکل مشاهده می‌شود، اولاً رفتار مقادیر برآورد شده همانند میانگین‌های ماهانه حاوی دورهٔ تناوب مشخصی است. دوم اینکه مقادیر برازش یافته به میزان کم و قابل قبولی از مقادیر واقعی انحراف داشته‌اند. بنابراین الگوی M1 صلاحیت لازم را برای بیان رفتار دمای به وقوع پیوسته دارا است. با این وصف ضروری است که مدل به لحاظ درستی با روش‌های دیگری نیز مورد آزمون قرار گیرد.

۳. بررسی درستی تشخیص مدل

ضریب همبستگی و ضریب تعیین معیارهایی هستند که هر یک به نحوی درصد موفقیت الگو را در توصیف سری نشان می‌دهند. در این الگو ضریب همبستگی ۰/۹۷۶ و ضریب تعیین ۹۵/۲ درصد و خطای استاندارد باقیمانده‌ها ۱/۹۱۲ محاسبه شده است. بنابراین الگوی M1 (یعنی همساز یکصد و ششم) قادر است ۹۵/۲ درصد از تغییرات ماهانهٔ دمای مشهد را تبیین نماید. از این لحاظ با حذف ۶۳۵ همساز دیگر الگویی با کمترین پارامترها برای توصیف دمای ماهانهٔ مشهد انتخاب شده است و با حذف همسازهای دیگر خطای قابل قبول بر داده‌های برآورد شده حادث می‌شود و نیز اصل امساک در مدل‌سازی رعایت خواهد شد. بافتنگار باقیمانده‌های مدل M1 در شکل ۴ ملاحظه می‌شود. بررسی‌ها و آزمون‌های استاندارد مربوط به نرمال و ناهمبسته (و در نتیجه مستقل) بودن باقیمانده‌ها و ثابت بودن واریانس آنها حاکی از قابل قبول بودن فرض‌هاست. جدول ۲ تحلیل واریانس را برای مدل M1 نشان می‌دهد.



شکل ۴ بافتنگار باقیمانده‌های مدل برازش یافته

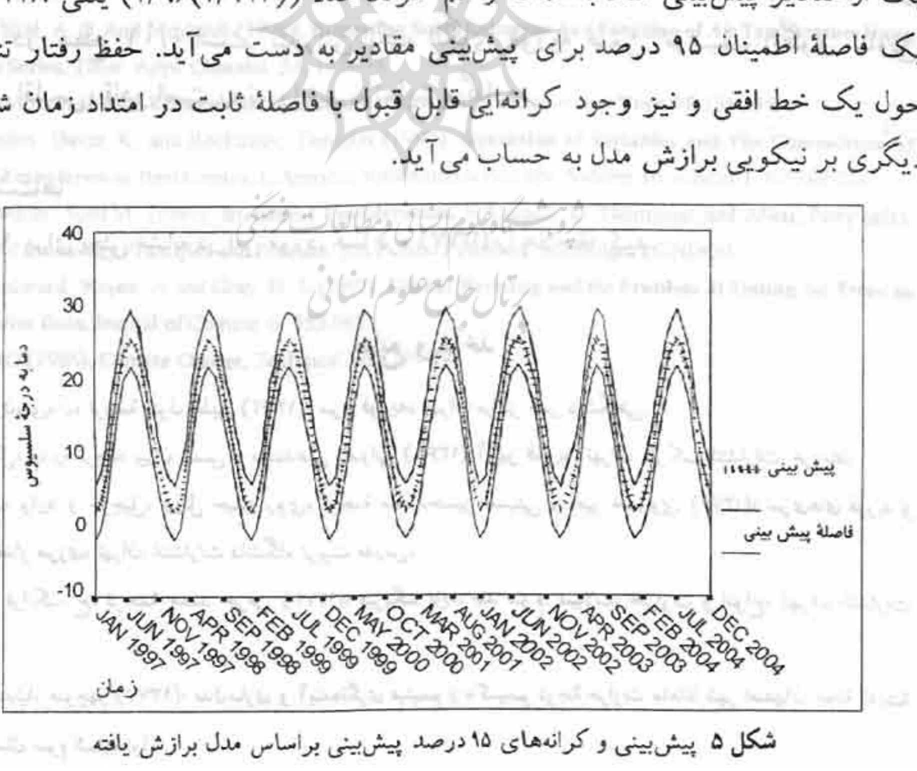
جدول ۲ تحلیل واریانس مدل M1

منبع	درجهٔ آزادی	SS	MS	F	P
رگرسیون	۲	۹۲۷۴۶	۴۶۳۷۳	۱۲۶۷۸/۵۹	۰
خطا	۱۲۶۹	۴۶۴۱	۴		
مجموع	۱۲۷۱	۹۷۳۸۸			

چنان‌که دیده می‌شود P-Value=0 گویای مقدار قابل پذیرش خطای حاصل از مدل است. بر اساس نتایج این بخش افزودن هیچ ضریب فوریهٔ دیگری به مدل فوق آن را به طور معنی‌داری (در سطح ۰/۰۱) بهتر نمی‌کند و حذف هر ضریب فوریه‌ای از الگوی فوق موجب می‌شود که مدل به طور معنی‌داری بدتر شود.

۴. آینده نگری

با در نظر گرفتن قسمت سیستماتیک الگوی M1 به عنوان مکانیزم مولد مقادیر آینده، متوسط درجه حرارت ماهانه تا دسامبر ۲۰۰۴ به شرح شکل ۵ پیش‌بینی می‌شود. در مورد هر یک از مقادیر پیش‌بینی شده با اضافه و کم کردن عدد ((۱/۹۱۲)(۱/۹۶) یعنی ۳/۷۴۸ ± یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای پیش‌بینی مقادیر به دست می‌آید. حفظ رفتار تناوبی حول یک خط افقی و نیز وجود کرانه‌ایی قابل قبول با فاصلهٔ ثابت در امتداد زمان شواهد دیگری بر نیکویی برازش مدل به حساب می‌آید.



شکل ۵ پیش‌بینی و کرانه‌های ۹۵ درصد پیش‌بینی براساس مدل برازش یافته

نتایج

تحت شرایط کلی که معمولاً برقرار است، روش‌های معرفی شده در این مقاله برای الگوسازی هر سری زمانی گسسته متساوی‌الفاصلهٔ تناوبی دیگر کاربرد دارد. برای سری‌های پیوسته نیز با تقسیم محور زمان به فواصل مساوی می‌توان سری پیوسته را به یک سری گسستهٔ متساوی‌الفاصله تبدیل نموده از روش‌های معرفی شده، برای الگوسازی آن استفاده نمود.

در این مقاله ضمن معرفی روش‌های الگوسازی فوریه، یک الگوی فوریه برای متوسط ماهانهٔ دمای شهر مشهد، بر اساس یک سری ۱۰۶ ساله (۱۲۷۲ ماه) از ژانویه سال ۱۸۹۱ تا دسامبر سال ۱۹۹۶ تعیین می کنیم. مدل تعیین شده شامل متغیر توضیحی رسته‌ای و یک متغیر توضیحی سینوسی- کسینوسی براساس همساز یکصد و ششم برای برآورد دمای مشهد است.

همچنین عدم وجود متغیرهای توضیحی دیگر از جمله مقادیری که روند را توصیف می‌نمایند (مثلا $\gamma_0+\gamma_1 t$ یا $\gamma_0+\gamma_1 t+\gamma_2 t^2$ و یا...)، گویای عدم وجود روند در دمای مشهد در سطح ۰/۰۱ است. بنابراین یک الگوی فوریه ضمن توصیف الگوی تناوبی عناصر اقلیمی، قادر است روند را نیز به نمایش گذارد.

پی‌نوشت‌ها

۱. برای بحثی مشابه در این مورد، عساکره (۱۳۷۷) را ملاحظه کنید.

منابع و مآخذ

۱. اسندون، ی، ن، ترجمهٔ بتول جذبی (۱۳۶۲)؛ **سری فوریه**، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲. اشپیگل، م، ر، ترجمه بیژن شمس و محمدعلی رضوانی (۱۳۶۹)؛ **آنالیز فوریه**، تهران: شرکت انتشارات خردمند.

۳. براون، وارد و چرچیل، روئل جیمز روی، ترجمهٔ محمدحسین حسینی و امیر خسروی (۱۳۷۶)؛ **سری‌های فوریه و مسائل مقدار مرزی**؛ تهران: انتشارات دانشگاه تربیت مدرس.

۴. بلت، فرانک. ج، ترجمهٔ محمد خرمی (۱۳۷۴)؛ **فیزیک پایه، جلد سوم: سیالات، حرارت و امواج**، تهران: انتشارات فاطمی.

۵. خردمندنیا، منوچهر (۱۳۷۷)؛ **مدل‌سازی و آینده‌نگری مینیمم و ماکسیمم درجهٔ حرارت ماهانهٔ شهر اصفهان**، مجلهٔ اندیشهٔ آماری؛ **سال سوم شمارهٔ اول**.

۶. خردمندنیا، منوچهر و عساکره، حسین (۱۳۸۰)؛ **الگوسازی ARIMA برای متوسط درجه حرارت سالانهٔ هوا در جاسک**، مجموعه مقالات سومین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی، دانشگاه اصفهان.

۷. رامشت، محمدحسین (۱۳۷۱)؛ **یادگانه‌های زاینده‌رود و تأثیر آن در سیمای فضایی منطقهٔ اصفهان**، پایان‌نامهٔ دورهٔ دکتری. تهران: دانشگاه تربیت مدرس.

۸. عساکره، حسین (۱۳۷۷)؛ **دگرگونی‌های اقلیم و مکانیزم‌های حاکم بر آن**، مجلهٔ نیوار شمارهٔ ۴۰.

۹. قائمی، هوشنگ و عساکره، حسین (۱۳۸۲)؛ **تحلیلی آماری بر روند تغییرات دمای مشهد طی سدهٔ گذشته و رابطه آن با نوسان‌های اطلس شمالی**، فصلنامه تحقیقات جغرافیایی، شماره ۷۱.

۱۰. کاویانی، محمدرضا و علیجانی، بهلول (۱۳۷۴)؛ **مبانی آب و هواشناسی**، تهران: انتشارات سمت.

۱۱. کرایر، جاناتان. دی. ترجمهٔ حسینعلی نیرومند (۱۳۷۱)؛ **تجزیهٔ و تحلیل سری‌های زمانی**، مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

۱۲. ویی، ویلیام. دبلیو. اس، ترجمهٔ حسینعلی نیرومند (۱۳۷۶)؛ **تحلیل سری‌های زمانی**، مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

13. Bevington, P. R (1969); **Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences**. McGrow-Hill Book Co, New York PP. 164-176

14. Cooley. J. and Tuky. J. (1965); **An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series,** Math. Comp. 19. 297-301.

15. El-Shal, A. O. And Mayhoub (1996); **Estimating Solar Radiation As a Function of Air Temperature Using Fourier Series,** Theor. Appl. Climatol. 54, 153-159

16. Johnston, J. (1960); **Econometric Methods,** McGraw Hill Book co – New York PP,134-135.

17. Maslen. David. K. and Rockmore. Daniel.N (1997); **Separation of Variables and The Computation of fourier Transforms on finit Groups, I,** Amrican Mathematical Society. Volume 10 number 1. PP 169-214.

18. Robeson, Scott.M. (1997); **Statistical Consideration,** In Russell. D. Thompson and Allen, Perry (eds). Applied Climatology Principles and Practice. 352 P. first Published. Routledge. LONDON.

19. Woodward, Wayne. A and Gray, H. L (1993); **Global Warming and the Problem of Testing for Trend in Time series Data,** Journal of Climate. 6. 953-962.

20. WMO (1966); **Climate Change**. Technical Note No 79.