مفهوم اعداد حقیقی نزد حکیم عمر خیام

یحیی تابش

استاد ریاضیات دانشگاه صنعتی شریف

۱- مقدمه

پایهٔ ریاضیات نوین عدد است، اما عدد چیست؟

ابوریحان بیرونی در تعریف عدد می‌گوید:«جمله‌ای است از یک‌ها گردآمده»[1] ولی مفهوم اولیه عدد، یعنی عدد طبیعی، تعمیم بسیاری یافته است تا به ابزاری نیرومند برای رفع نیازهای نطزی وعملی، تبدیل شده است. صفر، عددهای صحیح منفی، و عددهای گویا درد روندی طولانی و آمیخته با تزلزل وتردید بتدریج همچون عددهای صحیح مثبت پذیرفته شده‌اند و به عنوان ابزاری روزمره به کار گرفته می‌شوند، ولی باید از این هم فراتر رفت و مفهوم عدد راگسترش داد تا شامل کمیتهای گنگ نیز بشود تا دستگاه اعداد حقیقی به عنوان مرجعی کامل در اختیار قرار گیرد.

در این مقاله می‌خواهیم نقش خیام ریاضیدان نامی ایرانی را در این رابطه یعنی

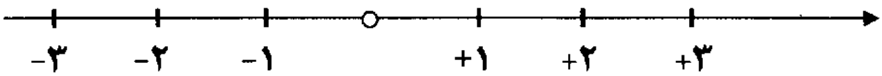
---

۱. ابوریحان بیرونی، ***التفهیم لاوایل صناعة التنجیم*** متن فارسی قدیمی به تصحیح و مقدمه استاد جلال الدین همایی، انتشارات بابک تهران ۱۳۶۲، ص ۳۴

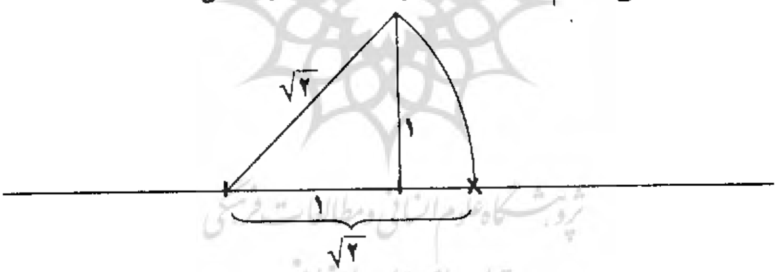
گسترش اعداد وتوجه به مفهوم عدد حقیقی بررسی کنیم.

عددهای صحیح حاصل تجرید عمل شمارش اشیاء در دسته‌های متناهی است، ولی نیازهای کاربردی، و به گونه‌ای نیازهای درونی دستگاه اعداد، مفهوم اعداد گویا را مطرح ساختند.

در تعبیر هندسی نیز با انتخاب یک پاره خط به عنوان واحد، اعداد صحیح مثبت و منفی را می‌توانیم روی یک محور نشان دهیم:



با تقسیم هر پاره خط به n بخشِ مساوی، نقاط تقسیم نشان دهندهٔ کسرهای با مِخرج n هستند. واگر این کار را برای هر عدد صحیح انجام دهیم، آنگاه همهٔ عددهای گویا به وسیلهٔ نقاط روی محور، مشخص می‌شوند. امّا باکمیت‌هایی چون ۲√ نیز مواجه می‌شویم که با نقاط گویا روی محور قابل بیان نیستند.



ولی برای بررسی محور اعداد، کافی است عددهایی را در نظر بگیریم که از تقسیم هربازهٔ واحد به ۱۰، سپس ۱۰۰، آنگاه ۱۰۰۰،... پاره خط برابر پدید آمده باشند.

نقاطی که به این طریق به دست می‌آیند متناظر باکسرهای اعشاری اند. بعضی از اعداد گویا را می‌توان به صورت کسر اعشاری متناهی نمایش داد ولی آن دسته از عددهای گویا که به صورت کسر اعشاری با تعداد ارقام متناهی قابل نمایش نیستند را می‌توان با استفاده از روش مقدماتی تقسیم به شکل کسر اعشاری با تعداد ارقام نامتناهی بسط داد، که به کسرهای اعشاری دوره‌ای می‌رسیم، وبرعکس هرکسر اعشاری دوره‌ای یک عدد گویا است. مثلاً $\frac{۱}{۳}$ به صورت ۰/۳۳۳۰۰۰ بیان می‌شود و

برعکس.

بدین ترتیب هر نقطه از محور با یک کسر اعشاری متناهی یا نامتناهی قابل بیان است که کسرهای اعشاری متناهی و یا دوره‌ای همان اعداد گویا هستند ولی کسرهای اعشاری نامتناهی که دوره‌ای نباشند، اعداد گویا را حاصل می‌کنند که **پیوستار اعداد حقیقی** یعنی همان **دستگاه اعداد حقیقی** را پیش روی ما می‌گشایند، امّا می‌خواهیم ببینیم که عمر خیام در شناخت این نظام اعداد حقیقی چه نقشی داشته است.

۲- خیام و مفهوم عدد حقیقی

نخستین ریشه‌های شناخت اعداد گنگ به دورهٔ یونان باستان باز می‌گردد[۲] که فیثاغورسیان با آن مواجه شدند. ردپای این امر را می‌توان در کتاب **اصول** دید. کتاب **اصول** اثر اقلیدس به گونه‌ای اندیشه‌های ناب ریاضی یونان باستان را در خود متجلی کرده است؛ **اصول** اقلیدس به نوعی گوهر وحدت ریاضیات اعم از اندیشه‌های هندسی وغیره را در بردارد و به عنوان یک مرجع مورد توجه ریاضیدانان عصر زرین اسلامی قرارگرفته است.

عمر خیام نیز به عنوان یک ریاضیدان برجسته به دستاوردهای اقلیدس توجه خاص داشته و به بررسی آنها پرداخته است. خیام در رساله‌ای تحت عنوان **شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس** به بررسی جنبه‌های مختلف اندیشه‌های اقلیدس پرداخته است، از جمله در بررسی نسبت و تناسب کمیت‌ها در مقاله دوم و سوم این رساله ابتدا نسبت دو مقدار را در نظر می‌گیرد و حالتهای مختلف آنرا باز می‌گشاید که یا مقدار کوچکتر کسری از مقدار بزرگتر است ویا در واقع این نسبت کسری دوره‌ای را می‌سازد، ولی بالاخره می‌گوید حالت سومی نیز وجود دارد و آن اینکه دو مقدار ممکن است نسبت عددی نداشته باشند و فقط با اندازه‌های هندسی مشخص شوند.[۳]

خیام می‌نویسد:

---

۲. ل. هیث ***تاریخ ریاضیات یونان***، ترجمهٔ احمد آرام، انتشارات علمی وفرهنگی تهران ۱۳۸۱، ص ۵۴

۳. جلال الدین همایی، ***خیامی نامه***، تهران ۱۳۴۱ ص ۲۵۳

«اگر بگویند در جمیع جهات حالت سومی وجود ندارد، و فقط دو حالت عددی را داریم، ما می‌گوئیم در نظر گرفتن قواعد نسبتها و اندازه‌ها در این سه حالت ضرری به حال ما ندارد، و اگر کسی نادرستی آنرا به براهین نشان داد که سرزنشی بر ما نیست، ولی چون برهانی بر رد آن نیست ما این حالت را هم در نظر می‌گیریم و دو حالت ذکر شده را کامل می‌کنیم».[۴]

در واقع خیام ابتدا نشان می‌دهد که مفهوم نسبت از نظر اقلیدس همان نسبتهای کسری و یا کسرهای دوره‌ای است، سپس در یک اندیشهٔ نبوغ آسا دو نسبت را مساوی می‌گیرد و می‌گوید:

«هرگاه بتوانیم آنها را با نسبت اعداد صحیح با هر درجه از دقت که بخواهیم بیان کنیم...»[۵]

بیان فوق مفاهیم اولیه ساختار پیوستار «اعداد حقیقی» را در درون خود دارد و علاوه بر آن مفهوم محاسبه ومحاسبه پذیری آنها را با هر دقت دلخواه بیان کرده است.

به تعبیر دیگر خیام می‌گوید نسبت‌های مقادیر یا یک کسر ساده است یا یک کسر دوره‌ای و یا در حالت سوم نسبت دو مقدار است که هر دو چند نمی‌توانیم آنها را به صورت دو حالت قبل بیان کنیم ولی با هر دقتی که بخواهیم به صورت نسبت عددی قابل بیان اند.

همانگونه که ذکر شد این بیان هم ساختار اعداد حقیقی را می‌رساندو هم ایدهٔ محاسبه پذیری و نظریهٔ تقریب را ارائه می‌دهد.

مثلاً وقتی $\sqrt{۲}$ با ۱/۴ یا ۱/۴۱ یا ۱/۴۱۲ تقریب زده شود و میزان تقریب را هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم دقیق کنیم از همین گفته و ساختار ارائه شده توسط خیام استفاده کرده‌ام.

---

۴. همان مأخذ ص ۲۵۵

۵. همان مأخذ ص ۲۵۷

اعداد حقیقی در رویکرد نوین

در قرن نوزدهم کانتور(G.Cantor) و دِدِکنید (Dedekimd) ریاضیدانانی بلند آوازه دستگاه اعداد حقیقی را براساس ساختاری اصولی، جامع و منسجم بیان کردند که مبانی ساختار آنالیز ریاضی بر آن استوار است و در قلب توسعه ساختارهای ریاضی اعم از ساختارهای هندسی و غیره قرار دارد. ولی قبل از آن در قرنهای هفدهم و هجدهم ساختار دستگاه اعداد حقیقی به شکل شهودی و مشابه ایده‌های خیام بیان می‌شد.

در آنجا هر نقطهٔ گنگ به صورت دنباله‌ای از بازه‌های تو در تو که طولهایشان به صفر می‌گراید کاملاً توصیف می‌شوند.[۶]

در واقع بازه‌ها با نقاط ابتدایی وانتهایی گویا در نظرگرفته می‌شوند و حد آنها نقطه گنگ مورد نظر است ولی دَر هر لحظه می‌توانند تقریبی نقصانی یا اضافی از عدد گنگ مورد نظر مشابه آنچه خیام گفته بود، حاصل کنند.

۴- کاربردهای نظریهٔ تقریب

چنانکه ذکر شد، خیام اول بار با نسبت هایی مواجه شد که با هر تقریب دلخواه قابل بیان بودند. این ایده همچنان در قلب نظریهٔ تقریب ونظریهٔ محاسبات قرار دارد. امروزه در زمینه‌های گوناگونی که ساخت قطعات و طراحی مهندسی قطعات مکانیکی مبتنی بر محاسبات رایانه‌ای متداول است مسئله دقت محاسبه دشواریهای زیادی را مطرح ساخته است که هنوز استاندارد یکنواختی برای آن وجود ندارد و به استاندارد مورد نظر سازندگان نرم افزارهای مربوطه باز می‌گردد؛ واگر از دو نرم‌افزار متفاوت استفاده شود ممکن است نتیجه‌های یکسانی حاصل نگردد که این خود در ساخت قطعات دشواریهای زیادی را در پی دارد. از این رو کوشش منسجم جدیدی در حال شکل‌گیری وتکامل است که با ایده‌های نظیر آنچه خیام اول بار از تقریب اعداد حقیقی بیان داشت و پیرو آن ایدهٔ شهودی بیان اعداد گنگ با بازه‌های تودرتو استفاده شود و برای محاسبه پذیری با تقریب مطلوب

---

۶. ر.کورانت و هـ رابینز: **ریاضیات چیست**، ترجمهٔ سیامک کاظمی نشر نی تهران ۱۳۷۹؛ ص ۷۵

استاندارد مناسبی وضع گردد.[7]

نتیجه

دیدیم که خیام اعداد حقیقی را به صورت کسرهای دوره‌ای نامتناهی نشان داد و با این کار خود معلوم کرد که این اعداد را تا هر تقریب دلخواه می‌توان محاسبه کرد.

ارزش کار خیام در قرون بعدی و بویژه در قرن بیستم آشکار گردید. در سال ۱۹۳۰ آلن تورنیگ ریاضیدان انگلیسی به شکل دیگری از همین محاسبه پذیری اعداد حقیقی سخن گفت ولی ایدهٔ اصلی آن همان چیزی بود که خیام قرنها پیش از این ریاضیدان آنرا مطرح کرده بود و آن اینکه «عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است» بدین ترتیب با تقریب زدن عدد حقیقی با یک سیستم گسسته امکان کاربردی کردن آن در رایانه‌ها فراهم شد و چالش نوینی آغاز گردید که از یک سو تکنولوژی ساخت رایانه‌ها را در بر می‌گرفت و از دیگر سو تلاشهای بی وقفه‌ای را در توسعه ساختار نظری دستگاه اعداد حقیقی بر مبنای همان اندیشهٔ اولیه خیام موجب می‌گردید، تا روشهایی کارآمدتر در آغاز هزارهٔ بیست و یکم حاصل کند.

---

7. A Edalat ,A. A. Khanban,A.Lieutier, *Computability in computational Geometry* prepsint Imperial College, 2005