۹

لوجیسیزم و مسئله صدق در ریاضیات*

نوشتهٔ: حمید وحید دستجردی

مقدمه

دستیابی به استنباطی صحیح از مفاهیم ریاضی یکی از عمده‌ترین اشتغالات بشر در طی ادوار تفکر بوده‌است. این اشتغالات که معمولاً با بحرانهای بزرگ همراه بوده‌است همواره منجر به گشودن افق‌های جدیدی از معرفت ریاضی گشته‌است. نخستین بحران در تفکر ریاضی با کشف اعداد اصم توسط یونانیان در حدود ۴۵۰ سال قبل از میلاد آغاز شد. بحران دوم محصول مشکلات مربوط به مبانی متزلزلی بود که علم حساب دیفرانسیل و انتگرال در طی قرون ۱۷ و ۱۸ از دل آنها رشد کرده‌بود. پرسشهای مربوط به بی‌نهایت کوچکها، مفاهیم حدی و غیر آنها بخش عمده فعالیتهای ریاضی این دو قرن را تشکیل می‌داد. از جمله کسانی که در این زمینه مطالبی منتشر کرده‌بود، فیلسوف انگلیسی اسقف بارکلی بود که در رساله‌ای مفهوم «بی‌نهایت کوچکها» را از سنخ معجزات و اعتقاد به آنها را از

* متن حاضر، از سخنرانی آقای دکتر حمید وحید دستجردی در جلسه چهارم سمینار ادواری فارابی(یکشنبه ۱۶ تیرماه ۱۳۷۰) تهیه شده‌است، مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضیات.

مقوله ایمان دانسته بود. سالها بعد بولزانو و وایستراس کوشیدند تا تعاریف دقیقی از مفاهیم اساسی علم حساب دیفرانسیل ارائه دهند. تئوری حدود وایستراس که مبتنی بر نظریه اعداد حقیقی کانتور و ددکنید بود جانشین بی‌نهایت کوچکها گشت.

تئوری مجموعه‌ها تولد خویش را مدیون همین تحولات مربوط به مبانی علم حساب دیفرانسیل می‌باشد. تئوریهای کانتور و ددکنید هر دو از نظریه مجموعه‌ها سود بردند. ددکنید، بعنوان مثال، با بهره گیری از مجموعه‌های بی‌نهایت اعداد گویا، اعداد حقیقی را تعریف و پیوستگی شان را اثبات نمود. یکی دانستن اعداد حقیقی با مجموعه‌هایی خاص (برشهای ددکنید) به روشن کردن ماهیت و رفتار آن اعداد کمک کرده، حساب وآنالیز را بر مبانی سازگارتری استوار نمود. علاوه بر یافتن مبانی محکم و قابل اعتمادی برای علم حساب، دستیابی به زبانی موجز و دقیق برای بیان تئوریهای ریاضی نیز مورد توجه فراوان قرار گرفت. منطق که تا این زمان در کنار گرامر و فن خطابه نشسته بود و در نتیجه برای قرنهای متمادی در پس انواع و اقسام ابهامات مدفون شده‌بود، بار دیگر منزلت حقیقی خویش را بازمی‌یافت. در واقع می‌توان گفت که این کوششهای ریاضیدانان در حل مشکلات مربوط به مبانی علم خود بوده که سبب احیاء منطق در زمانهای اخیر گشته‌است.

در این میان فرگه نیز که از عدم استنباط صحیح ریاضیدانان از اساسی ترین مفاهیم مورد استفاده‌شان به شگفت آمده‌بود در پی یافتن مبانی استوار و محکمی برای علم حساب بود. او بر آن بود تا حساب را به منطق تحویل کند وبرای همیشه پایگاه مطمئنی برای ریاضیات فراهم نماید. بدین منظور فرگه ناچار بود به مفهوم «مجموعه‌های بی‌نهایت» تمسک جوید. با کشف پارادکس راسل برنامه فرگه عقیم ماند. کشف پارادکسهای تئوری مجموعه‌ها بحران سوم در مبانی ریاضیات خوانده شده‌است. برنامه تحقیقاتی فرگه (لوجیسیزم) توسط راسل و وایتهد دنبال شد و در سال ۱۹۱۰ منجر به چاپ کتاب عظیم «مبانی ریاضیات» گشت. در کنار

لوجیسیزم دو مکتب فرمالیسم و شهودگرایی نیز پاسخهایی متفاوتی جهت حل مشکلات مربوط به مبانی ریاضیات عرضه داشتند، ولی ماهیت ریاضیات و این پرسش که حقایق ریاضی صدق خویش را مدیون چه واقعیتی هستند، هنوز پاسخ روشنی نیافته است. این مقاله عمدتاً به بررسی مکتب لوجیسیزم بسنده کرده و بررسی مکاتب دیگر به فرصتی دیگر واگذار می گردد. امّا قبل از پرداختن به این مسئله لازم است تا در اطراف پرسشی که لوجیسیزم درمقام پاسخگوئی به آن برآمده بود سخنی چند گفته شود.

۱ـ سمانتیک و اپیستمولوژی: مسئله صدق در ریاضیات

علوم ریاضی از دیرباز به عنوان قطعی ترین و یقینی ترین علوم شمرده می شدند. در حالی که قضایای تجربی همواره در معرض واژگونی قرار داشتند، کسی در این شک نداشت که مثلاً «۵+۷، ۱۲ است» یا «مجموعه زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است». حقایق ریاضی از این نظر در مرتبه بالاتری نسبت به حقایق تجربی قرار داشتند زیرا علاوه بر عینیت داشتن، بر خلاف قضایای علوم تجربی، واجد صفت ضرورت نیز شمرده می شدند. اما اگر قضایای ریاضی عینی و واقعی هستند، از چه حقایقی سخن می گویند؟ به عبارت دیگر، چه چیز صدق یک قضیه ریاضی را تضمین می کند؟ عیناً همین پرسش در قلمرو قضایای تجربی نیز مطرح می شود: چه چیز عینیت این دسته از قضایا را تضمین می کند؟ مثلاً می گوییم این یک حقیقت عینی است که خورشید به زمین گرما می بخشد. این حقیقت را از آن جهت عینی می دانیم که دو کره عظیم آسمانی، مستقل از تمایلات، خواسته‌ها و باورهای ما، دارای روابط فیزیکی خاصی با یکدیگر هستند. به تعبیر دیگر این وجود و هویت مستقل موضوعات یک قضیه است که عینیت آنرا تضمین می کند. با چنین تلقی یی از مفهوم عینیت به پرسش خودمان درباره قضایای ریاضی برمی گردیم: قضایای ریاضی عینیت خود را مرهون چه هستند؟ چه چیزیست که، مثلاً «۱۲=۵+۷» را قضیه‌ای صادق می سازد؟ به تعبیری کلی تر،

ریاضیات دربارهٔ چیست؟ نخستین پاسخی که به ذهن متبادر می‌شود اینست که بگوئیم ریاضیات به مطالعه اعداد می‌پردازد همچنان که فیزیک به مطالعه اشیاء می‌پردازد. چنین تصویری از مسئله صدق در ریاضیات را رئالیسم می‌خوانند که با رئالیسم فیزیکی مشابهت تام دارد.

بدین ترتیب بنابر رئالیسم ریاضی، این اعداد و روابطشان با یکدیگر است که موجبات صدق و کذب قضایای ریاضی را فراهم می‌کنند. ریاضیدانان نیز معمولاً دارای چنین تصوری از مسئله صدق در ریاضیات هستند. ظاهراً کار آنها کشف حقایق گوناگون در حوزه‌های مختلف ریاضی است. بنابراین چنین به نظر می‌آید که رئالیسم ریاضی نظریه‌ای کاملاً شهودی و متناسب با عرف معمول ریاضیدانان است. اما متاسفانه، مانند سایر نظریات فلسفی، با کمی تامل در اطراف و جوانب آن کاستی‌ها و نقص‌هایش آشکار می‌گردد.

گفتیم ریاضیدانان درباره اعداد، مجموعه‌ها، گروهها و روابط آنها با یکدیگر سخن می‌گویندو این روابط را کاملاً مستقل از زبان، تفکر و باورهای خویش می‌دانند. اما این اعداد یا مجموعه‌ها چه نوع موجوداتی و دارای چه خصوصیاتی می‌باشند؟ بنا بر نظری مشهور آنها اشیاء و ذواتی مجرد (abstract در برابر فیزیکی) فرض میشوند که خارج از قلمرو فضا و زمان قرار دارند. اما به نظر می‌آید که چنین امری معرفت ریاضی را ناممکن می‌سازد زیرا علم ما به حقایق عالم خارج از طریق حواسمان و بطورکلی تجربه حسی بدست می‌آید، در حالی که اعداد و مجموعه‌ها، بنابر طبیعتشان، نمی‌توانند با ما رابطه‌ای علّی داشته باشند. بدین ترتیب به نظر می‌آید آنچه برای عینیت حقایق ریاضی ضرورت دارد، استقلال وجودی موضوعات آنها، علم ما به آن حقایق را ناممکن می‌سازد. قائلان به رئالیسم ریاضی می‌باید توضیح دهند که، بنابر مبانی آنها، معرفت ریاضی چگونه ممکن است.

۱-۱- معمای بناسراف: تنش میان سمانتیک و اپیستمولوژی

این اشکال معرفتی به رئالیسم ریاضی در سالهای اخیر بار دیگر و با قوت بسیار از جانب فیلسوف آمریکایی پل بناسراف مطرح شده‌است. بنا بر نظر بناسراف دونوع انگیزه کاملاً متفاوت معمولاً بر نظریه صدق ریاضی تاثیر گذاشته است. یکی تمایل به ارائه سمانتیکی یکنواخت برای کل زبان، به نحوی که سمانتیک قضایای ریاضی با سمانتیک قضایای زبان مشابه باشد و دیگری تمایلی ناشی از این اعتقاد که هر نظریه‌ای درباره صدق ریاضی می‌باید با اپیستمولوژی معقولی همراه باشد. می توان گفت که کلیه نظریات موجود دربارهٔ صدق، معمولاً یکی از ایندو شرط را بنفع دیگری قربانی می کنند. نظریاتی که سمانتیک مشابهی برای قضایای ریاضی و قضایای تجربی ارائه می کنند معمولاً معرفت ریاضی را امری غیرممکن می‌سازند و آن دسته که شروط صدق قابل حصولی را(به معنای معرفتی آن) به قضایای ریاضی نسبت می‌دهند قادر به توضیح این معنا که شروط یاد شده به چه دلیل شروط صدق آن قضایا هستند، نمی‌باشند. به گمان بناسراف هر نظریه قابل قبولی درباره صدق، مصداق، معنی‌داری و معرفت می‌باید کلیه قضایای زبان را در برگیرد، نه این که توجه خود را تنها معطوف به دسته‌ای خاص از آنها نماید. مثلاً اگر نظریه‌ای معرفتی بتواند علم ما به اشیاء محسوس را توضیح داده ولی قادر به تبیین شناختمان از امور نامحسوس نباشد، نه تنها نظریه‌ای کامل و تمام نیست، بلکه ممکن است نادرست نیز باشد. همین نکته درباره تئوریهای سمانتیکی نیز صادق است.

برای روشنتر شدن موضوع، جملات ذیل را در نظر بگیرید:

(۱) حداقل سه شهر قدیمی‌تر از تهران وجود دارد.

(۲) حداقل سه عدد کامل بزرگتر از ۱۷ وجود دارد.

چنین به نظر می آید که این دو جمله دارای فرم منطقی ذیل هستند:

(۳) حداقل سه F وجود دارد که دارای نسبت R با a هستند.

در جمله (۳)، «حداقل سه چیز وجود دارد» سوری عددی است که توسط

سور وجودی، متغیرها و اینهمانی بیان گشته‌است، «F» توسط محمولی یک موضعی، «R» توسط محمولی دو موضعی و «a» نیز به وسیله اسم عنصر معینی در حوزه مدل مشخص می گردند. چنین بنظر می آید که (۳) بیانگر صورت منطقی (۱) باشد. در این صورت (۱) صادق خواهد بود اگر و فقط اگر متعلق اسمی که بجای «a» قرار می گیرد، یعنی «تهران»، نسبت R (........ قدیمی تر از ....) را با حداقل سه عضو حوزه مدل که محمول معرفی شده توسط «F» (شهر) را ارضا می کنند، داشته باشد. جمله (۱) بدین ترتیب صادق خواهد بود زیرا حداقل سه شهر قدیمی تر از تهران وجود دارد. اکنون این سوال مطرح می شود که آیا (۳) فرم منطقی (۲) نیز بشمار می رود یا خیر. به نظر می آید پاسخ، در بادی امر، مثبت باشد زیرا دلیلی ندارد سمانتیک دیگری را برای سور عددی (۲) درنظر بگیریم. مع‌هذا کسانی که از لوازم افلاطون‌گرایی این کارگریزان بوده‌اند از تسّری سمانتیک استاندارد فوق به قضایایی از قبیل (۲) خودداری ورزیده‌اند. عده‌ای شروط صدق قضایای ریاضی را همان استنتاج پذیری آنها از مجموعه اکسیومها دانسته‌اند. اما این نظریه هنگامی که با این اعتقاد همراه شود که کلیه گزاره‌های ریاضی (حساب) دارای ارزش صدق و کذب است، به طور کامل توسط قضایای ناتمامیت گودال ابطال می گردد. بنا سراف این قبیل نظریات را «ترکیباتی» (combinatorial) می خواند. بنابراین نظریات، اسناد صدق و کذب به قضایای ریاضی تنها بر مبنای برخی حقایق نحوی (معمولاً استنتاج پذیری از اکسیومها) امکان پذیر بوده و مفهوم صدق نباید بر حسب مفاهیم مصداق، ارضا و غیرآنها تعریف گردد.

در هر حال می توان نظریات مربوط به صدق جملاتی از قبیل (۲) را به دو گروه تقسیم کرد. گروه اول شامل آن دسته از نظریاتی است که نحو و سمانتیک طبیعی و استاندارد را به قضایای ریاضی نسبت می دهند و گروه دوم نظریاتی را شامل می گردد که با داشتن انگیزه‌های غیر نحوی و غیرسمانتیک (مثلاً اپیستمولوژیک) می کوشند شروط صدق دیگری را به قضایای مذکور نسبت

دهند. هر یک از این دو گروه ویژگیهای خاص خود را دارند و نظرشان معطوف به یکی از دو عنصر اساسی یاد شده (سمانتیک و اپیستمولوژی) است. گروه اول بیشتر در پی آنست که نظریات مربوط به صدق ریاضی هماهنگ با نظریه عمومی صدق در سطح کل زبان باشد، به نحوی که معلوم باشد صفت نسبت داده شده بعنوان «صدق» به جملات، واقعاً همان صدق است. این امر، بگمان بناسراف، تنها در صورتی امکان پذیر است که تفسیر سمانتیک ریاضیات به عنوان بخشی از تفسیر سمانتیک کل زبان در نظر گرفته شود. به این معنا که هر تفسیر سمانتیکی که می خواهیم درباره اسامی خاص، محمولات و سورها در زبان طبیعی ارائه دهیم، باید شامل آن بخش از زبان که ریاضیات را دربردارد نیز باشد. این امر تنها در صورتی قابل تحقق است که (۳) بعنوان فرم منطقی قضیه (۲) نیز قلمداد گردد. به گفته بناسراف تنها یک نظریه صدق شرط یاد شده را برآورده می کند و آنهم نظریه صدق تارسکی است که مفهوم صدق را بر حسب مفاهیم مصداق و ارضا تعریف می کند. گروه دوم شامل نظریاتی می شود که تبیین معرفت ریاضی را بر سایر امور مقدم می داند. شکی نیست که ما دارای معرفت ریاضی هستیم و این علم، علم به حقایق ریاضی است. بنابراین هر نظریه‌ای که مدعی تبیین مفهوم صدق ریاضی است باید بتواند حصول معرفت یاد شده را توضیح دهد. اگر نظریه‌ای شروط صدقی را به قضایای ریاضی نسبت دهد که علم به تحقق آنها خارج از توانائی های معرفتی ماست، در این صورت شرط یاد شده را نادیده گرفته است. به تعبیر دیگر یک سمانتیک قابل قبول می باید هماهنگ با نوعی اپیستمرلوژی قابل قبول باشد. باید روشن شود شرایطی که تحت آن شرایط P صادق است چگونه با علم ما به P مرتبط می گردد.

یکی از بارزترین مصادیق این تنش میان سمانتیک و اپیستولوژی را می توان در همین مسئله صدق ریاضی یافت. از یک طرف برای ارضای شرط اول و با تعمیم تئوری تارسکی به قضایای ریاضی، شروط صدق آن قضایا به وجود ذواتی اشاره می کند که بنا بر قول مشهور، مجرد هستند و خارج از محدوده حواس و

تاثرات ما قرار دارند. این همان تفسیر معروف افلاطونی از ریاضیات است که (۳) را فرم منطقی قضایای از قبیل(۲) می داند. با تعمیم تئوری تارسکی، قضایای ریاضی مشمول همان قوانینی می شوند که قضایای تجربی و استنتاجهای ریاضی از همان قواعدی پیروی خواهند کرد که استنتاجهای معمولی. برای صورتبندی تئوریها در زبان منطق محمولات درجه اول لازم است بدانیم که کلیه لوازم منطقی اکسیومها قابل استنتاج نیز هستند. این معنا توسط قضیه تمامیت برای منطق محمولات درجه اول تضمین می شود. اگر تعمیم تئوری صدق تارسکی به قضایای ریاضی انکار شود می باید کلیه این نتایج بکناری نهاده شده، پاسخهای جدیدی یافت گردد.

در عین اینکه تعمیم تئوری صدق تارسکی به قضایای ریاضی و یکی دانستن قضایای (۱) و (۲) به لحاظ فرم منطقی اداری امتیازهای یاد شده‌است، اما همچنان که اشاره شد، معرفت ریاضی را ناممکن می سازد. بناسراف اضافه می کند که به گمان او بهترین تبیین علم تبیین به اصطلاح علّی است. بنابراین تبیین علّی وقتی میگوئیم S به P علم دارد، حتماً می باید میان P (یعنی مصادیق اسامی، محمولها و سورهای P) و S رابطه‌ای علّی وجود داشته باشد. به تعبیر دیگر ارتباط علّی با متعلق علم از شرایط لازم حصول معرفت است. اندراج این شرط تحت مفهوم علم به دنبال انتقاداتی بوده‌است که فلاسفه از تعریف کلاسیک علم (اعتقاد صحیح موجه) ابراز کرده‌اند. به این نکته در پایان مقاله باز خواهم گشت. واضح است که با تحلیل علّی از مفهوم علم نظریه افلاطون گرایی ریاضیات قادر به توضیح امکان معرفت ریاضی نخواهد بود زیرا بنابر آن نظریه واقعیت ریاضی مرکب از ذواتی مجرد (اعداد، مجموعه‌ها...) است که به دلیل مجرد بودنشان نمی توانند با ما رابطهٔ علّی داشته باشند و این در حالی است که معرفت ریاضی وجود دارد. (منظور از علیت در اینجا رد و بدل شدن انرژی است و نه امکان فقری، فقر وجودی یا امثال آنها). در هر حال مشکل ریاضیات، به گمان بناسراف، ناشی از تنش میان بهترین تفسیر سمانتیک از مسئله صدق (تارسکی) و

بهترین تئوری معرفتی (تئوری علّی) است. در یک کلمه، تعمیم تئوری تارسکی به ریاضیات و یکی دانستن فرم منطقی قضایای از قبیل (۱) و (۲) منجر به نظریه افلاطون گرایی از ریاضیات گشته که به دلیل اسناد شروط صدق خاص به قضایای آن علم، معرفت ریاضی را ناممکن می‌سازد.

مشابه این اشکال معرفتی به رئالیسم ریاضی را می‌توان در تئوریهای اخیر در مورد مسئله مصداق (reference) نیز یافت. در اینجا مسئله عبارتست از اینکه یک اسم چگونه به مسمای خود راجع می‌شود. یعنی چگونه می‌شود که با بکار بردن یک اسم موفق می‌شویم دربارهٔ شئی معین و خاصی سخن بگوئیم. بنابر نظر فرگه هر اسمی با وصفهای معینی ملازم و همراه است که آن وصفها تنها توسط شئی خاص ارضا می‌گردند. مثلاً سعدی معمولاً با وصف معین «نویسندهٔ بوستان» یا نظائر آن ملازم و همراه است که وصف مزبور تنها به شخص خاصی در تاریخ راجع می‌شود (البته در اینجا نظریات گوناگونی وجود دارد که آیا یک اسم معادل کلیه وصف‌های معین ملازم با آنست یا اینکه تنها تعدادی از مهمترین آنها کفایت می‌کنند. این مسئله فعلاً مورد بحث ما نیست). نظریه فرگه طی سلسله مقالاتی در سال ۱۹۷۲ از جانب کریپکی مورد حمله قرار گرفت.[۲] او نشان داد که علم به وصف‌های معین برای اشاره به فردی خاص نه لازم است و نه کافی. مطابق تئوری او دلیل توفیق ما در اشاره به افراد به وسیله استعمال اسامی آنها این است که ما در طول یک سلسله علّی (تاریخی) واقع شده‌ایم که اسم مذکور در طی آن دست بدست گشته تا به گوش ما رسیده است. این سلسله در نهایت به شخص یا اشخاصی ختم می‌شود که در مراسم نامگذاری فرد مذکور شرکت داشته‌اند. معمولاً عده‌ای در حکم تولید کنندگان و واضعان نحوه استعمال لغات و الفاظ عمل می‌کنند و عده‌ای در حکم مصرف کنندگان. این همان تقسیم کار زبانی است و دقیقاً به دلیل حضور در حلقه‌ای از این سلسله علی - تاریخی است که ما می‌توانیم، بدون علم به وصف‌های معین، به فردی خاص اشاره کرده، درباره‌اش سخن بگوئیم (تئوری کریپکی برای پرهیز از موارد نقض البته، دارای تبصره‌های

بسیاری شده است که فعلاً مورد بحث ما نیست). حال اگر «تئوری علّی مصداق» کریپکی را بپذیریم، در توضیح اینکه چگونه می توانیم به اعداد اشاره کنیم یا درباره‌شان سخن بگوئیم دچار اشکال می شویم. از یک طرف تئوری کریپکی ایجاب می کند که ما در طول یک سلسله علّی که به نامگذاری اولیه ذوات ریاضی منتهی می شود قرار داشته باشیم و از طرف دیگر اعداد و مجموعه‌ها بدلیل مجرد بودنشان، نمی توانند با ما ارتباط علی داشته باشند. نتیجه این خواهد بود که ما نتوانیم به اعداد اشاره کرده، درباره‌شان سخن بگوئیم، حال آنکه در ریاضیات سخن فقط از اعداد، مجموعه‌ها و امثال آنها در میان است.

در کنار رئالیسم ریاضی (افلاطون گرایی)، قرن ما شاهد ظهور سه مکتب دیگر دربارۀ طبیعت ریاضیات بود که اصول و مبانیشان همگی از انگیزه‌های اپیستمولوژیک و راههای پرهیز از مشکلات رئالیسم ناشی می شد. این مکاتب عبارتند از شهودگرایی، فرمالیسم و لوجیسیزم. مکتب شهودگرایی موضوعات ریاضی را مخلوقات ذهنی دانسته و در نزاع میان سمانتیک و اپیستمولوژی، جانب دومی را می گیرد. «صدق» عبارت می شود از «اثبات پذیری سازنده» و از اسناد صدق و کذب به قضایایی که هنوز اثبات نشده‌اند خودداری می گردد. مجموعه های کامل بی نهایت (مثلاً مجموعه اعداد طبیعی) غیر قانونی قلمداد شده و بالطبع بخشی از ریاضیات یا انکار شده و یا مورد بازسازی قرار می گیرد. فرمالیسم ریاضیات را مجموعه‌ای از علائم بی معنی دانسته آنرا به نحو منحصر می سازد. این دو مکتب دارای نقائصی جدی هستند. به نظر نمی آید شهودگرایی با پدیدارشناسی ریاضیات (آن گونه که ریاضیدانان به موضوع خویش نظر کرده و در اطرافش به بحث می پردازد) سازگاری داشته باشد و در واقع هدفش بازسازی ریاضیات است، تا آنجا که حتی بخشی از آن (مربوط به بی نهایتها) را منکر می شود. فرمالیسم نیز، علاوه بر مشکلات دیگرش، بهیچ وجه توانائی آنرا ندارد تا توضیح دهد که چگونه این مجموعه عظیم از علائم بی معنی در عالم خارج کاربرد عملی پیدا می کند. در علوم تجربی برای آزمون تئوریها به سراغ

گزاره‌های مشاهداتی منتّج از آنها می‌روند و این قبیل استنتاجها تنها به کمک ریاضیات امکانپذیر است. حال اگر ریاضیات تنها مجموعه‌ای از علائمی بی‌معنی باشد چگونه می‌توان گزاره‌ای مشاهداتی را نتیجه تئوری مورد نظر قلمداد کرد و اگر گزاره‌ای نتیجه تئوری نباشد چگونه می‌توان برای آزمایش تئوری به آن اعتماد کرد؟ مکتب سوم لوجیسیزم است که ذیلاً در اطراف آن به تفضیل بحث خواهد شد. اما قبل از پرداختن به آن لازم است به اجمال به دو واکنش رئالیستی در قبال مشکلات یاد شده اشاره شود. این دو برگرفته از نظریات کواین و گودل هستند.

۲-۱- دو گرایش رئالیستی: کواین و گودل

کواین با مشکلات معرفتی اعداد و مجموعه‌ها آشناست، اما نظریه افلاطون گرایی را همچنان تنها نظریه قابل قبول درباره ریاضیات می‌داند.[۳] در عین حال او معتقد است که حصول معرفت ریاضی نیازی به ارتباط علی با ذوات ریاضی ندارد. معرفت ریاضی، به گمان او، به‌همان طریق حاصل می‌شود که معرفت علمی. تئوری کواین در خصوص حصول معرفت ریاضی کل گرا (Holistic) است و از دو مقدمه تشکیل می‌شود. مقدمه اول همان تز دوهم است که بنابر آن هیچ فرضیه علمی به‌صورت منفرد و جداگانه تحت آزمایش واقع نمی‌شود. مقدمه دوم عبارتست از «تز اجتناب‌ناپذیر بودن» ریاضیات که بنابر آن، صرف نظر از مرحله‌ای مقدماتی، نمی‌توان بدون استفاده از ریاضیات به اکتشاف علمی پرداخت. علوم طبیعی جز با تمسک به ریاضیات قادر به ارائه تبیین‌هایی عمیق نمی‌باشند. از تز دوهم و تز اجتناب‌ناپذیر بودن ریاضیات نتیجه می‌شود که با تایید تئوریهای علمی توسط صحت پیش‌بینی‌هایشان، ریاضیات - که بخشی از پیکره آن تئوریها را تشکیل می‌دهد - نیز تائید می‌شود. هیچ دلیلی وجود ندارد که تائیدهای مذکور را تنها محدود به علوم و قضایای تجربی نموده، ریاضیات را از حیطه شان دور نگاه داریم. ریاضیات بخش مهمی از پیکر قوانین طبیعی است و با انکار آن به‌عنوان علائمی بی‌معنی یا مجازی (آنچنان که مثلاً فرمالیستها

می پندارند) در واقع محتوای عینی آن قوانین را انکارکرده‌ایم. هیلاری پاتنم در این باره چنین می گوید:

«همه ما بر این باوریم که قانون جاذبه عمومی حکمی عینی درباره اجسام (و نه فقط داده‌های حسی یا نتایج آزمایشگاهی) صادر می کند. قانون جاذبه چه می گوید؟ این قانون می گوید که اجسام به نحوی رفتار می کنند که نسبت دو عدد ملازم و مربوط به اجسام مساوی عدد سوم ملازم با آنهاست. اما چگونه چنین حکمی می تواند محتوایی عینی داشته باشد اگر قرار باشد اعداد و ملازمت‌ها (توابع) همگی اموری تخیلی و مجازی باشند؟ این مانند اینست که گفته شود خداوند و فرشتگان وجود ندارند اما در عین حال این واقعیتی عینی است که خداوند فرشته‌ای را مسئول هر یک از ستارگان قرار داده است.»[4]

بنابر این از آنجا که فرض موجودات ریاضی برای فعالیتهای علمی ضروریست، می باید به آنها معتقد باشیم. تز «اجتناب ناپذیر بودن ریاضیات» و در واقع استدلال کواین، همچنانکه هارتری فیلد اشاره می کند، مبتنی بر اصل «استنتاج به مقتضی بهترین تبیین» است.[5] این همان استنتاجی است که شالوده معرفت تجربی ما را تشکیل می دهد و ساختمانی از قرار ذیل دارد. ابتدا با پدیده‌ای مواجه می شویم که در پی تبیینش بر می آییم: فرض کنید یکی از مفروضات تبیین ما ادعای C باشد و ما مطمئن باشیم بدون فرض C هیچ تبیینی موفق نخواهد بود. در این صورت ما دلیل کافی برای اعتقاد به C خواهیم داشت و یا به تعبیری دیگر اعتقاد ما به C مجاز خواهد بود. به طور کلی اگر حکم یا ادعایی نقشی غیر قابل انکار در تبیین مشاهدات ما داشته باشد در آن صورت صرف نظر از آنکه حکمی مشاهداتی باشد یا از ذواتی مشاهده‌ناپذیر سخن بگوید، اعتقاد ما به آن مجاز خواهد بود. این نوع استنتاج، استنتاجی است که وجود پدیده‌های نظری علم (اتمها، الکترونها ...) معمولاً با تمسک به آن به اثبات می شود. ادعای کواین و

پاتنم اینست که در حالی که اعتقاد ما به الکترونها و نوترونها مبتنی بر استفاده از متدولوژی «استنتاج به بهترین تبیین» است، هیچ دلیلی وجود ندارد که همین متدولوژی موجب تجویز اعتقاد ما به موجودات ریاضی نگردد. زیرا، همچنان که اشاره شد، تئوریهای علمی نه تنها خود را به الکترونها و نوترونها که به اعداد و توابع نیز مقید می سازند. درست بهمان دلیل که استنتاج به بهترین تبیین ما را در اعتقاد به ذوات نظری فیزیک مجاز می دارد، دقیقاً بهمان دلیل موظف به اعتراف به وجود ذوات ریاضی هستیم. زیرا در هر دو حالت یک تبیین واحد دست اندرکار است. هارتری فیلد، یکی از مخالفین عمده رئالیسم ریاضی، معتقد است که برهان فوق (کواین-پانتم) از قوت بسیاری برخوردار است و در نتیجه، بعنوان یک نومینالیست، کوشیده است نشان دهد که علوم نیازی به استفاده از اعداد، توابع و امثال آنها ندارند. کتاب علم بدون اعداد او نخستین گام در اجرای این برنامه بشمار می رفت. در این مقاله مجالی برای ارزیابی ادعاهای فیلد نیست. کافیست گفته شود که بسیاری معتقدند او تنها با پذیرش ذوات مجرد دیگری (مثلاً نقاط زمان-مکان مطلق) توانسته است راهی برای حذف اعداد از امثال تئوری نیوتونی بیابد. مضافاً بر اینکه او در تحقق اهدافش از مفروضاتی سود جسته است که تنها در چهارچوبی افلاطونی قابل قبول هستند، مانند فرض سازگاری ZFC. در هر حال فیلد خودش اعتراف می کند که هنوز دقیقاً نمی‌داند چگونه می تواند اعداد را از کلیه تئوریهای علمی حذف کند.

قبل از ترک نظریه کواین-پانتم، ذکر یکی دو نکته درباره آن ضروریست. اولاً تئوری معرفتی کواین، معرفت ریاضی را از خصوصیات سنتی‌اش عاری می کند، زیرا اگر علم ما به ذوات ریاضی تنها توسط نقشی که آنها در تئوریهای علمی بازی می کنند قابل توجیه باشد، در آن صورت معرفت ریاضی دیگر ماقبل تجربی نخواهد بود. نکته دوم اینست که ریاضیات نظری و غیر کاربردی کاملاً خارج از حیطه تئوری معرفتی کواین واقع می شود. او خود اعتراف می کند که مانعی نمی بیند بخشی از ریاضیات نظری غیرکاربردی را سیستم‌های تفسیر نشده

صرفاً نحوی بداند. در اینجا نظریه کواین دیگر با پدیدارشناسی ریاضیات هماهنگی ندارد. کمتر ریاضیدانی پیدا می‌شود که برای اطمینان از صحت فرضیاتش منتظر نتایج آزمایشگاهی بماند. بعلاوه، ریاضیات تقریباً در سطح کم و بیش تئوریک علوم تجربی وارد صحنه می‌شود، مثل وقتی که می گوئیم «عدد اتمی کلر ۷۹ است». و بنابر این از نظر معرفتی هم ارز سایر ادعاهای تئوریک علوم تجربی خواهد بود. در این صورت می‌باید حقایقی از قبیل «۱۲=۵+۷» را نیز به لحاظ معرفتی حقایقی نظری و تئوریک قلمداد کرد که بنظر درست نمی‌آید. همانطور که پارسونز اشاره می‌کنند تز کواین قادر به تبیین «وضوح و بداهت» ریاضیات پایه نیست.

نوع دیگر از رئالیسم (افلاطون گرایی) ریاضی توسط کورت گودل، منطقی بزرگ این قرن مطرح شد که پدیدارشناسی ریاضی سازگار بوده و ظاهراً فاقد مشکلات رئالیسم کواینی است. گودل کاملاً از تنش میان سمانتیک و اپیستمولوژی در نگرش افلاطونی به ریاضیات آگاه بود و همچنین اذعان داشت که موضوعات تئوری ترانسفینی مجموعه‌ها قطعاً به عالم تجربه حسی تعلق ندارند.

> «اما با وجود دور بودن آنها از تجربه حسی، موضوع تئوری مجموعه‌ها را ادراک می‌کنیم. این از آنجا معلوم می‌شود که اکسیومها درستی و صدق خود را بر ما تحمیل می‌کنند. من نمیدانم چرا ما باید اطمینان کمتری به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، داشته باشیم تا ادراک حسی.»[6]

بنابر این آنچه گودل برای حل مشکل معرفتی رئالیسم ریاضی پیشنهاد می‌کند، این است که با فرض قوه‌ای ادراکی (شهود ریاضی) ما را به مبادله علّی با ذوات ریاضی وا دارد. اشکال عمده این راه حل آنست که سخن از «تحمیل صدق اکسیومها بر ما» مجاز و استعاره‌ای بیش نیست. باید توضیح داده شود که ما چگونه با این ذوات ارتباط برقرار می‌کنیم. مع الوصف اشاره به شهود ریاضی به عنوان منبع معرفت با پدیدارشناسی ریاضیات سازگاری بیشتری دارد. و بنابر

این تئوری گودل، بر خلاف تئوری کواین، قادر به تبیین و توضیح «بداهت» ریاضیات پایه است. شهود ریاضی امریست که از جانب اکثر ریاضیدانان در توجیه اکسیومهایشان بدان تمسک می‌شود. البته شناسائی پدیدارشناسی فاصله زیادی با ارائه یک اپیستمولوژی دارد. برای اینکه پدیدارشناسی به اپیستمولوژی تبدیل شود نیاز به تئوری توجیه داریم - به این مسئله در پایان مقاله باز خواهم گشت. اکنون به بررسی نسبتاً تفصیلی یکی از مکاتبی که کوشید چاره‌ای برای مشکل صدق ریاضی بیندیشد، می‌پردازیم. این مکتب همان لوجیسیزم یا منطق گرایی است.

۲- لوجیسیزم

همچنان که توضیح داده شد مکتب لوجیسیزم توسط فرگه و راسل پایه گذاری شد و بعدها با تغییرات زیادی به خدمت برنامه تحقیقاتی پوزیتیویست‌های منطقی در آمد. فرگه بر آن بود تا نشان دهد علم حساب قابل تحویل به منطق می‌باشد، بدین صورت که موضوع آن، یعنی اعداد، قابل تعریف بر حسب موضوعات منطقی محض بوده و قضایایش نیز از منطق قابل استنتاج است. لوجیسیزم فرگه (برخلاف راسل)، همچنان که مدی اشاره می‌کند[۷]، کاملاً رئالیستی و افلاطونی است، زیرا از آنجا که منطق از نظر فرگه علمی عینی است، حساب نیز علمی عینی بوده که به تحقیق درباره ذوات و اشیائی عینی (اعداد) می‌پردازد. پرسشی که لوجیسیزم در مقام پاسخگویی به آن برآمد همان چیزی است که تاکنون درباره‌اش سخن رانده‌ایم: دقیقاً چه چیزی صدق قضایای ریاضی را تامین می‌کند؟ طبیعت ریاضیات چیست؟ برای حل مسائل مربوط به مبانی ریاضیات، فرگه و راسل کوشیدند تا آنرا به «منطق» تحویل کنند. لوجیسیزم دارای دو ادعای عمده بود:

I- مفاهیم ریاضی بر حسب مفاهیم منطقی قابل تعریف اند.

II- حقایق ریاضی از اصول منطقی قابل استخراج می‌باشند.

در این بخش من خواهم کوشید به اجمال درباره این برنامه و تغییراتی که

ناچار شد جهت حل مشکلات خود بدانها تن دهد، سخن بگویم. ابتدا از ادعای نخست ـ تحویل مفاهیم ریاضی به مفاهیم منطقی ـ آغاز می کنم.

۱-۲- تحویل مفاهیم ریاضی به مفاهیم منطقی

پیش از فرگه و راسل، ریاضیدانان به اجمال نشان داده بودند که کلیه مفاهیم علم حساب قابل تعریف و (تحویل) بر حسب اعداد طبیعی هستند. مشکل عمده استخراج اعداد طبیعی بود، و نکته‌ای که فرگه را بر آشفته بود این بود که اکثر تعاریف ارائه شده درباره اعداد، بدون التفات به مسئله متدولوژیک تعیین معانی الفاظ صورت گرفته است. رسم این بود که لفظ یک عدد (numeral) را از متن و مقامش خارج ساخته، آنگاه از معنی آن سوال می کردند.

تعاریفی که اعداد را معادل موضوعات روانشناختی ذهنی یا تنها علائمی بر کاغذ می دانند، همگی، به گمان فرگه، از نادیده انگاشتن مسئله متدولوژیک تعیین معانی الفاظ ناشی شده‌اند. از نظر او برای تعیین معنی الفاظ عددی می باید انواع جملاتی را که حاوی آنها بوده در نظر گرفت و نحوه‌های مختلف استعمالشان را از نظر گذراند. فرگه در اینجا اشاره به اصلی دارد که آنرا اصل زمینه معنایی (Context Principle) می خواند. مطابق این اصل هرگز نباید از معنی یک کلمه به صورت منفرد و در انزوا سوال کرد، بلکه می باید معنی آنرا در متن یک قضیه جستجو نمود. به تعبیر دیگر، هر نظریهٔ موفقی در باب معنی دار بودن می باید توانائی آنرا داشته باشد تا سهم هر لفظ را در معنی (یا شروط صدق) جمله‌ای که حاوی آن لفظ است، مشخص نماید. این سخن بعدها توسط دیویدسون مبنای یک تئوری همه جانبه درباره معنی دار بودن گشت. پرسش از معنی الفاظ (و به اصطلاح قدیمی ترش ماهیت آنها) البته سابقه‌ای بسیار طولانی دارد که قدمتش به آثار افلاطون بر می گردد، یعنی آنجا که سقراط می پرسد علم چیست، زیبایی چیست و... در واقع این پرسش از ماهیت و معانی الفاظ بود که آنچه را که امروزه پروسه یا فرایند «تحلیل» می خوانند به جریان انداخت. بعدها

تجربیون انگلیسی بصورتی مستمر به جستجوی معانی الفاظ برآمدند. کاری که فرگه کرد این بود که فرم سوال را با تمسک به «اصل زمینه معنایی» خود تغییر داد. به نظر او ابتدا می باید از معنای جمله برحسب شروط صدقش سوال شود و آنگاه از معنای کلمه مورد نظر بر حسب سهمی که در معنای جمله به عهده گرفته است. به عنوان مثال به جای اینکه مستقیماً از معنای کلمه «دانستن» سئوال شود ابتدا به جستجوی جملات یا جمله مانندهای اساسی پی بر می آییم که کلمه «دانستن» در آنها استعمال می شود، مانند مهارت‌ها (S می داند که چگونه فلان کار را انجام دهد)، و گرایش‌های گزاره‌ای (S می‌داند که P). آنگاه سوال می کنیم که شرایط لازم و کافی برای صدق جملاتی از قبیل «S می‌داند که P» کدام اند. در اینجا شاهد انتقال از معنای الفاظ به معنای جملات حاوی آنها هستیم. همین استراتژی توسط راسل در «تئوری وصف‌های معین» او که تعریفهای متنی نیز خوانده می‌شوند، به کار گرفته شد.

بدین ترتیب وقتی به سراغ اعداد می‌رویم، می‌باید صورت‌های مختلف جملاتی را که الفاظ اعداد (NUMERALS) در آنها استعمال می‌شوند، در نظر بگیریم. این الفاظ معمولاً به دو صورت اسم خاص-مانند «پنج» در جملات «پنج عدد اول است» و «۱۲=۷+۵» - یا صفت-مانند «پنج» در جمله «حداقل پنج سیب روی میز وجود دارد» - ظاهر می شوند. بنابراین ما دو راه پیش رو داریم. یا اینکه برای اعداد وصف صفت (یا به تعبیر دقیقتر وصف سور) قائل شویم یا اینکه آنها را اسامی خاص بدانیم که به موضوعات خاص راجع می‌شوند. فرگه معتقد است که الفاظ عددی اسم خاص هستند زیرا شرایط و ضوابط نحوی اسامی خاص را ارضا می‌نمایند. اسامی خاص بگفته او دارای شرایط نحوی ذیل اند.[8]

الف) هیچ وقت با حروف تعریف نامعین همراه نمی‌شوند. (این شرط البته مخصوص زبانهائیست که دارای حرف تعریف هستند).

ب) حاوی هیچ متغیر آزادی نیستند.

ج) نمی توانند به صورت محمول در جمله ظاهر شوند.

د) می توانند در طرف چپ و راست علامت اینهمانی (=) واقع شده و تشکیل یک جمله را بدهند.

با توجه به ضوابط فوق الفاظی از قبیل «عدد پنج» و «ریشه مثبت دو» در عداد اسامی خاص در می آیند زیرا هیچ گاه با حرف تعریف نامعین همراه نشده، حاوی متغیر آزاد نبوده و به صورت محمول استفاده قرار نمی گیرند. بلکه بر عکس موضوع حمل صفات واقع می شوند و از طرف دیگر مصادیقشان (اعداد) مورد اشاره واقع شده و درباره‌شان احکام وجودی صادر می شود. مهمترین مشخصه الفاظ عددی اینست که با قرار گرفتن در طرف چپ و راست علامت اینهمانی تشکیل جملات کامل را می دهند و به تعبیر دیگر درباره‌شان احکام اینهمانی عددی صادر می شود. این نکته از آنجهت اهمیت دارد که تا زمانی که مسئله هویت چیزی روشن نشود (یعنی پرسش از هویت آن دارای معنی نگردد) نمی توان به آن اطلاق شیئیت کرد. بطور کلی اسناد شیئیت به یک چیز نه تنها مسبوق به توانائی ما در تمییز نوع آن چیز از سایر انواع است که همچنین مسبوق است به اینکه بتوانیم آن شیی را در صورت ملاقات مجدد شناسائی کنیم یعنی تصوری از مفهوم «همان شیی» داشته باشیم. احکام اینهمانی دقیقاً بیانگر همین خصوصیتند و تئوری اعداد نیز مشحون است از احکام مربوط به اینهمانی‌های عددی از قبیل «۶۳=۹×۷» و امثال آن. اینکه این قبیل قضایا احکام اینهمانی هستند تنها بدلیل وجود علامت «=» نیست بلکه از آن جهت است که استنتاجهای حاوی آنها واجد صفات تقارن، انعکاس و متعدی بودن می باشند.

این شرایط همگی سبب می شوند تا مفهوم عدد طبیعی را مفهومی نوعی (Sortal) بدانیم که مصادیقش ذواتی مجردند. اینجا این مشکل پیدا می شود که درباره جملاتی که الفاظ عددی به صورت صفت (و نه اسم خاص) در آنها ظاهر می شوند چه باید بکنیم (مانند «حداقل سه سیب روی میز وجود دارد»). در اینجا لفظ عددی «سه» به نظر می آید بخشی از سور عددی «حداقل سه... وجود دارد» باشد و نه یک اسم خاص. فرگه معتقد بود که بر خلاف شواهد نحوی ظاهری، این

جمله حاوی سور عددی نبوده بلکه هنگامی که به نحو صحیحی تجزیه و بازسازی شود سور عددی جایش را به تابع عددی «عدد فلان و بهمان» همراه با اسم خاص «سه» می‌دهد یعنی «عدد سیبهای روی میز بزرگتر یا مساوی سه است».[۹]

پس از روشن ساختن رفتار نحوی و سمانتیک الفاظ عددی، فرگه به بررسی و تحقیق در اطراف ذواتی می‌پردازد که این اسامی به آنها راجع می‌گردند. از آنجا که او در پی تعریف این الفاظ بر حسب مفاهیم منطقی است واضح است که ذوات مذکور می‌باید ذواتی منطقی باشند. برای روشنتر شاختن مسئله حکم ذیل را در نظر بگیرید: «دو مداد روی میز وجود دارد». واضح است که موضوع این حکم کمی نمی‌تواند موادی باشد که مدادها از آن ساخته شده‌اند زیرا مواد مذکور را می‌توان به چندین واحد و به انحاء گوناگون تقسیم کرد: دو مداد، ۷ جزء مداد (نوک ـ بدنه ـ پاک کن،...) میلیونها اتم والخ. آنچه این توصیفها را از یکدیگر متمایز می‌کند اینست که یکجا ما از مفهوم «اتم در این مجموعه از مواد فیزیکی» سخن می‌گوئیم و در جائی دیگر از مفهوم «مداد در این مجموعه فیزیکی». بنابر این باید گفت محتوای یک قضیه عددی حکمی است که درباره مفاهیم می‌شود. البته شناسائی محتوای یک قضیه عددی (statement of number) به معنای شناسائی و تعریف خود عدد نیست بلکه: «عدد» قدر مشترک مفاهیم متفاوت است، مانند عدد ۲ که مفاهیم «مدادهای روی میز» و «عقربه‌های روی صفحه ساعت» در آن شریکند. به تعبیر دیگر عدد دو مفهومی است که مفاهیم معینی تحت آن مندرج می‌شوند، یعنی یک مفهوم مرتبه دوم است. به دلیل آنکه الفاظ عددی همانند اسامی خاص رفتار می‌کنند و همچنین به علت آنکه مفاهیم می‌توانند دارای مصداق واحد بوده بدون اینکه یکی باشند، فرگه به جای استفاده از «مفهوم» مصداق آنرا در تعریف عدد اخذ می‌کند. بنابر این به‌جای اینکه بگوید «دو» مفهومی است که بر هر مفهوم همقوه با «مدادهای روی میز» حمل می‌شود، آنرا معادل مصداق آن مفهوم می‌گیرد، یعنی معادل مجموعه کلیه مفاهیم همقوه با «مدادهای روی میز». پس تعریف عدد از نظر فرگه چنین صورتی پیدا می‌کند:

عدد متعلق به مفهوم F = مصداق مفهوم «همقوه با F»

«همقوه بودن» یا تناظر یک بیک را نیز می توان بدون اشاره به مفهوم عدد تعریف نمود. اخذ همین مفهوم تناظر یک بیک در تعریف عدد است که آنرا با روش شمارش روزمره ما (دو بدو نمودن افراد یک گروه با گروه دیگر) مرتبط کرده، تعریف یاد شده را از نظر شهودی موجه و قابل قبول می سازد. زیرا شکی نیست که درک ما از مفهوم عدد مبتنی بر روش ما در شمارش افراد یک گروه است. البته واضح است که شمارش بالقوه افراد نمی تواند جای خود عدد را بگیرد زیرا علاوه بر آنکه ما علائم («۲»، «دو»، «II» و...) را مصادیق (token) نوع مجرد «دو» می دانیم، هنگامی که از عدد ۲ سخن می گوئیم منظورمان کلیه جفت‌های شمارش شده یا همه آنها که تا پایان این عالم شمارش می کنیم، نیست. ما در واقع داریم از مجموعه کلیه مجموعه‌های دو عضوی سخن می گوئیم و دامنه این مفهوم قطعاً از آنچه بشر توانائی شمارشش را دارد بسیار وسیعتر است. بنابر این عدد دو به مجموعه جفت‌های شمارش شده راجع نمی‌شود بلکه به چیزی بسیار انتزاعی تر اشاره می کند. اشکال این تعریف اینست که عدد ۲ را به مجموعه بسیار بزرگی تبدیل کرده و همچنان که اشاره خواهد شد، راه را برای ورود پارادکس راسل باز می کند. این مشکل، البته، در تئوری اکسیوماتیزه ZFC دیگر ظاهر نمی‌شود، زیرا در هیچ مرحله نمی توان مجموعه کلیه مجموعه‌های دو عضوی را تشکیل داد. در نتیجه در تئوری ZFC عدد دو معمولاً با یک مجموعه دو عضوی مناسب (مانند اعداد ترتیبی فون نویمان {Q, {Q}} مشخص می‌شود. بدین ترتیب اعداد طبیعی به مجموعه هایی منحصر بفرد تحویل می گردند، یعنی هر عدد خاصی با مجموعه‌ای منحصربفرد مشخص می گردد (مانند مجموعه همه مجموعه‌های دو عضوی و الی آخر.)

با تعریف اعداد طبیعی به کمک مفهوم مجموعه‌ها، اعداد حقیقی نیز، مطابق برنامه لوجیسیزم، بر حسب همین مفاهیم تعریف می‌شوند. برای تعریف اعداد حقیقی فرض می کنیم که سلسله کسرها را در اختیار داریم. در این صورت

بعضی از اعداد حقیقی، اعداد گویا، با این کسرها مطابقت پیدا کرده و مابقی، اعداد اصم، بنابر تعریف ددکیند، با «رخنه‌ها»ی این کسرها. از آنجا که هیچ کسری بازاء این برشها وجود ندارد آنها را «رخنه» می‌خوانند. بدین ترتیب بازاء هر عدد حقیقی رخنه‌ای در سلسله کسرها وجود خواهد داشت و از آنجا که هر برش منحصراً توسط طبقه پائینتر خود مشخص می‌گردد. راسل عدد حقیقی را به‌عنوان طبقه پائینتر برش در سلسله کسرها تعریف می‌کند. به عنوان مثال ۲√ بعنوان مجموعه کسرهایی که مجذور آنها کمتر از دو است تعریف می‌گردد. بهمین ترتیب می‌توان سایر مفاهیم ریاضی (آنالیز) را تعریف کرد.

آیا با تعریف اعداد به کمک مجموعه‌ها طبیعت آنها مشخص شده است؟ گفتیم که فرگه رئالیست بود و اعداد را ذواتی مجرد می‌دانست که مستقل از زبان و تفکر ما وجود دارند. یکی دانستن اعداد با مجموعه‌ها برای او غیر قابل اجتناب بود زیرا اگر قرار باشد حقایق مربوط به اعداد به حقایق منطقی منحل گردند در آن صورت بعضی «ذوات منطقی» نیز می‌باید در تعریف اعداد اخذ شوند و به نظر می‌آید که «مجموعه‌ها» تنها کاندیداهای ممکن‌اند. راسل، اگر چه بتدریج از این نگرش افلاطونی دوری جست اما بطور کلی نسبت به توفیق لوجیسیزم در شناسائی طبیعت اعداد مردد بود. او در کتاب مقدمه‌ای بر فلسفه ریاضی (p. 18) اظهار می‌دارد که جای هیچ شبهه‌ای درباره مجموعه جفت‌ها وجود ندارد و تعریفش نیز دشوار نیست. اما «ما معمولاً چنین می‌پنداریم که مجموعه همه جفت‌ها (به عنوان مثال) چیزی متفاوت از عدد دو است... عدد به هر معنای دیگری، یک هویت و ذات متافیزیکی است». او سپس اضافه می‌کند که بنابر این به احتیاط نزدیکتر است که به‌جای کشف طبیعت عدد دو به مجموعه همه جفت‌ها رضایت دهیم. بنابر این او منکر آنست که تحلیل منطقی توانائی کشف ماهیت اعداد را داشته باشد. تعاریف ارائه شده، از نظر او، تنها از نظر فایده عملی دارای ارزش می‌باشند.

گفتیم که برنامه لوجیسیزم از دو بخش تشکیل می‌شد یکی استخراج مفاهیم

منطقی بود و دیگری استنتاج حقایق ریاضی از اصول منطقی. اکنون به بررسی توفیق لوجیسیزم در استنتاج حقایق ریاضی از اصول منطقی می پردازیم.

۲-۲ـ استنتاج حقایق ریاضی از اصول منطقی

علاوه بر منحل ساختن مفاهیم ریاضی به مفاهیم منطقی، لوجیسستها ناچار بودند نشان دهند که حقایق (قابل اثبات) ریاضی نیز از اصول منطقی قابل استخراج هستند. برای حصول این معنا نیاز به منطقی قوی وجود داشت و لوجیسستها تئوری مجموعه‌ها را بخشی از منطق قلمداد می کردند. این مسئله که آیا تئوری مجموعه ها می تواند جزئی از منطق باشد یا نه بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت. در حال حاضر بنا را بر این می گذریم که فرض مزبور خالی از اشکال است. بهر حال اندراج تئوری مجموعه‌ها در منطق منجر به پیدایش دو مشکل عمده برای لوجیسیزم گشت.

الف) در طی استخراج حقایق ریاضی از اصول منطقی لازم بود به اصولی تمسک شود که بهیچ روی «منطقی» نمی‌نمودند. اینها عبارت بودند از:

اکسیوم بی‌نهایت: بازاء هر عدد طبیعی عددی بزرگتر وجود دارد یا بتعبیری دیگر یک مجموعه بینهایت وجود دارد

$$(\exists x)\ [0 \in x \wedge (\forall\ z \in x)\ z' \in x]$$

اکسیوم انتخاب: بازاء هر مجموعه حاوی مجموعه‌های جدا از هم و غیر تهی، (لااقل) یک مجموعه وجود دارد که با هر یک از مجموعه‌های عضو دقیقاً در یک عضو مشترک است:

$$(\forall \text{ relation } R)\ (\exists \text{ Function } F)\ (F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

اصول فوق هر دو از سنخ احکام وجودی بوده، وجود چیزی را در عالم تصدیق می کنند، در حالی که تصدیق وجود یا عدم چیزی در عالم در شأن منطق نیست. راسل بعداً درمانی برای این مشکل یافت که قضایای ریاضی را تبدیل به قضایای شرطی می کرد به این نحو که مقدم آنها همان اکسیومها بوده، تالی شان را

قضایای مستخرج از آنها تشکیل می‌داد. این روش که بعدها به روش «اگر ـ آنگاهی» (if-thenism) شهرت یافت به اجمال در پایان این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

ب) مشکل دوم از این قرار بود که تئوری باصطلاح ساده و طبیعی (native) مجموعه‌ها که به گمان لوجیسیستها منطقاً صحیح بود، نادرست و ناسازگار از کار در آمد. این واقعیت با کشف پارادکس‌های کانتور و راسل برملا گشت. کانتور نشان داد که بازاء هر مجموعه x، مجموعه توانی آن $P(x)$، اعضای بیشتری از x دارد یعنی $x<P(x)$. حال اگر مجموعه جامع (universal) یعنی مجموعه همه مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، با توجه به آنچه گفته شد به مجموعه‌ای بزرگتر دست می‌یابیم و این نتیجه پارادکسیکالی است. پارادکس راسل پی آمد منطقی اکسیوم انتزاع مجموعه (Set Abstraction) یا «اصل شمول» (Comprehension Principle) بود. بر اساس این اکسیوم بازاء هر صفت $\Phi(x)$، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضاء آن دارای آن صفت هستند، یعنی مجموعه (y) وجود دارد، بنحوی که $x \in y \leftrightarrow \Phi(x)$. برای رسیدن به پارادکس راسل کافی است صفت $x \notin x$ را در نظر بگیریم. بنابر اکسیوم فوق باید مجموعه‌ای (R) وجود داشته باشد بنحوی که $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. حال کافی است فرض کنیم $R=x$، در این صورت خواهیم داشت $R \in R \leftrightarrow R \notin R$.

برای حل پارادکس‌های منطقی، راسل، «نظریه ساده انواع» را ارائه کرد. به موجب این نظریه اشیاء (ذوات) به انواع و مراتب متفاوت منطقی تقسیم می‌شوند، بنحوی که پائینترین مرحله آنها حاوی کلیه افراد، مرحله بعدی حاوی کلیه صفات (مجموعه‌ها) افراد است و مرحله بالاتر شامل کلیه صفات صفات (مجموعه مجموعه‌ها) آنهاست و الی آخر.

....

....

نوع ۳: F_3 , G_3 , H_3 ,.............

نوع ۲: F_2 , G_2 , H_2 ,.............

نوع ۱: F_1 , G_1 , H_1 ,.............

نوع ۰: a , b , c ,.... , xyz ,....

شرط دیگر آنست که حوزه فعالیت متغیرها باید تنها محدود به یک نوع (i) باشد (یعنی $x^i \in y^j$ عبارتی درست ساخت است اگر و فقط اگر $j=i+1$). این بدان معناست که قضایای مربوط به عضویت b در مجموعه c تنها در صورتی معنی دارند که نوع b یک درجه از نوع c پائینتر باشد. به عبارت دیگر بازاء هر صفت Φ، $\exists y^{i+1}\ \forall x^i\ (x^i \in y^{i+1} \leftrightarrow \Phi(x))$. بدین ترتیب پارادکس راسل حتی آغاز هم نمی‌شود زیرا جمله $x^i \in x^i$ دیگر جمله درست ساختی نخواهد بود. مجالی نیز برای پارادکس کانتور نخواهد بود زیرا اگر چه می‌توان در هر مرحله مجموعه جامعی تشکیل داد لکن دیگر مجموعه جامع همه مجموعه ها را نمی‌توانیم تشکیل بدهیم. اگر هر نوع K عضو داشته باشد، نوع بعدی 2^k عضو خواهد داشت، اما این واقعیت به هیچ تناقضی منجر نخواهد گشت.

ولی راسل به نظریه ساده انواع بسنده نکرد زیرا علاوه بر پارادکسهای منطقی، پارادکسهای باصطلاح معنایی (سمانتیک) نیز وجود داشتند (مانند پارادکس دروغگو، ریچارد و غیر آنها). هدف راسل آن بود که کلیه پارادکسها را بیکباره حل کند. بدین منظور او «اصل دور باطل» را پیشنهاد کرد. بنابر این اصل هیچ کل نمی‌تواند حاوی اجزائی باشد که تنها قابل تعریف بر حسب آن کل باشند. او پیدایش همه پارادکسها را ناشی از نادیده گرفتن این اصل می‌دانست. واضح است که این اصل با معنی یا تعریف الفاظ سر و کار دارد تا با صدق و کذب قضایا و از این جهت باید آن را اصلی درباره معنی داری دانست. این مسئله باعث

شد که راسل به جای اینکه جملاتی از قبیل ($a\epsilon a$) را صرفاً جملاتی کاذب بخواند، بی‌معنی قلمدادشان کند. این شاید یکی از دلایلی باشد که ذهن جمعی از فلاسفه این قرن را مجذوب مسئله معنی دار بودن یا نبودن الفاظ کرد. آنها به نظریه راسل درباره معنی‌داری به عنوان کشفی بزرگ نگریسته، بخشی عظیم از فعالیتهای فلسفی خود را معروف این نمودند تا مهملات را از زبان فلسفه طرد کنند!

این مسائل باعث شد تا راسل به سمت «نظریه انشقاقی یا شاخه شاخه انواع» (Ramified theory of types) رو آورد. از آنجا که به گمان او هیچ صفتی نمی‌باید بر حسب عبارتی که به «کلیه صفات» اشاره دارد تعریف شود. صفات متعلق به نوع ۱ باید به صفات مرتبه اول مرتبه دوم و غیر آنها تقسیم شود. صفات مرتبه اول شامل آن دسته از صفات می‌باشند که در تعریف آنها عبارت «کلیه صفات» اخذ نشده است. صفات مرتبه دوم حاوی آن دسته از صفات اند که در تعریف آنها عبارت «کلیه صفات مرتبه اول» اخذ شده باشد و الی آخر.

	مرتبه ۱	مرتبه ۲	مرتبه ۳
نوع ۳:	${}^1F_3 , {}^1G_3 , {}^1H_3 , \ldots$	${}^2F_3 , {}^2G_3 , {}^2H_3 , \ldots$	${}^3F_3 , {}^3G_3 , {}^3H_3 , \ldots$
نوع ۲:	${}^1F_2 , {}^1G_2 , {}^1H_2 , \ldots$	${}^2F_2 , {}^2G_2 , {}^2H_2 , \ldots$	${}^3F_2 , {}^3G_2 , {}^3H_2 , \ldots$
نوع ۱:	${}^1F_1 , {}^1G_1 , {}^1H_1 , \ldots$	${}^2F_1 , {}^2G_1 , {}^2H_1 , \ldots$	${}^3F_1 , {}^3G_2 , {}^3H_2 , \ldots$

همچنان که نظریه ساده انواع ما را از سخن گفتن درباره صفات بر حذر می‌داشت و تنها اجازه سخن گفتن درباره کلیه افراد یا کلیه صفات افراد را می‌دارد، بهمین نحو سلسله مراتب یاد شده نیز ما را از سخن گفتن درباره کلیه صفات یک نوع بر حذر داشته، تنها اجازه سخن گفتن دربارهٔ همه صفات مرتبه اول یا همه صفات مرتبه دوم یک نوع خاص را می‌دهد.

اشکال اساسی نظریه انشقاقی انواع اینست که نه تنها مانع استنتاج

پارادکس ها می شود بلکه استنتاج ریاضیات را نیز غیر ممکن می کند. همچنان که دیدیم اعداد حقیقی بر حسب صفات کسرها تعریف شدند، اما از آنجا که استعمال عبارت «بازاء کلیه صفات» بدون اشاره به مرتبه‌ای معین نا‌ممکن گشته است عبارت «بازاء کلیه اعداد حقیقی» تنها می تواند به اعداد حقیقی یک مرتبه خاص راجع شود. در نتیجه این «انشقاق» بسیاری از مهمترین تعاریف و قضایای اعداد حقیقی از دست می روند. بسیاری از قضایای اساسی نه تنها قابل اثبات که حتی قابل بیان نیز نخواهند بود. بعلاوه «اصل دور باطل» قرار بود مانعی بر سر راه تعاریف غیر محمولی impredicative definition (تعریف یک مفهوم بر حسب کلیتی که آن مفهوم بدان متعلق است) باشد حال آنکه بسیاری از مفاهیم (مانند مفهوم «کوچکترین کران بالایی») بدین گونه تعریف می شوند. برای رفع این مشکلات راسل اکسیوم تحول پذیری را طرح کرد تا به کمک آن مراتب متفاوت یک نوع را (از بعضی جهات) به پائینترین مرتبه آن تحویل کند. بنابر این اکسیوم، بازاء هر صفتی یک صفت محمولی متحدالمصداق وجود دارد، یعنی $(\forall\Phi)\,(\exists\psi)\,(\forall x)\,(\Phi x \leftrightarrow \psi!x)$. مخالفین لوجیسیزم بدرستی اظهار داشتند که نمی توان این ادعا را به عنوان اصلی منطقی پذیرفت و بعدها خود راسل نیز آنرا کنار گذاشت.

۳-۲- لوجیسیزم و مانور اگر- آنگاهی (If-Thenism)

گفتیم که مشکل اساسی لوجیسیزم این بود که یک دسته از فرضهای اساسیش مانند اکسیومهای بینهایت، انتخاب و تحویل پذیری به نظر نمی آمد اصولی منطقی باشد یا بنحوی از آنها نتیجه شده باشد. این مشکل سبب شد تا راسل به احکام شرطی حاوی آنها روی آورد زیرا احکامی که آن فرضها را به قضایای منتج از آنها مربوط می کرد، از منطق قابل استخراج بودند. مثلاً در حالیکه هیچ یک از اکسیومها و قضایای هندسه های مختلف از اصول منطقی قابل استخراج نمی باشد، احکام شرطی ای که آن اکسیومها را به قضایای مربوط به می سازد از

اصول منطقی قابل استنتاج اند. بدین ترتیب می توان گفت که هندسه به‌عنوان مجموعه‌ای از احکام شرطی از منطق قابل استخراج است. با توجه به این نکته راسل دیگر اصرار نورزید که اکسیومهای بینهایت یا انتخاب از منطق قابل استنتاج‌اند. آنچه را که می‌توان نتیجه کرد احکام شرطی‌ای است که مقدم آنها اکسیومهای یاد شده و تالی‌شان قضایای مستخرج از آنهاست (که این البته از نتایج «قضیه استنتاج» است). با شرطی دانستن قضایای ریاضی، مشکلات برنامه لوجیسیزم را می‌توان برطرف نمود.

واضح است که تثبیت لوجیسیزم به‌کمک شرطی ساختن قضایای ریاضی، صدق ریاضی را امری بسیار پیش پا افتاده می‌سازد. آنچه لوجیسیزم در پی انجامش بود عبارت بود از استخراج قضایا و اکسیومهای ریاضی از اصول منطقی و نه استخراج قضایای شرطی حاوی آنها به‌کمک «قضیه استنتاج». در این صورت نه فقط ریاضیات قابل استخراج از منطق است بلکه، همچنان‌که کواین اشاره می‌کند، جامعه شناسی و علم اسطوره شناسی یونانی نیز از منطق قابل استنتاج اند. در واقع هر علم تجربی را که بتوان اکسیوماتیزه کرد می‌توان با شرطی ساختن قضایایش آنرا، به‌کمک قضیه استنتاج، از منطق نتیجه گرفت. این همان پیش پا افتاده شدن مسئله صدق است. بعلاوه باید توضیح داده شود که چرا از میان امکانات متعدد ریاضیدانان تنها به بررسی یک سیستم اکسیوماتیک خاص می‌پردازند و اساساً، با شرطی دانستن قضایای ریاضی، پیشنهاد و ارائه اکسیومهای جدید چه معنایی می‌تواند داشته باشد. اینها پرسشهای است که مانور «اگر - آنگاهی» یا پاسخی به آنها ندارد و یا اگر دارد پاسخش مانند خود تئوری پاسخی کاملاً موردی و استعجالی است.

نتیجه

قبلاً اشاره شد که لوجیستها تئوری مجموعه‌ها را به‌عنوان بخشی از منطق قلمداد می‌کنند. اما این ادعایی است که از جانب بسیاری مورد مناقشه قرار گرفته است.

کواین، به عنوان مثال معتقد است که یکی دانستن تئوری مجموعه‌ها با منطق ناشی از مبالغه در شبیه دانستن مفاهیم «عضویت» («∈») و «محمول» است. منطق محمولات مرتبه بالاتر، بزعم کواین، در واقع همان تئوری مجموعه‌هاست که به واسطه نحوه تقریرش شباهتی ظاهری با منطق پیدا کرده است. از نظر او منطق در حد همان منطق محمولات درجه اول متوقف می‌شود و سورهای مرتبه بالاتر یا «∈» را نباید مفاهیمی منطقی قلمداد کرد. مشکل عمده لوجیسیزم توضیح این نکته بود که اکسیومهای تئوری مجموعه‌ها به چه معنا حقایقی منطقی‌اند. دیدیم که راسل خود به این امر اذعان داشت که اکسیومهای انتخاب و بینهایت را نمی‌توان از منطق نتیجه کرد. واقعیت اینست که راسل هرگز باندازه کافی به این نکته توجه نکرد که تئوری مجموعه‌ها منطق محض نبوده بلکه دارای اکسیومهای مربوط به وجود مجموعه‌هاست نکته‌ای که بعدها در تئوری اکسیوماتیک زرملو کاملاً بر آن تصریح شد. حتی در قلمرو اپیستمولوژی نیز توفیق لوجیسیزم محدود بود. استخراج قضایای ریاضی از منطق، با جملات پایان ناپذیر و طولانی آن، دارایی چنان درجه‌ای از پیچیدگی شده‌بود که با تصور شهودی ما از ریاضیات بسیار بیگانه می‌نمود. در حل مشکل امکان معرفت ریاضی این گامی به عقب بود نه به جلو. بنابراین میتوان نتیجه گرفت که برنامه لوجیسیزم در تحقق اهدافش توفیق نیافت.

موستوسکی این نکته را چنین بیان می‌کند:

> **واقعیت این است که هیچ منطقی که توانائی در برگرفتن کل ریاضیات را داشته باشد وجود نداشت. بدین ترتیب آنچه از این برنامه (لوجیسیزم) برجای ماند تنها تحویل ریاضیات به تئوری مجموعه‌ها بود. این را بدشواری می‌توان راه حل رضایت بخشی برای مسئله مبانی ریاضیات دانست زیرا از میان همه تئوریهای ریاضی، تئوری مجموعه‌ها خود بیش از بقیه به داشتن مبانی‌یی استوار نیازمند است.[۱۰]**

۳- بازگشت به معمای بناسراف

در ابتدای مقاله به تفصیل درباره تنش میان اپیستمولوژی و سمانتیک در باب ریاضیات سخن گفتیم. در این بخش من خواهم کوشید تا با ارائه تئوری توجیه (Theory of justification) خاصی از توان اشکال معرفتی به رئالیسم ریاضی تا حدی بکاهم. بگمان من اشکال معرفتی بناسراف تنها از لحاظ ظاهر فقط به رئالیسم ریاضی مربوط است و متاسفانه بسیاری از فلاسفه، منجمله خود بناسراف، گمان می کنند این مشکل تنها به حقایقی مربوط می گردد که بدلیل مجرد بودنشان، از دسترس معرفتی ما خارجند. اما این سخن بهیچ وجه صحیح نیست. هنگامی که به مسئله معرفت و نحوه پیدایش آن بصورتی عمیقتر نظر شود، معلوم خواهد شد که امکان معرفت ریاضی همانقدر نیازمند تبیین است که امکان معرفت، علی الظاهر بدون اشکال، تجربی.

گفتیم رئالیسم ریاضی با تعمیم سمانتیک تارسکی به قضایای ریاضی شروط صدقی را به آنها نسبت می دهد که ارضائشان تنها توسط ذواتی مجرد (اعداد، مجموعه ها ....) که از دسترس معرفتی ما خارجند میسّر خواهد بود. با توجه به این مسئله، ایراد بناسراف به رئالیسم ریاضی از دو مقدمه تشکیل می شد: (۱) اعداد هویاتی مجردند که توانائی فعل و انفعال علی با ما را ندارند. (۲) تنها در صورتی می توانیم ادعا کنیم به حقیقتی علم داریم که میان آن واقعیت و حواس ما رابطه ای علی وجود داشته باشد. واضح است که با پذیرش این دو مقدمه معرفت ریاضی ناممکن خواهد بود. این در حالی است که ما به بعضی حقایق ریاضی علم و آگاهی داریم. از این مقدمات کذب نظریه رئالیسم ریاضی لازم می آید. برای رفع این اشکال پاسخهای متفاوتی ارائه شده است. از آن جمله به راه حل گودل اشاره کردیم که معتقد بود ریاضیدانان به کمک قوه ادراکی شهود ریاضی، بنحوی در تماس با این ذوات مجرد می باشند. اشکال راه حل گودل اینست که او بهیچ وجه روشن نمی کند ما به چه نحو با این هویات مجرد تماس برقرار می کنیم. در غیاب توضیح دقیقتری در این باب راه حل گودل

فاقد قدرت تبیین لازم خواهد بود. می توان احتمال داد که علت ارائه چنین راه حلی از ناحیه گودل تعهد او به تئوری علّی علم یا توجیه (The causal theory of knowledge and justification) بوده‌است. به تعبیر دیگر چون او ارتباط علی با حقایق خارجی را از جمله شرایط لازم حصول علم یا توجیه می دانست، ناچار شد «نوعی تماس» با حقایق ریاضی را مفروض گیرد. اما چنین فرضی در واقع لازم نیست، زیرا تئوری علی علم یا توجیه تئوری باطلی است که حتی از جانب پیشنهاد دهندگان آن نیز کنار گذاشته‌شده‌است. در ادامه مقاله ابتدا دلایل انکار تئوری علّی علم یا توجیه باجمال بیان گشته، سپس تئوری توجیه دیگری پیشنهاد خواهد شد. دفاع از موجه بودن اعتقادات ریاضی، البته، به معنای حل مشکل اپیستمولوژی رئالیسم ریاضی نیست، زیرا یکی دو مسئله غامض همچنان باقی خواهد ماند. اما چنانکه اشاره خواهد شد این مسائل نه تنها دامنگیر معرفت ریاضی است که معرفت تجربی را نیز در بر می گیرد. معرفتهای ریاضی و تجربی، از این نظر، دارای منزلت واحدی هستند.

۱ـ۳ـ ابطال تئوری علّی علم و توجیه

دلیل اخذ شرط علّیت در تحلیل یا تعریف علم (و عقیده موجه) را می توان در دو انگیزه مرتبط ذیل جست. اولی مربوط می‌شود به نارسائی‌های تعریف سنتی و استاندارد علم بر حسب اعتقاد صحیح موجه و دومی ناشی از الگو قرار دادن ادراک حسی برای حصول معرفت می باشد. در ادامه بحث، ابتدا نشان خواهم داد که هیچیک از انگیزه‌های فوق نمی توانند ضرورت اخذ شرط علیت را در تحلیل علم (عقیده موجه) توجیه کنند و آنگاه به ترسیم خطوطی کلی تئوری توجیه دیگری خواهم پرداخت.

از زمان ارائه موارد نقض گتیه در ارتباط با تحلیل سنتی «S به P علم دارد» کوششهای بسیاری صرف شده تا با اضافه کردن یا جانشین ساختن شرایطی جدید، راه ورود علم تصادفی و شانسی را سد کنند. یکی از این پیشنهادها

توسط الوین گولدین و تحت عنوان «تئوری علی علم» مطرح شد که دارای ساختمان ذیل بود: S به P علم دارد اگر و فقط اگر (۱) P صادق باشد و (۲) S به P معتقد باشد و (۳) رابطه‌ای علّی میان حقیقت P و اعتقاد S به P وجود داشته باشد. با ضمیمه ساختن شرط سوم گولد من توانست موارد نقض گتیه و امثال آن را توضیح دهد. اما خود او بسرعت دریافت که حتی تحلیل علی نیز راه را برای ورود علم تصادفی باز می گذارد. مورد نقضی که او پیشنهاد کرد از این قرار بود.[۱۱] اسمیت همراه پسرش در حال رانند گی در یک جاده کوهستانی است و در حین رانند گی مناظر اطراف را به او نشان می‌دهد. از آن جمله اشاره به انباری می کند که در فاصله نسبتاً دوری از جاده قرار دارد. اسمیت تردید ندارد اتاقی که می بیند یک انبار است و در واقع نیز این اتاق یک انبار است. اما بدون آنکه اسمیت مطلع باشد در اطراف جاده‌ای که او رانند گی می کند، انبارهای تقلبی زیادی وجود دارد. بنحوی که اگر او به یکی از این انبارها اشاره می کرد آنرا از یک انبار واقعی تمیز نمی‌داد. در اینجا کلیه شروط یاد شده در تعریف علم ارضا شده‌اند. اولاً اتاقی که اسمیت به آن اشاره می کند یک انبار است، اسمیت به انبار بودن آن اعتقاد دارد و رابطه‌ای علّی نیز میان این واقعیت و اعتقاد اسمیت به آن وجود دارد. مع الوصف اسمیت واقعاً علم ندارد که انباری در آن نقطه واقع شده‌است زیرا علم او کاملاً محصول تصادف و شانس بوده‌است. اگر او بیکی از انبارهای تقلبی اشاره می کرد هیچگاه تقلبی بودن آنرا درنمی‌یافت.

دومین انگیزه هدف کلیتری را تعقیب می کند زیرا شرط علیت را نه تنها برای حصول علم که حتی برای اعتقاد موجه نیز ضروری می شمارد. دلیل این تعمیم نیز از الگو قرار دادن ادراک حسی ناشی می‌شود: اعتقادات ادراکی ما به دلیل آنکه محصول پروسه‌های علّی هستند موجه می‌باشند بنابراین هر اعتقاد دیگری، منجمله باورهای ریاضی، نیز برای موجه بودن باید محصول پروسه‌های علی باشد. این استدلال متاسفانه صحیح نیست زیرا اگر چه در مورد باورهای ادراکی و مربوط به حافظه وضعیت از این قرار است، بسیاری از باورها و

اعتقادات ما حاصل استنتاج بوده و مستقیماً حاصل نمی‌شوند. از آنجمله است اعتقادات مبتنی بر شهادت و گواهی (Testimony) اعتقادات مربوط به حوادث آینده، اعتقاداتی که متعلق آنها قضایای کلیه‌اند و امثال آنها. برای توجیه این قبیل باورها، شرط علی معمولاً آنقدر تضعیف می‌شود که به رابطه‌ای منطقی مبدل می گردد. واضح است که تضعیف رابطه علّی تا حد یک رابطه منطقی صرف دیگر محتوای چندانی برای مدعای نخست باقی نمی گذارد. از ملاحظات فوق می‌توان توجیه گرفت که برای حصول علم، بهیچ وجه ادراک متعلق آن ضرورت ندارد. این معنا بخصوص در مورد اعتقادات موجه صادق است زیرا یک اعتقاد موجه کاذب نیز می‌تواند وجود داشته‌باشد و این امری است که هیچ یک از تفسیرهای علّی نمی‌توانند آن را توجیه کنند. هیچ باوری نمی‌تواند معلول واقعیتی باشد که وجود خارجی ندارد. با ابطال تفسیر علّی علم و توجیه، استدلال بناسراف تا حدودی توان خویش را از دست می‌دهد زیرا موجه بودن باورهای ریاضی لازم نیست مسبوق به ادراک واقعیات ریاضی باشد. برای توجیه آنها می‌توان به سراغ تئوری دیگری رفت. قبل از ترسیم خطوط کلی تئوری مناسبی جهت توجیه باورهای ریاضی لازم است نخست توضیح دهم که چرا به جای ارائه تحلیلی از معرفت (Knowledge) ریاضی به مسئله توجیه (Justification) باورهای ریاضی پرداخته‌ام.

یکی از مهمترین اشتغالات اپیستمولوژی یافتن راههایی برای غلبه بر شکاکیت بوده‌است. شکاکیت معمولاً به دنبال انکار قطع و یقین و اعتقاد به احتمال خطا در باورهای انسانها بروز می‌کند و بالنتیجه اعتبار کلیه ادعاهای معرفتی را زیر سوال می برد. یعنی حتی اگر P صادق باشد باز هم اعتقاد به P، به دلیل احتمال خطا، نمی‌تواند در مرتبه علم قرار گیرد. فرض کنید بصورتی کاملاً تصادفی و از روی شانس اعتقاد به P برای ما حاصل شده و P نیز واقعاً صادق باشد. در این صورت، به گفته شکاکین، مشکل می‌توان باور یاد شده را علم خواند زیرا بسادگی ممکن بود کاذب از آن دربیاید. تنها به دلیل خوش شانسی ما

بوده‌است که به اعتقادی صحیح دست پیدا کرده‌ایم. در هر حال احتمال خطاهائی از این قبیل است که مانع می‌شود ما بتوانیم مدعی علم به P شویم. برای ابطال شکاکیت، فلاسفه کوشیده‌اند تعاریفی را از علم عرضه کنند که دیگر جائی برای احتمال خطا باقی نگذارد.

از زمانی که گتیه ایرادهای خود را به تفسیر سنتی «علم» (اعتقاد صحیح موجه) ابراز کرد، تعاریف و تحلیلهای متفاوتی از آن ارائه شده تا امکان علم تصادفی را حذف نمایند. ولی هیچ یک از این تعاریف توفیق کامل نیافته‌است و با توجه به شکستهای مستمر این کوششها بعید می‌نماید که تعریف موفقی هرگز ارائه شود. شکاکیت از میان رفتنی نیست یکی از دلایل این بدبینی، بگمان من، می‌تواند از این قرار باشد.

توجیه امری است مقول به تشکیک. اعتقادات ما از درجات متفاوتی از توجیه برخوردار بوده و درجه توجیه یک اعتقاد بستگی به مقدار شواهد مربوطی که شخص در تحصیل باور خود به آنها نظر داشته‌است دارد. اینکه کسی موفق به در نظر گرفتن کلیه شواهد مربوطه نشده باشد بهیچ روی مانع از توجیه اعتقادات او نمی گردد. بنابراین می توان گفت تا زمانی که شخص (به لحاظ معرفتی) غافل از شواهد مربوطه نبوده باشد اعتقادات او مجاز و موجهند. این توجیه البته موقتی است زیرا با پیدایش اولین شاهد مخالف از اعتبار ساقط خواهد شد. بنابراین کاملاً ممکن است که کسی بنحوی تصادفی اعتقادات موجهش را تحصیل کرده باشد زیرا شواهد مخالف تصادفاً از نظر او پنهان مانده‌اند. از طرف دیگر اگر شخص کلیه شواهد مربوطه را در نظر گرفته باشد در این صورت اعتقادات او نه بصورتی موقت که بنحوی قطعی و کامل موجه خواهند بود. این ملاحظات قطعاً بر هر تحلیلی از علم که شرط توجیه را در تعریف آن اخذ می کند تاثیر میگذارد. زیرا اگر ما به دنبال توجیه موقتی باشیم، علم موقتی هم خواهیم داشت. بدین ترتیب «علم» مفهومی متاثر از اوضاع و شرایط گشته و، تحت بعضی از این شرایط، راه برای حصول علم تصادفی بازخواهد شد. در این صورت می باید

احتمال خطا و در نتیجه امکان شکاکیت را تصدیق کرد. اما اگر به دنبال توجیه قطعی و کامل باشیم به علم قطعی خواهیم رسید و دیگر جائی برای شکاکیت باقی نخواهد ماند. لکن بسیار نامتحمل است که ما بتوانیم کلیه شواهد مربوطه را در نظر بگیریم. در نتیجه می باید تصورمان را از «توجیه» تعدیل نمائیم. اما تعدیل شریط توجیه، همچنان که گفته شد، علم را تابعی از شرایط کرده، در مواردی به حصول علم تصادفی منجر خواهد گشت. بهمین دلیل است که کلیه تئوریهای ارائه شده در باب تحلیل مفهوم علم که مفهوم توجیه موقتی را در معنای آن اخذ می کنند راه را برای حصول علم تصادفی باز می گذارند. این واقعیت امکان ارائه یک تعریف جامع درباره علم را که جائی برای علم تصادفی و شکاکیت باقی نگذارد بسیار نامتحمل می سازد. اما شکاکیت تنها یکی از اشتغالات اپیستمولوژی است و در مورد اهمیت آن نباید مبالغه کرد. در شرایطی که حصول علم قطعی (اعتقاد صحیح کاملاً موجه) میسر نیست می باید به اموری پرداخت که تحقق آن در محدوده توان بشری است، یعنی حصول اعتقادات و باورهای موجه. اگر تحلیل دقیقی از علم برایمان ممکن نیست شاید بتوانیم معین کنیم که، حداقل، تحت چه شرایطی باورهای ما موجه هستند. بهمین دلیل به جای پرداختن به مسئله تحلیل مفهوم علم، من به بررسی شرایطی می پردازم که تحت آن شرایط اعتقادات ما موجه خواهند بود. بدین منظور خطوط کلی تئوری توجیهی را ترسیم خواهیم کرد که نزد فلاسفه «تئوری توجیه برپایه قابل اعتماد بودن» (The Reliability theory of justification) نام گرفته‌است.

بنابراین تئوری، اعتقادی موجه است که حاصل پروسه معرفتی قابل اعتمادی باشد. بدین اعتبار اعتقادات ادراکی از آنجهت موجه می باشند که محصول پروسه ادراک حسی هستند، پروسه‌ای که در این عالم قابل اعتماد است. همچنان که اعتقاداتی که از سایر اعتقادات موجه دیگر نتیجه شده‌باشند موجه میباشند زیرا پروسه استنناج پروسه‌ای قابل اعتماد است. بعکس، باورهایی که محصول خیالپردازیهای آرزومندانه هستند موجه نمی باشند. پروسه قابل اعتماد پروسه‌ای

است که حداقل ۵۰٪ از اعتقادات حاصله از آن صادق باشد و این معنا کاملاً با تصور ما از مفهوم «توجیه» هماهنگ است زیرا مفهوم «توجیه» نیز مفهومی مقول به تشکیک است. باید توجه داشت که تعیین میزان قابلیت اعتماد یک پروسه نیازی به پیشگوئی درباره چگونگی محصولات آن (از نظر صدق و کذب) ندارد. کافی است که مکانیزم نهانی آن پروسه مورد بررسی قرار گرفته و میزان توانایی و «میل» (Propensity) آن به تولید باورهای صحیح سنجیده شود. به این ترتیب ما خواهیم توانست از میزان و درجه قابلیت اعتماد آن پروسه مطلع گردیم (این جا از مواردی است که نیاز اپیستمولوژی به روانشناسی آشکار می گردد). با توجه به این نکات «تئوری توجیه بر مبنای قابل اعتماد بودن»، ساختاری از قرار ذیل خواهد داشت: اعتقاد S به P موجه است اگر و فقط اگر اعتقاد مذکور محصول یک پروسه معرفتی قابل اعتماد بوده و این توجیه از ناحیه اعتقادات دیگر S مورد تهدید قرار نگرفته باشد.[۱۲]

۲-۳- توجیه اعتقادات ریاضی

اکنون به بررسی ارتباط مطالب فوق با تجویز اعتقادات ریاضی می پردازیم. قبلاً گفتیم که مفاهیم علم و توجیه هیچ یک (بالذات) مفاهیمی علی نبوده و بنا بر این امکان تفسیری غیر علّی از توجیه را نمی توان منتفی دانست. بدنبال آن و برای پرکردن خلأ ایجاد شده خطوط کلی تئوری قابل اعتماد بودن توجیه ترسیم گشت. در مورد معرفت ریاضی وضعیت از این قرار است. قبلاً هنگام بررسی تئوریهای کواین و گودل اشاره شد که تئوری معرفتی کواین با پدیدارشناسی ریاضیات هماهنگی ندارد و نمی تواند بداهت ریاضیات پایه را توجیه یا تبیین کند. در مورد رئالیسم افلاطونی گودل وضع بعکس است. او نقطه عزیمت خود را از تجربه خود ریاضیدانان انتخاب میکند. شهود ریاضی به گمان او پروسه‌ای است که ریاضیدانان توسط آن اکسیومهای ریاضی را فرض کرده، صحت و سقم آنها را در بوته سنجش قرار می دهند. همچنان که گفتیم گودل تحت تاثیر تئوری

علّی علم فرض کرد که ما از طریق شهود ریاضی بنوعی با ذوات مجرد ریاضیات در تماس هستیم ولی توضیح بیشتری در این باب ارائه نکرد. ولی شاید واقعاً نیاز به چنین فرضی نیز نباشد. برای برپا ساختن تئوری‌یی برای معرفت ریاضی همینقدر کافی است که پدیدارشناسی آنرا شناسائی کنیم و این کار، همچنان که گودل اشاره می کند، یعنی تمسک جستن به شهود ریاضی.[۱۳]

معرفت ریاضی یا از طریق استنتاج قضایای ریاضی از اکسیومها نتیجه می‌شود و یا (در مورد اکسیومها) با توسل به شهود ریاضی. البته بگفته گودل، چنین نیست که تمسک به شهود بتواند تکلیف همه فرضیات ریاضی را روشن کند. همچنان که حقایقی درباره اشیاء فیزیکی وجود دارد که قابل ادراک نیستند، حقایقی نیز درباره هویات ریاضی وجود دارد که شهودی نمی‌باشند. در هر دو حالت علم ما به این حقایق «دور از دسترس» از راه نقش آنها در تئوریها و توانائیشان در تبیین و سازماندهی داده‌ها حاصل می‌شود. بنابراین باید میان دو مرحله از حصول معرفت ریاضی تمیز داد. یکی مرحله‌ای است که در آن بسهولت می‌توان دربارهٔ یافته‌های شهود ریاضی به توافق رسید، یعنی توافق درباره صدق کذب فرضیات آسان می‌باشد و دیگری مرحله نظری تریست که اجماع دیرتر حاصل می‌شود. در این مرحله ممکن است باورهای ریاضی توسط داده‌های شهودی به صورت ناقص متعین گردند. این مرحله از معرفت ریاضی شبیه مرحله نظری علوم تجربی است، یعنی جائی که فرضیات ناسازگار توسط دسته‌ای واحد از مجموعهٔ داده‌ها به صورت ناقص متعین می گردند. به تعبیر دیگر هنگامی که فرضیات ناسازگار بگونه‌ای یکسان داده‌های تجربی را تبیین مینمایند.

در هر دو مرحله امکان خطا وجود دارد و این امر البته ملازمت تام با رئالیسم دارد. قبلاً حقایق عینی را بر حسب استقلال آنها از زبان و نحوه ادراکات‌مان تعریف کردیم. در واقع این شکاف میان تجربه حسی و عالم خارج است که نمایانگر و علامت عینیت حقیقت است و دقیقاً بهمین دلیل است که ادراکات حسی اغلب با خطا و اشتباه توامند. بهمین نحو عینیت حقایق ریاضی اقتضا

می کند که ما قائل شویم آنچه در شهود بر ما معلوم گشته ممکن است خلاف امر واقع باشد. به عبارت دیگر امکان خطا، ملازمت تام با عینیت دارد.

سخنان فوق همگی درباره پدیدارشناسی ریاضیات بود. گفتیم شهود ریاضی پروسه‌ای است که ریاضیدانان با تمسک به آن صدق و کذب اکسیومهای ریاضی را معین می سازند. همچنین میان دو مرحله از شهود فرق گذاشتیم، یکی مرحله‌ای که شناسائی صدق و کذب اکسیومها آسانتر بوده، تحصیل اجماع خالی از اشکال است و دیگری مرحله نظری‌تری که در آن باورهای ریاضی توسط داده‌های شهودی به صورت ناقص متعین می گردند. این‌ها همه به پدیدارشناسی مربوط می‌شود و برای تبدیل آن به اپیستمولوژی لازم است نشان دهیم که باوردهای مذکور موجه نیز هستند. این معنا با توسل به تئوری قابل اعتماد بودن توجیه که کلیات آن ترسیم شد، قابل تحصیل است زیرا پروسه شهود ریاضی با توجه به آنچه قبلاً گفته شد پروسه‌ای قابل اعتماد بوده و نتیجتاً اعتقاداتی که محصول آن هستند به لحاظ معرفتی موجه خواهند بود.[۱۴]

البته ما نمیدانیم اعتقاداتی که محصول تجربه‌های شهودی ما هستند چگونه به این خوبی با واقعیات ریاضی مطابقت دارند اما یک مکانیزم می‌تواند درست عمل کند بدون اینکه ما بدانیم چگونه عمل می کند. در هر حال این سوال بقوت خود باقی است که اگر تنها راه دستیابی ما به واقعیات ریاضی از طریق شهود است و اگر بدلیل مجرد بودن هویات ریاضی ادراک آنها ممکن نیست، در این صورت در غیاب روش مستقل دیگری جهت بررسی ادعاهای حاصله، چگونه می‌توان با به کارگیری پروسه شهود صحت و سقم آن ادعاها را معین کرد؟ از آنجا که مادر تجویز اعتقادات ریاضی به تئوری «قابل اعتماد بودن» پروسه‌های معرفتی تمسک کرده‌ایم این پرسش را می توان اینگونه نیز مطرح کرد: چگونه می‌توان معین کرد که پروسه شهود ریاضی قابل اعتماد است؟ این سوال در واقع دارای دو وجه است. وجه نخست آن معرفتی و اپیستمیک است: در غیاب روش و آزمونی مستقل چگونه می توان معین کرد که پروسه شهود قابل اعتماد است؟ وجه

دوم طبیعتی متافیزیکی دارد: در صورت قابل اعتماد بودن پروسه شهود، چگونه می توان «قابلیت اعتماد» آن را توضیح و تبیین کرد؟ من در اینجا از دادن پاسخهای مستقیم به این پرسشها خودداری خواهم کرد و در عوض خواهم کوشید نشان دهم که عیناً همین پرسشها را در مورد معرفت تجربی نیز می توان مطرح کرد. به تعبیر دیگر هدفم تصریح نکته‌ای است که تاکنون چندین بار به آن اشاره شده‌است: امکان معرفت ریاضی همانقدر نیاز به تبیین دارد که معرفت تجربی.

ابتدا از پرسش معرفتی آغاز می کنیم تا ببینیم که آیا این سوال در مورد ادراک حسی نیز مطرح می‌شود یا خیر، گفتیم که بنا بر تئوری قابل اعتماد بودن توجیه، اعتقادات ما موجه هستند اگر و فقط اگر محصول پروسه‌هایی قابل اعتماد باشند. در این صورت اعتقادات تجربی (حسی) ما از آن جهت که تجربه حسی پروسه قابل اعتمادی است موجه می باشند. واضح است که صحت این ادعا مسبوق است به اینکه بتوانیم درستی فرض ذیل را معین نمائیم: (I) تجربه حسی منبع قابل اعتمادی برای تولید ادراکات حسی است. نخستین پاسخی که به ذهن می‌رسد بی‌شک متوسل به سابقه این پروسه خواهد شد: باورهای مبتنی بر تجربه حسی اکثراً صحیح و مطابق با واقع بوده‌اند، بنابر این تجربه حسی باید پروسه‌ای قابل اعتماد باشد. به عنوان مثال فرض کنید من، تحت شرایط طبیعی، متقاعد شوم که میزی در برابرم قرار دارد. این اعتقاد بی‌شک صحیح است اما ما این را از کجا می دانیم؟ کافی است، مثلاً، از دیگران بخواهیم تا آنرا بررسی و تائید کنند. اما این روش نمی تواند آزمونی مستقل و غیردوری جهت سنجش (I) باشد زیرا برای انجام آن ناچار خواهیم بود به قابلیت اعتماد تجربه‌های حسی دیگران اطمینان و تکیه کنیم. می توانیم ترتیبی دهیم که از میز مزبور عکس تهیه شود. اما حتی در این روش نیز ناچار خواهیم بود آن عکسها را ببینیم و بنابر این باید بار دیگر قابل اعتماد بودن تجربه حسی را از قبل فرض کنیم.

ممکن است کسی راه غیرمستقیم ذیل را جهت اثبات (I) پیشنهاد کند: تنها

در صورت فرض صحت باورهای حاصله از تجربه حسی است که ما می توانیم توافق عمومی در مورد باورهای ادراکی و موفقیت پیش بینی هایمان را توضیح دهیم. اما اعتبار این برهان نیز مسبوق به درستی ادعای (I) است زیرا تنها با تمسک به تجربه حسی است که می توان توفیق پیش بینی ها و توافق عمومی را تصدیق و شناسائی کرد. در کلیه این موارد برای اثبات قابلیت اعتماد تجربه حسی ناچاریم به صورت غیرمستقیم به آن اطمینان کنیم. (I) تنها بشرطی قابل اثبات است که ما راهی مستقل از توسل به تجربه حسی جهت تصدیق آن در اختیار داشته باشیم اما چنین چیزی ممکن به نظر نمی آید. بدین ترتیب به نظر میاید که قابل اعتماد بودن تجربه حسی را نمی توان بنحوی مستقل و غیردوری اثبات کرد. ویلیام آلستون این نوع دور را دور معرفتی (epistemic circularity) می خواند و بروز آنرا به طور کلی هنگامی می داند که جهت اثبات قابل اعتماد بودن پروسه های معرفتی ناچار می شویم به مقدماتی تکیه کنیم که آن مقدمات همگی محصول همان پروسه ها هستند.[15] همین نوع از دور در مورد پروسه شهود نیز ظاهر می شود. هیچ روش مستقلی جز از طریق توسل به خود شهود ریاضی جهت اثبات قابلیت اعتماد آن وجود ندارد. ما تنها می توانیم با ملاحظه اصول تنظیمی از احتمال خطا کم کرده، توافق همگانی را گسترده تر بسازیم. البته در هر دو مورد باورهای تجربی و ریاضی، همچنان که اشاره شد، توجیه حاصله متوقی و قابل برگشت است.

اکنون به سراغ پرسش متافیزیکی می رویم: فرض کنیم شهود ریاضی پروسه ای قابل اعتماد است. در این صورت در غیاب رابطه ای علّی میان ما و هویات ریاضی چگونه می توان این قابلیت اعتماد را توضیح داد؟ به تعبیر دیگر چگونه است که باورهای حاصله از شهود ریاضی با واقعیات ریاضی مطابقت دارند، در حالی که هیچ رابطهٔ علّی میان طرفین این نسبت وجود ندارد؟ بیاد داریم که برهان بناسراف (علیه رئالیسم ریاضی) متکی به تئوری علّی علم بود و گفتیم که تئوری مذکور امروز دیگر در میان فلاسفه خریداری ندارد. در عین حال

می توان اشکال بناسراف را به گونه‌ای بیان و تقریر کرد تا مسبوق به درستی تئوری علّی علم نباشد و این بگمان من پیام واقعی آنست. مشکل اصلی در اینجاست که هر مکانیزمی که توسط رئالیستها جهت حصول معرفت ریاضی فرض شود (علّی یا غیر علّی) این نکته باید از جانب آنان روشن گردد که چگونه است که اعتقادات حاصله از آن مکانیزم حاکی از واقعیات ریاضی می‌باشند. به تعبیر دیگر قابلیت اعتماد این مکانیزم‌ها را چگونه میباید تبیین کرد؟ چگونه است که این مکانیزمها از واقعیاتی خبر می‌دهند که از هر نظر از دسترس و قلمروشان خارجند؟ این همان پرسش متافیزیکی است که آغازگر این بخش از سخنان بود: به فرض قابل اعتماد بودن پروسه شهود ریاضی، این واقعیت چگونه قابل توضیح است؟ هارتری فیلد نیز در تحلیلش از معمای بناسراف بهمین نتیجه می‌رسد، اما اضافه می‌کند که بگمان او چنین تبیینی علی الاصول ناممکن بوده و در نتیجه رئالیسم ریاضی تا حدود زیادی اعتبارش را از دست میدهد. به نظر من برای رهایی از چنین بن بستی تنها یک راه حل وجود دارد و آن اینست که به پیروی از لایبنیتس قائل به نوعی همسازی از پیش تثبیت شده، (pre-established harmony) میان واقعیات ریاضی و پروسه شهود گردیم. این تبیین قطعاً از جانب فیزیکالیستهایی همچون فیلد مردود قلمداد میشود، اما همچنان که ذیلاً اشاره خواهد شد، عیناً همین مشکل در مورد معرفت تجربی وجود دارد و آنجا نیز توسل به همسازی از پیش تثبیت شده تنها راه گریز از بن بست است. البته برای منظور این مقاله بهیچ وجه پذیرش این تبیین لازم نیست بلکه هدف عمده من آنست که نشان دهم مسئله امکان معرفت ریاضی همانقدر نیازمند تبیین است که معرفت تجربی.

پس پرسش را از اینجا آغاز می کنیم که معرفت تجربی چگونه ممکن است، یعنی چگونه است که باورهای تجربی ما با عالم خارج مطابقت دارند. ابتدا چنین بنظر می آید که ارتباط علی میان قوای ادراکی ما و عالم خارج به آسانی بتوانند توافق این دو را توضیح دهد، حقایق عالم خارج هنگام تماس ما با آنها در ذهنمان نقش می بندند و بنابراین جای تعجب نیست که میان علم ما و عالم خارج

توافق و مطابقت وجود داشته باشد. اما این تصور صحیحی از نحوه حصول معرفت نیست. هنگام تفکر درباره عالم خارج ذهن ما از مرحله انفعالی پذیرش تاثرات حسی بسیار فراتر می‌رود. این نکته را می‌توان در دو مرحله توضیح داد.

نخستین مرحله، مرحله نظری و تئوریک معرفت است. یعنی هنگامی که ما بر مبنای داده‌های تجربی بسیار محدود به ساختن تئوریهایی می‌پردازیم که بهیچ وجه از آن داده‌ها نتیجه نشده، مع الوصف تصویری صحیح از عالم خارج به دست می‌دهند. بنابراین امکان معرفت نظری نیازمند توضیح و تبیین است و این امری نیست که صرف کپیه برداری از عالم خارج باشد. شکاف میان تئوریها و شواهد آنها بسیار وسیعتر از آنست که توسط نظریه‌های ساده‌لوحانه معرفت شناسی پر گردد. همانطور که تام نیگل می‌گوید حتی معرفت تجربی نیز می‌باید مبتنی بر پایه‌هایی ما قبل تجربی باشد. بخشی عظیم از بار فرضیه سازی بر دوش فعالیتهای ماقبل تجربی از قبیل صورتبندی و گزینش فرضیات است و تئوری امپریسیستی کپیه برداری از عالم خارج بهیچ وجه توانائی تبیین واقع نمائی معرفت نظری را ندارد.

مرحله دوم، مرحله حصول ادراکات روزمره است. حتی در این سطح نیز تصویر امپریسیستی کپیه برداری از عالم خارج ناقص است. درست است که ما اعتقادات خود را بر مبنای آنچه در تجربه حسی کسب کرده‌ایم حاصل می‌کنیم، اما، همچنان که کانت می‌گوید، طبقه‌بندی این داده‌ها امری است مربوط به ما و در اختیار ما. مع الوصف با وجود دخالت ما در صورتبندی این باورها چنین اتفاق افتاده است که آنها تصویری واقعی از عالم خارج را به دست می‌دهند. این امر قطعاً نیاز به توضیح دارد. برای روشنتر ساختن موضوع می‌توان مسئله قابل اعتماد بودن استقرا را مورد بررسی قرار داد. استقرا یکی از مواردی است که با توسل به آن اعتقادات ما از تجربه حسی فراتر می‌روند. بکمک استقرا ما به ساختن تئوریها پرداخته، می‌کوشیم به فهم طبیعت نائل گردیم. «استقرا» نشانداده است که پروسه بسیار قابل اطمینانی است: موارد مشاهده نشده معمولاً مشابه موارد

مشاهده شده از آب درآمده‌اند. این واقعیت، بگفته واکر، بسیار شگفت آور است.[۱۶] می باید دلیلی درباره علت توافق طبیعت با سیستم اعتقادی ما پیدا کرد. این شگفتی با تقریر جدید گودمن از مسئله استقرا ابعاد جدیدتری بخود می گیرد. او نخست متذکر می‌شود که آینده ممکن است بانحاء مختلف با گذشته مشابهت داشته باشد و نحوه تشابه مسبوق است به اینکه ما اشیاء را چگونه طبقه بندی کرده باشیم. ما معمولاً اشیاء را، مثلاً در مورد رنگهایشان، بر حسب مفاهیمی از قبیل «سبز»، «آبی» و غیره طبقه بندی می کنیم. اما به جای این مفاهیم کاملاً ممکن بود از مفهومی چون «سابی» استفاده کنیم، بطوری که با فرض زمان اختیاری T ـ مثلاً نیمه شب امشب ـ چیزی درزمان t سابی است اگر و فقط اگر یا $t < T$ و آن شیئی سبز باشد و یا اینکه $t \geq T$ و آن شیی آبی باشد. در این صورت می توانیم بگوئیم علف فردا همرنگ علف دیروز است اگر همچنان سابی مانده باشد (یعنی اگر آبی باشد). اگر ما با مفهوم «سبز» کار کنیم با استفاده از اصل استقرا انتظار خواهیم داشت که علف فردا سبز باشد در صورتیکه اگر مفهوم «سابی» را به کار بریم، انتظار خواهیم داشت که آبی باشد. این بدان معناست که انتظارات ما بیش ازهر چیز بستگی به نحوه طبقه‌بندی اشیاء از طرف ما دارند و البته هیچ ضرورتی ندارد که اشیاء را آنگونه که اکنون دسته‌بندی میکنیم، دسته بندی کنیم. مع الوصف به نظر می آید طبیعت بگونه‌ای طراحی شده باشد که با انتظارات ناشی از طبقه بندیهای طبیعی ما توافق و مطابقت داشته باشد. این تصادف شگفت آور قطعاً نیازمند تبیین است.

همانطور که واکر اشاره می کند تئوری تکامل هیچ کمکی در اینجا نمی تواند بکند. ما نمیتوانیم بگوئیم که انتخاب طبیعی از آنجهت ما را ترجیح داده که مفاهیمی مانند «سابی» را به کار می بریم زیرا اگر چه تئوری تکامل ممکن است از بین رفتن موجودات استعمال کننده مفهوم «سابی» را که زمان T آن در گذشته‌ای دور قرار داشته تبیین نماید، اما بهیچ روی قادر نیست توضیح دهد که چرا ـ هنگامی که T نیمه شب امشب است ـ ما بجای «سابی»، «سبز» را به کار میبریم.

دلیل این امر آن است که هر دو گروه استعمال کنند گان «سابی» و «سبز» انتظارهای واحدی تا زمان T داشته و نتیجتاً انتخاب طبیعی نمی توانسته میان آنها تفاوتی قائل شود. این نکته را می توان به این صورت نیز تعمیم داد. شکی نیست که ما توانائی تحصیل اعتقاداتی را درباره عالم داریم و برخی از باورهای نادرست ما شانس بقایمان را کاهش میدهند. اما بقول نیگل، بسیاری از باورهای ما هیچ ارتباطی با مسئله بقا ندارند. ما بر مبنای شواهد تجربی محدودی به انواع باورهای تئوریک از قبیل کیهانشناختی، ریاضی و غیر آنها دست پیدا می کنیم. آنچه لازم است بدانیم تنها این نیست که چرا این باورها را داریم بلکه مسئله اصلی آن است که چرا آنها تصویری واقعی از عالم خارج بدست می دهند. تبیین‌های تکاملی قوه نظریه پردازی ما بهیچ روی نمی توانند توانائی آنرا در دستیابی به حقیقت توضیح دهند. تمسک به شانس و تصادف نیز نمی تواند فرضیه قابل قبولی در مورد توافق سیستم اعتقادی ما و عالم خارج باشد. حقیقت بسیار مهمتری باید در پس پرده باشد.

> «بدون فرض واقعیتی عمیق و اساسی، امکان معرفت بشری امری غیرقابل درک می نماید. بینش من عقلی و ضد تجربه گرائی است، نه به این دلیل که قبول داشته باشم کشف مبنائی مطمئن برای باورهای ما به صورت ماقبل تجربی میسر است بلکه از آن جهت که معتقدم تا زمانی که فرض نکنیم باورهای ما ریشه در امری بسیار عظیم (و نه فقط بشری) که از آن بیخبریم دارند، وجودشان بی معنی و غیرقابل توجیه می نماید، در حالی که این باورها واقعیتی غیرقابل انکار دارند.»[۱۷]

بنابراین مسئله توافق میان اعتقادات ما و عالم خارج هنوز در انتظار پاسخ بسر می برد. با استمرار توافق میان قوای ادراکی ما و عالم خارج و با توجه به شکست تئوریهای تجربه گرائی و تکاملی در تبیین این امر، یک راه حل قابل قبول این است که قائل به نوعی همسازی از پیش تثبیت شده میان آن دو شویم. این

راه‌حل را البته نباید به عنوان توضیحی قطعی درباره مسئله امکان معرفت به حساب آورد. هدف من تنها تصریح این نکته بود که مشکلی که در مورد معرفت ریاضی با آن مواجهیم مسئله‌ایست که در حوزه‌های غیر منتظره‌ای همچون معرفت تجربی، که محصول رابطه علی ما با عالم است، نیز وجود دارد. بررسی های فوق نشان داد که توافق میان واقعیات ریاضی و باورهای ما همانقدر نیازمند تبیین است که توافق میان عالم خارج و اعتقادات تجربیمان. بدین لحاظ، بگمان من، اشکال معرفتی بناسراف به رئالیسم ریاضی، یک مشکل همگانی است. هنگامی که مسئله خوب شکافته شود معلوم می گردد که تنش میان سمانتیک و اپیستمولوژی نه تنها مشکل زبان ریاضی که مشکل کل زبان طبیعی است.

از هنگام طرح مسئله صدق و مشکل معرفتی رئالیسم ریاضی تاکنون راه زیادی را پیموده‌ایم. در پایان به این نتیجه رسیدیم که مشکل مزبور نه تنها مختص رئالیسم ریاضی که مشکل «رئالیسم» به طور کلی است. تعمیم یک مشکل البته بهیچ روی به جای پاسخ آن نمی‌نشیند و این نتیجه قطعاً خوشآیند اذهانی نخواهد بود که حقیقت را، آنهم مورد معرفت یقینی و بیّنی همچون ریاضیات، امری آشکار می‌دانند. اما فلسفه کارش از قبیل همین تعمیم‌هاست، یعنی زدودن غبار ساده‌لوحی و برملا ساختن طبیعت پیچیده واقعیت. فلسفه یک فعالیت است نه مجموعه‌ای از حقایق.

**** پی‌نوشتها و مآخذ:**

1- Benacerraf, P. (1973), "Mathematical truth", repr. in Benacerraf and Putnam (eds) (1983), *Philosophy of Mathematics*.

2- Kripke, S. (1972), "Naming and necessity" in Davidson and Harman (eds), *Semantics of Natural Language*.

3- Quine, W. V. O. "Carnap and Logical truth", in Benacerraf and Putnam (eds) (1983).

4- Putnam, H. (1975), "What is mathematical truth", in *Mathematics, Matter and Method.*

5- Field, H. (1989), *Realism, Mathematics and Modality.*

6- Godel, K. (1947), "What is Cantor's continuum problem?" repr. in Benacerraf and Putnam (eds) (1983).

7- Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics.*

8- Frege, G. (1884), The Foundation of Arithmetic.

۹ـ همانطوریکه کسانی نیز کوشیده‌اند عکس اینکار را انجام دهند، یعنی کلیه جملات را به جملاتی که الفاظ عددی در آنها به صورت صفت یا سور عددی استعمال می‌شود تحویل نمایند. از آن جمله دیوید بوستوك (*Logic and Arithmetic*) کوشیده‌است تا با ضمیمه کردن سورها در حوزه متغیرها بر مشکلات این برنامه غلبه کند. اما همچنان که کریسپین رایت اشاره می‌کند (*Frege's Conception of Numbers as objects*) اولاً روش بوستوك ـ در صورت موفقیت ـ نه تنها منجر به حذف کلیه اشارات به ذوات ریاضی که به حذف مدلول اسامی‌یی از قبیل «سقراط»، «لندن» و غیر آنها می‌انجامد. ثانیاً، بوستوك در اجرای روش خود هم ناچار به تسویر برخود سورها و هم اشاره مشخص به آنها می گردد که در این صورت تفاوت تفسیر او با تفسیر های افلاطون گرا و رئالیستی از قضایای ریاضی تنها لفظی و صوری خواهد بود.

10- Mostowski, A. (1991): *Thirty years of Mathematical Logic.*

11- Goldman, A. (1976), "Discrimination and perceptual knowledge", *the journal of philosophy 73/20.*

۱۲ـ همچنان که گفته شد هدف در اینجا تنها طرح خطوط کلی تئوری توجیه بر مبنای قابل اعتماد بودن است. اینکه چرا تئوری مزبور چنین ساختمانی دارد نیازمند پرداختن به مقدماتیست که فعلاً از عهده این مقاله خارج است. بمنظور سهولت بیان از بسیاری از پیچیدگیهای تئوری مزبور صرف نظر شده‌است. برای بحثی تفصیلی در این باره نگاه کنید به

Goldman , A, *Epistemology and Cognition*

۱۳ـ تحلیل مکانیزم «شهود ریاضی» البته محتاج بررسی و تحقیقی همه جانبه و دقیق است و گفتن ندارد که چنین تحقیقی برای منظور ما (توجیه باورهای ریاضی) اهمیت تام دارد. اما بدلیل محدودیتهای این مقاله بررسی آنرا به فرصتی دیگر موکول می‌نماییم.

۱۴ـ باید توجه شود که تاکید بر شباهت بیان ادراك حسی و شهود بهیچ و.به بمنظور القای این تصور نبود که این دو پروسه به یك درجه قابل اعتماد هستند چون چنین چیزی صحت ندارد. تئوری توجیه بر مبنای قابل اعتماد بودن نیز هیچگاه ادعا نکرد که بعضی از پروسه‌های معرفتی باید از نظر درجه قابلیت اعتماد الگوی سایر پروسه‌ها باشند. همچنان که اشاره شد، مفاهیم توجیه و قابلیت اعتماد هر دو مقول به تشکیکند. درجات مختلف توجیه را حتی در محدوده یك پروسه واحد نیز می‌توان سراغ گرفت. اعتقادی که بر تجربه ادراکی دقیق و حسابشده‌ای مبتنی باشد از درجه توجیه بالاتری نسبت به باوری که محصول تجربه‌ای زودگذر و اتفاقی است، برخوردار است.

15- Alston, W. (1986) "Epistemic Circularity", *philosophy and phenomenological Research.*

16- Walker, R.C. (1978), *Kant.*

17- Nagel, T. (1986), *The view from Nowhere.*