بنام خدا

ارائه یک مدل ریاضی برای برنامه ریزی تیم پرواز

علیرضا رشیدی کمیجان، دکترای مهندسی صنایع، استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه

تاریخ دریافت مقاله : **۱۳۸۸/07/20**

تاریخ پذیرش مقاله : **1388/11/27**

چکیده

مسئله برنامه ریزی تیم پرواز[1] عبارتست از تعیین مجموعه پروازهای متوالی[2] که یک تیم (شامل مهمانداران[3] و کادر فنی[4]) باید انجام دهد. در این مقاله فرض می شود تعداد و مشخصات کلیه پروازهایی که یک شرکت هواپیمایی باید پوشش دهد (شهرهای مبدا و مقصد و زمان پرواز) از پیش معلوم است و باید برنامه کاری هر تیم یا همان لیست و توالی پروازهایی که هر تیم باید انجام دهد را مشخص نمود. طبیعی است که برای پوشش دادن کل پروازهای یک شرکت، می توان مجموعه برنامه های متعددی را تدوین نمود که بابت هر یک هزینه متفاوتی به تیم پرواز پرداخت می شود. هدف این مقاله ارائه یک مدل ریاضی جدید است که قادر خواهد بود حالت پروازهای بدون بلیط را نیز پوشش دهد. مدلهای موجود با هدف کمینه شدن دستمزد پرداختی به تیم پرواز ارائه شده اند اما مدل پیشنهادی بدنبال کمینه کردن هزینه کل (دستمزد خلبانان و پروازهای بدون بلیط) است.

لغات کلیدی: برنامه ریزی تیم پرواز، مجموعه پرواز، پرواز بدون بلیط، برنامه ریزی عدد صحیح

مقدمه

هر شرکت هواپیمایی با هزینه های متعددی روبروست که از آن جمله می توان به هزینه سوخت، حقوق پرداختی به تیم پرواز اعم از مهمانداران و کادر فنی پرواز، هزینه تاخیرات، نگهداری و تعمیرات و غیره اشاره کرد. اگر یک شرکت هواپیمایی نتواند پروازهای خود را بگونه ای مناسب برنامه ریزی نماید، این هزینه ها به شدت افزایش خواهند یافت. هزینه تیم پرواز پس از هزینه سوخت بالاترین بخش هزینه های یک شرکت هواپیمایی را تشکیل می دهد. در سال ۱۹۹۱، تنها هزینه کادر فنی پرواز American Airlines ۱/۳ میلیارد دلار ، شرکتNorthwest Airlines ۱/۰۵ میلیارد دلار و United Airlines بالغ بر ۰/۶ میلیارد دلار بود

[1] Crew Scheduling
[2] Crew Pairing
[3] Cabin Personnel
[4] Cockpit Personnel

(Anbil و همکاران, ۱۹۹۱). هر شرکت هواپیمایی پروازهای متعددی را باید توسط تیمهای مشخصی (شامل مهمانداران و کادر فنی پرواز) پوشش دهد. منظور از برنامه ریزی تیم پرواز آن است که مشخص شود چه ترتیبی از پروازها بعهده هر تیم گذاشته شود.

برنامه ریزی تیم پرواز که موضوع اصلی این تحقیق می باشد عبارتست از تعیین برنامه پروازهای متوالی یک تیم که به آن مجموعه پرواز[5] گفته می شود. یک مجموعه پرواز شامل پروازهای متوالی است که از شهر محل اقامت[6] اعضای تیم پرواز آغاز و مجددا به همان شهر ختم می شود. فرض کنید برای یک شرکت هواپیمایی چهار پرواز بصورت زیر تعریف شده که تماما باید پوشش داده شوند: تهران به اصفهان، اصفهان به شیراز، شیراز به تهران، تهران به شیراز. برنامه یک تیم پرواز که محل اقامت آنها تهران است می تواند بصورت: تهران - اصفهان - شیراز - تهران یا بطور مثال تهران - شیراز - تهران باشد. طبیعی است که برای یک مسئله واقعی تعداد بسیار زیادی از این دست برنامه ها با ترتیبها و تواليهای مختلف می توان تهیه کرد. اما برنامه هایی برای یک شرکت هواپیمایی مناسب است که کمترین هزینه تیم پرواز را به همراه داشته باشد و در عین حال با محدودیتهای پرواز سازگار باشد. هدف این مقاله ارائه مدلی ریاضی است که بتواند بهترین مجموعه های پرواز را مشخص نماید بگونه ای که هزینه کل (دستمزد خلبانان و پروازهای بدون بلیط) کمینه گردد.

در این مقاله اطلاعات کلیه پروازها شامل تعداد، شهر مبدا، شهر مقصد و زمان پرواز جزو مفروضات مسئله تلقی می شوند. واضح است که کمینه کردن هزینه ها به برنامه ریزی دقیقی نیازمند است که بتواند تمام جزئیات امر، شرایط و محدودیتهای موجود را در نظر گرفته و برنامه جامعی ارائه نماید. این کار تنها از طریق مدلسازی ریاضی امکان پذیر است. این مقاله بدنبال ارائه یک مدل عدد صحیح از نوع صفر و یک خالص است تا توالی پروازهای هر تیم را بگونه ای مشخص نماید که به کمینه شدن هزینه کل منجر شود. همچنین در این مقاله به برنامه ریزی تیم فنی پرواز پرداخته می شود و برنامه ریزی مهمانداران لحاظ نمی شود. معمولا کادر فنی تیم پرواز در تمام پروازهای یک مجموعه پرواز با هم هستند ولی مهمانداران می توانند به تناوب تغییر یابند. برای مطالعه جزئیات مربوط به برنامه ریزی کادر غیر فنی می توان به تحقیقات Day و Ryan (۱۹۹۷) و Kwok و Wu (۱۹۹۶) اشاره کرد.

ادبیات تحقیق

برنامه ریزی تیم پرواز آخرین سطح از چهار مرحله برنامه ریزی است که خطوط هوایی انجام می دهند. پیش از برنامه ریزی تیم پرواز سه فاز برنامه ریزی باید انجام شود: اولین مرحله، تعیین اطلاعات پرواز[7] است.

---

5 Pairing
6 Crew Base
7 Schedule Generation

در این مرحله نوع، تعداد و زمان پرواز از هر شهر به شهر دیگر مشخص می شود. مرحله دوم تخصیص ناوگان هوایی[8] به هر پرواز است. در این مرحله مشخص می شود که به هر یک از پروازهای مشخص شده در مرحله قبل چه نوع هواپیمایی اختصاص یابد. نوع هواپیمای انتخاب شده تابعی از تقاضای آن پرواز می باشد (Barnhart و همکاران، ۲۰۰۳). در مرحله سوم, برنامه ریزی نگهداری و تعمیرات ناوگان هوایی انجام می شود بگونه ای که تضمین نماید زمان کافی برای انجام سرویسهای لازم به هر هواپیما در فرودگاهها اختصاص می یابد.

مهمترین بحث در مسئله برنامه ریزی تیم پرواز تعیین مجموعه های پرواز (Pairings) می باشد. یک مسئله واقعی با تعداد معقولی پرواز می تواند میلیاردها مجموعه پرواز ممکن داشته باشد (Ahmadbeygi و همکاران, ۲۰۰۸). بی شک حل کردن چنین مسئله ای وقتی بصورت یک مدل صفر و یک نوشته شود کار بسیار دشواری است.

Lavoie و همکاران (۱۹۸۸) مسئله برنامه ریزی تیم پرواز را در قالب یک مسئله پوششی[9] فرموله کرده و روش تولید ستونی[10] را برای حل آن پیشنهاد دادند. Crainic و Rousseau (۱۹۸۷) رویکردی نسبتا مشابه با آنچه Lavoie و همکاران ارائه نمودند را مطرح کردند با این تفاوت که در صورت اعشاری بودن جواب بهینه، از یک الگوریتم ابتکاری برای رسیدن به جواب عدد صحیح استفاده می نمودند.

روشهایی بغیر از مدلهای پوششی نیز در حل مسئله برنامه ریزی پرواز مطرح شده که برای جزئیات بیشتر می توان به تحقیق Hoffman و Padberg (۱۹۹۳) مراجعه کرد. همچنین روشهای مبتنی بر شمارش[11] برای حل مدلهای پرواز نیز در تحقیقات Garfinkel و Nemhauser (۱۹۷۰) و Marsten (۱۹۷۴) ارائه شده است. با این وجود, روشهای شمارش دارای برخی کاستیها و محدودیتهایی هستند که توسط Klabjan و Schwan (۲۰۰۱) و Makri و Klabjan (۲۰۰۴) مطرح گردید. Fahle و همکاران (۲۰۰۲) نیز از رویکرد برنامه ریزی مقید[12] برای تعیین مجموعه های پرواز استفاده نمودند.

Chu و همکاران (۱۹۹۷) مسئله برنامه ریزی پرواز را در قالب یک مدل پوششی فرموله نمودند و یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر گراف جهت حل آن ارائه کردند.

Vance و همکاران (۱۹۹۷) فرآیند تصمیم گیری و برنامه ریزی پرواز را به دو مرحله تفکیک کردند بدین صورت که ابتدا فرض می شود تمام پروازها بطور روزانه باید انجام شوند و سپس جواب بدست آمده برای پروازهایی که قرار نیست هر روز هفته صورت گیرند, تعدیل می شود.

---

8 Fleet Assignment
9 Set Covering Problem
10 Column Generation
11 Enumeration Based Methods
12 Constraint Programming

برنامه ریزی تیم پرواز: شرح مسئله و تعاریف اولیه

هر پرواز دارای یک شهر مبدا و یک شهر مقصد می باشد. به مجموعه ای از پروازهای متوالی که در یک روز توسط یک تیم پرواز هدایت می شوند برنامه کاری روزانه[13] آن تیم می گویند (در ادامه بجای برنامه کاری روزانه از "روز کاری" یا "روز" استفاده می شود). بطور مثال اگر یک تیم پرواز در یک روز خاص هدایت پرواز از شهر i به j (پرواز شماره A) و سپس j به k (پرواز شماره B)را بعهده داشته باشد، برنامه کاری آن تیم در آن روز بصورت $d=\{A,B\}$ خواهد بود. همانطور که پیشتر نیز عنوان شد، یک سری از پروازهای متوالی که از شهر i شروع و مجددا به آن ختم شود را مجموعه پرواز می نامند. فرض کنید پروازهای زیر برای یک شرکت هواپیمایی تعریف شده باشد:

جدول ۱ : پروازهای قابل برنامه ریزی

پرواز	مبدا	مقصد
A	i	j
B	j	k
C	k	i
D	i	k
E	j	i

مجموعه پروازهای زیر را می توان برای این مسئله تعریف کرد:

$p_1=\{A,B,C\}$ $p_2=\{A,E\}$ $p_3=\{C,D\}$

طبیعی است مجموعه {B,C,A} نمی تواند یک مجموعه جدید باشد از آنجا که پروازهای هر مجموعه بطور متناوب تکرار می شوند. همانطور که مشاهده می شود برای یک مسئله ساده می توان مجموعه های پرواز متعددی تعریف کرد. این مقاله بدنبال انتخاب یک یا چند مجموعه از بین مجموعه های ممکن است بگونه ای که با صرف کمترین هزینه (اعم از حقوق پرداختی به تیم های پرواز و هزینه پروازهای بدون بلیط), تمام پروازها انجام شوند و محدودیتهای موجود در سیستم پرواز (نظیر محدودیت حداقل زمان توقف بین دو پرواز در یک روز) تامین شوند.

فاصله زمانی بین دو پرواز متوالی در یک روز را زمان توقف[14] و فاصله زمانی بین دو روز متوالی از یک مجموعه پرواز را زمان استراحت[15] تیم پرواز می نامند.

---

13 Duty Period
14 Sit time
15 Layover

شهر مبدا اولین پرواز از یک مجموعه پرواز (که همان شهر مقصد آخرین پرواز آن مجموعه تلقی می شود)، شهر محل اقامت آن تیم پرواز می باشد. کل فاصله زمانی بین اولین و آخرین پروازهای یک مجموعه (از لحظه ترک شهر محل اقامت تا مراجعه مجدد به آن) را زمان دوری از محل اقامت[16] می نامند. بدیهی است که این زمان از مجموع زمانهای پرواز و زمانهای توقف و استراحت بین پروازها بدست می آید.

یک تیم پرواز ممکن است برای هدایت پروازی از یک مجموعه ناچار به سفر به شهر دیگر (بعنوان مسافر) باشند. بطور مثال فرض کنید یک مجموعه شامل پروازهای تهران به دبی و دوحه به تهران باشد. طبیعی است که اعضای تیم پرواز باید پس از پرواز اول، از دوبی به دوحه پرواز نمایند تا بتوانند پرواز دوحه به تهران را هدایت نمایند. این تیم, پرواز دوبی به دوحه را بعنوان مسافر طی می کنند. چنین پروازهایی را پرواز بدون بلیط می نامند.

مدل ریاضی پرواز

در ابتدا لازم است به معرفی نوتاسیونهای بکار رفته در مدل بپردازیم.

P	مجموعه ای شامل تمام مجموعه های پرواز .
p	اندیس مجموعه پرواز .
f	اندیس پرواز ($f=1,...,n$) .
P_f	مجموعه ای شامل تمام مجموعه پروازهایی که پرواز f را شامل می شوند .
d	اندیس روز .
t_f	مدت زمانی که پرواز f به طول می انجامد .
C_d	زمان مشمول پرداخت دستمزد در روز d .
GT	زمان تضمین شده برای پرداخت دستمزد در هر روز کاری .
$TAFB_p$	کل زمانی که یک مجموعه پرواز طول می کشد .
C_p	زمان مشمول پرداخت دستمزد در مجموعه پرواز p .
$S(f,f')$	زمان توقف بین دو پرواز متوالی در یک روز .
$L(d,d')$	زمان استراحت بین دو روز کاری متوالی .
k_f	قیمت بلیط پرواز f .
DH	هزینه کل پروازهای بدون بلیط .
SAL	هزینه کل پرداختی به تیمهای پرواز .
ET_d	کل زمانی که ماموریت یک روز کاری تیم پرواز طول می کشد .

[16] Time Away From Base (TAFB)

F_d	کل زمان پرواز در روز d .
h	هزینه هر ساعت پرواز .
U_P	حد بالای زمانی که یک مجموعه پرواز طول می کشد .
L_s	حد پائین مدت زمان توقف بین دو پرواز متوالی در یک روز .
U_s	حد بالای مدت زمان توقف بین دو پرواز متوالی در یک روز .

دو متغیر صفر و یک زیر را برای این مدل تعریف می کنیم:

$X_{f,P}$ که نشان می دهد پرواز f بواسطه انتخاب مجموعه p پوشش داده می شود یا خیر و Y_P که بر انتخاب یا عدم انتخاب مجموعه p دلالت دارد.

تابع هدف عبارتست از کمینه کردن مجموع هزینه پرداختی به تیم های پرواز و هزینه پروازهای بدون بلیط . لذا تابع هدف مدل مورد نظر از دو جزء تشکیل شده است.

$$\text{Min } SAL+DH \qquad (۱)$$

جزء اول هزینه پرداختی به تیم های پرواز است که برای محاسبه آن باید تعداد ساعاتی از یک مجموعه پرواز را که مشمول پرداخت می شود (C_p) مشخص کرد.

از آنجا که هر مجموعه پرواز شامل یک یا چند روز کاری مختلف می باشد, برای تعیین C_p باید ابتدا نحوه محاسبه زمان مشمول پرداخت یک روز کاری (C_d) را مشخص کرد.

C_d ماکسیمم مقدار سه عبارت است. اولین عبارت، کل زمان پرواز (پروازهای) یک روز کاری است (F_d). بطور مثال، اگر برای یک تیم پرواز در یک روز خاص دو پرواز تهران به اصفهان و اصفهان به شیراز تعریف شده باشد و هر یک نیز معادل نود دقیقه طول بکشد, کل زمان پرواز تیم در این روز کاری سه ساعت خواهد بود. عبارت دوم، درصدی از کل زمان یک روز کاری (ET_d) است. کل زمان یک روز کاری از مجموع زمانهای پرواز آن روز و زمانهای توقف بین پروازها حاصل می شود. در مثال فوق, فرض کنید زمان توقف بین دو پرواز, سه ساعت باشد. در این صورت کل زمان آن روز کاری، شش ساعت خواهد بود. از آنجا که تیم مورد نظر تمام این شش را ساعت پرواز نداشته و هزینه پرداختی به یک تیم در زمان پرواز و توقف متفاوت است, درصدی از این زمان را بعنوان زمانی که مشمول پرداخت h ریال هزینه می گردد، در نظر می گیرند. این درصد در کشورهای مختلف متفاوت است ولی معمولا ۶۵ درصد در نظر گرفته می شود. عبارت سوم، یک زمان تضمین شده است. فرض کنید یک روز کاری تنها شامل یک پرواز از تهران به اصفهان با زمان نود دقیقه باشد. طبق قوانین پرواز, اگر زمان یک روز کاری از یک حداقل زمان مشخصی (مثلا ۲ ساعت) کمتر

باشد, بجای آن زمان، حداقل زمان تضمین شده ای برای آن تیم در نظر گرفته می شود. لذا بطور خلاصه, زمان مشمول پرداخت در یک روز کاری بصورت زیر محاسبه می شود:

$$C_d = \mathrm{Max}(F_d, 0.65ET_d, GT) \qquad (۲)$$

از آنجا که:

$$F_d = \sum_{f \in d} t_f \qquad (۳)$$

$$ET_d = F_d + \sum_{(f,f') \in d} S(f,f') \qquad (۴)$$

خواهیم داشت :

$$C_d = \mathrm{Max}\{\sum_{f \in d} t_f, 0.65(F_d + \sum_{(f,f') \in d} S(f,f')), GT) \qquad (۵)$$

زمان مشمول پرداخت مجموعه p از ماکسیمم دو عبارت بدست می آید. عبارت اول, جمع زمانهای روزهای کاری تشکیل دهنده آن مجموعه پرواز است که بصورت $\sum_{d \in p} C_d$ نشان داده می شود. عبارت دوم, درصدی از کل زمان دوری تیم پرواز از محل اقامت خود (TAFB) می باشد (معمولا این درصد را ۶۵ درصد در نظر می گیرند). همانطور که پیشتر نیز اشاره شد, این زمان عبارتست از فاصله زمانی بین لحظه ترک شهر محل اقامت تیم پرواز تا بازگشت مجدد به آن (در واقع این زمان کل مدت زمانی است که یک مجموعه پرواز طول می کشد).

لذا C_p بصورت زیر مشخص می شود:

$$C_p = \mathrm{Max}\{\sum_{d \in p} C_d, 0.65TAFB_p) \qquad (۶)$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

از آنجا که :

$$TAFB_p = \sum_{d \in p} ET_d + \sum_{(d,d') \in p} L(d,d') \qquad (۷)$$

با توجه به رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$TAFB_p = \sum_{d \in p} [F_d + \sum_{(f,f') \in d} S(f,f')] + \sum_{(d,d') \in p} L(d,d') \qquad (۸)$$

لذا رابطه (۶) بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$C_p = \mathrm{Max}\{\sum_{d \in p} C_d, 0.65\{\sum_{d \in p} [F_d + \sum_{(f,f') \in d} S(f,f')] + \sum_{(d,d') \in p} L(d,d')\}\} \qquad (۹)$$

و بالاخره داریم:

$$SAL = h\sum_{p\in P}\{Y_p Max\{\sum_{d\in p} C_d, 0.65(\sum_{d\in p}[F_d + \sum_{(f,f')\in d} S(f,f')] + \sum_{(d,d')\in p} L(d,d'))\}\} \qquad (۱۰)$$

نکته قابل ذکر آن است که تمام مولفه های رابطه (۱۰) معلوم مسئله هستند زیرا همانطور که پیشتر نیز عنوان شد, فرض شده که تمام روزهای کاری و مجموعه پروازها مشخص هستند و سوال تحقیق مشخص کردن بهترین مجموعه های پرواز است.

جزء دوم تابع هدف، هزینه پروازهای بدون بلیط است که آن را بصورت زیر نشان می دهیم:

$$DH = \sum_{f=1}^{n} k_f (\sum_{p\in P_f} X_{f,p} - 1) \qquad (۱۱)$$

برای روشن شدن رابطه (۱۱) مثال ساده ای که ابتدای بحث مطرح شد را در نظر بگیرید. پرواز A هم در مجموعه p_1 است و هم در p_2. اگر $X_{A,p_1} + X_{A,p_2} = 2$ باشد، یعنی پرواز A دو بار پوشش داده شده است و این در حالی است که این پرواز تنها یکبار باید انجام شود. در نتیجه مشخص می شود که یک تیم پرواز با پرواز A بعنوان مسافر (نه هدایت کننده پرواز) از شهر i به j سفر کرده تا در j هدایت پرواز دیگری را دست بگیرد. لذا $\sum_{p\in P_f} X_{f,p} - 1$ تعداد پروازهای بدون بلیط مربوط به پرواز f را نشان می دهد.

با توجه به مطالب فوق، تابع هدف مدل بصورت زیر خواهد بود:

$$Min\ h\sum_{p\in P} C_p Y_p + \sum_{f=1}^{n} k_f (\sum_{p\in P_f} X_{f,p} - 1) \qquad (۱۲)$$

حال به شرح محدودیتهای مدل می پردازیم. اولین محدودیت سیستم باید نشان دهد اگر مجموعه پرواز p انتخاب شود (Y_P برابر یک شود) تمام پروازهای تشکیل دهنده آن نیز باید انتخاب شوند. این محدودیت در حالت کلی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\sum_{f\in p} X_{f,p} = mY_p \qquad \forall p \in P \qquad (۱۳)$$

که در رابطه فوق, m برابر با تعداد جملات سمت چپ محدودیت می باشد. محدودیت دیگری باید نوشته شود تا تضمین کند تمام پروازها انجام شوند. این محدودیت در حالت کلی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\sum_{p\in P_f} X_{f,p} \ge 1 \qquad \forall f \qquad (۱۴)$$

طبق قوانین مربوطه, مدت زمانی که یک تیم پرواز از شهر محل اقامت خود دور است نباید از یک حد مشخصی فراتر رود. این محدودیت را نیز بصورت زیر می توان نوشت:

$$Y_p TAFB_p \le U_p \qquad \forall p \in P \qquad (۱۵)$$

پرتال جامع علوم انسانی

با توجه به (۸) داریم:

$$Y_p\{\sum_{d\in p}[F_d + \sum_{(f,f')\in d} S(f,f')] + \sum_{(d,d')\in p} L(d,d')\} \le U_p \qquad \forall p \in P \qquad (۱۶)$$

دو محدودیت دیگری که طبق قوانین پرواز اعمال می شوند, حداقل و حداکثر زمان توقف بین دو پرواز متوالی است که بصورت زیر می باشند:

$$S(f,f') \ge L_s Y_p \qquad \forall f,f' \in p, \quad \forall p \in P \qquad (۱۷)$$

$$S(f,f')Y_p \le U_s \qquad \forall f,f' \in p, \quad \forall p \in P \qquad (۱۸)$$

محدویت (۱۷) باعث می شود اگر زمان توقف یک تیم پرواز بین دو پرواز متوالی f و f' کمتر از حداقل زمان تعیین شده باشد, Y_p صفر و آن توالی انتخاب نشود و لذا آن دو پرواز متوالی نیز به یک تیم محول نشوند. محدودیت (۱۸) نیز بطور مشابه تفسیر می شود.

مثال عددی

در این قسمت، با ذکر یک مثال به شرح بیشتر مدل پیشنهادی می پردازیم. فرض کنید یک شرکت هواپیمایی، ۱۳ پرواز مختلف در روز دارد که اطلاعات آن مطابق جدول ۲ است.

جدول ۲ : برنامه زمانی پرواز

پرواز	مبدا	مقصد	زمان حرکت	زمان فرود	مدت پرواز (دقیقه)	هزینه بلیط
A	تهران	اصفهان	۸:۰۰	۹:۰۰	۶۰	۸۰
B	تهران	شیراز	۷:۰۰	۸:۲۰	۸۰	۹۰
C	تهران	مشهد	۱۴:۰۰	۱۵:۳۰	۹۰	۹۰
D	تهران	ساری	۱۳:۰۰	۱۳:۵۰	۵۰	۷۰
E	اصفهان	تهران	۱۸:۰۰	۱۹:۰۰	۶۰	۸۰
F	اصفهان	ساری	۱۵:۰۰	۱۶:۲۰	۸۰	۶۰
G	اصفهان	مشهد	۱۱:۰۰	۱۱:۴۵	۴۵	۷۰
H	مشهد	تهران	۱۹:۰۰	۲۰:۳۰	۹۰	۹۰
I	مشهد	شیراز	۱۸:۰۰	۱۹:۰۵	۶۵	۸۰
J	مشهد	ساری	۱۷:۰۰	۱۷:۴۵	۴۵	۶۰
K	شیراز	تهران	۲۱:۰۰	۲۲:۲۰	۸۰	۹۰
L	شیراز	اصفهان	۱۲:۰۰	۱۲:۴۰	۴۰	۵۰
M	ساری	تهران	۱۸:۰۰	۱۸:۵۰	۵۰	۷۰

ستون هزینه بلیط بر حسب هزار تومان است و نشان می دهد که اگر تیم پرواز بخواهد یک مسیری را بعنوان مسافر پرواز نماید چه هزینه ای برای شرکت هواپیمایی خواهد داشت. فرض کنید دستمزد ساعتی تیم پرواز ۶۰ هزار تومان است (h=۶۰۰۰۰) . حداقل زمان تضمین شده نیز دو ساعت می باشد. حداکثر زمان دوری تیم پرواز از شهر محل اقامت خود دو روز (۲۸۸۰ دقیقه) است. همچنین حداقل و حداکثر زمان توقف بین دو پرواز در یک روز، ۱۵ دقیقه و ۱۲ ساعت است.

با توجه به جدول ۲، بیست مجموعه پرواز مختلف قابل تعریف است:

p_1={A,E} p_2={A,F,M} p_3={A,G,H}

p_4={A,G,I,K} p_5={A,G,I,L,E} p_6={A,G,I,L,F,M}

p_7={A,G,J,M} p_8={B,K} p_9={B,L,E}

p_{10}={B,L,F,M} p_{11}={B,L,G,H} p_{12}={B,L,G,I,K}

p_{13}={B,L,G,J,M} p_{14}={C,H} p_{15}={C,I,K}

p_{16}={C,I,L,E} p_{17}={C,I,L,F,M} p_{18}={C,I,L,G,H}

p_{19}={C,I,L,G,J,M} p_{20}={D,M}

برای محاسبه C_p، طبق رابطه (۶) عمل می کنیم. اما قبل از آن باید از روابط (۵) و (۸) مقادیر C_d و $TAFB_p$ را محاسبه کنیم. محاسبات را بطور نمونه برای اولین و یازدهمین مجموعه های پرواز (p_1, p_{11}) شرح می دهیم.

ابتدا p_1={A,E} را درنظر بگیرید. از آنجا که پرواز A ساعت ۹ صبح در اصفهان فرود می آید و پرواز E برای ساعت ۱۸ برنامه ریزی شده است، یک تیم پرواز می تواند براحتی این دو پرواز را در یک روز هدایت کند. لذا این مجموعه پرواز تنها در یک روز انجام می شود. چون پرواز A یک ساعت و E نیز یک ساعت به طول می انجامد، F_d برابر ۱۲۰ دقیقه خواهد بود. از آنجا که زمان استراحت بین دو پرواز (فاصله زمانی بین ورود به اصفهان و ترک آن) ۹ ساعت (۵۴۰ دقیقه) است، کل زمانی که این ماموریت یک روزه تیم پرواز طول می کشد ۶۶۰ دقیقه خواهد بود (ET_d = ۶۶۰). با توجه به اینکه حداقل زمان تضمین شده دو ساعت است، خواهیم داشت:

$$C_d = \text{Max}\{120, 0.65 \times 660, 120\} = 429$$

برای محاسبه C_p به این طریق عمل می کنیم: از آنجا که این مجموعه پرواز تنها شامل یک روز کاری است، $\sum_{d \in p} C_d = 429$ خواهد بود. مقدار $TAFB_{p_1}$ نیز براحتی قابل محاسبه است. اولین پرواز این مجموعه ساعت ۸ صبح از تهران حرکت کرده و آخرین پرواز در ساعت ۱۹ همان روز به تهران رسیده است. لذا $TAFB_{p_1} = 660$ دقیقه می باشد. لذا داریم:

$C_{p_1}=\text{Max}\{429, 0.65\times 660\}=429$

بطور مشابه، هزینه $p_{11}=\{B,L,G,H\}$ محاسبه می شود. پرواز B ساعت ۸:۲۰ صبح در شیراز فرود می آید و پرواز L برای ساعت ۱۲ به مقصد اصفهان برنامه ریزی شده است که در ساعت ۱۲:۴۰ به مقصد می رسد. اما پرواز G برای ساعت ۱۱ برنامه ریزی شده است. لذا تیم پرواز مجبور است یک شب در اصفهان توقف نماید و روز بعد از ساعت ۱۱ الی ۱۱:۴۵ پرواز G را به مقصد مشهد و از ساعت ۱۹ الی ۲۰:۳۰ پرواز H را به مقصد تهران هدایت نماید. بنابراین مجموعه پرواز p_{11} شامل دو روز کاری $d_1=\{B,L\}$ و $d_2=\{G,H\}$ است. چون پرواز B هشتاد دقیقه و L چهل دقیقه طول می کشند، F_{d_1} برابر۱۲۰ دقیقه خواهد بود. از آنجا که از آغاز پرواز B تا ختم پرواز L ۳۴۰ دقیقه طول می کشد، $ET_{d_1}=340$ خواهد بود. لذا داریم:

$C_{d_1}=\text{Max}\{120, 0.65\times 340, 120\}=221$

در مورد برنامه روز دوم نیز خواهیم داشت:

$F_{d_2}=135$ $\quad ET_{d_2}=570$ $\quad C_{d_2}=\text{Max}\{135, 0.65\times 570, 120\}=370.5$

مقدار $C_{p_{11}}$ نیز بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\sum_{d\in p} C_d=221+370.5=591.5$$

$$TAFB_{p_{11}}=2250$$

$$C_{p_1}=\text{Max}\{591.5, 0.65\times 2250\}=1462.5$$

نتایج کامل در جدول ۳ خلاصه شده است. تابع هدف را می توان بر اساس رابطه (۱۲) بصورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\,1000(429Y_1+422.5Y_2+487.5Y_3+559Y_4+1365Y_5+1358.5Y_6+422.5Y_7+598Y_8\\
&+468Y_9+461.5Y_{10}+1462.5Y_{11}+1534Y_{12}+1397.5Y_{13}+253.5Y_{14}+325Y_{15}+1131Y_{16}\\
&+1124.5Y_{17}+2125.5Y_{18}+2060.5Y_{19}+227.5Y_{20})\\
&+80(X_{A,p_1}+X_{A,p_2}+X_{A,p_3}+X_{A,p_4}+X_{A,p_5}+X_{A,p_6}+X_{A,p_7}-1)\\
&+90(X_{B,p_8}+X_{B,p_9}+X_{B,p_{10}}+X_{B,p_{11}}+X_{B,p_{12}}+X_{B,p_{13}}-1)\\
&+90(X_{C,p_{14}}+X_{C,p_{15}}+X_{C,p_{16}}+X_{C,p_{17}}+X_{C,p_{18}}+X_{C,p_{19}}-1)\\
&+70(X_{D,p_{20}}-1)+80(X_{E,p_1}+X_{E,p_5}+X_{E,p_9}+X_{E,p_{16}}-1)\\
&+60(X_{F,p_2}+X_{F,p_6}+X_{F,p_{10}}+X_{F,p_{17}}-1)\\
&+70(X_{G,p_3}+X_{G,p_4}+X_{G,p_5}+X_{G,p_6}+X_{G,p_7}+X_{G,p_{11}}+X_{G,p_{12}}+X_{G,p_{13}}+X_{G,p_{18}}+X_{G,p_{19}}-1)
\end{aligned}$$

$$+90(X_{H,p_3}+X_{H,p_{11}}+X_{H,p_{14}}+X_{H,p_{18}}-1)$$

$$+80(X_{I,p_4}+X_{I,p_5}+X_{I,p_6}+X_{I,p_{12}}+X_{I,p_{15}}+X_{I,p_{16}}+X_{I,p_{17}}+X_{I,p_{18}}+X_{I,p_{19}}-1)$$

$$+60(X_{J,p_7}+X_{J,p_{13}}+X_{J,p_{19}}-1)+90(X_{K,p_4}+X_{K,p_8}+X_{K,p_{12}}+X_{K,p_{15}}-1)$$

$$+50(X_{L,p_5}+X_{L,p_6}+X_{L,p_9}+X_{L,p_{10}}+X_{L,p_{11}}+X_{L,p_{12}}+X_{L,p_{13}}+X_{L,p_{16}}+X_{L,p_{17}}+X_{L,p_{18}}+X_{L,p_{19}}-1)$$

$$+70(X_{M,p_2}+X_{M,p_6}+X_{M,p_7}+X_{M,p_{10}}+X_{M,p_{13}}+X_{M,p_{17}}+X_{M,p_{19}}+X_{M,p_{20}}-1)$$

جدول ۳ : محاسبات مربوط به C_p

مجموعه پرواز	F_d	ET_d	C_d	$\sum C_d$	$TAFB_p$	C_p
p_1	۱۲۰	۶۶۰	۴۲۹	۴۲۹	۶۶۰	۴۲۹
p_2	۱۹۰	۶۵۰	۴۲۲/۵	۴۲۲/۵	۶۵۰	۴۲۲/۵
p_3	۱۹۵	۷۵۰	۴۸۷/۵	۴۸۷/۵	۷۵۰	۴۸۷/۵
p_4	۲۵۰	۸۶۰	۵۵۹	۵۵۹	۸۶۰	۵۵۹
p_5	۱۷۰ و ۱۰۰	۶۶۵ و ۴۲۰	۴۳۲/۲۵ و ۲۷۳	۷۰۵/۲۵	۲۱۰۰	۱۳۶۵
p_6	۱۷۰ و ۱۷۰	۶۶۵ و ۴۱۰	۴۳۲/۲۵و۲۶۶/۵	۶۹۸/۷۵	۲۰۹۰	۱۳۵۸/۵
p_7	۲۰۰	۶۵۰	۴۲۲/۵	۴۲۲/۵	۶۵۰	۴۲۲/۵
p_8	۱۶۰	۹۲۰	۵۹۸	۵۹۸	۹۲۰	۵۹۸
p_9	۱۸۰	۷۲۰	۴۶۸	۴۶۸	۷۲۰	۴۶۸
p_{10}	۲۵۰	۷۱۰	۴۶۱/۵	۴۶۱/۵	۷۱۰	۴۶۱/۵
p_{11}	۱۲۰ و ۱۳۵	۳۴۰ و ۵۷۰	۲۲۱ و ۳۷۰/۵	۵۹۱/۵	۲۲۵۰	۱۴۶۲/۵
p_{12}	۱۲۰ و ۱۹۰	۳۴۰ و ۶۸۰	۲۲۱ و ۴۴۲	۶۶۳	۲۳۶۰	۱۵۳۴
p_{13}	۱۲۰ و ۱۴۰	۳۴۰ و ۴۷۰	۲۲۱ و ۳۰۵/۵	۵۲۶/۵	۲۱۵۰	۱۳۹۷/۵
p_{14}	۱۸۰	۳۹۰	۲۵۳/۵	۲۵۳/۵	۳۹۰	۲۵۳/۵
p_{15}	۲۳۵	۵۰۰	۳۲۵	۳۲۵	۵۰۰	۳۲۵
p_{16}	۱۵۵ و ۱۰۰	۳۰۵ و ۴۲۰	۱۹۸/۲۵ و ۲۷۳	۴۷۱/۲۵	۱۷۴۰	۱۱۳۱
p_{17}	۱۵۵ و ۱۷۰	۳۰۵ و ۴۱۰	۱۹۸/۲۵و۲۶۶/۵	۴۶۴/۷۵	۱۷۳۰	۱۱۲۴/۵
p_{18}	۱۵۵ و ۴۰ و ۱۳۵	۳۰۵ و ۴۰ و ۵۷۰	۱۹۸/۲۵ و ۱۲۰ و ۳۷۰/۵	۶۸۸/۷۵	۳۲۷۰	۲۱۲۵/۵
p_{19}	۱۵۵ و ۴۰ و ۱۴۰	۳۰۵ و ۴۰ و ۴۷۰	۱۹۸/۲۵ و ۱۲۰ و ۳۰۵/۵	۶۲۳/۷۵	۳۱۷۰	۲۰۶۰/۵
p_{20}	۱۰۰	۳۵۰	۲۲۷/۵	۲۲۷/۵	۳۵۰	۲۲۷/۵

محدودیتهای مربوط به ارتباط بین متغیرهای تصمیم بر اساس رابطه (۱۳) بصورت زیر خواهند بود:

$$X_{A,p_1} + X_{E,p_1} = 2Y_{p_1}$$

$$X_{A,p_2} + X_{F,p_2} + X_{M,p_2} = 3Y_{p_2}$$

$$X_{A,p_3} + X_{G,p_3} + X_{H,p_3} = 3Y_{p_3}$$

$$X_{A,p_4} + X_{G,p_4} + X_{I,p_4} + X_{K,p_4} = 4Y_{p_4}$$

$$X_{A,p_5} + X_{G,p_5} + X_{I,p_5} + X_{L,p_5} + X_{E,p_5} = 5Y_{p_5}$$

$$X_{A,p_6} + X_{G,p_6} + X_{I,p_6} + X_{L,p_6} + X_{F,p_6} + X_{M,p_6} = 6Y_{p_6}$$

$$X_{A,p_7} + X_{G,p_7} + X_{J,p_7} + X_{M,p_7} = 4Y_{p_7}$$

$$X_{B,p_8} + X_{K,p_8} = 2Y_{p_8}$$

$$X_{B,p_9} + X_{L,p_9} + X_{E,p_9} = 3Y_{p_9}$$

$$X_{B,p_{10}} + X_{L,p_{10}} + X_{F,p_{10}} + X_{M,p_{10}} = 4Y_{p_{10}}$$

$$X_{B,p_{11}} + X_{L,p_{11}} + X_{G,p_{11}} + X_{H,p_{11}} = 4Y_{p_{11}}$$

$$X_{B,p_{12}} + X_{L,p_{12}} + X_{G,p_{12}} + X_{I,p_{12}} + X_{K,p_{12}} = 5Y_{p_{12}}$$

$$X_{B,p_{13}} + X_{L,p_{13}} + X_{G,p_{13}} + X_{J,p_{13}} + X_{M,p_{13}} = 5Y_{p_{13}}$$

$$X_{C,p_{14}} + X_{H,p_{14}} = 2Y_{p_{14}}$$

$$X_{C,p_{15}} + X_{I,p_{15}} + X_{K,p_{15}} = 3Y_{p_{15}}$$

$$X_{C,p_{16}} + X_{I,p_{16}} + X_{L,p_{16}} + X_{E,p_{16}} = 4Y_{p_{16}}$$

$$X_{C,p_{17}} + X_{I,p_{17}} + X_{L,p_{17}} + X_{F,p_{17}} + X_{M,p_{17}} = 5Y_{p_{17}}$$

$$X_{C,p_{18}} + X_{I,p_{18}} + X_{L,p_{18}} + X_{G,p_{18}} + X_{H,p_{18}} = 5Y_{p_{18}}$$

$$X_{C,p_{19}} + X_{I,p_{19}} + X_{L,p_{19}} + X_{G,p_{19}} + X_{J,p_{19}} + X_{M,p_{19}} = 6Y_{p_{19}}$$

$$X_{D,p_{20}} + X_{M,p_{20}} = 2Y_{p_{20}}$$

محدودیتی که هم تضمین می کند تمام پروازها انجام خواهند شد و هم امکان پرواز بدون بلیط را می دهد بر اساس رابطه (۱۴) نوشته می شود:

$$X_{A,p_1} + X_{A,p_2} + X_{A,p_3} + X_{A,p_4} + X_{A,p_5} + X_{A,p_6} + X_{A,p_7} \geq 1$$

$$X_{B,p_8} + X_{B,p_9} + X_{B,p_{10}} + X_{B,p_{11}} + X_{B,p_{12}} + X_{B,p_{13}} \geq 1$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

$$X_{C,p_{14}}+X_{C,p_{15}}+X_{C,p_{16}}+X_{C,p_{17}}+X_{C,p_{18}}+X_{C,p_{19}}\geq 1$$

$$X_{D,p_{20}}\geq 1$$

$$X_{E,p_1}+X_{E,p_5}+X_{E,p_9}+X_{E,p_{16}}\geq 1$$

$$X_{F,p_2}+X_{F,p_6}+X_{F,p_{10}}+X_{F,p_{17}}\geq 1$$

$$X_{G,p_3}+X_{G,p_4}+X_{G,p_5}+X_{G,p_6}+X_{G,p_7}+X_{G,p_{11}}+X_{G,p_{12}}+X_{G,p_{13}}+X_{G,p_{18}}+X_{G,p_{19}}\geq 1$$

$$X_{H,p_3}+X_{H,p_{11}}+X_{H,p_{14}}+X_{H,p_{18}}\geq 1$$

$$X_{I,p_4}+X_{I,p_5}+X_{I,p_6}+X_{I,p_{12}}+X_{I,p_{15}}+X_{I,p_{16}}+X_{I,p_{17}}+X_{I,p_{18}}+X_{I,p_{19}}\geq 1$$

$$X_{J,p_7}+X_{J,p_{13}}+X_{J,p_{19}}\geq 1$$

$$X_{K,p_4}+X_{K,p_8}+X_{K,p_{12}}+X_{K,p_{15}}\geq 1$$

$$X_{L,p_5}+X_{L,p_6}+X_{L,p_9}+X_{L,p_{10}}+X_{L,p_{11}}+X_{L,p_{12}}+X_{L,p_{13}}+X_{L,p_{16}}+X_{L,p_{17}}+X_{L,p_{18}}+X_{L,p_{19}}\geq 1$$

$$X_{M,p_2}+X_{M,p_6}+X_{M,p_7}+X_{M,p_{10}}+X_{M,p_{13}}+X_{M,p_{17}}+X_{M,p_{19}}+X_{M,p_{20}}\geq 1$$

محدودیتهای مربوط به حداکثر زمان دوری تیم پرواز از شهر محل اقامت خود بر اساس رابطه (۱۵) بصورت زیر نوشته می شوند (حداکثر زمان دوری تیم پرواز از شهر محل اقامت خود ۲۸۸۰ دقیقه است):

$660Y_{p_1}\leq 2880$	$650Y_{p_2}\leq 2880$	$750Y_{p_3}\leq 2880$	$860Y_{p_4}\leq 2880$
$2100Y_{p_5}\leq 2880$	$2090Y_{p_6}\leq 2880$	$650Y_{p_7}\leq 2880$	$920Y_{p_8}\leq 2880$
$720Y_{p_9}\leq 2880$	$710Y_{p_{10}}\leq 2880$	$2250Y_{p_{11}}\leq 2880$	$2360Y_{p_{12}}\leq 2880$
$2150Y_{p_{13}}\leq 2880$	$390Y_{p_{14}}\leq 2880$	$500Y_{p_{15}}\leq 2880$	$1740Y_{p_{16}}\leq 2880$
$1730Y_{p_{17}}\leq 2880$	$3270Y_{p_{18}}\leq 2880$	$3170Y_{p_{19}}\leq 2880$	$350Y_{p_{20}}\leq 2880$

در انتها نوبت به محدودیتهای حداقل و حداکثر زمان استراحت بین دو پرواز متوالی در یک روز می رسد. می توان براحتی مشاهده کرد که هیچیک از مجموعه های پرواز این دو محدودیت را نقض نمی کنند. در صورت حل مدل عدد صحیح خالص فوق، جواب زیر حاصل می شود:

$$X_{A,p_1}=X_{A,p_7}=X_{B,p_{10}}=X_{C,p_{14}}=X_{C,p_{15}}=X_{D,p_{20}}=X_{E,p_1}=X_{F,p_{10}}=X_{G,p_7}=1$$

$$X_{H,p_{14}}=X_{I,p_{15}}=X_{J,p_7}=X_{K,p_{15}}=X_{L,p_{10}}=X_{M,p_7}=X_{M,p_{10}}=X_{M,p_{20}}=1$$

$$Y_{P_1}=Y_{P_7}=Y_{P_{10}}=Y_{P_{14}}=Y_{P_{15}}=Y_{P_{20}}=1$$

سایر متغیرها نیز صفرند. مقدار تابع هدف نیز برابر ۲۱۱۹۳۱۰ تومان است که ۲۱۱۹۰۰۰ تومان آن مربوط به هزینه دستمزد تیمهای پرواز و مابقی هزینه پروازهای بدون بلیط می باشد.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

همچنین از آنجا که سمت چپ محدودیت $X_{A,p_1}+X_{A,p_2}+X_{A,p_3}+X_{A,p_4}+X_{A,p_5}+X_{A,p_6}+X_{A,p_7}\geq 1$ و $X_{C,p_{14}}+X_{C,p_{15}}+X_{C,p_{16}}+X_{C,p_{17}}+X_{C,p_{18}}+X_{C,p_{19}}\geq 1$ برابر دو و سمت چپ محدودیت $X_{M,p_2}+X_{M,p_6}+X_{M,p_7}+X_{M,p_{10}}+X_{M,p_{13}}+X_{M,p_{17}}+X_{M,p_{19}}+X_{M,p_{20}}\geq 1$ برابر سه می شود، می توان نتیجه گرفت که تیمهای پرواز با پروازهای A و C یکبار و M دو بار از امکان پرواز بدون بلیط استفاده کرده اند.

نتیجه گیری

برنامه ریزی پرواز جزو پیچیده ترین حوزه های برنامه ریزی در یک شرکت هواپیمایی است. بکمک یک برنامه مناسب می توان هزینه های مربوطه را کمینه نمود. این بحث از آنجا حائز اهمیت است که هزینه تیم پرواز بعد از هزینه سوخت، بالاترین رقم هزینه های یک شرکت هواپیمایی را تشکیل می دهد. این مقاله به ارائه یک مدل صفر و یک پرداخته که خروجی آن برنامه تیمهای پرواز را مشخص می کند. در این مقاله یک مدل ریاضی برای برنامه ریزی تیم پرواز ارائه شده است که ضمن در بر داشتن تمام فاکتورهای هزینه ساز در تابع هدف، پروازهای بدون بلیط را که امری رایج در صنعت هواپیمایی است در بر می گیرد.

مراجع

Ahmadbeygi, S., Cohn, A. and Weir, M., 2008, An integer programming approach to generating airline crew pairings. *Computers and Operations Research*, doi:10.1016/j.cor.2008.02.001.

Anbil, R., Gelman, E., Patty, B. and Tanga, R., 1991, Recent advances in crew pairing optimization at American Airlines. *Interfaces*, 21, 62-74.

Barnhart, C., Cohn, A., Johnson, E., Klabjan, D., Nemhauser, G.L. and Vance, P., 2003, *Airline Crew Scheduling*. Handbook of Transportation Science, Kluwe's International Series.

Chu, H.D., Eric, G. and Ellis, L.J., 1997, Solving large scale crew scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 97, 260-268.

Crainic, T.G. and Rousseau, J., 1987, The column generation principle and the airline crew scheduling problem. *INFOR*, 25, 136-151.

Day, P. and Ryan, D., 1997, Flight attendant rostering for short haul airline operations. Operations Research, 45, 649-661.

Fahle, T., Junker, U., Karisch S., Kohl, N., Sellmann, M., and Vaaben, B., 2002, Constraint programming based column generation for crew assignment. *Journal of Heuristics*, 8, 59-81.

Garfinkel, R.S., and Nemhauser, G.L., 1970, Optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science*, 16(8), 495-508.

Hoffman, K.L. and Padberg, M., 1993, Solving airline crew scheduling problem by branch and cut. *Management Science*, 39(6), 657-682.

Klabjan, D. and Schwan, K., 2001, *Airline Crew Pairing Generation in Parallel*. Technical Report TLI/LEC-99-02, Georgia Institute of Technology.

Kwok, L. and Wu, L., 1996, Development of an expert system in cabin crew pattern generation. *International Journal of Expert Systems*, 9, 445-464.

Lavoie, S., Minoux, M. and Odier, E., 1988, A new approach for crew pairing problems by column generation with an application to air transportation. *European Journal of Operational Research*, 35, 45-58.

Makri, A. and Klabjan, D., 2004, A new pricing scheme for airline crew scheduling. *INFORMS Journal on Computing*, 16(1), 56-67.

Marsten, R.E., 1974, An algorithm for large set partitioning problems. *Management Science*, 20(5), 774-787.

Vance, P.H., Barnhart, C., Johnson, E.L. and Nemhauser, G.E., 1997, Airline crew scheduling: A new formulation and decomposition algorithm. *Operations Research*, 45, 260-268.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی