Journal of Religious Thought of Shiraz University
Ser. 40, Autumn 2011, PP: 1-28
ISSN: 2251-6123

فصلنامه اندیشه دینی دانشگاه شیراز
پیاپی ۴۰، پاییز ۱۳۹۰، صفحات ۱– ۲۸
شماره شاپا: ۶۱۲۳–۲۲۵۱

منطق ربط و سلب لزوم در شرطی سالبه‌ی کلیه

دکتر اسدالله فلاحی*

چکیده

نگارنده در مقاله‌ی دیگری در تحلیل شرطی‌های سالبه‌ی کلیه، با فرمول‌بندی عبارات ابن‌سینا نشان داده است که به تحلیل ابن‌سینا ایراد صوری مهمی وارد است و تلاش‌های ابن‌سینا در پاسخ به آن، پذیرفتنی نیستند. او به کمک تحلیل ابن‌سینا از موجبه‌ی کلیه، پاسخ دیگری به ایراد مورد نظر یافته، اما نشان داده است که این پاسخ نیز توان دفع ایراد را ندارد. در پایان، وی حل نهایی مسأله را، به عنوان مسأله‌ای باز، فراروی پژوهندگان قرار داده است. اکنون در این مقاله، نشان می‌دهیم که ایراد تحلیل‌های آن مقاله در تابع ارزشی گرفتن شرطی است و با تبدیل آن به شرطی ربطی، ایراد مرتفع می‌گردد. البته کاربرد شرطی‌های ربطی هرچند در سالبه‌ی کلیه‌ی لزومی با کامیابی همراه است، در تحلیل موجبه‌ی جزییه لزومیه با دشواری‌هایی روبه‌رو است. نشان می‌دهیم که با استفاده از تفکیک «لزومی حقیقی» و «لزومی لفظی» (که یکی از مهم‌ترین نوآوری‌های ابن‌سینا است) و با وارد ساختن «امکان مقدم» در تحلیل موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه، این دشواری‌ها را می‌توان پشت سر گذاشت.

واژه‌های کلیدی: ۱- سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه ۲- موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه ۳- منطق کلاسیک ۴- منطق ربط ۵- ابن سینا

۱. مقدمه

نگارنده در مقاله‌ی «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه‌ی کلیه»، چهار صورت‌بندی زیر را برای موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه پیشنهاد کرده است[۱] (۱۳، صص:۲۳۶-۲۵۴):

* استادیار پژوهشکده حکمت و فلسفه ایران
e-mail: falahiy@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۸۹/۱/۲۸
تاریخ پذیرش: ۸۹/۷/۱۱

ص۲۳۶[۲]	$\forall t\,(At \supset \Box\, Bt)$
ص ۲۵۳	$\forall p[\Diamond(A \wedge p) \supset \Box\,((A \wedge p) \supset B)]$
ص ۲۵۴	$\forall p\, \Box\,((A \wedge p) \supset B)$
ص ۲۵۴	$\Box\,(A \supset B)$

در آن مقاله، برای سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه پیشنهادهای بیشتری ارائه داده‌ایم:

ص ۲۳۶	$\forall t\,(At \supset \sim \Box\, Bt)$
ص ۲۴۱	$\forall t\,(At \supset \Box \sim Bt)$
ص ۲۴۲	$\Box\, \forall t\,(At \supset \sim Bt)$
ص ۲۴۲	$\sim \Box\, \forall t\,(At \supset Bt)$
ص ۲۴۶	$\forall t \sim \Box\,(At \supset Bt)$
ص ۲۴۷	$\forall p \sim \Box\,(A \wedge p \supset B)$
ص ۲۵۰	$\forall p \sim \Box\,(A \wedge p \wedge \sim B \supset B)$
ص ۲۵۳	$\forall p\,[\Diamond(A \wedge p) \supset \sim \Box\,((A \wedge p) \supset B)]$
ص ۲۵۴	$\forall p\,[\Box\,((A \wedge p) \supset B) \supset \Box\,(A \supset \sim p)]$
ص ۲۵۴	$\Box\,(A \supset \sim B)$

چنان‌که در آن مقاله نشان داده‌ایم، هریک از این تحلیل‌ها برگرفته از عبارت یا عباراتی در آثار منطق‌دانان قدیم است. در آن مقاله، پنج تحلیل نخست برای سالبه‌ی کلیه را نادرست شمرده‌ایم، به این دلیل که سورهای زمانی دارند و «ابن‌سینا بارها تأکید کرده است که سورهای شرطی را نباید صرفاً زمانی در نظر گرفت، بلکه باید همه‌ی حالات و اوضاع و احوال را در نظر داشت» (۱۳، ص: ۲۴۶).

چهار تحلیل بعدی، به‌رغم این‌که سورهای گزاره‌ای دارند که بر اوضاع و احوال دلالت می‌کند، بدون ایراد نبودند. فرمول‌های ۶ و ۷ دربرگیرنده‌ی تناقضی منطقی، و از این رو، همیشه کاذب هستند (همان، صص: ۲۴۸ و ۲۵۰). فرمول ۸، که از دو ایراد پیشین گریخته بود، ایراد سومی داشت و آن این‌که معادل فرمول ۱۰ بود. تفصیل ایراد این است که سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه در فرمول ۸ قرار بود از سنخ «سلب لزوم» باشد و نه «لزوم سلب»، در حالی‌که فرمول ۱۰ از سنخ «لزوم سلب» است و نه «سلب لزوم» (همان، ص: ۲۵۴). ایراد فرمول ۹ نیز همین است و در حقیقت، فرمول‌های ۸، ۹ و ۱۰ هم‌ارز هستند (همان، صص: ۲۵۴ - ۲۵۵).

از آن بحث، نتیجه گرفته بودیم که هیچ‌یک از این تحلیل‌ها تحلیل مناسبی برای سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه به معنای سلب لزوم نیستند و از این‌رو، ایرادهای وارد بر ابن‌سینا پاسخ قانع‌کننده‌ای نیافته است. از این‌رو، این مسأله را هم‌چنان باز نگاه داشته بودیم.

۲. تحلیل مسأله در منطق ربط

در این مقاله، قصد داریم با روی‌کرد جدیدی به این مسأله بپردازیم و صورت‌بندی دقیق‌تری از «سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه» به معنای «سلب لزوم» ارائه دهیم و به سومین ایراد وارد بر ابن‌سینا پاسخ دهیم، یعنی ایراد هم‌ارزیِ «سلب لزوم» با «لزوم سلب».

۳. لزوم ربطی در سالبه‌ی کلیه

برای پاسخ به این ایراد، باید توجه کنیم که منشأ هم‌ارزیِ فرمول‌های ۸، ۹ و ۱۰ این است که شرطی‌های به‌کاررفته در آن‌ها استلزام مادی و یا حداکثر، استلزام اکید است. به هم‌ارزی‌های استفاده‌شده در مقاله‌ی «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه‌ی کلیه» صفحه‌ی ۲۵۴ توجه کنید:

$$\Diamond A \supset \Box(A \supset B) \quad \dashv\vdash \quad \Box(A \supset B)$$
$$\sim \Diamond(A \wedge p) \quad \dashv\vdash \quad \Box(A \supset \sim p)$$

این هم‌ارزی‌ها تنها وقتی برقرارند که شرطی‌های به‌کاررفته در آن‌ها را استلزام مادی یا استلزام اکید بگیریم. اما اگر این شرطی‌ها را شرطی ربطی بگیریم، این هم‌ارزی‌ها دیگر برقرار نخواهند بود[۳] و سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه به معنای «سلب لزوم»، دیگر به سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه به معنای «لزوم سلب» فرونخواهد کاست.

از آن‌جا که در منطق ربط، برای شرطی ربطی، نماد $\rightarrow$ را به کار می‌برند، اگر در هم‌ارزی‌های بالا به جای استلزام مادی، شرطی ربطی را جای‌گزین کنیم به هم‌ارزی‌های زیر می‌رسیم:

$$\Diamond A \rightarrow \Box(A \rightarrow B) \quad \dashv\vdash \quad \Box(A \rightarrow B)$$
$$\sim \Diamond(A \wedge p) \quad \dashv\vdash \quad \Box(A \rightarrow \sim p)$$

اما هیچ‌یک از این دو هم‌ارزی در منطق ربط اثبات‌شدنی نیست و هر دوی آن‌ها شامل پارادوکس‌های استلزام مادی هستند. تذکر این نکته لازم است که هرچند دو هم‌ارزی اخیر در منطق ربط اثبات‌ناپذیر هستند، جهت راست به چپِ هم‌ارزی دوم از نظر منطق ربط مقبول است (در هم‌ارزی نخست، هر دو جهت اثبات‌ناپذیر است).

برای آشنایی با روش‌های اثبات در منطق ربط به زبان فارسی، می‌توان به آثار زیر رجوع کرد: استیون رید، در کتاب *فلسفه‌ی منطق ربط*، روش استنتاج طبیعی و سمانتیک بسیاری از منطق‌های ربط را شرح داده است (فصل‌های ۴ و ۵) و نگارنده و لطف‌اله نبوی در مقاله‌ی «صدق در جهان‌های ممکن»، فقط به روش اصل موضوعی و سمانتیک منطق ربط R بسنده کرده‌اند (۱۱، صص: ۷۱ - ۷۸). در مقاله‌ی حاضر، بیشتر از روش استنتاج طبیعی اندرسون و بلنپ برای منطق R و $R^{\Box}$ استفاده کرده‌ایم (۳، صص:۲۷۱-۷ و ۳۴۳-۴ و ۳۴۶-۷).

در مقدمه، چهار فرمول برای موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه و ده فرمول برای سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه از مقاله‌ی پیشین خود نقل کردیم. از میان این دو دسته، فقط فرمول دوم از دسته‌ی اول و فرمول هشتم از دسته‌ی دوم شایسته‌ی دفاع به نظر می‌رسند:

A	موجبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p) \supset B)]$
E	سالبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p) \supset B)]$

چنان‌که دیده می‌شود، در هر دو فرمول، دو ادات شرطی تابع ارزشی وجود دارد. به نظر می‌رسد آشکار باشد که در این دو فرمول، شرطی‌های تابع ارزشی قرارگرفته در دامنه‌ی $\Box$ باید به شرطی ربطی تبدیل شوند، زیرا رابطه‌ی میان مقدم و تالی را بیان می‌کنند، اما درباره‌ی شرطی‌های تابع ارزشی بیرون از دامنه‌ی $\Box$ نیز، آیا تبدیل به ادات‌های ربطی باید صورت پذیرد؟ از آن‌جا که این ادات‌ها فقط میان «حالات ممکن الاجتماع با مقدم» و «استلزام میان مقدم و تالی» ارتباط و پیوند برقرار می‌سازند، این احتمال وجود دارد که تابع ارزشی بودن آن‌ها آسیبی به تحلیل وارد نسازد. با وجود این، برای احتیاط ناگزیریم گزینه‌ی ربطی بودن این ادات‌ها را نیز در نظر بگیریم و پیامدهای هر دو تحلیل را با هم مقایسه کنیم.

اکنون، بر پایه‌ی این دو گزینه، به تحلیل موجبه‌ی کلیه و سالبه‌ی کلیه می‌پردازیم:

A	موجبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$
E	سالبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

جدول (۱)   گزینه‌ی تابع ارزشی بودن ادات‌های بیرونی

A	موجبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$
E	سالبه‌ی کلیه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

جدول (۲) گزینه‌ی ربطی بودن ادات‌های بیرونی

۳. ۱. رفع سومین ایرادِ تحلیل‌های ابن‌سینا به کمک منطق ربط

گفتیم که در صورت تابع ارزشی بودن ادات‌های شرطی، تحلیل پیچیده از «سلب لزوم» در فرمول شماره‌ی ۸ به تحلیل ساده‌ی «لزوم سلب» در فرمول شماره‌ی ۱۰ فرومی‌کاهد و این هم‌ارزی سومین ایراد به ابن‌سینا بوده است. اکنون می‌خواهیم ببینیم با این دو تحلیل جدید، نسبت و رابطه‌ی «سلب لزوم» با «لزوم سلب» چه خواهد شد. این روابط را در زیر گرد آورده‌ایم:

(الف) سالبه‌ی کلیه‌ی کاملا تابع ارزشی
$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p) \supset B)]$

(ب) لزوم سلب ربطی
$\Box(A\rightarrow \sim B)$

$\nleftarrow$ $\nrightarrow$ (الف)

$\downarrow \not\uparrow$

(ج) سالبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی
$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

$\nleftarrow$ $\nrightarrow$ (الف)

$\downarrow \not\uparrow$

(د) لزوم سلب تابع ارزشی
$\Box(A\supset \sim B)$

$\nleftarrow$ $\nrightarrow$ (الف)

(د) $\downarrow \not\uparrow$ (ه) — (الف) $\downarrow \not\uparrow$ (ه)

(ه) سالبه‌ی کلیه‌ی ربطی - تابع ارزشی
$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

جدول (۳) رابطه‌ی انواع سالبه‌ی کلیه با انواع لزوم سلب

فلش‌های میان مستطیل‌ها نشانه‌ی درستی استدلال و وجود برهان در منطق ربط است و فلش‌های خط‌خورده نشانه‌ی وجود مدل نقض در سمانتیک منطق ربط، و از این رو، نشانه‌ی نادرستیِ استدلال است.

۳. ۲. برهان روابط ادعاشده در تحلیل سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه

برهان روابط بالا در این بخش به صورت جداگانه آمده است تا خواننده در صورت نداشتن تمایل به بررسی جزییات، بتواند از آن گذر کند. از آن‌جا که در منطق ربط، دو ادات شرطی با قواعد کاملاً متفاوت وجود دارد (یعنی شرطی‌های $\rightarrow$ و $\supset$)، برهان‌ها پیچیده‌تر و دقیق‌تر است و یافتن مثال نقض، حتی به مراتب دشوارتر. برای نمونه، قاعده‌ی استلزام برای شرطی $\rightarrow$ دیگر قاعده‌ای دوطرفه نیست و قاعده‌ی وضع مقدم برای $\supset$، اصولاً برقرار نیست. هم‌چنین شرطی ربطی مستلزم شرطی تابع ارزشی است و نه برعکس.

در برهان‌ها و اثبات‌های زیر، تلاش کرده‌ایم قواعد منطق ربط را کاملاً رعایت کنیم، در نتیجه، گاه ناگزیر شده‌ایم برای استدلالی که برهان کوتاهی در منطق کلاسیک دارد، برهانی به مراتب پیچیده‌تر ارائه کنیم تا از قواعد منطق ربط سرپیچی نکرده باشیم. همچنین برای پیش‌گیری از طولانی شدن غیرضروری برهان‌ها، تلاش کرده‌ایم تا جایی که به ایجاز مخل دچار نشویم، برهان‌ها را به صورت چکیده و چند گام در یک گام بازسازی کنیم.

۳. ۲. ۱. براهین اثبات‌پذیری

۱. استدلال از فرمول (الف) به فرمول (ه) به قرار زیر است:

$$\frac{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\supset B)]}{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}$$

برهان:

وقتی «شرطی ربطی» مستلزم «شرطی تابع ارزشی» است، بنابراین نقیض «شرطی تابع ارزشی» مستلزم نقیض «شرطی ربطی» خواهد بود.

۲. استدلال از فرمول (ب) به فرمول (ج) به قرار زیر است:

$$\frac{\Box (A \rightarrow \sim B)}{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}$$

برهان:

مقدمه	$\Box(A \rightarrow \sim B)$	(۱)	۱
مقدمه	$\Box((A \wedge p) \rightarrow B)$	(۲)	۲
عکس نقیض (۱)	$\Box(B \rightarrow \sim A)$	(۳)	۱
تعدی[۴] (۲و۳)	$\Box((A \wedge p) \rightarrow \sim A)$	(۴)	۲,۱
استلزام (۴)	$\Box(\sim(A \wedge p) \vee \sim A)$	(۵)	۲,۱
دمورگان (۵)	$\Box(\sim A \vee \sim p \vee \sim A)$	(۶)	۱ ,۲
تکرار (۶)	$\Box(\sim A \vee \sim p)$	(۷)	۱,۲
دمورگان (۷)	$\Box \sim (A \wedge p)$	(۸)	۱,۲
نقض جهت (۸)	$\sim \Diamond (A \wedge p)$	(۹)	۱,۲
دلیل شرطی (۲و۹)	$\Box((A \wedge p) \rightarrow B) \rightarrow \sim \Diamond (A \wedge p)$	(۱۰)	۱
عکس نقیض (۱۰)	$\Diamond (A \wedge p) \rightarrow \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)$	(۱۱)	۱
معرفی سور$\forall$(۱۱)	$\forall p[\Diamond(A \wedge p) \rightarrow \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)]$	(۱۲)	۱

تمامی مراحل این برهان بر طبق قوانین منطق ربط است (در حالی که اثبات عکس آن نیازمند قوانین غیرربطی است).

۳. استدلال از فرمول (ج) به فرمول (د):

$$\frac{\forall p[\Diamond(A \wedge p) \rightarrow \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)]}{\Box(A \supset \sim B)}$$

برهان:

مقدمه	$\forall p[\Diamond(A \wedge p) \rightarrow \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)]$	(۱)	۱
عکس نقیض (۱)	$\forall p[\Box((A \wedge p) \rightarrow B) \rightarrow \sim \Diamond(A \wedge p)]$	(۲)	۱
نقض جهت (۲)	$\forall p[\Box((A \wedge p) \rightarrow B) \rightarrow \Box(A \supset \sim p)]$	(۳)	۱
حذف سور $\forall$ (۳)	$\Box((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow \Box(A \supset \sim B)$	(۴)	۱
معرفی قضیه	$\Box((A \wedge B) \rightarrow B)$	(۵)	
وضع مقدم (۴ و ۵)	$\Box(A \supset \sim B)$	(۶)	۱

۴. استدلال از فرمول (د) به فرمول (ه) به قرار زیر است:

$$\frac{\Box(A \supset \sim B)}{\forall p[\Diamond(A \wedge p) \supset \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)]}$$

برهان:

۱	(۱)	$\Box (A \supset \sim B)$	مقدمه
۲	(۲)	$\sim [\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	فرض
۲	(۳)	$\Diamond(A\wedge p) \wedge \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	استلزام و دمورگان (۲)
۲	(۴)	$\Diamond(A\wedge p)$	حذف عاطف (۳)
۲	(۵)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	حذف عاطف (۳)
۲	(۶)	$\Diamond$ $(A\wedge p)$	ورود (۴)[5]
۲	(۷)	$((A\wedge p)\rightarrow B)$	ورود (۵)
۲	(۸)	B	وضع مقدم (۶ و ۷)
۲	(۹)	A	حذف عاطف (۶)
۲	(۱۰)	$A \wedge B$	معرفی عاطف (۸ و ۹)
۲	(۱۱)	$\Diamond(A\wedge B)$	خروج (۱۰)
۲	(۱۰)	$\sim \Box (A \supset \sim B)$	نقض جهت (۱۱)
	(۱۱)	$\sim [\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)] \rightarrow \sim \Box (A\supset \sim B)$	دلیل شرطی (۲-۱۰)
	(۱۲)	$\Box (A \supset \sim B) \rightarrow [\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	عکس نقیض (۱۱)
۱	(۱۳)	$\Diamond (A \wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	وضع مقدم (۱ و ۱۲)
۱	(۱۴)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	معرفی سور $\forall$ (۴)

۳. ۲. ۲. براهین اثبات‌ناپذیری

۱. استدلال از فرمول (ج) به فرمول (ب) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}{\Box (A \rightarrow \sim B)}$$

اثبات‌ناپذیری این استدلال به این دلیل است که پذیرش آن، فرمول‌های ناقضیه را قضیه می‌سازد که یک نمونه‌ی آن در زیر اثبات می‌شود:

(۱)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim\Box\sim(A\wedge p)]$	معرفی قضیه
(۲)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim\Box((A\wedge p)\rightarrow f)]$	تعریف نقیض[6] به استلزام f (۱)
(۳)	$\Box (A \rightarrow \sim f)$	معرفی استدلال بالا (۲)
(۴)	$\Box (A \rightarrow t)$	تعریف t (۳)

۲. استدلال از فرمول (د) به فرمول (ج) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\Box (A \supset \sim B)}{\forall p[\Diamond(A \wedge p) \rightarrow \sim\Box((A \wedge p) \rightarrow B)]}$$

اثبات‌ناپذیری این استدلال به دلیل قضیه نبودن فرمول زیر است:

$$\nvdash \Box (A \supset \sim B) \rightarrow \forall p\, [\Diamond(A \wedge p) \rightarrow \sim \Box((A \wedge p) \rightarrow B)]$$

و قضیه نبودن این فرمول نیز به دلیل برهان خلف است. اگر این فرمول قضیه باشد، آن‌گاه باید فرمول حاصل از حذف جهات $\Box$ و $\Diamond$ در منطق ربط گزاره‌ها اثبات‌پذیر باشد. اما حذف جهات فرمول زیر را به دست می‌دهد:

$$(A \supset \sim B) \rightarrow \forall p\, [(A \wedge p) \rightarrow \sim ((A \wedge p) \rightarrow B)]$$

این فرمول اثبات‌پذیر نیست، زیرا فرمول‌هایی را نتیجه می‌دهد که قضیه‌ی منطق ربط نیستند:

(۱)	$(A \supset \sim B) \rightarrow \forall p\, [(A \wedge p) \rightarrow \sim ((A \wedge p) \rightarrow B)]$	فرض
(۲)	$(A \supset \sim B) \rightarrow [(A \wedge A) \rightarrow \sim ((A \wedge A) \rightarrow B)]$	حذف سور $\forall$ (۱)
(۳)	$(A \supset \sim B) \rightarrow [A \rightarrow \sim (A \rightarrow B)]$	تکرار (۲)
(۴)	$(A \supset \sim B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \sim A]$	عکس نقیض (۳)
(۵)	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \supset \sim B) \rightarrow \sim A]$	جابجایی مقدم (۴)
(۶)	$(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow \sim (A \supset \sim B)]$	عکس نقیض (۵)
(۷)	$(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \wedge B)]$	معرفی صورت برهان (۶)
(۸)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$	حذف عاطف (۷)

اما فرمول (۸) در مدل نقض زیر کاذب است:

			A 1
$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	$(A \rightarrow A)$	
1	0	0	A B 0 1

و بنابراین قضیه‌ی منطق ربط نیست.

۳. استدلال از فرمول (الف) به فرمول (ج) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dfrac{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p)\supset B)]}{\forall p\,[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}$$

اثبات‌ناپذیری این استدلال به دلیل قضیه نبودن فرمول زیر است:

$$\nvdash\ \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow \forall p\,[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \sim \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$$

و قضیه نبودن این فرمول نیز به دلیل برهان خلف است. اگر این فرمول قضیه باشد، آن‌گاه باید فرمول حاصل از حذف جهات $\Box$ و $\Diamond$ در منطق ربط گزاره‌ها اثبات‌شدنی باشد. اما حذف جهات فرمول زیر را به دست می‌دهد:

$$\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)]\rightarrow \forall p\ [(A\wedge p) \rightarrow \sim ((A\wedge p)\rightarrow B)]$$

این فرمول اثبات‌پذیر نیست، زیرا فرمول‌هایی را نتیجه می‌دهد که قضیه منطق ربط نیستند:

(۱)	$\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow \forall p\ [(A\wedge p) \rightarrow \sim ((A\wedge p)\rightarrow B)]$	فرض
(۲)	$\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow [(A\wedge A) \rightarrow \sim ((A\wedge A)\rightarrow B)]$	حذف سور $\forall$ (۱)
(۳)	$\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow [A \rightarrow \sim (A\rightarrow B)]$	تکرار (۲)
(۴)	$\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow [(A\rightarrow B) \rightarrow \sim A]$	عکس نقیض (۳)
(۵)	$(A\rightarrow B) \rightarrow [\forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)] \rightarrow \sim A]$	جابجایی مقدم (۴)
(۶)	$(A\rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow \sim \forall p[\ (A\wedge p) \supset \sim ((A\wedge p)\supset B)]\ ]$	عکس نقیض (۵)
(۷)	$(A\rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow \exists p[\ (A\wedge p) \wedge ((A\wedge p)\supset B)]\ ]$	معرفی صورت برهان (۶)
(۸)	$(A\rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$	حذف عاطف (۷)

اما در بند پیش نشان دادیم که فرمول (۸) قضیه‌ی منطق ربط نیست.

۴. استدلال از فرمول (ب) به (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dfrac{\Box\ (A \rightarrow \sim B)}{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \sim\Box((A\wedge p)\supset B)]}$$

اثبات‌ناپذیری این استدلال به دلیل قضیه نبودن فرمول زیر است:

$$\nvdash \Box (A \rightarrow \sim B) \rightarrow \forall p\, [\Diamond(A \wedge p) \supset \sim \Box((A \wedge p) \supset B)]$$

و قضیه نبودن این فرمول، نیز به دلیل برهان خلف است. اگر این فرمول قضیه باشد، آن‌گاه باید فرمول حاصل از حذف جهات $\Box$ و $\Diamond$ در منطق ربط گزاره‌ها اثبات‌پذیر باشد. اما حذف جهات فرمول زیر را به دست می‌دهد:

(۱)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \forall p\, [\, (A \wedge p) \supset \sim ((A \wedge p) \supset B)]$	حذف جهات
(۲)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow [\, (A \wedge A) \supset \sim ((A \wedge A) \supset B)]$	حذف سور (۱)
(۳)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow [\, A \supset \sim (A \supset B)]$	تکرار (۲)
(۴)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow [\, A \supset (A \wedge \sim B)]$	استلزام و دمورگان (۳)
(۵)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow [\, \sim A \vee (A \wedge \sim B)]$	استلزام (۴)
(۶)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow [\, (\sim A \vee A) \wedge (\sim A \vee \sim B)]$	پخش‌پذیری (۵)
(۷)	$\vdash$	$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow (\sim A \vee A)$	حذف عاطف (۶)

اما فرمول اخیر قضیه نیست، زیرا در وضعیت‌های غیرجهان، می‌تواند کاذب باشد.

۵. بنابراین، فرمول (الف) را نمی‌توان از هیچ‌یک از فرمول‌های (ج)، (د) یا (ه) به دست آورد، زیرا همه‌ی آن‌ها ضعیف‌تر از فرمول (ب) هستند و دیدیم که (ب) نمی‌تواند (الف) را نتیجه دهد.

۶. استدلال از فرمول (الف) به (د) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\forall p[\Diamond(A \wedge p) \supset \sim\Box((A \wedge p) \supset B)]}{\Box\, (A \supset \sim B)}$$

اثبات‌ناپذیری این استدلال به دلیل اثبات‌ناپذیری عکس نقیض آن است:

$$\frac{\Diamond\, (A \wedge B)}{\exists p[\Diamond(A \wedge p) \wedge \Box((A \wedge p) \supset B)]}$$

اگر این استدلال اثبات پذیر باشد، آن‌گاه به ازای هر A و B یک گزاره‌ی p وجود دارد که دو استدلال زیر هم‌زمان برای آن‌ها اثبات‌پذیر خواهند بود:

$$\frac{\Diamond (A \wedge B)}{\Diamond p} \qquad\qquad \frac{\Diamond (A \wedge B)}{\Box((A\wedge p)\supset B)}$$

اما چنین چیزی ممکن نیست، زیرا بنا به استدلال سمت چپ، p حداکثر هم‌توان $A \wedge B$ است، اما جای‌گزین کردن فرمولی با توان $A \wedge B$ به جای p در استدلال سمت راست نیز نمی‌تواند این استدلال را اثبات‌پذیر سازد، زیرا با این جای‌گزینی، دو استدلال زیر به دست می‌آید که درمنطق ربط، اثبات‌پذیر نیستند:

$$\frac{\Diamond (A \wedge B)}{\Box((A \wedge A \wedge B)\supset B)} \qquad\qquad \frac{\Diamond (A \wedge B)}{\Box((A \wedge B)\supset B)}$$

نگارنده از آن‌جا که در درستی این اثبات تردید داشت، از ادوین مِرز[7] درخواست کرد که درباره‌ی درستی یا نادرستی صورت برهان بحث‌شده نظر دهد. مرز یکی از پیش‌گامان منطق ربط در دوره‌ی معاصر است و در این زمینه، یک کتاب و چندین مقاله دارد. کتاب او و کتاب استیون رید تا آن‌جا که نگارنده اطلاع دارد، تنها کتاب‌های آموزشی در منطق ربط هستند. پاسخ مرز در تاریخ ۱۹ شهریور ۱۳۸۸ یک مدل نقض بود که شرطی آن شرایط صدق شرطی کلاسیک را دارد، اما ناقض آن از شرایط صدق ناقض در منطق ربط برخوردار است. این مثال نقض به صورت زیر است:

M=<W,0,*,S,V>
W={1,2,3,4,5};
0={1};
1*=1, 4*=5, 5*=4, (2*=3);
S11, S22, S33, S44, S55; S23, S45;

همه‌ی متغیرهای گزاره‌ای در ۴ کاذب و در ۵ صادق هستند؛ متغیرهای A و B در ۳ صادق هستند.[8]

می‌توان نشان داد که در این مدل، همه‌ی فرمول‌ها در ۴ کاذب و در ۵ صادق هستند و فرمول $\Diamond(A\wedge B)$ در ۲ صادق است. مرز ادعا کرده است که فرمول $\Box((A\wedge p)\supset B)$ در ۲ به ازای هر فرمول p کاذب است که برای نگارنده چندان مفهوم نیست. این ادعا در صورتی درست است که به جای S23، داشته باشیم: S24 و S25 و S54.

۳. ۳. بررسی صورت‌بندی‌های گوناگون سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه

بر پایه‌ی داده‌های جدول (۱)، نتایج زیر به دست می‌آید:

۱. به‌رغم این‌که سالبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی (فرمول (ه)) در منطق کلاسیک، معادل است با «لزوم سلب تابع ارزشی» (فرمول (د))، اما این هم‌ارزی و تعادل به حد

«هم‌توانی» یا «هم‌ارزی ربطی» نمی‌رسد و از این‌رو، فرمول‌های این دو سالبه‌ی کلیه در منطق ربط، معادل و هم‌توان نیستند.

۲. سالبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی نسبتی با «لزوم سلب ربطی» یا «لزوم سلب تابع‌ارزشی» ندارد و این دلیل خوبی است بر نادرستیِ اسناد آن به ابن‌سینا.

۳. سالبه‌ی کلیه‌ی ربطی – تابع ارزشی به طور قطعی، ضعیف‌تر و عام‌تر از «لزوم سلب ربطی» و «لزوم سلب تابع ارزشی» است و این می‌تواند تأییدی بر درست بودن استناد آن به شرطی لزومی سالبه‌ی کلیه نزد ابن‌سینا باشد (هرچند این تأیید به مرحله‌ی دلیل نمی‌رسد).

۴. اما فرمول «سالبه‌ی کلیه‌ی ربطی - تابع ارزشی» ایرادی دارد و آن این است که از $\sim A \square$ نتیجه می‌شود و این به پارادوکسی شبیه پارادوکس استلزام اکید دچار می‌شود: گزاره‌های ممتنع (مانند «مربع، دایره است») مستلزم هیچ گزاره‌ای نیستند (حتی خودشان)، یعنی داریم: «هرگز چنین نیست که اگر مربع دایره باشد، مربع دایره است». این گزاره بر پایه‌ی فرمول «سالبه‌ی کلیه‌ی ربطی - تابع ارزشی» صادق است، اما بعید است که ابن سینا صدق آن را بپذیرد.

۵. سالبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی عام‌تر از «لزوم سلب ربطی» (و خاص‌تر از «لزوم سلب تابع‌ارزشی») است و این تأییدی بر درستی اسناد آن به ابن سینا است.

۶. از آن‌جا که برای سالبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی از یک سو، تأیید وجود دارد و از سوی دیگر، ایرادی بر آن دیده نمی‌شود، می‌توان این تحلیل را تحلیل مدنظر ابن سینا دانست.

۴. لزوم ربطی در موجبه‌ی کلیه

اکنون که تحلیل صوری از سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه را از نظر ابن سینا یافتیم، مناسب است که تحلیل صوری از موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه از نظر او را نیز بیابیم. در این‌جا، باید رابطه‌ی انواع شرطی لزومی موجبه‌ی کلیه را با انواع «لزوم ساده» بیان کنیم. این رابطه‌ها را در نمودار زیر گرد آورده‌ایم:

(الف)

موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی

$\forall p\ \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$

$\downarrow\uparrow$

$\Box(A\rightarrow B)$

لزوم ربطی

$\nleftarrow\ \nrightarrow$

(ب)

موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی

$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

$\downarrow\uparrow$

$\Diamond A\rightarrow \Box(A\rightarrow B)$

لزوم ربطی مشروط (ربطی)

$\downarrow\not\uparrow$ $\downarrow\not\uparrow$

(ج)

لزوم ربطی مشروط (تابع‌ارزشی)

$\Diamond A\supset \Box(A\rightarrow B)$

$\downarrow\uparrow$

$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی– تابع ارزشی

(ج)

$\downarrow\not\uparrow$

(د)

موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع‌ارزشی

$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset \Box((A\wedge p)\supset B)]$

$\downarrow\uparrow$

$\Box(A\supset B)$

لزوم تابع‌ارزشی

(د)

جدول (۲) رابطه‌ی انواع موجبه‌ی کلیه با انواع لزوم ساده

۴. ۱. برهان روابط ادعا شده در تحلیل موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه

۴. ۱. ۱. براهین اثبات‌پذیری

۱ و ۲. استدلال درون مستطیل (الف):

$$\frac{\forall p\ \Box((A\wedge p)\rightarrow B)}{\Box(A\rightarrow B)}$$

برهان:

۱	(۱)	$\forall p\ \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	مقدمه
۱	(۲)	$\Box((A\wedge A)\rightarrow B)$	حذف سور (۱)
۱	(۳)	$\Box\ (A\rightarrow B)$	تکرار (۲)

۱	(۱)	$\Box(A\rightarrow B)$	مقدمه
	(۲)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow A)$	معرفی قضیه
۱	(۳)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	تعدی (۱ و ۲)
۱	(۴)	$\forall p\ \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	معرفی سور $\forall$ (۳)

۳ و ۴. استدلال درون مستطیل (ب):

$$\frac{\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}{\Diamond A \rightarrow \Box\ (A\rightarrow B)}$$

برهان:

۱	(۱)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	مقدمه
۱	(۲)	$\Diamond(A\wedge A) \rightarrow \Box((A\wedge A)\rightarrow B)$	حذف سور (۱)
۱	(۳)	$\Diamond A \rightarrow \Box(A\rightarrow B)$	تکرار (۲)

۱	(۱)	$\Diamond A \rightarrow \Box(A\rightarrow B)$	مقدمه
۲	(۲)	$\Diamond (A \wedge p)$	فرض
۲	(۳)	$\Diamond\ A$	حذف عاطف (۲)
۱,۲	(۴)	$\Box(A\rightarrow B)$	وضع مقدم (۱و۳)
	(۵)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow A)$	معرفی قضیه
۱,۲	(۶)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	تعدی (۴ و ۵)
۱	(۷)	$\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	دلیل شرطی (۲و۶)
۱	(۸)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	معرفی سور $\forall$ (۷)

۵ و ۶. استدلال درون مستطیل (ج):

$$\frac{\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]}{\Diamond A\supset\Box(A\rightarrow B)}$$

برهان:

مقدمه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	(۱)	۱
حذف سور (۱)	$\Diamond(A\wedge A)\supset\Box((A\wedge A)\rightarrow B)$	(۲)	۱
تکرار (۲)	$\Diamond A\supset\Box(A\rightarrow B)$	(۳)	۱

مقدمه	$\Diamond A\supset\Box(A\rightarrow B)$	(۱)	۱
استلزام و نقض جهت (۱)	$\Box\sim A\vee\Box(A\rightarrow B)$	(۲)	۱
فرض	$\Box\sim A$	(۳)	۳
معرفی فاصل و دمورگان (۳)	$\Box\sim(A\wedge p)$	(۴)	۳
معرفی ∨ (۴)	$\Box\sim(A\wedge p)\vee\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	(۵)	۳
فرض	$\Box(A\rightarrow B)$	(۶)	۶
معرفی قضیه	$\Box((A\wedge p)\rightarrow A)$	(۷)	
تعدی (۶ و ۷)	$\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	(۸)	۶
معرفی ∨ (۸)	$\Box\sim(A\wedge p)\vee\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	(۹)	۶
حذف ∨ (۲و۳-۵ و۶-۹)	$\Box\sim(A\wedge p)\vee\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	(۱۰)	۱
نقض جهت و استلزام (۱۰)	$\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\rightarrow B)$	(۱۱)	۱
معرفی سور ∀ (۱۱)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	(۱۲)	۱

۷ و ۸. استدلال درون مستطیل (د):

$$\frac{\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\supset B)]}{\Box(A\supset B)}$$

برهان:

مقدمه	$\forall p[\Diamond(A\wedge p)\supset\Box((A\wedge p)\supset B)]$	(۱)	۱
حذف سور (۱)	$\Diamond(A\wedge A)\supset\Box((A\wedge A)\supset B)$	(۲)	۱
تکرار (۲)	$\Diamond A\supset\Box(A\supset B)$	(۳)	۱

۱	(۴)	$\sim \Diamond A \vee \Box(A \supset B)$	استلزام (۳)
۱	(۵)	$\Box \sim A \vee \Box(A \supset B)$	نقض جهت (۴)
۱	(۶)	$\Box (\sim A \vee B) \vee \Box(A \supset B)$	معرفی فاصل (۵)
۱	(۷)	$\Box(A \supset B) \vee \Box(A \supset B)$	استلزام (۶)
۱	(۸)	$\Box(A \supset B)$	تکرار (۷)

۱	(۱)	$\Box(A \supset B)$	مقدمه
۱	(۲)	$\Box(\sim A \vee B)$	استلزام (۱)
۱	(۳)	$\Box(\sim A \vee \sim p \vee B)$	معرفی فاصل (۲)
۱	(۴)	$\Box((A\wedge p) \supset B)$	دمورگان و استلزام (۳)
۱	(۵)	$\Box\sim (A \wedge p) \vee \Box((A\wedge p) \supset B)$	معرفی $\vee$ (۴)
۱	(۶)	$\sim\Box\sim (A \wedge p) \supset \Box((A\wedge p) \supset B)$	استلزام (۵)
۱	(۷)	$\Diamond(A \wedge p) \supset \Box((A\wedge p) \supset B)$	تعریف $\Diamond$ (۶)
۱	(۸)	$\forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p) \supset B)]$	معرفی سور $\forall$ (۷)

۹ و ۱۰. استدلال از مستطیل (ب) به مستطیل (ج) و از مستطیل (ج) به مستطیل (د) به کمک این قاعده اثبات می‌شود که «شرطی ربطی» مستلزم «شرطی تابع‌ارزشی» است.

۱۱ و ۱۲. استدلال از مستطیل (الف) به مستطیل (ج)، بنا به قاعده‌ی معرفی فاصل و قاعده‌ی استلزام است.

۴. ۱. ۲. براهین اثبات‌ناپذیری

۱. اثبات‌ناپذیری از مستطیل(الف) به مستطیل(ب) به دلیل نادرستی استدلال‌های زیر است:

$$\Box (A\rightarrow B) \quad \vdash \quad (\Diamond A \rightarrow \Box (A\rightarrow B))$$

برای اثبات‌ناپذیری این استدلال، از برهان خلف استفاده می‌کنیم: اگر استدلال اول اثبات‌پذیر باشد، آن‌گاه باید استدلال حاصل از حذف جهات $\Box$ و $\Diamond$ در منطق ربط گزاره‌ها اثبات‌شدنی باشد. اما حذف جهات استدلال زیر را به دست می‌دهد:

$$(A\rightarrow B) \quad \vdash \quad (A \rightarrow (A\rightarrow B))$$

این استدلال قاعده‌ی «انبساط»[۹] و عکس قاعده‌ی «انقباض»[۱۰] است که نادرستی آن معروف است.

۲. اثبات‌ناپذیری از مستطیل(ب) به مستطیل(الف) به دلیل نادرستی استدلال‌های زیر است:

$$(\Diamond A \rightarrow \Box (A \rightarrow B)) \quad \vdash \quad \Box (A \rightarrow B)$$

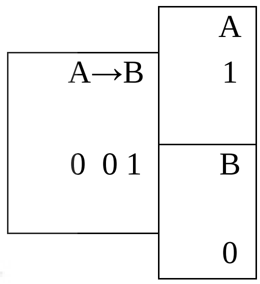
برای این استدلال نمی‌توان از روش حذف جهت استفاده کرد، زیرا با حذف جهت به قاعده می‌رسیم:

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad \vdash \quad (A \rightarrow B)$$

که «قاعده‌ی انقباض» نام دارد و در منطق ربط قاعده‌ای درست به شمار می‌رود. بنابراین ناگزیریم برای آن، مدل نقض بیابیم. برای این منظور، مدل نقض زیر را در نظر بگیرید:

$(\Diamond A \rightarrow \Box (A \rightarrow B))$	$\Box (A \rightarrow B)$
00 1 0 0 1 0	0 0 1 0

$\Rightarrow$



۳ و ۴. اثبات‌ناپذیری از مستطیل(ج) به مستطیل‌های(الف) و (ب) با برهان خلف ثابت می‌شود: قبلاً ثابت شد که مستطیل(الف) مستلزم مستطیل(ج) است، اکنون اگر مستطیل (ج) مستلزم مستطیل(ب) باشد آن‌گاه مستطیل(الف) مستلزم مستطیل(ب) خواهد بود، اما این خلاف چیزی است که در مرحله‌ی(۱) اثبات شد.

هم‌چنین قبلاً ثابت شد که مستطیل(ب) مستلزم مستطیل(ج) است، اکنون اگر مستطیل(ج) مستلزم مستطیل(الف) باشد، آن‌گاه مستطیل(ب) مستلزم مستطیل(الف) خواهد بود؛ اما این خلاف چیزی است که در مرحله‌ی(۲) اثبات شد.

۵. اثبات‌ناپذیری از مستطیل(د) به مستطیل(ج) به دلیل نادرستی استدلال زیر است:

$$\Box (A \supset B) \quad \vdash \quad (\Diamond A \supset \Box (A \rightarrow B))$$

و نادرستی این استدلال نیز به دلیل برهان خلف است: فرض کنید این استدلال درست است، در این صورت، استدلال حاصل از حذف جهات $\Box$ و $\Diamond$ نیز، در منطق ربط گزاره‌ها، اثبات‌شدنی خواهد بود. اما حذف جهات استدلال زیر را به دست می‌دهد:

$$(A \supset B) \quad \vdash \quad (A \supset (A \rightarrow B))$$

که با نمونه‌ی جانشینی، استدلال زیر را نتیجه می‌دهد:

$$((A\to A)\supset(B\to B)) \quad \vdash \quad ((A\to A)\supset((A\to A)\to(B\to B)))$$

اما مقدمه‌ی این استدلال قضیه است:

$$\vdash (A\to A)\supset(B\to B)$$

و بنا به وضع مقدم، فرمول زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\vdash (A\to A)\supset[(A\to A)\to(B\to B)]$$

و با قاعده‌ی گاما، فرمول زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\vdash (A\to A)\to(B\to B)$$

اما فرمول اخیر، به دلیل فقدان متغیر مشترک میان مقدم و تالی، نمی‌تواند قضیه‌ی منطق ربط باشد.

۴. ۲. بررسی صورت‌بندی‌های گوناگون موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه

بر پایه‌ی روابط یادشده در صورت‌بندی‌های موجبه‌ی کلیه، به هریک از این صورت بندی‌ها ایرادی وارد است که ادامه‌ی بحث را به ایراد هر کدام به صورت جداگانه اختصاص می‌دهیم:

الف) امکان کذب شرطی با وحدت مقدم و تالی: موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی معادل لزوم ربطی مشروط است و این می‌تواند دلیلی بر نادرستی آن و نبود جواز اسناد آن به ابن سینا باشد، زیرا اگر گزاره‌ی شرطی لزومی موجبه‌ی کلیه‌ی «هرگاه الف آن‌گاه الف» را به صورت موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی تفسیر کنیم، بنا به استنتاجات بالا، این گزاره معادل گزاره‌ی زیر خواهد گشت:

$$\Diamond A\to\Box(A\to A)$$

اما این گزاره قضیه‌ای در منطق ربط نیست و بنابراین صدق منطقی ندارد، در حالی‌که گزاره‌ی «هرگاه الف آن‌گاه الف» بدون شک از نظر ابن سینا صدق منطقی دارد. بنابراین اسناد موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی به ابن سینا درست نیست و این خود ترجیحی است بر موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی - تابع ارزشی.

ب) صدق شرطی با امتناع مقدم: موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی- تابع ارزشی، خود، ایراد دیگری دارد و آن ایراد این‌که فرمول آن از $\Box\sim A$ نتیجه می‌شود و این به پارادوکسی شبیه پارادوکس استلزام اکید دچار می‌شود: گزاره‌های ممتنع مستلزم هر گزاره‌ای می‌شوند. برای نمونه، باید داشته باشیم: «هرگاه مربعْ دایره باشد، هوا سرد خواهد بود». این گزاره بر پایه‌ی فرمول موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی- تابع ارزشی صادق است، اما بعید است که ابن سینا صدق آن را بپذیرد!

ج) موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی نیز به همان ایرادی دچار است که موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی- تابع ارزشی.

د) سکوت درباره‌ی امکان مقدم: موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی به ایراد سومی گرفتار است و آن این‌که درباره‌ی امکان مقدم ساکت است، در حالی که ابن‌سینا و خواجه نصیر در باب امکان مقدم در موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه فراوان سخن گفته‌اند (۱، صص: ۲۳۸ - ۲۴۰، ۲۶۶ - ۲۶۹، ۲۷۲ - ۲۷۵، ۲۹۶ – ۳۰۲؛ ۸، ص: ۸۱).

۴. ۳. موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه و امکان مقدم

نگارنده در مقاله‌ی «لزومی حقیقی و لزومی لفظی» نشان داده است که از نظر ابن سینا و پیروان او، امکان و امتناع مقدم بخشی از تحلیل شرطی‌های لزومی است (۱۴، صص: ۱۰۸ - ۱۱۹). افزودن امکان و امتناع مقدم به تحلیل شرطی‌های لزومی به ترتیب، به «لزومی حقیقی» و «لزومی لفظی» می‌آنجامد (همان، ص: ۱۲۲). اکنون اگر لزوم در موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه را لزومی حقیقی بگیریم و $\Diamond A$ را به تحلیل‌های ارائه‌شده برای موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه بیفزاییم، نمودار آن به نمودار زیر تبدیل می‌شود:

موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی		موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی
$\Diamond A \wedge \forall p\, \Box((A\wedge p)\to B)$	$\nleftarrow\rightarrow$	$\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \to \Box((A\wedge p)\to B)]$
$\downarrow\uparrow$		$\downarrow\uparrow$
$\Diamond A \wedge \Box (A\to B)$	$\nleftarrow\rightarrow$	$\Diamond A \wedge [\Diamond A \to \Box (A\to B)]$
لزوم ربطی		لزوم ربطی مشروط
$\downarrow\uparrow$		$\downarrow\not\uparrow$

لزوم ربطی مشروط $\Diamond A \wedge [\Diamond A \supset \Box (A\to B)]$

$\downarrow\uparrow$

موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی – تابع ارزشی $\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\to B)]$

$\downarrow\not\uparrow$

موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی $\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\supset B)]$

$\downarrow\uparrow$

لزوم تابع ارزشی $\Diamond A \wedge \Box (A\supset B)$

این نمودار نیز به نمودار زیر فرومی‌کاهد:

موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی	$\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
لزوم ربطی مشروط	$\Diamond A \wedge [\Diamond A \rightarrow \Box\ (A\rightarrow B)]$

$\downarrow\not\Uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\not\Uparrow$

موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی	$\Diamond A \wedge \forall p\ \Box((A\wedge p)\rightarrow B)$
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
لزوم ربطی	$\Diamond A \wedge \Box\ (A\rightarrow B)$
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
لزوم ربطی مشروط	$\Diamond A \wedge [\Diamond A \supset \Box\ (A\rightarrow B)]$
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی – تابع ارزشی	$\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$

$\downarrow\not\Uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\not\Uparrow$

موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی	$\Diamond A \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\supset B)]$
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
لزوم تابع ارزشی	$\Diamond A \wedge \Box\ (A\supset B)$

چکیده‌ی این نمودار در زیر آمده است:

لزوم ربطی مشروط	$\Diamond A \wedge [\Diamond A \rightarrow \Box\ (A\rightarrow B)]$

$\downarrow\not\Uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\not\Uparrow$

لزوم ربطی	$\Diamond A \wedge \Box\ (A\rightarrow B)$

$\downarrow\not\Uparrow$ $\qquad$ $\downarrow\not\Uparrow$

لزوم تابع ارزشی	$\Diamond A \wedge \Box\ (A\supset B)$

اکنون هیچ‌یک از ایرادهای سه‌گانه‌ی وارد بر تحلیل پیشین بر این تحلیل وارد نیست: اولاً همه‌ی فرمول‌ها در این تحلیل، امکان مقدم را به صورت صریح، در صورت‌بندی خود جای داده‌اند؛ ثانیاً هیچ‌کدام از این فرمول‌ها از $\Box \sim A$ نتیجه نمی‌شود؛ ثالثاً گزاره‌ی «هرگاه الف، آن‌گاه الف»، هرچند با هیچ‌یک از این فرمول‌ها قضیه نخواهد بود، در لزومی‌های حقیقی، این مسأله ایراد به شمار نمی‌آید، زیرا آشکار است که گزاره‌ی «هرگاه الف، آن‌گاه الف» هنگامی‌که لزومی حقیقی است، دلالت بر امکان مقدم دارد و بنابراین به طور طبیعی، نباید قضیه‌ی منطقی باشد.

(از این‌جا، می‌توان دریافت که در تحلیل پیشین، ایراد «سکوت درباره‌ی امکان مقدم» در حقیقت، ایراد نبوده است، زیرا این ایراد هنگامی ایراد به شمار می‌آید که بخواهیم لزومی را لزومی حقیقی بگیریم؛ اما در صورتی که بخواهیم لزومی را مطلق لزومی و اعم از لزومی

حقیقی و لفظی بگیریم، «سکوت درباره‌ی امکان مقدم» نه‌تنها ایراد نیست، بلکه امتیاز است).

۴. ۴. یک امتیاز برای تحلیل‌های اخیر

تحلیل‌های اخیر از موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه، افزون بر گریز از دشواری‌های پیش‌گفته، امتیاز بزرگی دارد و آن این‌که صورت‌بندی‌های موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه در این تحلیل، معادل فرمول‌های زیر است:

$\exists p\, \Diamond(A\wedge p) \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \rightarrow \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً ربطی
$\downarrow\not\uparrow$	$\downarrow\not\uparrow$
$\Diamond\, \exists p\, (A\wedge p) \wedge \Box\, \forall p\, ((A\wedge p)\rightarrow B)$	موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
$\exists p\, \Diamond(A\wedge p) \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\rightarrow B)]$	موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی – تابع ارزشی
$\downarrow\not\uparrow$	$\downarrow\not\uparrow$
$\exists p\, \Diamond(A\wedge p) \wedge \forall p[\Diamond(A\wedge p) \supset \Box((A\wedge p)\supset B)]$	موجبه‌ی کلیه‌ی کاملاً تابع ارزشی

(در سه حالت، $\Diamond A$ را با معادل آن، $\exists p\, \Diamond(A\wedge p)$، جای‌گزین کرده‌ایم. در فرمول موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی، افزون بر این کار، با فرض پذیرش فرمول بارکان و عکس آن، جای سور و جهت را نیز جابه‌جا کرده‌ایم).

اکنون می‌بینیم که فرمول موجبه‌ی کلیه‌ی ربطی نمونه‌ی جانشینی برای فرمول زیر است که نگارنده پیش‌تر برای موجبه‌ی کلیه‌ی «حقیقیه» ارائه کرده است (۱۰، ص: ۵۲):

هر الف ب است $\quad \Diamond\, \exists x\, Ax \wedge \Box\, \forall x\, (Ax \rightarrow Bx)$

سه فرمول دیگر نیز نمونه‌ی جانشینی برای فرمول زیر است که نگارنده در همان مقاله، برای موجبه‌ی کلیه‌ی «خارجیه» ارائه کرده است (همان):

هر الف ب است $\quad \exists x\, Ax \wedge \forall x\, (Ax \rightarrow Bx)$

توجه کنید که نگارنده در یک مقاله‌ی دیگر، فرمول اخیر را برای موجبه‌ی کلیه‌ی «حقیقیه» معرفی می‌کند (۱۲، ص: ۷۱). تطبیق فرمول‌های بخش پیش که برای شرطی‌ها هستند، با فرمول‌های ارائه‌شده برای حملیه‌های حقیقیه و خارجیه امتیازی برای فرمول‌های بخش پیش به شمار می‌آید.

۵. نتیجه‌گیری

۱. ایراد «هم‌ارزی میان سلب لزوم و لزوم سلب»، که نگارنده در مقاله‌ی «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه‌ی کلیه» به آن پرداخته است، ناشی از تابع ارزشی گرفتن شرطی است.

۲. برای پرهیز از این ایراد، ناگزیریم دست به دامان منطق ربط شویم و از شرطی ربطی به جای شرطی تابع ارزشی استفاده کنیم.

۳. تبدیل شرطی‌های تابع ارزشی به شرطی ربطی، هرچند ایرادهای سالبه‌ی کلیه‌ی لزومیه را پاسخ می‌دهد، درباره‌ی موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه، نه‌تنها ایرادی را حل نمی‌کند، بلکه سه دشواری تازه پدید می‌آورد:

الف) سکوت درباره‌ی امکان مقدم؛

ب) صدق شرطی با امتناع مقدم؛ یعنی قضیه بودن «هرگاه الف و نه الف، آن‌گاه ب»؛

ج) امکان کذب شرطی با وحدت مقدم و تالی؛ یعنی قضیه نبودن گزاره‌ی همانی: «هرگاه الف، آن‌گاه الف»؛

۴. برای گذر از این دشواری‌ها، می‌توان به تحلیل «لزومی حقیقی» و «لزومی لفظی» پناه برد و «امکان مقدم» را به صورت عطفی بر تحلیل‌های مقاله از موجبه‌ی کلیه‌ی لزومیه افزود.

۵. افزودن «امکان مقدم»، نه‌تنها دشواری‌ها را پشت سر می‌گذارد، بلکه امتیاز بزرگی را نصیب فرمول‌های ارائه‌شده می‌کند و آن تطبیق فرمول‌های پیشنهادی برای شرطیه‌های لزومیه با فرمول‌های پیشنهادی برای حملیه‌های حقیقیه و خارجیه است.

۶. این تطبیق عبارت است از نمونه‌جانشین بودن فرمول شرطیه‌های لزومیه برای فرمول گزاره‌های حملیه‌ی حقیقیه و خارجیه.

یادداشت‌ها

۱. «سورهای شرطی» درباره‌ی حالت‌ها و اوضاع و احوال هستند و طبیعتاً باید با ادات‌های «ضرورت» و «امکان» که به جهان‌های ممکن و اوضاع و احوال اشاره می‌کنند صورت‌بندی شوند، اما وقتی خواننده در تحلیل‌های دوم و سوم نگارنده از شرطیه‌ی موجبه‌ی کلیه می‌بیند که ما از «سورهای گزاره‌ای» سود جسته‌ایم، ممکن است این سؤال به ذهنش بیاید که چرا «سور گزاره‌ای» و نه ادات‌های «ضرورت» و «امکان»؟

در پاسخ می‌گوییم که اگر با «روی‌کرد استنباطی» به منابع منطق قدیم خود مراجعه کنیم، چاره‌ای جز «سورهای گزاره‌ای» نخواهیم داشت. این مطلب را نگارنده در مقاله‌ی «سلب لزوم و لزوم سلب

در شرطی سالبه‌ی کلیه» در صفحات ۲۴۶ - ۲۴۷ به تفصیل آورده است. نقل قول‌هایی از ابن سینا و خواجه که به سورهای گزاره‌ای بسیار نزدیک است در آن‌جا آورده‌ایم که در این‌جا تکرار می‌کنیم:

انّ القضیۀ الشرطیه الکلیه انما تکون کلیه اذا کان التالی یتبع کل وضع للمقدم، لا فی المرّات فقط، بل فی الاحوال. و اما انه ایّ الاحوال تلک؟ فهی الاحوال التی تلزم فرض المقدم او یمکن ان تُفرضَ له و تَتبعَه و تکونَ معه، اما بسبب محمولات علی موضوع المقدم (ان کان حملیا) او بسبب مقارنات مقدمات له اخری (ان لم یکن حملیا) (۱، ص: ۲۷۲)

و اما در شرطیات گوییم: ایجاب کلی در متصله‌ی لزومی آن‌گاه ثابت بود که در همه‌ی اوقات و احوال که عارض و لاحق مقدم تواند بود، وضع مقدم مستلزم وضع تالی بوَد. اما «اوقات» ظاهر است؛ و اما «احوال» چنان بود که بر موضوع مقدم، محمولات دیگر حمل کنند، حق یا باطل، و یا قضایای دیگر با مقدم به هم وضع کنند صادق یا کاذب ...

مثلاً در این قضیه که «اگر انسان کاتب است دستش متحرک است»، گوییم: «اگر انسان کاتب است و قائم [دستش متحرک است]»، یا «اگر انسان کاتب است و قاعد [دستش متحرک است]» یا «اگر انسان کاتب است و مستلقی [دستش متحرک است]» یا «اگر انسان کاتب است و نائم، دستش متحرک است».

و هم‌چنین، در وضع قضایای دیگر با مقدم، گوییم: «اگر انسان کاتب است و شمس طالع [دستش متحرک است]» یا «اگر انسان کاتب است و کواکب ظاهر دستش متحرک است» (۸، صص: ۹۳ - ۹۴).

سورهای گزاره‌ای همان سورهای منطق مرتبه‌ی دوم هستند که متغیرهای محمولی آن‌ها صفر موضعی است و همان قواعد استنتاج طبیعی مربوط به منطق مرتبه‌ی دوم استاندارد بر آن‌ها اعمال می‌شود. برای نمونه، محمد اردشیر در *منطق ریاضی* خود، پس از بیان قواعد این منطق در صفحه‌ی ۱۹۶، بلافاصله به سورهای گزاره‌ای می‌پردازد و قضایای زیبایی را اثبات می‌کند (صص:۱۹۸- ۱۹۹).

او در ادامه، معناشناسی استاندارد و هنکین را برای سورهای مرتبه‌ی دوم (شامل سورهای گزاره‌ای) طرح می‌کند (همان، صص: ۲۰۰ - ۲۰۵). علیرضا دارابی نیز در پایان‌نامه‌ی خود (به راهنمایی سید محمد علی حجتی و مشاوره‌ی لطفاله نبوی) از همین طرح پیروی کرده است (صص:۳۵-۳۶ و ۴۲-۴۶ و ۵۰-۶۰). منابع بیشتر: اکثر کتاب‌های آموزشی «منطق ریاضی» که بخشی را به منطق مرتبه‌ی دوم اختصاص داده‌اند (۳، صص: ۲۹۵ – ۳۱۷؛ ۴، صص: ۲۱۳ – ۲۱۷ و ۵).

رابطه‌ی سورهای گزاره‌ای با سورهای زمانی به مقاله‌ای مستقل نیاز دارد و نگارنده اندیشه‌هایی در این زمینه دارد و امیدوار است که در فرصتی مناسب به آن سر و سامان دهد.

۲. قاعده‌ی ساخت فرمول‌های زمانی به این صورت است: «اگر α جمله‌نشانه (یا جمله‌ی اتمی) و β متغیر زمانی باشد $\alpha\beta$ فرمول است». بر اساس این قاعده، گویی جمله‌نشانه‌ها محمول‌های یک موضعی هستند (یا محمول‌نشانه‌های n- موضعی گویی $n+1$- موضعی هستند). نیکلاس رشر، به جای این‌که متغیر زمانی «t» را به جمله‌نشانه‌ها بیفزاید، ادات زمانی «Rt» را بر فرمول‌ها وارد

می‌سازد و برای نمونه، به جای «$\forall t\ Pt$» می‌نویسد: «$\forall t\ Rt\ P$». نگارنده انتقاداتی به ادات R دارد که ورود به آن مقاله‌ی مستقلی می‌طلبد.

۳. در کل مقاله، عطف را همان عطف کلاسیک (*conjunction*) گرفته‌ایم نه تلفیق یا عطف ربطی (*fusion*). بررسی مجدد یافته‌های مقاله با ادات تلفیق به جای عطف کلاسیک نیازمند مقاله‌ی مستقلی است.

۴. محاسبات در منطق موجهات تا جایی‌که به تعدی استلزام اکید یا به قواعد دوطرفه و قابل اعمال در جزء فرمول برمی‌گردد، نیازی به برهانک‌های وجهی ندارد و از همین رو، نگارنده در بیشتر موارد، از این برهانک‌ها آگاهانه پرهیز کرده است.

۵. نگارنده به جای «تکرار ضرورت» و «حذف امکان» در نظام K، نام‌های ساده‌تری مانند «ورود» و «خروج» را به کار می‌برد و این اختلاف در نام‌گذاری تأثیری بر محتوای قواعد ندارد. اختلاف کتاب‌های آموزشی گوناگون در نام‌گذاری قواعد منطقی امری است پذیرفته، چه در آثار غربی و چه در آثار فارسی، و ظاهراً گریزی نیز از این اختلاف‌ها نیست، زیرا سلیقه‌ی منطق‌دانان بسیار متفاوت است و هیچ‌کس نتوانسته ایشان را به یک اجماع و توافق حداقلی برساند.

۶. در کتاب‌های منطق ربط، مرسوم است که حرف f را نقیض t می‌گیرند و t را به صورت $\forall(p\rightarrow p)$ تعریف می‌کنند و نشان می‌دهند که $\sim A$ معادل است با $A\rightarrow f$. ما در متن مقاله از این مسأله سود جسته‌ایم.

7- Edwin Mares

۸. برای اطلاع درباره‌ی سمانتیک منطق ربط و چگونگی ساختن مثال نقض در این سمانتیک، مراجعه کنید به ۹، فصل چهارم.

9- expansion 10- contraction

منابع

۱. ابن‌سینا، حسین، (۹۶۴ م)، *الشفاء، المنطق، القیاس*، القاهره: دار الکاتب العربی للطباعه و النشر.

۲. اردشیر، محمد، (۱۳۸۳)، *منطق ریاضی*، تهران: هرمس.

۳. اندرتون، هربرت بی.، (۱۳۶۶)، *آشنایی با منطق ریاضی*، ترجمه‌ی غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۴. جفری، ریچارد، (۱۳۶۶)، *قلمرو و مرزهای منطق صوری*، ترجمه پرویز پیر، تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی.

۵. حجتی، سید محمد علی و علیرضا دارابی، (۱۳۸۶)، «بررسی و مقایسه دو دلالت شناسی منطق مرتبه دوم»، *مطالعات و پژوهش‌ها، مجله علمی- پژوهشی دانشکده ادبیات و علوم انسانی دانشگاه اصفهان* دوره‌ی دوم، شماره ۵۱، صص: ۶۹ - ۸۴.

۶. دارابی، علیرضا، (۱۳۸۴)، *بررسی نحوی و معنایی منطق درجه‌ی دوم*، پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد به راهنمایی سید محمد علی حجتی، تهران: دانشگاه تربیت مدرس.

۷. رید، استیون، (۱۳۸۵)، *فلسفه‌ی منطق ربط*، ترجمه‌ی اسداله فلاحی، قم: انتشارات دانشگاه مفید.

۸. طوسی، نصیر الدین، (۱۳۶۷)، *اساس الاقتباس*، تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

۹. فلاحی، اسداله، (۱۳۸۶الف)، *نقض بولی و نقض دمورگان در منطق کلاسیک و منطق ربط*، رساله‌ی دکتری به راهنمایی لطف اله نبوی، تهران: دانشگاه تربیت مدرس.

۱۰. ـــــــــــ (۱۳۸۶ب)، «صورت‌بندی جدیدی از قضایای حقیقیه و خارجیه»، *آینه معرفت* ۱۱، تابستان، صص: ۳۰ - ۶۱.

۱۱. ـــــــــــ و لطف‌اله نبوی (۱۳۸۷)، «اعتبار در جهان‌های ممکن»، *پژوهش‌های فلسفی - کلامی* ۳۵، بهار، صص: ۶۹ - ۸۸.

۱۲. ـــــــــــ (۱۳۸۸الف)، «صورت‌بندی قضایای خارجیه با محمول وجود»، *معرفت فلسفی* ۲۳، بهار، صص: ۵۱-۷۶.

۱۳. ـــــــــــ (۱۳۸۸ب)، «سلب لزوم و لزوم سلب در شرطی سالبه کلیه»، *معرفت فلسفی*، ۲۵، پاییز، صص: ۲۳۳ - ۲۶۰.

۱۴. ـــــــــــ (۱۳۸۸ج)، «لزومی حقیقی و لزومی لفظی»، *فلسفه و کلام اسلامی (مقالات و بررسی‌ها)*، دفتر ۱، پاییز و زمستان، صص: ۱۰۷ - ۱۲۹.

۱۵. ـــــــــــ (۱۳۸۹)، «استنتاج از دو ممکن نزد ابن‌سینا و پیروانش»، *کتاب ماه فلسفه*، ۳۵، مرداد، صص: ۱۸ - ۲۵.