خیام و هندسه‌های نااقلیدسی

جعفر آقایانی چاوشی
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات
و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

تقدیم به دانشجویان دانشگاه پیام نور اصفهان

مقدمه

هندسه‌های نااقلیدسی گرچه در قرن نوزدهم میلادی بوسیله لوباچفسکی و ریمان کشف شدند، امّا این دو ریاضیدان و ریاضیدانان دیگری که بنحوی در این کشف سهیم بودند مستقیم و یا غیرمستقیم با نظریات ساکری ریاضیدان و منطق‌دان ایتالیائی قرن هجدهم میلادی که پیش از آنها، ناخودآگاه چند قضیه هندسه نااقلیدسی را کشف کرده بود آشنا بوده و از آنها قطعاً در کشفیات خود الهام گرفته‌اند. تحقیقات اخیر نشان می‌دهد که ساکری نیز بنوبه خود در ارائه این نظریات از حکیم عمر خیام ریاضیدان و فیلسوف بزرگ ایرانی متأثر بوده است. در این گفتار پس از بررسی رساله خیام درباره اصل موضوع پنجم اقلیدس، ارتباط آنرا با هندسه‌های نااقلیدسی مورد تحقیق قرار داده و آنگاه تأثیر آنرا روی ساکری نشان خواهیم داد.

۱ـ اصل موضوع پنجم اقلیدس یا اصل خطوط توازی

هندسه‌های نوین همانند هندسه اقلیدس بر اصولی اثبات‌ناپذیر مبتنی هستند تا بکمک آنها و با استدلال منطقی بتوان قضایای هندسی دیگری را استنتاج کرد. امّا فرق عمده اکسیوماتیزم جدید با اکسیوماتیزم اقلیدس در این است که در هندسه‌های جدید، اصول بنیادین هندسه، براساس عدم تناقض منطقی دست‌چین شده‌اند حال آنکه این انتخاب

در هندسه اقلیدس مبتنی بر بداهت شهودی می‌باشد.[1] و همین امر موجب گردیده که از قرنها پیش بر اصول اقلیدسی شرح نوشته و آنها را مورد نقادی علمی قرار دهند. چرا که بداهت شهودی امری است نسبی، آنچه که برای کسی بدیهی می‌نماید، معلوم نیست برای کس دیگری نیز از چنین بداهتی برخوردار باشد.

برای آنکه از جزئیات اصول بنیادین هندسه اقلیدس آشنا شویم باید بدانیم که این اصول به سه نوع تقسیم می‌شوند:

۱ـ «تعریفات» ۲ـ «بدیهیات اولیه» یا «اکسیوم‌ها» ۳ـ «اصول موضوعه» یا «پوستولاها»

مراد از «تعریف» گزاره‌ای است که مشخص می‌کند که یک شی چیست من‌باب مثال، اقلیدس دو خط موازی را همچون دو خطی تعریف می‌کند که در یک صفحه واقع شده و هرگاه آنها را تا بی‌نهایت در دو جهت امتداد دهیم یکدیگر را در هیچیک از این دو جهت قطع نکنند.

لازم به تذکر است که صرف تعریف یک شی، اثبات وجودی آن شی را دربر ندارد. وجود یک «شی» ممکن است از طریق فرض، و یا از راه ترسیم هندسی آن «شی» معلوم شود.

«وجود فرضی» مانند حالت نقطه و خط است که بنا به تعریف نقطه آنست که جزء ندارد و «خط» نیز طول بدون عرض تعریف شده است.

«وجود ترسیمی» نیز مانند حالت دو خط موازی است که در گزاره بیست و یکم از کتاب اول *اصول اقلیدس* آمده است. بنابر این گزاره «از یک نقطه خارج یک خط می‌توان خط راست دیگری رسم کرد که خط مفروض را در هیچ نقطه‌ای قطع نکند.»

«بدیهیات اولیه» و یا «آکسیومها» احکام هندسی نیستند، بلکه «حقایق کلی» می‌باشند، از قبیل اینکه «کل بزرگتر از جزء است.»

این چنین اصول متعارفی، غیرقابل اثباتند، به عبارت دیگر خصوصیت اثبات‌ناپذیری آکسیومها از تعریف خود آنها ناشی می‌شود، نمی‌توان چیزی را که در ذات خود بدیهی است و دربر گیرنده یک «حقیقت کلی» اثبات کرد.

---

۱. به همین دلیل بود که هیلبرت کوشید، هندسه اقلیدسی را براصولی استوار کند که با هم تناقض منطقی نداشته باشند. موضوع سخنرانی آقای B. Artmann در کنفرانس جهانی ریاضیات قدیم در ماه اوت سال ۲۰۰۰ در شهر دلفی یونان درباره همین کار هیلبرت بود. عنوان این سخنرانی چنین است:
Euclid's and Hilbert's Foundations of Geometry

با اینحال همانطوریکه قبلاً نیز اشاره کردیم بداهت، امری است نسبی، چرا که گالیله ثابت کرد اجسامی وجود دارند که هر جزء آنها می‌تواند، به بزرگی کُل آنها باشد. این اجسام بعدها به مجموعه‌های بی‌نهایت معروف شدند.[۲]

«اصول موضوعه» یا «پوستولاها» حقایق هندسی هستند که حقیقتشان چندان بدیهی نیست، لیکن باید آنها را بدون اثبات پذیرفت. مثلاً اقلیدس در بین اصول موضوعهٔ خود گزاره : «از دو نقطه می‌توان یک خط راست کشید» را گنجانیده است.

در این مثال مشاهده می‌کنیم که «اصول موضوعه» برخلاف «بدیهیات اولیه» در ذات خود بدیهی نیستند، ممکن است آنها را انکار کرد، بدون اینکه خلّلی بر ارکان عقلی وارد شود.

بداهت ظاهری اصل موضوعهٔ اخیر برای عده‌ای ممکن است از اینجا ناشی شود، که همواره می‌توان خط راستی را از میان دو نقطه عبور داد.

در اینجا تجربه حکم مزبور را تأیید می‌کند. امّا بداهت تجربی نمی‌تواند برای ریاضیدان معیار حقیقت تلقی شود. تنها براهین مُستدل ریاضی است که باید جایگزین بداهت تجربی گردد.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که پس چرا «اصول موضوعه» را ثابت نمی‌کنند.

---

۲. پارادوکسی که گالیله برای اصل مسلم: «کل بزرگتر از هر یک از اجزاء خویش می‌باشد.» ارائه داد بقرار زیر است.

اعداد مربع جزئی از اعداد مثبت طبیعی می‌باشند. و طبق اصل بالا باید تعدادشان کمتر از تعداد اعداد مثبت طبیعی باشند با اینحال هر عدد را می‌توان با مربع آن مقابله یک به یک کرد بدون اینکه تعداد اعداد مربع پایان بیابند:

به‌عبارت دیگر تعداد جملات {۱و۴و۹و۱۶و ...} درست برابر است با تعداد جملات تمام اعداد صحیح و مثبت.

این پارادوکس را جرج کانتور واضع نظریه مجموعه‌ها به‌صورت زیر حل نمود:

«اصل کل بزرگتر از هر یک از اجزاءش می‌باشد.» تنها برای مجموعه‌های محدود و متناهی صادق است. و چون تعداد اعداد صحیح طبیعی و نیز تعداد مربع آنها هر یک مجموعه‌های بی‌نهایت را پدید می‌آوردند بنابراین شامل اصل بالا نمی‌شوند. حساب نامتناهی با حساب متناهی کاملاً با هم تفاوت دارند. برای آگاهی بیشتر در این باره رجوع شود به:

Davis et R. Hersh, *L'univers Mathematique,*
Traduit et adapté de l'americain par L. Chabadal Paris 1985 pp. 144-150.

پاسخ رایج و قدیمی به این سؤال این است که این اصول غیرقابل اثباتند و همین ویژگی اثبات‌ناپذیری آنهاست که نظریات و بحث های گوناگون را برای توجیه آنها فراهم کرده است.
همهٔ اصل موضوعه‌ها، مستقل از یکدیگر می‌باشند. بدین معنی که اگر مجموعهٔ معینی از اصول موضوعهٔ را اساس «هندسهٔ مخصوصی» قرار دهیم، از هیچیک ازاین اصول موضوعهٔ نمی‌توان آن دیگری را نتیجه گرفت. اثبات‌ناپذیری آنها نیز از این واقعیت ناشی می‌شود که آنها را نمی‌توان از دیگر اصول موضوعه و یا قضایائی که از آنها حاصل گردیده‌اند، استنباط کرد.
با اینحال همواره می‌توان در درستی آنها شک کرد، این شک و تردید می‌توانند هندسه‌دان را به اثبات اصل موضوعهٔ مشخصی به کمک اصول موضوعهٔ دیگر تشویق نماید تا بدین ترتیب از استقلال این اصل موضوعهٔ اطمینان حاصل کند.
البته دلیل دیگری نیز وجود دارد که مشوّق ریاضیدان به اثبات یک اصل موضوعهٔ است و آن عدم اطمینان به بداهت تجربی است.
پیش از این گفتیم که بداهت یک اصل موضوعهٔ وابسته به اعمال و ترسیمات هندسی است که تنها تجربه می‌تواند آنها را تأیید کند. هنگامیکه این اعمال به‌صورت ساده تجلی می‌کنند، این سادگی می‌تواند به آنها صورت بداهت بدهد و طبعاً وقوع این اعمال می‌تواند عقلاً و بدون نیاز به برهان ریاضی مورد قبول قرار گیرد.
مثلاً اصل موضوعهٔ مربوط به تشکیل یک خط راست از دو نقطه از این گونه است. امّا وقتی که این اعمال حالت پیچیده‌تری به‌خود گرفت ریاضیدان به‌خود اجازه می‌دهد تا درپی اثبات ریاضی آن برآید. و این همان حالت اصل موضوعهٔ توازی است. چنانکه می‌دانیم از قرن اول پیش از میلاد تا اوایل قرن نوزدهم میلادی تلاشهای زیادی برای اثبات این اصل موضوع اقلیدس به‌عمل آمد تا آنکه بلترامی در سال ۱۸۶۷ اثبات‌ناپذیری این اصل موضوعهٔ را مبرهن ساخت.[۳]

3. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* Napoli, Torino e Firenze, 1868.

این اثر توسط J. Hoüel به زبان فرانسه نیز ترجمه گردیده است:
E. Beltrami, "Essai d'interprétation de la geometrie non euclidienne"

اصل موضوعهٔ خطوط موازی که همهٔ دانش‌آموزان دوره دبیرستان با آن آشنائی دارند معمولاً به‌صورت زیر بیان می‌شود: «از یک نقطه خارج از یک خط مفروض تنها یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.»

این تعریف گرچه هم‌ارز اصل پنجم اقلیدس است ولی همان تعریفی نیست که اقلیدس خود بیان کرده است. به‌همین جهت تاریخ هندسه‌های نااقلیدسی را بدون درنظر گرفتن تعریف خود اقلیدس نمی‌توان فهمید. تعریفی که اقلیدس از این اصل موضوعهٔ داده است از قرار زیر است:

«هرگاه دو خط به‌وسیله خط قاطعی چنان قطع شوند که مجموع اندازه دو زاویه درونی واقع در یک طرف خط قاطع کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف خط قاطع تلاقی می‌کنند.»[۴]

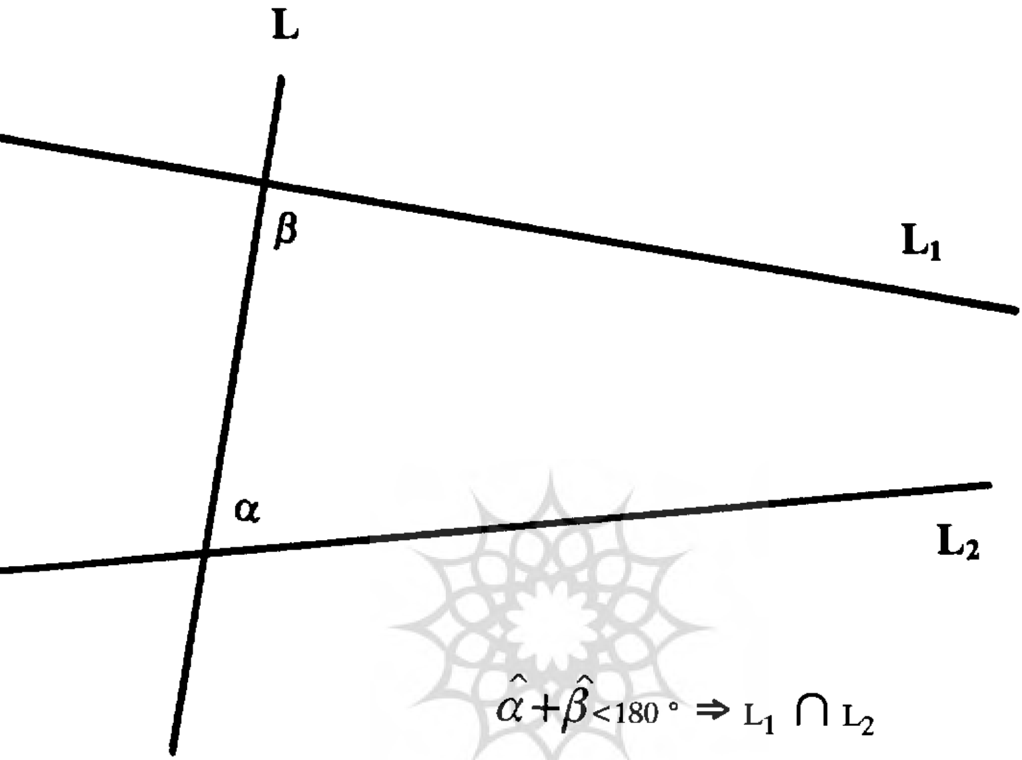
→

traduction française par J. Hoüel dans: *Ann. Sci. Ec. Norm.*, Paris 1869.

این اثر پراهمیت در مقاله زیر مورد نقادی قرار گرفته است:

J. Hoüel, "Sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le postulatum d'Eclide" *Nouve. Ann.Math.* 9(1870) pp. 93-96.

4. Th. L. Heath, *Euclid's Elements* Cambridge 1920 Vol. 1 p. 154.



$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}<180^{\circ} \Rightarrow L_1 \cap L_2$$

پوستولای پنجم اقلیدس

هرگاه دو خط L_1 و L_2 بوسیله خط قاطع L چنان قطع شوند که مجموع زاویه‌های درونی واقع در یک طرف قاطع کمتر از ۱۸۰° باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف خط قاطع، تلاقی می‌کنند.

در حقیقت همین صورت اصل موضوعهٔ پنجم یا پوستولای خطوط متوازی بود که توجّه هندسه‌دانان را در طول قرون و اعصار به‌خود جلب کرد. چرا که نه چندان ساده بود تا اصل بودنش را بتوان بدون دغدغه پذیرفت و نه هم اثبات می‌شد.

بطلمیوس ریاضیدان و منجم یونانی در قرن دوّم میلادی، یکی از دانشمندانی است که برای اثبات این اصل تلاش بی‌نتیجه‌ای کرده است. پروکلوس فیلسوف و ریاضیدان یونانی قرن چهارم میلادی، ضمن نقل برهان بطلمیوس پوستولای توازی را نه یک اصل بلکه یک «قضیه هندسی» می‌خواند که باید آنرا اثبات کرد.[5]

امّا تلاشهای مهمّ درباره اثبات این اصل موضوع را در عالم اسلام باید جستجو کرد. نیریزی[6] و جوهری[7] و ثابت‌بن قره[8] و مخصوصاً ابن هیثم[9]، از چهره‌های ممتاز ریاضیات اسلامی می‌باشند که برای اثبات این اصل قیام کرده و رسالاتی را در این باره به رشته تحریر درآورده‌اند.

ذکر کارهای این دانشمندان از حوصله این مقال خارج است، تنها اشاره بدین مطلب ضروری است که ابن‌هیثم که هم ریاضیدان و هم فیزیکدان بود و بالطبع مسائل ریاضی را از دید شهودی بررسی می‌کرد، در اثبات خود برای این اصل، از حرکت مستقیم‌الخط استفاده کرده است.

او در رساله خود تحت عنوان *شرح مصادرات اقلیدس فی‌الاصول* نوشته است که هرگاه پاره‌خط راستی مانند PS چنان تغییر مکان دهد که همواره بر خط مفروضی مانند L_1

---

5. Proclus de LYCIE, *Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide*. Traduction par Paul Verecke Paris 1948.

۶. درباره کارهای نیریزی درباره اصل توازی اقلیدس رجوع شود به:

K. Jaouich, *La theorie des paralleles en pays d'Islam* Paris 1986 pp. 31-36.

۷. درباره کارهای جوهری در این زمینه رجوع شود به:

K. Jaouich, *La theorie des paralleles* ... pp. 37-44.

۸. درباره کارهای ثابت‌بن قره در این باره رجوع شود به:

K. Jaouich, *La theorie des paralleles* ... pp. 45-56.

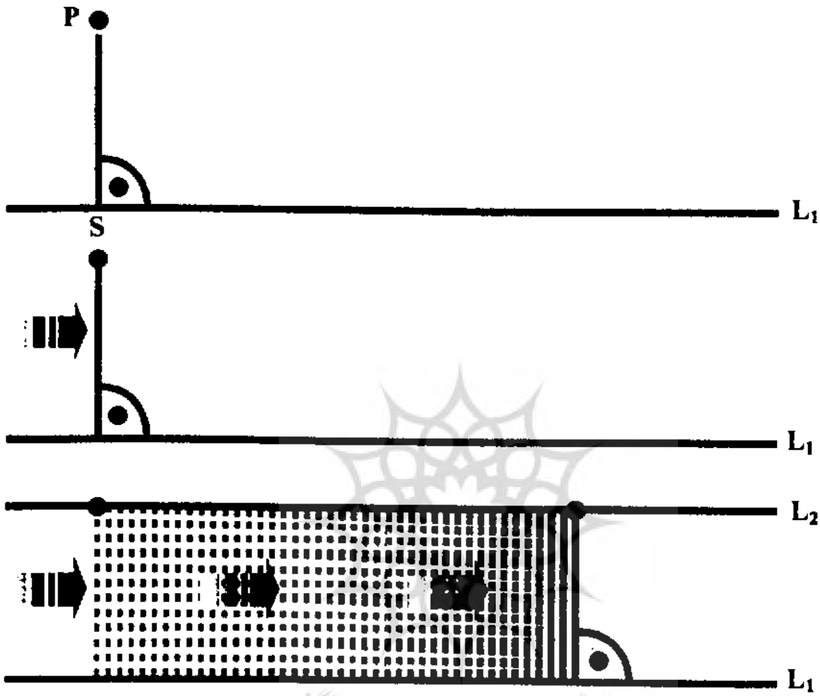
نیز

A. I. Sabra "Thabit ibn Qurra on Euclid's parallels postulate" *J. Warburg and Courtauld Inst.* 31 (1968) pp.12-32.

۹. درباره کارهای ابن‌هیثم در این باره رجوع شود به:

K. Jaouich, *La theorie des paralleles* ... pp. 57-67.

عمود باشد و یک انتهای آن مثلاً S بر خط L_1 باشد، انتهای دیگرش خط L_2 را رسم می‌کند که با خط L_1 موازی خواهد بود.[۱۰]



البته برهانی که بر چنین ترسیمی استوار باشد پذیرفته نیست، چرا که حرکت از مقوله فیزیک می‌باشد و ارسطو در متافیزیک خود آنرا از حوزه ریاضیات خارج کرده است.[۱۱]

۲ـ خیام و اصل موضوع پنجم اقلیدس

پوستولای خطوط متوازی، به‌عنوان اصل اثبات‌ناپذیر ذهن خیام را نیز ارضا و اقناع نمی‌کرده است، از همین رو او نیز مثل چند ریاضیدان پیش از خود برای اثبات این اصل

۱۰. خلیل جاویش، نظریة المتوازیات فی‌الهندسة الاسلامیة، تونس ۱۹۸۸ م. صص: ۸۷–۸۹. همچنین رجوع شود به:
N., Kanani, "Omar Khayyam and The Parallel Postulate" *Farhang* Vol 12 (2000) no. 29-32 pp. 12-14.

11. Aristote, *Métaphysique*, 989 b 32 Traduction Française par. J. Tricot Paris 1940.

همت می‌گمارد. و قسمت اول *رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب الاقلیدس* خود را به این موضوع اختصاص می‌دهد. قسمت‌های دوّم و سوّم به‌ترتیب درباره «نظریه نسبت و تناسب» و «نسبت مؤلفه» می‌باشد.

خیام در مقدمه کلی بر رساله‌اش مطالبی پیرامون اهمیت ریاضیات اظهار می‌کند که بی‌شباهت به آنچه که پاسکال ریاضیدان فرانسوی از آن به «روح هندسی» تعبیر کرده است نیست.

آنگاه با استناد به *ارغنون*[۱۲] ارسطو که آن را*کتاب البرهان* نامیده است مدعی است که تعریف هر یک از علوم ریاضی و اثبات اصول اولیه آن به عهده فیلسوف میباشد، نه ریاضیدان.

در بخش مربوط به خطوط متوازی، خیام از دو ریاضیدان یونانی یعنی هرون اسکندرانی و اطوسیوس نام می‌برد و می‌گوید که ایندو که به اصول اقلیدس شرح نوشته‌اند به‌جهت دشواری اصل توازی از اثبات آن شانه خالی کرده‌اند.

البته ابن‌ندیم اثری تحت عنوان *حل شکوک اقلیدس* به هرون منسوب کرده است امّا از اطوسیوس اثری در این زمینه بما نرسیده است. خیام همچنین سه ریاضیدان اسلامی یعنی ابوالعباس نیریزی، ابوجعفر خازن و الشنّی را نام می‌برد که درباره اثبات اصل توازی کار کرده‌اند با اینحال نتوانسته‌اند از عهده این کار برآیند و «بجای آن قضایای دیگری ارائه داده‌اند که در پیچیدگی دست‌کمی از اصل موضوع پنجم اقلیدس ندارد.»[۱۳]

امّا لبه تیز حملات خیام متوجه ابن‌هیثم می‌باشد. به این دلیل که حرکت را که هیچ ارتباطی با هندسه ندارد، در هندسه دخالت داده است.

او پس از ذکر این نکات مقدماتی به سراغ اثبات اصل توازی اقلیدس می‌رود. در نظریه خطوط توازی خود، خیام در آن واحد به‌صورت یک ریاضیدان و یک فیلسوف بُزرگ جلوه می‌کند و می‌کوشد تا وابستگی تنگاتنگی که بین ریاضیات و فلسفه موجود است را به روشنی بنمایاند تا بدین‌گونه عدم موفقیّت ریاضیدانان پیشین را در اثبات اصل موضوع

---

۱۲. ارغنون عنوان مجموعهٔ آثار ارسطو در منطق می‌باشد این کتابها عبارتند از:
Analytica priora، Categoriae، De interpretatione، De sophisticis elenchis Analytica Posteriora،
البته واژه ارغنون (Organon) بمعنی «آلت» است و آثار منطقی ارسطو از این نظر در حکم بهترین آلتی بود که با آن می‌شد وارد فلسفه گردید.

۱۳. جلال همایی، *خیامی نامه* تهران ۱۳۴۶ ص ۲۲۸.

توازی توجیه نماید - آنان که تنها با سلاح ریاضیات به این میدان آمده بودند. ارتباطی که خیام بین ریاضیات و اندیشه‌های فلسفی ارسطو عموماً و منطق او خصوصاً برقرار کرده است، اگر در تاریخ تمدن اسلامی بی‌نظیر نباشد، لااقل کم‌نظیر است.

خیام گرچه ریاضیات را جدا از فلسفه می‌داند با اینحال بر آنست که این علم بدون اتکا بر بعضی از اصول و مبادی فلسفی نمی‌تواند اعتبار خود را حفظ نماید.

این پیوستگی ریاضیات با فلسفه در اندیشه خیام گاهی به حدی پیش می‌رود که در نظم و انسجام رساله‌اش خلل وارد می‌کند. مثلاً خیام در شروع کار خود، یک «شبه برهان» برای اصل توازی می‌دهد که آنرا «برهان فلسفی» می‌نامد، بلافاصله به‌سراغ اثباتی کاملاً هندسی می‌رود و پس از ارائه سه گزاره هندسی مجدداً به مقولات فلسفی خود باز می‌گردد. از اینرو نمی‌توان برای مباحث خیام، نقشه‌ای دقیق فراهم کرد و ما سعی کرده‌ایم خطوط اساسی این مباحث را در دو بخش زیر مورد بررسی قرار دهیم:

۲ ـ ۱ ـ فلسفه ریاضی خیام

خیام معتقد است که تبیین مبادی و حدود ریاضیات و بالنتیجه مبادی هندسه به‌عهده فیلسوف است. البته این نظر را ارسطو در کتاب متافیزیک خود نیز اظهار کرده است.

خیام عناصر سازنده علوم ریاضی را موضوع و مبادی و مسائل نامیده است.

موضوع از عوارض ذاتی این علوم بحث می‌کند. من‌باب مثال موضوع حساب و هندسه «کمیّت» یا «مقدار» است با این تفاوت که در علم حساب سروکارمان با «کمیّت منفصّل» است و در علم هندسه با «کمیّت متصل» مواجه هستیم.

مبادی پایه و اساس علوم را تشکیل می‌دهند، سرانجام مسائل، قضیه‌هائی هستند که در این علوم مطرح گردیده و بکمک مبادی اثبات می‌شوند.

امّا مبادی خود به سه دسته تقسیم می‌شوند ۱ـ مبادی تصدیقیه ۲ـ مبادی تصوّریه ۳ـ مصادرات.

مبادی تصدیقیه در همهٔ علوم مشترکند ـ بهمین جهت آنها را علوم متعارف نیز می‌نامند همانهائی هستند که ارسطو آنها را «آکسیوم» نامیده است. اینها بدلیل بداهت اثبات‌ناپذیرند و کسی که درصدد اثبات آنها برآید ناگزیر باید از «مبادی تصدیقیه» دیگری برای اینکار استفاده نماید و بدین‌ترتیب دچار «دور محال» می‌شود. مثالی که

ارسطو از آنها آورده و اقلیدس نیز در کتاب *اصول* خود آنرا وارد کرده است چنین است: «هرگاه برابرها را از برابرها بکاهیم مانده‌ها برابرند.»

امّا دسته دوّم یا **مبادی تصوّریه**، اختصاص به هر یک از علوم دارند و اشیاء ویژه‌ای از این علوم را تعریف می‌کنند. مانند تعریف‌های نقطه و خط و مثلث در علم هندسه. بعضی از این مبادی را باید بدون اثبات قبول کرد مانند تعریف خط و نقطه و برای بعضی دیگر مانند تعریف مثلث باید برهان آورد.

سرانجام آخرین دسته از مبادی اولیه به زعم خیام **«مصادرات»** می‌باشند یعنی همانهائی که در کتاب *اصول* اقلیدس بدانها «پوستولا» می‌گویند.

فرق مصادره با «مبادی تصدیقیه» در دو چیز است. نخست آنکه مصادره برخلاف مبادی تصدیقیه روشن و بدیهی نیست. وجه تمایز دیگر ایندو در آنست که مصادره قابل اثبات می‌باشد. متوجه می‌شویم که خیام در اینجا عقیده‌ای خلاف نظر اقلیدس اظهار کرده است، و همین عقیده او را واداشته تا برای اثبات اصل پنجم اقلیدس قیام کند. البته همانطوریکه قبلاً نیز اشاره کردیم پیش از خیام پروکلوس نیز پوستولای توازی را اثبات‌پذیر شمرده است. امّا هیچگونه مدرکی دالّ بر اینکه خیام این فکر را از پروکلوس گرفته است وجود ندارد. خیام مصادرات را بر حسب بداهت و عدم بداهت آنها بترتیب «قضایای اولیه» و «قضایای غیراولیه» نامیده است. پیش از بررسی نظریات خیام در این باره باید بدانیم که یک گزاره و یا قضیه هندسی را می‌توان، یک گزاره منطقی بشمار آورد که از موضوع و محمول تشکیل یافته است.

موضوع فرض قضیه است، یعنی درستیش بر ما مسلم است. محمول، حکم و یا نتیجه‌ای است که باید از این فرض بگیریم. مثلاً قضیه فیثاغورس را میتوان به شکل زیر نمایش داد:

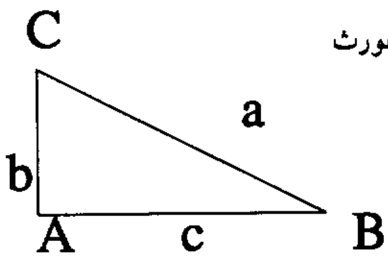
موضوع: هرگاه یکی از زاویه‌های مثلثی قائمه باشد

محمول: مربع ضلع روبروی این زاویه برابر با مجموع مربعات اضلاع دیگر می‌باشد.

یک قضیه هندسی

مرکب است از: موضوع، محمول و رابطه

قضیه فیثاغورث



موضوع: $\Delta ABC \;,\; A = ۹۰^{\circ}$

رابطه ↓

محمول: $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$

خیام معتقد است که درستی یک قضیه به موضوع و محمول آن بستگی ندارد چراکه «صدق و کذب قضیه به موضوع و محمول تعلق نمی‌گیرد بلکه بـه ارتـباط مـحمول بـا موضوع تعلق دارد.» [۱۴]

این ارتباط ممکن است برای یک هندسه‌دان به‌صورت مستقیم و آنی رخ دهد که در این حالت قضیه مزبور را «قضیه اولیه» و یا برعکس ریاضیدان آنرا به‌کمک یک برهان حاصل کند، در این صورت «قضیه غیراولیه» نامیده می‌شود. امّا قضایای اولیه خود بر دو نوع تقسیم می‌شوند:

نوع اول آنهائی هستند که موضوع و محمول به‌روشنی و یا به‌کمک اندکی تأمل تـصوّر شوند. من‌باب مثال کافی است که معانی و مفاهیم حقیقی زاویه و یا دایره و یـا نسـبت طولها تصوّر گردد، تا آنکه بدون وقفه و یا با کمی تأمل بفهمیم که «در دایره‌های مساوی نسبت زوایای مرکزی مثل نسبت قوسهایی است که مقابل این زاویه‌ها می‌باشند.»

نیز گزاره‌ای که ارسطو آنرا جزو اکسیوم‌ها آورده، دایر بر اینکه «چیزهای برابر با یک چیز با یکدیگر برابرند.»

حالت دوّم حالتی که تنها یکی از اجزای گزاره یعنی موضوع و یا محمول تصوّر شوند،

---

۱۴. جلال همائی؛ پیشین ص ۲۴۰.

مثلاً یک ریاضیدان کافی است که با تصوّر اشکال هندسی یک گزاره، خود گزاره را به روشنی و یا با اندک تأملی درک نماید.

این گزاره‌ها را خیام به دلیل بداهت «اولیه» می‌نامد. امّا گزاره‌هائی نیز وجود دارند که رابطه بین موضوع و محمول آنها بدیهی نیست، مثل اصل پنجم اقلیدس این قضیه بقول خیام و قضایای شبیه به آن غیراولیه‌اند. یعنی صرف دانستن موضوع و محمول برای فهم آنها کافی نیست و یک ریاضیدان باید بکمک حد وسط قیاس یعنی با استفاده از گزاره‌های دیگر به درک آن نایل آید. این نوع ادراک را خیام «ادراک اکتسابی» نامیده است.

گزاره اولیه: چیزهای برابر با یک چیز با هم برابرند

موضوع: $\begin{cases} A=C \\ B=C \end{cases}$

$\Downarrow$ **بدیهی**

محمول: $A=B$

گزاره غیر اولیه : اصل پنجم اقلیدس

موضوع: دو خط L_1 و L_2 بوسیله خط قاطع L چنان قطع شده‌اند که مجموع زاویه‌های درونی واقع در یک طرف قاطع کمتر از 180° می‌باشد.

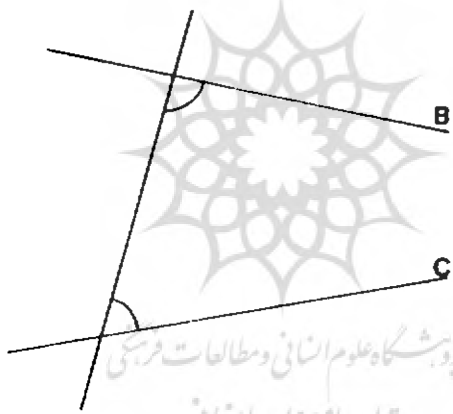
$\Downarrow$ **غیربدیهی**

محمول: این دو خط یکدیگر را در همان طرف خط قاطع تلاقی می‌کنند.

خیام گزاره‌های زیر را اولیه دانسته است

۱ـ اصل پیوستگی یا اصل ارشمیدس ـ ادوکس

۲ـ دو خط نمی‌توانند سطحی را اشغال کنند
۳ـ هرگاه دو خط که بوسیله خط سوّمی قطع شده‌اند، در یک طرف این خط قاطع همگرا باشند، نمی‌توانند در همان جهت همگرا باشند
این گزاره را روی اهمیتی که در نظریه خطوط متوازی خیام دارد؛ پوستولای خیام نامیده‌ایم
۴ـ دو خط مستقیم که یکدیگر را قطع کرده‌اند از نقطه تقاطع رو به فراخی می‌روند و دو خط مستقیم که فاصله مابین آنها رو به تنگی می‌رود هرگاه آنها را امتداد دهیم یکدیگر را قطع خواهند کرد و دو خطی که رو به تنگی می‌روند ممکن نیست که در همان جهت و در همان آن گشادگی و فاصله بین آنها پیدا شود.
(این گزاره در واقع حالت خاصی از گزاره شماره ۳ یا پوستولای خیام می‌باشد.)



۵ـ دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند نه رو به تنگی روند و نه رو به گشادگی. حال که گزاره‌های اولیه خیام را شناختیم، بهتر است با گزاره‌های غیراولیه او نیز آشنا شویم:
۱ـ هر مقدار تا بی‌نهایت قابل قسمت است و مرکب از جزء لایتجزا نمی‌باشد.
۲ـ هرگاه دو مقدار متناهی که مابین آنها تفاضل یعنی تفاوت کم و زیادی و کوچک و بزرگی باشد، داشته باشیم ممکن است بر مقدار کوچکتر چندان بیفزائیم تا مساوی مقدار بزرگتر شود، زیرا هر مقدار را تا بی‌نهایت می‌توان قسمت کرد.
۳ـ می‌توان از نقطه‌ای مفروض به نقطه مفروض دیگر خط راستی عبور داد.
۴ـ ممکن است خط راستی را تا بی‌نهایت امتداد داد.
پنج گزاره اولیه و چهار گزاره غیراولیه که در بالا ذکرشان گذشت برای خیام گزاره‌های

بنیادین یا «مصادرات هندسه» را تشکیل می‌دهند. او در واقع بر این عقیده است که بدون این گزاره‌ها نمی‌توان علم هندسه را درک کرد.

باوجود این او مدعی نیست که فهرستی که او از گزاره‌های اولیه و غیراولیه داده کامل می‌باشد. مثلاً در رابطه با گزاره‌های اولیه او خاطرنشان می‌کند که گزاره‌های دیگری را می‌توان به آنها افزود و بر اقلیدس خرده می‌گیرد که در آغاز اصول خود همهٔ گزاره‌های اولیه را ذکر نکرده و بر عکس گزاره‌هائی را آورده که به زعم خیام فایده‌ای بر آنها مترتب نیست.

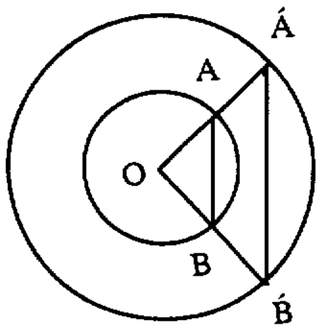
گفتیم که خیام مصادرات را اثبات‌پذیر می‌داند، سوالی که در اینجا پیش می‌آید این است که با چه نوع برهانی می‌شود آنها را اثبات کرد.

خیام دو نوع برهان پیشنهاد می‌کند: برهان انّی و برهان لمّی

برهان انّی برهانی است که در آن از معلول پی به وجود علت می‌برند. خیام معتقد است که تنها فیلسوف می‌تواند برای اثبات وجود و یا خاصیت گزاره‌های بنیادین ریاضیات بدان توسل جوید.

با این برهان است که فیلسوف می‌تواند ثابت کند که یک خط تا بی‌نهایت قابل تقسیم می‌باشد و یا هرگاه دو خط غیرمشخص مفروض باشند، خط سوّمی وجود دارد که ایندو را قطع کرده و با هر دو زاویه‌های مساوی تشکیل می‌دهد. این برهان را خیام گاهی «برهان فلسفی» و زمانی «شبه برهان» نیز نامیده است. مراد از آن یک برهان واقعی نیست، بلکه توصیفی است شهودی برای کسانی که بقول خیام از شهود کافی برخوردار نیستند. مثلاً خیام گزاره اولیه سوّم خود را که ما آنرا «پوستولای خیام» نام نهاده‌ایم به شکل زیر با «برهان انّی» ثابت کرده است.

خیام برای اثبات این مطلب از دو دایره متحدالمرکز استفاده می‌کند و فرض می‌کند که اضلاع زاویه مرکزی مفروض زاویه O این دو دایره وترهای AB و ÁB́ را بترتیب روی این دایره‌های جدا کند.



آنگاه می‌گوید که وتر ÁB́ متعلق به دایرهٔ خارجی بزرگتر از وتر AB متعلق به دایره داخلی است. و این برای آنان که بتوانند یک زاویه و یک خط و نیز یک دایره را تصور کنند امری است بدیهی. و با این برهان

شهودی یا بقول خیام انّی از معلولّ یعنی همگرائی دو خط $A\acute{A}$ و $B\acute{B}$ به وجود علت یعنی تقاطع آنها در نقطه O پی می‌بریم.خیام معتقد است که با برهان انّی، همچنین می‌توان عده‌ای از گزاره‌های بنیادین هندسه ازجمله امتداد یک خط تا بی‌نهایت را ثابت کرد. امّا نوع دوّم برهان همانست که خیام آنرا **برهان لمّی** می‌نامد و آن پی بردن از علّت به وجود معلول است. این برهان برخلاف برهان انّی، برهانی است حقیقی که به ریاضیدان امکان می‌دهد تا به‌صورت علّی گزاره‌هائی را ثابت نماید. اغلب قضایای ریاضی نیز به کمک همین برهان ثابت می‌شوند. و خیام در رساله خود تلاش می‌کند با همین برهان اصل توازی اقلیدس را ثابت کند. لازم به یادآوری است که در همین رساله برای همین اصل موضوع یک «برهان انّی» نیز ارائه می‌دهد.

پیش از پرداختن به اثبات خیام اشاره به این نکته ضروری است که خیام در رساله خود ضمن بحث از دانشمندان پیشین که بر اصول اقلیدس شرح نوشته‌اند، از غفلت متقدمین و خطای متأخرین صحبت می‌کند. ما در زیر می‌کوشیم که این مسئله را مورد بررسی قرار دهیم.

۲ـ۲ ـ غفلت متقدمین و خطای متأخرین

همانطوریکه گفتیم خیام اصل توازی اقلیدس را قضیه‌ای می‌داند که باید آنرا اثبات کرد حال آنکه متقدمین یعنی ریاضیدانان یونانی از این کار غفلت کرده و متأخرین یعنی ریاضیدانان اسلامی نیز هنگام اثبات خود، به‌خطا رفته‌اند.

خیام در مقدمه رساله‌اش از متقدمین تنها به اقلیدس و هرون اسکندرانی و اطوسیوس اشاره می‌کند و علت غفلت آنها را بدرستی مشخص نمی‌نماید. امّا کمی دورتر مجدداً به متقدمین اشاره می‌کند و آن هنگامی است که خیام برای پوستولای خود برهان فلسفی می‌آورد در اینجا بدون اینکه از ریاضیدانی اسم ببرد می‌گوید که متقدمین این گزاره را اثبات نکرده‌اند. بنابراین ریاضیدانان یونانی به علت غفلت از این گزاره نتوانسته‌اند درباره اثبات اصل پنجم اقلیدس نیز کاری انجام دهند. امّا متأخرین یعنی ریاضیدانان اسلامی چرا در اثبات خود به‌خطا رفته‌اند؟

خیام باز در این باره سکوت می‌کند و خطای آنان را بازگو نمی‌کند، امّا از بررسی اثبات‌های این ریاضیدانان برای اصل توازی می‌توان پاسخ سؤال خود را دریافت کرد.

همانطوریکه نشان داده شده گزاره‌های بنیادین خیام برای اثبات اصل توازی، یکی همان اصل ارشمیدس - ادوکس و دیگری امکان امتداد خط راست تا بی‌نهایت و سوّمی پوستولای خیام می‌باشد.

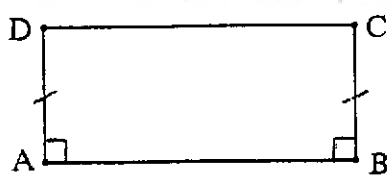
گزاره‌های اول و دوّم را در اثباتهای ریاضیدانان اسلامی برای اصل توازی مشاهده می‌کنیم. تنها پوستولای خیام است که در این اثباتها نادیده گرفته شده است. بنابراین خطای آنها نیز از نظر خیام ناشی از این می‌شود که در اثبات‌های خود از این پوستولا بهره نگرفته‌اند و بالطبع در اثبات اصل پنجم اقلیدس به‌خطا رفته‌اند.

۳ـ روش خیام برای اثبات اصل موضوع پنجم اقلیدس

حال که با فلسفه ریاضی خیام وگزاره‌های بنیادین او آشنا شدیم به سراغ برهانی که او از اصل توازی داده است می‌رویم. برهانی که او آنرا «برهان لمّی» نامیده است. خیام برای این اثبات خود قبلاً سه گزاره ارائه می‌دهد:

گزاره ۱

قطعه خط [AB] مفروض است، [AD] و [BC] را بر [AB] عمود می‌کنیم به قسمی که $BC = AD$ باشد. پس هرگاه [DC] را به هم وصل کنیم زوایای C و D باهم مساوی خواهند بود.



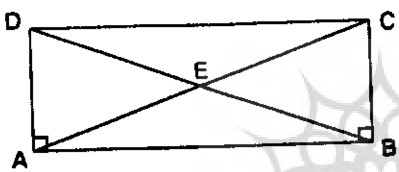
در برهان ساده و صحیحی که خیام برای گزاره‌اش می‌دهد، از اصل پنجم اقلیدس استفاده نمی‌نماید. نکته مهمّ آنست که خیام نمی‌گوید که زوایای مجاور به قاعده فوقانی این چهار ضلعی متساوی‌الساقین دو قائمه حتماً قائمه‌اند. بلکه سه فرض برای آن ذکر می‌کند قائمه، حاده و منفرجه و درصدد است که دو فرض حاده و منفرجه را با رائه دلایلی متقن باطل نماید.

آلترناتیوهای گزاره اول خیام را می‌توان چنین نمایش داد:

فرض $[AD] = [BC]$

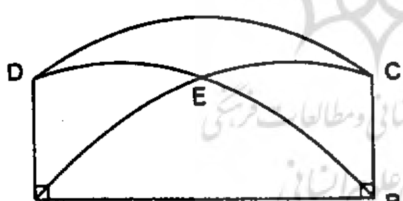
$\hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ$

حکم $\hat{C} = \hat{D}$



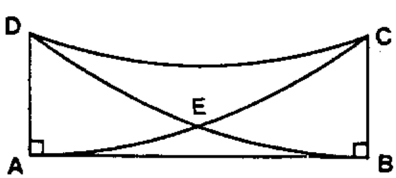
در هندسه اقلیدس

$\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$



در هندسه ریمان

$\hat{C} = \hat{D} > ۹۰^\circ$

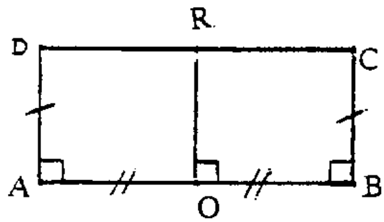


در هندسه لوباچفسکی

$\hat{C} = \hat{D} < ۹۰^\circ$

گزاره ۲

در چهارضلعی ABCD مورد بحث در گزاره ۱ فرض می‌کنیم O وسط [AB] باشد. از O عمودی بر [AB] رسم می‌کنیم تا [DC] را در نقطه R قطع نماید.
در این صورت CR = RD بوده و [OR] عمود بر [DC] خواهد بود.

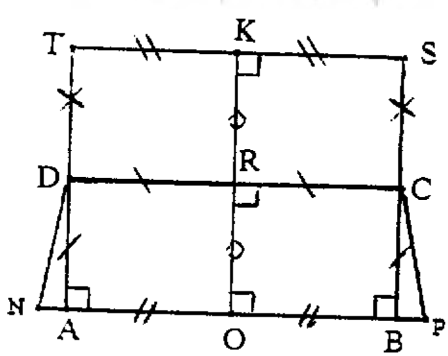


گزاره ۳

همان فرضهای گزاره‌های ۲ را درنظر می‌گیریم. RO را تا RK امتداد می‌دهیم. (RK = OR) سپس خط SKT را بر OK عمود می‌کنیم و AD و BC را امتداد می‌دهیم تا SKT را به ترتیب در نقاط T و S قطع کند. خیام ثابت می‌کند:

$$[KT] = [KS]\ ,\ [CS] = [DK]$$

تا زمینه را برای اثبات توازی خطوط AB و DC، یعنی اصل ۲۹ اقلیدس که هم‌ارز اصل پنجم اوست را فراهم آورد.



روی این نکته مهمّ خیلی باید تأکید کرد. زیرا با این فرض ناگهان چشم‌اندازی تازه به‌روی ما گشوده می‌شود. تا آن تاریخ در مقابل اصل پنجم اقلیدس هیچ ساختمان رقیبی خودنمایی نکرده بود. درحالیکه نادیده گرفتن این اصل هم‌اکنون این ساختمانهای نااقلیدسی را به سادگی به‌روی ما می‌گشاید. منطقاً هدف خیام از پیش کشیدن این سه حالت، رد دو حالت مزاحم حاده و منفرجه است. زیرا که با نفی فرض زاویه‌های قائمه، نه با یک، بلکه با دو وضعیت سروکار داریم. اکنون می‌دانیم که فرض زاویه حاده به هندسه لوباچفسکی و فرض زاویه منفرجه به هندسه ریمان مربوط می‌شود. با چنین فرضهائی به‌عمق مسأله می‌رویم، حال آنکه دانشمندانی که پیش از خیام برای اثبات اصل پنجم اقلیدس تلاش نمودند با استفاده از خواص خط‌های راست هم‌فاصله در همان مسائل سطحی خود را گرفتار می‌کردند.

در ریاضیات تلاش ریاضیدان عموماً برآنست که برای اثبات گزاره و یا قضیه‌ای مستقیماً از گزاره‌های اثبات شده دیگر استفاده کرده و بکمک آنها گزاره مزبور را ثابت نماید. این‌چنین اثباتی را «اثبات مستقیم» می‌نامند. امّا گاهی برای قضایا و یا گزاره‌هائی اثبات مستقیم کارگر نیست و ناچار باید به اثبات و یا برهان دیگری متوسل شد که آنرا در اصطلاح ریاضی «برهان غیرمستقیم» می‌گویند.

این برهان نه‌تنها در ریاضیات، بلکه در دادگاههای جنائی نیز بکار گرفته می‌شوند. من‌باب مثال فرض کنیم که مردی متهم است که در وقت معینی در شهر x مرتکب جنایتی

وکلای مدافع اغلب در دادگاههای جنائی از برهان غیرمستقیم که در اصطلاح انگلیسی Proving an alibi نامیده می‌شود بهره می‌جویند.

گردیده است. هرگاه وکیل مدافع این شخص ثابت کند که در این وقت معین، شخص متهم در شهر y بوده است، در این صورت ارتکاب جرم منتفی می‌گردد و طبق قانون متهم مزبور را آزاد می‌کنند. این روش اثبات را در دادگاه اصطلاحاً "an alibi" می‌گویند. مشابه این روش را در ریاضیات «برهان خلف» می‌نامند. در این برهان هنگامیکه می‌خواهیم یک گزاره شرطی را ثابت کنیم نقیض آنرا درست می‌انگاریم و به یاری استدلال گزاره باطلی را از آن استنتاج می‌کنیم. هرگاه این گزاره باطل قضیه مسلّمی و یا اصل موضوعی را نفی کند، از آنجا درستی حکم را می‌توان نتیجه گرفت.

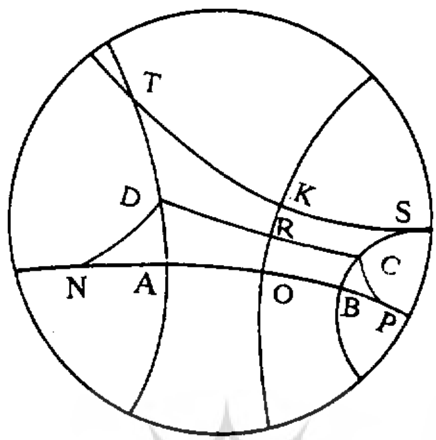
خیام نیز برای اثبات اینکه زوایای C و D قائمه هستند، نقیض آنرا درنظر می‌گیرد، یعنی فرض می‌کند که این زوایا حاده و منفرجه می‌باشند. تا بدین ترتیب به تناقضی که در انتظار آنست رسیده و درستی زاویه قائمه را اثبات نماید. فرض زاویه حاده را خیام چنین به‌تناقض می‌کشاند.

صفحه DS را به اندازه ۱۸۰ درجه روی محور DC دوران می‌دهیم تا روی صفحه AC قرار گیرد. در این صورت RK روی RO و قطعه خط ST که مساوی NP است روی AB قرار خواهد گرفت. از آنجائیکه زاویه SCR بزرگتر از زاویه BCR می‌باشد پس PN بزرگتر از AB خواهد بود. یعنی خطوط مستقیم BC و AD که عمود بر AB می‌باشند رو به فراخی می‌روند. امتداد این دو خط بدلیل تقارن در طرف دیگر نیز باز هم رو به فراخی خواهند رفت. «یعنی دو خط مستقیمی که خط مستقیم دیگری را بر دو زاویه قائمه قطع کرده‌اند، از دو طرف این خط رو به فراخی می‌روند.»[۱۵] و این با پوستولای خیام در تناقض آشکار است و خیام از اینجا نتیجه می‌گیرد که این محال بدیهی است. بنابراین دو زاویه C و D نمی‌توانند حاده باشند. با روش مشابهی خیام فرض زاویه منفرجه را نیز به تناقض می‌کشاند. و نتیجه می‌گیرد که زوایای D و C که نه منفرجه و نه حاده‌اند، پس باید قائمه باشند. و بدین ترتیب اصل موضوع توازی را بگمان خود ثابت می‌کند.

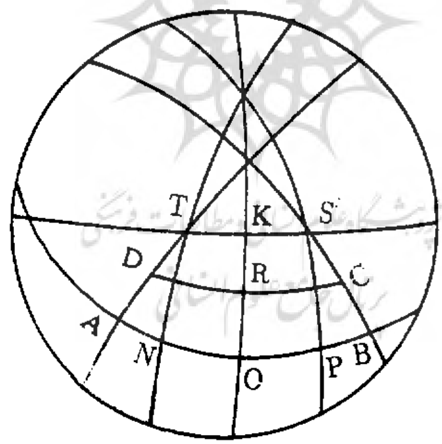
چنانکه در مقدمه این گفتار اشاره کردیم، اصل توازی اقلیدس اثبات‌ناپذیر است. آن را باید یا قبول و یا رد کرد. اشتباه استدلال خیام نیز در آنست که در اثبات خویش از پوستولائی استفاده کرده که هم‌ارز پوستولای اقلیدس است. و اگر این پوستولا را بکار نمی‌گرفت هیچگاه به تناقض نمی‌رسید. زیرا هرگاه ساختمان خیام را در هندسه هذلولی

۱۵. جلال همائی، *خیامی نامه* .. ص ۲۳۹.

مورد مطالعه قرار دهیم می‌بینیم که AB کوچکتر TS از می‌باشد.



در هندسه لوباچفسکی AB < TS می‌باشد.



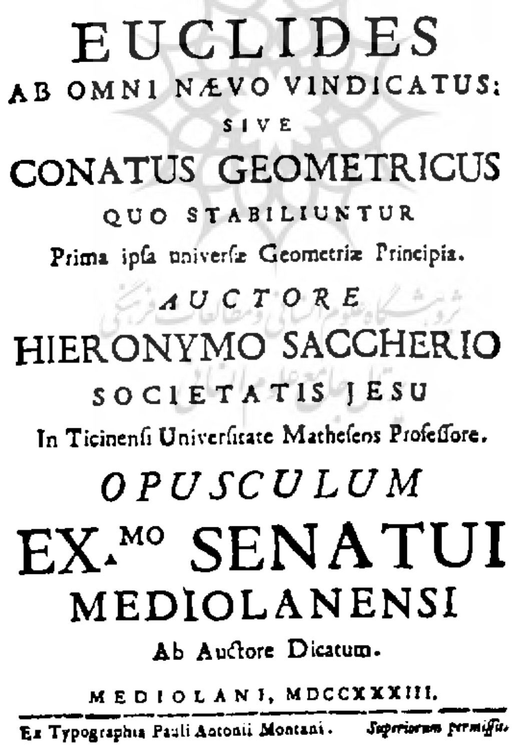
در هندسه ریمان AB > NP است.

نیز در هندسه ریمان AB > TS است. بنابراین هرگاه خیام از پوستولای خود که درحقیقت هم‌ارز پوستولای اقلیدس است استفاده نمی‌کرد، هیچگاه به تناقضی که در

انتظارش بود نمی‌رسید و شاید رازی که قرنها پس از او به‌وسیله لوباچفسکی و ریمان گشوده شد در همان زمان او گشوده می‌شد.

۴ـ تأثیر خیام بر ساکری

پس از خیام ریاضیدانان دیگر اسلامی نیز برای اثبات اصل پنجم اقلیدس تلاش کردند که معروفترین این تلاشها از آن خواجه‌نصیرالدین طوسی ریاضیدان و فیلسوف برجسته ایرانی در قرن هفتم هجری می‌باشد. خواجه نصیر کارهای ریاضیدانان پیش از خود، ازجمله خیام را نیز در این زمینه نقد کرد و آنها را در رساله‌ای تحت عنوان، *رسالة‌الشافیه* گردآوری کرد. امّا در اروپا مهمترین کوششها در این زمینه توسط کشیشی بنام ساکری صورت گرفت. او که استاد ریاضیات دانشگاه پادیا بود در کتابی تحت عنوان *اقـلیدس*


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

روی جلد کتاب ساکری که تحت عنوان «اقلیدس عاری ار هرگونه نقص» در سال ۱۷۳۳ در میلان چاپ گردید.

عاری از نقص که در سال ۱۷۳۳ بچاپ رسید[۱۶] تلاش کرد تا همانند اسلاف خود این اصل را به‌اثبات برساند.

ساکری گذشته از ریاضیات در منطق و بویژه روش اثبات با برهان خلف ورزیده بود و پیش از ورودش به دانشگاه پادیا، کتابی تحت عنوان *Logica Démonstratsia* یعنی «منطق اثباتی» به‌رشته تحریر آورده بود. او که با کارهای خواجه نصیرالدین طوسی درباره خطوط توازی نیز از طریق ترجمه‌های لاتینی والیس آشنائی داشت و به نقایص اثبات طوسی پی‌برده بود، درصدد بود تا با اثبات اصل کذائی اقلیدس از یک طرف قدرت خود را در استفاده از برهان خلف بیازماید، از طرف دیگر با اثبات این اصل مزاحم، برای همیشه اقلیدس را از انتقاد برهاند. ساکری برای اثبات این اصل موضوع همان چهار ضلعی متساوی‌الساقین دو قائمه خیام را مورد مطالعه قرار داد. نیز همانند خیام و بدون توسل به اصل موضوع پنجم اقلیدس ثابت کرد که دو زاویه دیگر این چهارضلعی با هم مساویند. و بالاخره همچون خیام فرضهای قائمه و حاده و منفرجه را برای این زوایا پیش‌بینی کرد تا بتواند با برهان خلف دو فرض حاده و منفرجه را به تناقض بکشاند. و از این تناقض فرض زوایای قائمه را نتیجه بگیرد. ساکری که مانند اقلیدس خط راست را نامتناهی فرض کرده بود، توانست فرض زوایای منفرجه را به تناقض بکشاند. امّا فرض زاویه‌های حاده دشوارتر از آن بود که تصور می‌کرد. زیرا هر قدر تلاش کرد، نتوانست تناقضی را که درپی آن بود، حاصل نماید. برعکس به نتایجی عجیب رسید که بسیاری از آنها قضایای هندسهٔ لوباچفسکی را تشکیل می‌دهند[۱۷].

ناچار از روی عجز نوشت که «فرض زاویه حاده اصلاً درست نیست.»

او بدین ترتیب بدون اینکه خود متوجه شود هندسه نااقلیدسی را کشف کرده بود. ما بعداً درباره تأثیر ساکری روی ریاضیدانان اروپائی بحث خواهیم کرد. در اینجا تنها باید به این نکته اشاره کرد که شباهت زیاد گزاره‌های او با گزاره‌های خیام محققین تاریخ ریاضیات را متقاعد کرده است که او از کارهای خیام در این باره بهره برده است. قبل از

---

16. G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsauniversae Geometriae principia*, Mediolani 1733.

۱۷. ماروین جی گرینبرگ، *هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی*، ترجمه م. شفیعیها تهران ۱۳۶۱. ص ۱۲۹.

اینکه درباره این شباهت بحث کنیم باید بگوئیم که رساله‌های این دو ریاضیدان از نظر سبک نگارش نیز بهم شبیهند. یعنی هر دو به سه بخش تقسیم شده‌اند، بخش اول درباره نظریه خطوط موازی، بخش دوم نسبت و تناسب و سرانجام بخش سوم درباره نسبت مولّفه می‌باشد.

اسمیت ریاضیدان آمریکائی نخستین دانشمندی است که به شباهت گزاره‌های خیام با گزاره‌های ساکری پی‌برد. او که در اثر مهمّ خود تحت عنوان *کتابهای مرجع در ریاضیات*[۱۸]، ترجمه انگلیسی قسمتی از کتاب ساکری را درباره نظریه خطوط موازی نقل کرده بود، با این اثر ریاضیدان ایتالیائی بخوبی آشنائی داشت. و هنگامیکه در سال ۱۹۳۳ سفری به ایران کرد، ضمن بازدید از آثار خطی مدرسه سپهسالار به نسخه خطی رساله‌ای از خواجه نصیرالدین طوسی در زمینه خطوط توازی پی‌برد، که در آن فقراتی از *رسالة شرح ماأشكل من مصادرات كتاب الاقليدس* نیز نقل شده بود. اسمیت که ریاضیدان و مورخ تاریخ ریاضیات بود، فوراً متوجه شباهت فقرات مزبور با چندگزاره ساکری گردید و آنها را بکمک یک ایرانی بنام علیقلی‌خان حکیم‌نژاد به زبان انگلیسی ترجمه کرد بعد با گزاره‌های ساکری مقایسه و حاصل کار خود را به‌صورت مقاله‌ای در سال ۱۹۳۵ میلادی منتشر کرد[۱۹]. امّا از آنجائیکه اسمیت رساله خیام را دردست نداشت، مقایسه او بصورت ناقص انجام گرفت، یعنی او تنها دو گزاره نخستین این دو ریاضیدان را مطابقه کرده بود. تا اینکه در سال ۱۹۶۷ میلادی استاد خلیل جاویش که هم رساله خیام و هم رساله ساکری را مطالعه کرده بود، متوجه شد که این شباهت بیش از آنست که اسمیت کشف کرده بود.

او دریافت که گزاره‌های سوّم و چهارم خیام از یک سو با گزاره‌های سوم ساکری هم‌ارز می‌باشند از اینرو حاصل تحقیق خود را در مقاله‌ای منتشر کرد [۲۰]. ما نیز با استفاده از مقالات مزبور این گزاره‌ها را به‌ترتیب زیر مورد مقایسه قرار می‌دهیم:

18. D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, New York 1929 p. 351 ...
19. D. E. Smith "Omar Khayyam and Saccheri" *Scripta Mathematica* 3(1935) pp. 5-10
20. Jaouiche, K. "De la fécondité mathematique: d'Omar Khayyam à G. Saccheri" *Diogène* 57(1967) pp. 97-113.

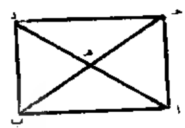
DAVID EUGENE SMITH (1860-1944)

داوید اسمیت، ریاضیدان آمریکائی که برای اولین بار متوجه شباهت گزاره‌های خیام و ساکری گردید.

گزاره اول خیام

الشکل الأول، و هو کط من مقالة آ:

خطُّ ا ب مفروض، و نخرج ا ج عموداً علی ا ب، و نجعل ب د عموداً علی ا ب و مساویاً لخطِّ ا ج ، فهما متوازیان / کما بیّنه أقلیدس في شکل کو، و نصل ج د ؛ فأقول : إن زاویة ا ج د مساویة لزاویة ب د ج.



برهانه: نصل ج ب ا د . فخط ا ج مثل ب د ، و ا ب مشترک، و زاویتا آ و ب قائمتان ؛ فقاعدتا ا د ج ب متساویتان ، و سائرُ الزوایا مثل سائرِ الزوایا. فیکون زاویتا ه ا ب ه ب ا متساویتین ، فخطا ا ه ه ب متساویان؛ فیبقی ج ه ه د متساویین ؛ فیکون زاویتا ه ج د ه د ج متساویتین. و ا ج ب مثل ا د ب ، فزوایتا ا ج د ج د ب متساویتان. وذلک ما أردنا أن نبین.

و من ههنا استبان أن زاویتي ج ا ب د ب ا ، إذا کانتا متساویتین ، کیف ما کانتا، و خطا ا ج ب د متساویین ، یجب / أن یکون زاویتا ب د ج ا ج د متساویتین.

گزاره اول ساکری

PROPOSITIO 1.

Si duæ æquaales reƐtæ (fig. 1.) A C, BD, æquales ad eafdem partes efficiant angulos cum reƐtæ AB: Dico angulos ad junƐtam CD aquates invicem fore.

Demonftratur. Jungantur AD, CD. Tum confiderentur triangula CAB, DBA, Conftat (ex quarta primi) æqia;es fpre bafes CB, AD, Deinde confiderentur triangula ACD, BDC. Conftat (ex oƐtava primi) æquales fore angulos ACD, BDC, Quod erat demonftrandum.

Fig. 1

مقایسه گزاره‌های اوّل خیام و ساکری از روی متون اصلی آنها

مقایسه تحلیلی گزاره‌های خیام و ساکری

ساکری

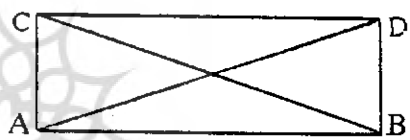
گزاره اول

فرض :

در چهار ضلعی ABCD

$$\begin{cases} AC = BD \\ \hat{A} = \hat{B} \end{cases}$$

حکم : $\hat{C} = D$



اثبات : AD و CBرا رسم می‌کنیم

$$\Delta ABD = \Delta ACB \Rightarrow AD = CB$$

و

$$\Delta BDC = \Delta ACD \Rightarrow A\hat{C}D = B\hat{C}D$$

خیام

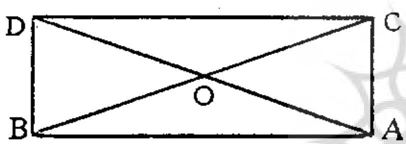
گزاره اول

فرض :

در چهارضلعی ABCD

$$\begin{cases} AC \perp AB \\ BD \perp AB \\ AC = BD \end{cases}$$

حکم : $\hat{C} = \hat{D}$



اثبات :

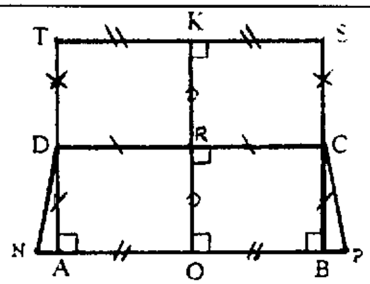
$$\Delta ABD = \Delta ACB \Rightarrow \begin{cases} AD = CB \\ O\hat{A}B = O\hat{B}A \end{cases}$$

امّا در مثلث DOC داریم:

$$O\hat{C}D = O\hat{D}C$$

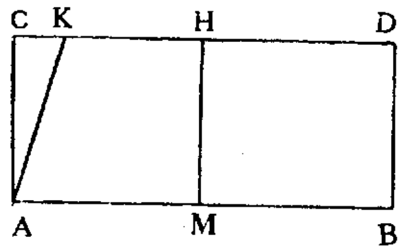
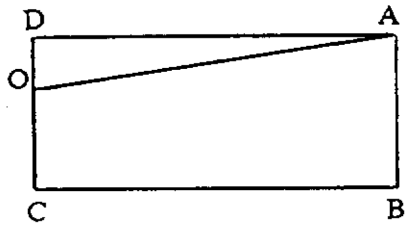
پس $A\hat{C}D = B\hat{D}C$

ساکری	خیام
گزاره دوم	گزاره دوم
به همان فرضهای گزاره‌اول، فرضهای زیر را اضافه می‌کنیم: $AM = MB$ $CH = HD$ حکم: $CHM = DHM =$ ۹۰° $AMH = BMH =$ ۹۰° اثبات: AH و BH و CM و DM را رسم می‌کنیم؛ داریم: $\hat{A} = \hat{B}$ $\hat{C} = \hat{D}$ (گزاره اول) $\Delta DBM = \Delta CAM \Rightarrow CM = DM$ مثلث‌های CHM و DHM با هم برابرند. مثلث‌های AMH و MHM نیز با هم برابرند پس: $C\hat{H}M = D\hat{H}M =$ ۹۰° $A\hat{M}H = B\hat{M}H =$ ۹۰°	به همان فرضهای گزاره اول فرضهای زیر را اضافه می‌کنیم: $BO = OA$ $OR \perp AB$ حکم: $CR = RD$ $OR \perp CD$ اثبات: DO و OC را رسم می‌کنیم. داریم: $AC = BD$ $AO = OB$ $\hat{A} = \hat{B} =$ ۹۰° از اینجا نتیجه می‌شود: $DO = OC$ و $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ پس: $D\hat{O}R = R\hat{O}C$ مثلث‌های DOR و ROC با هم برابرند: زیرا $DO = OC$ ضلع OR در هردو مشترک است و نیز $D\hat{O}R = R\hat{O}C$ پس: $DR = RC$ و $D\hat{R}O = C\hat{R}O =$ ۹۰°

ساکری	خیام
	گزاره سوّم
	 فرض: به فرضهای گزاره اول، فرضهای زیر را اضافه می‌کنیم: $\hat{C} = \hat{D}$ $OR \perp AB$ طبق گزاره دوم $OR \perp CD$ OR را امتداد می‌دهیم بطوریکه داشته باشیم: $OR = RK$ و $HKT \perp OK$ حکم: $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ اثبات: (باتوجه به طولانی بودن این اثبات و اینکه تنها اندیشه خیام را در گزاره سوم ساکری می‌یابیم، از جزئیات آن صرفنظر می‌کنیم.

ساکری	خیام
	گزاره سوّم
	خیام نخست ثابت می‌کند که امتدادهای AC و BD خط HKT را در H و T قطع می‌کنند. او سپس باتوجه به خواصّ مثلثهای متساوی ثابت می‌کند که زوایای H و T مساویند و خواهیم داشت: $CH = DT$ $HK = KT$ او سپس به اثبات گزاره سوّم می‌پردازد تا ثابت کند: $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ برای این منظور اثبات خط را به سه بخش تقسیم می‌کند: الف) هرگاه: $\hat{C} = \hat{D} < ۹۰^\circ$ پس: $H\hat{C}R > A\hat{C}R$ با تا کردن صفحه DH روی صفحهٔ CB خیام ثابت می‌کند که: $HT = NS > AB$ از اینجا نتیجه می‌گیرد که خطوط AC و BD که در یک طرف AB قرار گرفته‌اند واگرا می‌باشند. قرینه آنها نیز واگرا خواهند بود. و این طبق پوستولای خیام

ساکری	خیام
	گزاره سوم
	غیرممکن است. ب) هرگاه $\hat{C} = \hat{D} > 90^\circ$ با برهان مشابهی خیام ثابت می‌کند که دو خط AC و BD در دو طرف AB همگرا هستند و این بنا به پرستولای خیام محال است. پس: $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

ساکری	خیام
گزاره سوّم	گزاره چهارم
	
فرض:	فرض:
در چهار ضلعی ABCD داریم:	در چهارضلعی ABCD داریم:
$AC = BD$	$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^{\circ}$
و $AB \perp AD$ و $AB \perp AC$	حکم:
حکم:	$CD = AB$
الف) هرگاه $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^{\circ}$ باشد:	اثبات:
$CD = AB$	هرگاه $AB \neq CD$
ب) هرگاه $\hat{C} = \hat{D} > ۹۰^{\circ}$	فرض می‌کنیم $DC > AB$
$CD < AB$	OC را به اندازه AB روی DC جدا می‌کنیم. AO را
ج) و هرگاه $\hat{C} = \hat{D} < ۹۰^{\circ}$	رسم می‌نمائیم:
$CD > AB$	بنابراین:
اثبات:	(گزاره اوّل) $B\hat{A}O = C\hat{O}A$
بخش اوّل $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰^{\circ}$	امّا: $B\hat{A}O < ۹۰^{\circ}$

ساکری	خیام
گزاره سوم	گزاره چهارم
هرگاه $AB \neq CD$	و $COA > 90^\circ$
فرض می‌کنیم $DC > AB$	(زاویه خارجی مثلث قائم‌الزاویه AOD)
DK را به اندازه AB روی DC جدا می‌کنیم AK را	پس $\hat{COA}$ که بزرگتر از یک زاویه قائمه است برابر با
رسم می‌نمائیم	$\hat{BAO}$ که کوچکتر از زاویه قائمه است خواهد بود: و
بنابراین:	این غیرممکن است
(گزاره اول) $\hat{BAK} = \hat{DKA}$	پس: $DC = AB$
امّا: $B\hat{A}K < 90^\circ$	
و $D\hat{A}K > 90^\circ$	
(زاویه خارجی مثلث قائم‌الزاویه ACK)	
پس این دو زاویه که یکی بزرگتر از یک قائمه و	
دیگری کوچکتر از یک قائمه است، هیچگاه با هم	
برابر نخواهند بود. بنابراین:	
$AB > DC$ غیرممکن است	
پس: $DC = AB$	
بخش ۲:	
$\hat{C} = \hat{D} > 90^\circ$	
M و H اوساط AB و CD را به‌هم وصل می‌کنیم،	
داریم:	

ساکری	خیام
گزاره سوم	
$AM \perp MH$	
$CH \perp MH$	
$\hat{C} \neq \text{۹۰}^{\circ}$	
پس (بنا به گزاره اوّل)	
$CH \neq AM$	
هرگاه CH بزرگتر از قطعه خط AM باشد در این صورت HK را برابر با AM می‌گیریم:	
پس (گزاره اول)	
$M\hat{A}K = A\hat{K}H$	
امّا این غیرممکن است، زیرا:	
$M\hat{A}K < \text{۹۰}^{\circ}$	
و $H\hat{K}A > A\hat{C}D > \text{۹۰}^{\circ}$	
پس: $CH < AM$	
و $CD < AB$	
بخش ۳	
$\hat{C} = \hat{D} < \text{۹۰}^{\circ}$	
ساکری با استدلالی مشابه به استدلال بخش ۲ ثابت می‌کند که: $CD > AB$	

در مورد گزاره اوّل تذکر این نکته لازم است که فرض‌ها و براهین خیام و ساکری همگی هم‌ارز می‌باشد. تنها اختلافی که بین گزاره‌های اوّل خیام و ساکری موجود است، به وضعیت دو زاویه A و B مربوط می‌شود. خیام این دو زاویه را قائمه فرض می‌کند، حال آنکه ساکری آنها را در حالت کلی متساوی می‌داند. بدین ترتیب می‌توان گفت که گزاره ساکری عمومی‌تر از گزاره خیام است. امّا نظر به اینکه قائمه بودن زوایای مجاور به قاعده چهارضلعی نزد خیام در گزاره اوّل محدودیتی بیهوده است، فرض عمومی‌تر ساکری نیز هیچ چیز تازه‌ای را عرضه نمی‌کند.

از سوی دیگر خواهیم دید که در گزاره‌ای که قائمه بودن زوایای مجاور به قاعده این چهارضلعی حائز اهمیت است، ساکری نیز [چون خیام] زوایای قائمه را دخالت می‌دهد. بنابراین، گزاره‌های اوّل این دو ریاضیدان عیناً مشابه هم می‌باشند. به همین نحو گزاره‌های دوم آنان نیز با هم معادل می‌باشند.

در مورد گزاره‌های سوم و چهارم خیام از یک سو و گزاره سوم ساکری از دیگرسو، این تشابه چندان آشکار نیست. امّا این اختلاف آنقدر هم عمیق نیست. اگرچه گزاره سوم خیام مستقیماً با هیچ‌یک از گزاره‌های ساکری مرتبط نیست، با اینحال فکر اساسی آن کاملاً در گزاره سوم ساکری مشهود است. چرا که اوّلاً سه حالت مختلف در گزاره سوم ساکری که بعدها به نام سه فرض ساکری معروف شدند و به سه هندسه مختلف منسوب گردیدند، همانهائی است که خیام در سه بخش اثبات گزاره سوم خود آورده است. به‌علاوه روابط مهمّی که ساکری در گزارهٔ سوم بین اضلاع چهارضلعی و زوایای حاده و منفرجه آن برقرار می‌کند عیناً همانهائی است که خیام در اثبات گزاره سوم خود، آورده است. درست است که اختلافی بین این دو گزاره وجود دارد؛ این CD ضلع مقابل به قاعده نیست که نزد خیام کوچکتر و یا بزرگتر از قاعده انتخاب شده است، بلکه خط راست TH می‌باشد. امّا روابط مابین اضلاع و زوایا عیناً نزد دو نویسنده یافت می‌شود. و ساکری که راه را برای هندسه‌های نااقلیدسی گشود، دقیقاً از همین روابط استفاده کرده است، که این خود چیزی جز تعمیم گزاره چهارم خیام نیست. در واقع هندسه‌دان ایرانی ثابت می‌کند که اگر چهارضلعی مورد بحث، یک مستطیل باشد در این صورت اضلاع مقابل مساوی هم هستند. هندسه‌دانی ایتالیائی نیز همین خاصیت را در قسمت اوّل گزاره سوم خویش ثابت می‌کند و با حفظ زوایای قائمه مجاور به قاعده ـ همان که خیام

در سه گزاره اوّل خود انجام داده بود، حالاتی را فرض می‌کند که دو زاویه مجاور به ضلع مقابل یا منفرجه‌اند و یا حاده. بدین ترتیب نتیجه می‌گیرد که در حالت اوّل (زاویهٔ حاده) این ضلع (مقابل به زاویه حادّه) از قاعدهٔ کوچکتر و در حالت دوم بزرگتر از آن می‌باشد. بخش اوّل گزاره سوم ساکری و برهانش با گزارهٔ چهارم خیام و اثباتش همانند هم هستند. امّا دو بخش دیگر گزاره ساکری ـ که به خواص مُنتج از بخش اوّل عمومیت می‌دهد ظاهراً چندان تجانسی با گزاره خیام ندارد، لیکن این دو بخش از گزاره ساکری جز بازگوئی روابط حاصل درگزاره سوم خیام نمی‌باشد. روش اثباتی که ساکری برای این دو بخش از گزاره خود بکار برده، عیناً همان روشی است که وی برای بخش اوّل این گزاره بکار گرفته است. پس [علیرغم عدم مشابهت صوری] این گزاره ساکری نیز در معنی هم‌ارز چهارمین گزاره خیام است. درواقع در آنچه که مربوط به روابط بین اضلاع و زوایا می‌شود همگی توسط خیام درگزاره سومش مطرح گردیده‌اند. ساکری متغیری را وارد می‌کند که در شیوه اثبات بخش اوّل تغییری حاصل نمی‌دهد. ترسیم عمودمنصف MH تنها نتیجه‌ای که می‌دهد محدود کردن اثبات به طرف چپ شکل است و بدین‌وسیله تنها از زاویهٔ رأس C در اثبات استفاده می‌شود. جز این استثنا، مابقی، این برهان با اثبات خیام مشابهت دارد.

نتیجه‌ای که از این مقایسه می‌توان گرفت آنست که ساکری از نظریه خطوط توازی خیام آگاهی داشته است. امّا این آگاهی را او از چه طریقی کسب کرده است؟

پاسخ اسمیت به این سؤال ساده است. او معتقد است که ساکری از طریق والیس با اثر خیام آشنائی برقرار کرده است، چه همو بود که اثری از نصیرالدین طوسی را درباره خطوط توازی به زبان لاتین ترجمه کرد، اثری که ساکری آنرا خوانده و از نظریه طوسی انتقاد کرده است، طوسی هم در رساله خود فقراتی از اثر خیام را درباره خطوط توازی نقل کرده است. بنابراین والیس را باید حلقه اتصال خیام و ساکری دانست.[21]

این جواب چندان قانع‌کننده نیست، ساکری که در هیچ جای اثر خود نام خیام را نبرده، قطعاً والیس را می‌شناخته، چراکه به کتاب این دانشمند درباره اصل پنجم اقلیدس اشاره کرده و از طریقه اثبات اصل پنجم او انتقاد کرده است. در همین قطعه ساکری بر طوسی نیز خرده گرفته است. نیز همانطوریکه اسمیت اشاره کرده، طوسی در *رسالهٔ شافیهٔ* خود،

21. D. E. Smith, "Khayyam and Saccheri" *op. cit.* p.

مطالبی را نیز از خیام درباره خطوط توازی آورده است. امّا این قسمت از کار طوسی را در اثر والیس نمی‌یابیم.

از سوی دیگر شباهت‌های گزاره‌های خیام و ساکری آنقدر زیاد و دقیق است که نمی‌توان آنها را نتیجه یک تصادف نامید. پس باید درپی پاسخی منطقی‌تر گشت. امّا یافتن کلید این معما چندان هم مشکل نیست. زیرا والیس ضمن ارائه برهان طوسی متذکر می‌شود که آنرا بکمک «پوکوک» استاد متبحر در زبانهای شرقی و مخصوصاً زبان عربی بدست آورده است. در فقره‌ای که بلافاصله بعد از برهان طوسی می‌آید، والیس مجدداً می‌گوید که باز بکمک همین پوکوک به دو نسخه خطی عربی دیگر دست یافته است که وی به مؤلفان آن اشاره نمی‌کند. آیا یکی از این نسخه‌های خطی متعلق به خیام نبوده است. در این صورت آیا از طریق ترجمه پوکوک نبوده است که ساکری به اثر ریاضیدان بزرگ ایرانی دست‌یافته است؟

ساکری و هندسه‌های نااقلیدسی

گفتیم که ساکری چند قضیه هندسه نااقلیدسی را ناخودآگاه کشف نمود، سؤالی که مطرح می‌شود، این است که آیا این قضایا و بطور کلی کتاب ساکری که در سال ۱۷۳۳ در میلان چاپ گردید، در تکوین هندسه‌های نااقلیدسی تأثیر داشته‌اند؟ در پاسخ به این سؤال باید گفت که بلترامی، ریاضیدان ایتالیائی و یکی از واضعان هندسه‌های نااقلیدسی با اثر ساکری آشنائی کامل داشت و مقاله بسیار مهمّی نیز درباره ساکری به چاپ رسانده بود.[۲۲] در قرن هجدهم میلادی اصل توازی اقلیدس از بحثهای مهمّ علمی ریاضیدانان بود، و مرکز این بحثها نیز دانشگاه گوتینگن آلمان بود. در همین دانشگاه بود که در سال ۱۷۸۳ گیورک زیمون کلوگل (Georg Simon Klügel) در رساله دکتری خود که زیر نظر کاستنر (A. G. Kastner) درباره خطوط توازی نوشت[۲۳] کتاب ساکری را مورد نقادی علمی قرار داد. از طریق همین رساله بود که بسیاری از ریاضیدانان آلمانی و غیره با نظریات ساکری درباره خطوط متوازی آشنا شدند. یکی از این ریاضیدانان گاوس بود

22. E. BELTRAMI, "Un precursore italiano di Legendre e Lobatchewsky" *Ren. dic. della R. Acc. dei Lincei*, V, (1889). pp. 441-448

23. G. S. Klugel, "Theorie der Parallellinen" *Magazin für reine und angewandte Mathematik* 1786 pp. 137-64, 325-58

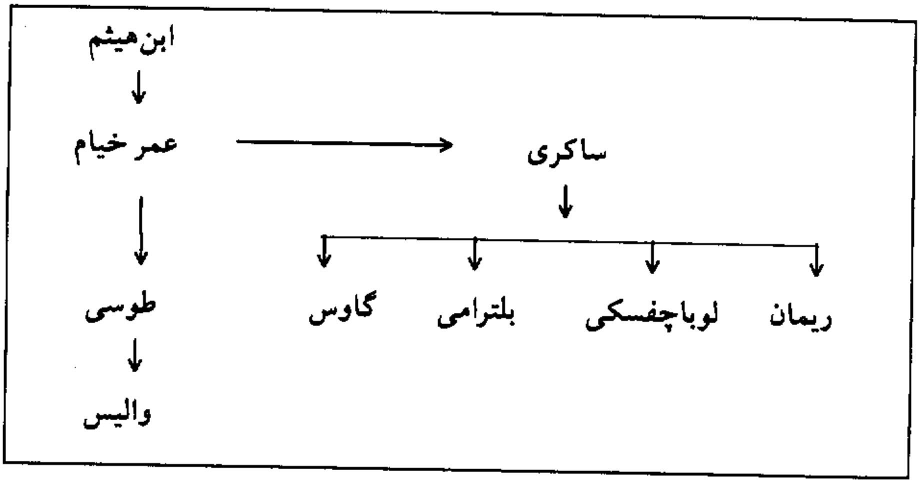
که در همین دانشگاه به تدریس ریاضی اشتغال داشت. او همانطوریکه هارولد ولف نیز تصریح کرده است، با اثر ساکری آشنا بود[۲۴] و در همان اوان آشنائی تصمیم می‌گیرد که همانند ساکری با برهان خلف اصل توازی را ثابت کند، ولی زود به اثبات‌ناپذیری آن پی می‌برد و هندسه‌های نااقلیدسی را پیش از لوباچفسکی و ریمان کشف می‌نماید. امّا از بیم هواداران سرسخت هندسه اقلیدسی کشفیات خود را انتشار نمی‌دهد. با اینحال به‌عنوان مرجع مهم علمی، در محاورات و مکاتبات علمی خود با دانشمندان دیگر، نکات مهمّی از این کشفیات را ابراز می‌نماید. بی‌جهت نیست که تمام مکتشفین هندسه‌های نااقلیدسی بنحوی با او در ارتباط بوده‌اند. ریمان که هندسه نااقلیدسی بیضوی را کشف کرد، شاگرد گاوس بود و بطور طبیعی از نظریات استاد خود درباره خطوط توازی و کشف هندسه نااقلیدسی او آگاهی داشت. لوباچفسکس ریاضیدان روس که هندسه هذلولوی راکشف نمود در دوره دانشجوئی با یوهان بارتلس (Johann M. Bartels) کار کرده بود و شخص اخیر نیز از کسانی بود که با گاوس و نظریات او درباره خطوط توازی آشنائی داشت و هنگام مراجعت به قازان محل اقامت لوباچفسکی، قطعاً این نظریات را در اختیار دوست و همکار خود لوباچفسکی قرار داده بود[۲۵]. همانطوریکه می‌دانیم در کارهای علمی، گاهی نکته‌ای کافی است دانشمندی را به کشفی راهگشا شود. و این تأثیرپذیری به‌هیچوجه از ارزش کارهای ریمان و لوباچفسکی نمی‌کاهد. از اینرو تأثیر ساکری را روی مکتشفین هندسه‌های نااقلیدسی بخوبی می‌توان مشاهده کرد[۲۶]. امّا نظریات اساسی ساکری یعنی استفاده از برهان خلف برای اثبات اصل توازی ـ و قضایای حاصل در چهارضلعی دو قائمه متساوی‌الساقین که هندسه‌دان را به کشف هندسه‌های نااقلیدسی هدایت می‌نماید، همان چیزهائی است که در رساله خیام آمده است. پس ساکری بدون استفاده از کارهای خیام نمی‌توانست برای اخلاف خود راهگشا باشد. همانطوریکه نمودار زیر مشخص می‌کند خیام را باید الهام‌دهنده هندسه‌های نااقلیدسی دانست.

---

۲۴. هارولد ا. ولف، *هندسهٔ نااقلیدسی*، ترجمه احمد بیرشک، تهران ۱۳۷۰، ص ۶۰

۲۵. همان مأخذ، ص

۲۶. برای آگاهی بیشتر از تأثیر ساکری در کشف هندسه‌های نااقلیدسی رجوع شود به:
C. Segre, *Congetture intorno all'inglueza di G. Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea*, Atti Accad. Scienze Torino 1903.



چگونگی تأثیر خیام در تکوین هندسه‌های نااقلیدسی

بررسی گزاره‌های خیام در هندسه‌های لوباچفسکی و ریمان

بار دیگر به گزاره‌های خیام برای اثبات اصل موضوع توازی اقلیدسی برمی‌گردیم امّا اینبار، آنها را در هندسه‌های نااقلیدسی لوباچفسکی و ریمان مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هندسه لوباچفسکی را اصولاً هندسه هذلولوی می‌نامند، زیرا که روی سطح هذلولوی قرار گرفته است. بنابراین برای شناخت این سطح باید از هذلولی و فرق آن با دایره آشنائی داشته باشیم.

منحنی به معادله: (۱) $x^2 + \alpha y^2 = c$

را درنظر می‌گیریم، در این معادله هرگاه $\alpha = 1$ و $c > 0$ باشد منحنی ما یک دایره و هرگاه $\alpha = -1$ و $c > 0$ و یا $c < 0$ باشد منحنی یک هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود.

در فضای اقلیدسی فاصله دو نقطه $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d^2 = M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad (۲)$$

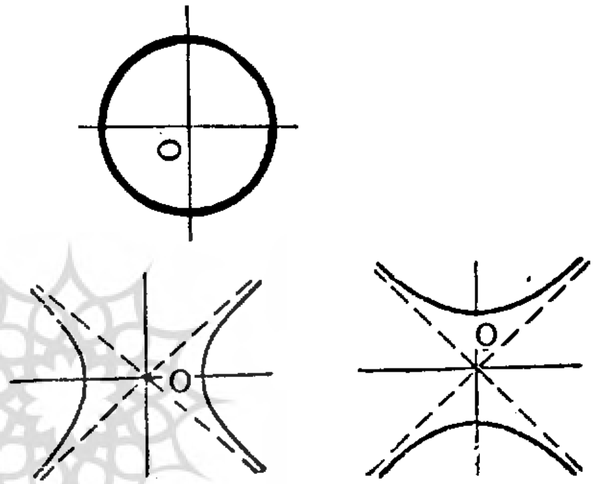
حال اگر در فضای شبه‌اقلیدسی این فاصله را بشکل زیر تعریف کنیم:

$$d^2 = M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 \qquad (۳)$$

در این صورت هرگاه طرف چپ معادله (۱) را مربع فاصله نقطه $O(0, 0)$ مرکز

مختصات از نقطه $M(x , y)$ بگیریم، در فضای اقلیدسی به ازاء $\alpha = ۱$ و $c > ۰$ یک دایره خواهیم داشت و در فضای شبه‌اقلیدسی به ازاء $\alpha = -۱$ و $c > ۰$ و یا $c < ۰$ یک شبه‌دایره خواهیم داشت. البته هنگامیکه $c > ۰$ شعاع این شبه‌دایره حقیقی و برابر با $\sqrt{c}$ می‌باشد و در حالیکه $c < ۰$ باشد، این شعاع موهومی و برابر با $\sqrt{c} = i\sqrt{|c|}$ خواهد شد.

$$x^۲ + \alpha y^۲ = c \begin{cases} \alpha = ۱ \\ c > ۰ \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = -۱ \\ c > ۰ , c < ۰ \end{cases} \Rightarrow$$



دایره در فضای اقلیدسی و نااقلیدسی

همچنین زاویه دو خط $OM_۱$ و $OM_۲$ را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\cos\varphi = \frac{x_۱x_۲ + \alpha y_۱y_۲}{\sqrt{(x_۱^۲ + \alpha y_۱^۲)}\ \sqrt{(x_۲^۲ + \alpha y_۲^۲)}} \qquad (۴)$$

که به‌ازاء $\alpha = ۱$ فضای ما اقلیدسی و به‌ازاء $\alpha = -۱$ این فضا نااقلیدسی خواهد بود، به‌ازای $\varphi = ۰$ دو خط $OM_۱$ و $OM_۲$ بر هم عمود می‌باشند. همین مطالب را می‌توان در فضای سه‌بعدی نیز تعمیم داد. بنابراین سطح:

$$x^۲ + y^۲ + \alpha z^۲ = c \qquad (۵)$$

به‌ازای $\alpha = ۱$ و $c > ۰$ یک کره و به ازاء $\alpha = -۱$ یک هذلولوی دوار با یک دامنه و به ازاء $\alpha = -۱$ و $c < ۰$ یک هذلولوی دوار با دو دامنه خواهد بود.

حال تعریف معمولی را برای فاصله دو نقطه $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ کنار می‌گذاریم و از تعریفی که پیش از این کردیم و فاصله دو نقطه را هم در فضای اقلیدسی و هم در فضای نااقلیدسی معین نمودیم، استفاده می‌نمائیم، خواهیم داشت:

$$M_1M_2^{\,2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \alpha(z_1 - z_2)^2 \qquad (۶)$$

و زاویه بین خطوط OM_1 و OM_2 نیز با فرمولی مشابه فرمول (۳) یعنی:

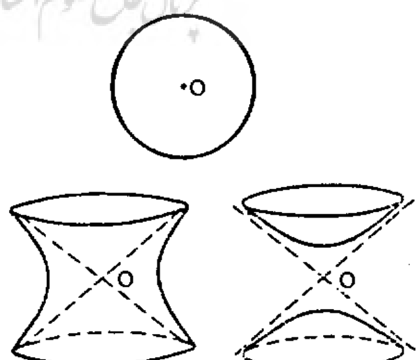
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + \alpha z_1z_2}{\sqrt{(x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + \alpha z_1^{\,2})}\ \sqrt{(x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + \alpha z_2^{\,2})}} \qquad (۷)$$

بدست می‌آید.

البته تعریف یک زاویه در فضای نااقلیدسی هنگامیکه $\cos\varphi = 0$ باشد کمی دشوار است. در این حالت $\cos\varphi$ عددی است حقیقی بزرگتر از ۱ و یا کوچکتر از ۱− و یا حتی عددی است موهومی و زاویه φ در این حالت‌ها نیز بترتیب مساوی خواهد بود با $i\theta$ و $\pi - i\theta$ و $\frac{\pi}{2} \pm i\theta$ که در آن $\theta > 0$ می‌باشد.

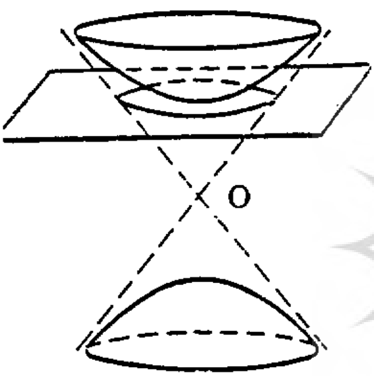
با این تعریف از فاصله هرگاه طرف چپ (۴) مساوی با مربع فاصله نقطه $M(x,y,z)$ M تا نقطه $O(0,0,0)$ مرکز مختصات باشد. هنگامیکه $\alpha = -1$ باشد سطح (۴) یک کره کاذب می‌باشد که به‌ازاء $c > 0$ دارای شعاع حقیقی $\sqrt{c}$ و برای $c < 0$ دارای شعاع موهومی $\sqrt{c} = i\sqrt{|c|}$ خواهد بود.

$$x^2+y^2+\alpha z^2=c\begin{cases}\alpha = 1,\ c > 0 & \Rightarrow \\ \alpha = -1,\ c > 0, c < 0 & \Rightarrow\end{cases}$$

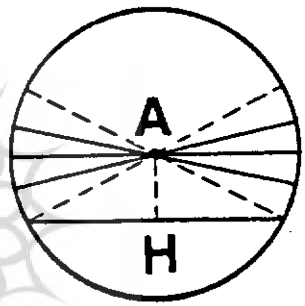


کره در فضای اقلیدسی و نااقلیدسی

بنابراین یک سطح لوباچفسکی را می‌توان همچون کره‌ای در فضای نااقلیدسی و با شعاع کاملاً موهومی درنظر گرفت.
حال برای آنکه ببینیم آیا پوستولای اقلیدس در سطح لوباچفسکی صادق می‌باشد یا نه، تنها قسمت فوق کره کاذب $x^2+y^2-z^2 = c$ را در حالتی که $c = -1$ باشد مورد مطالعه قرار می‌دهیم. و این قسمت را روی صفحه‌ای به معادله $z = 1$ تصویر می‌کنیم. در این صورت تمام سطح لوباچفسکی در داخل دایره‌ای به معادله: $x^2+y^2 = 1$ تصویر می‌شود.



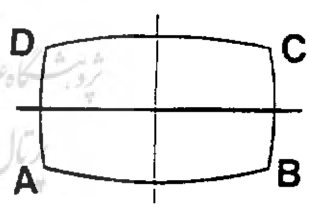
مدل بلترامی



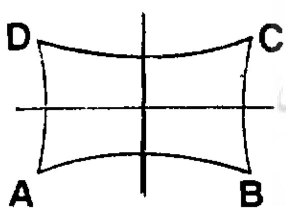
در هندسه لوباچفسکی از هر نقطه خارج یک خط،
خطوط بیشماری می‌توان موازی آن خط رسم کرد.

در این تصویر خطوط مستقیم واقع بر سطح لوباچفسکی، وترهای این دایره را تشکیل می‌دهند. این تصویر از سطح لوباچفسکی را کارت یا نقشه و یا مدل بلترامی می‌گویند.
فرض کنیم که نقطه A از سطح لوباچفسکی در روی نقشه بلترامی بر مرکز دایره قرار گیرد و نیز خطی مثل a از این سطح در روی نقشه بلترامی همچون وتر افقی این دایره باشد. نیز فرض می‌کنیم عمود خارج شده از A روی خط a در نقشه بلترامی نیز همین وضعیت را حفظ کرده و بصورت AB درآید هرچند که در حالت کلی زوایا در تصویر حالت خود را حفظ نمی‌کنند. هرگاه عمودی از نقطه A بر خط AB در روی سطح لوباچفسکی اخراج کنیم این عمود موازی با وتر a خواهد بود. البته موازی در اینجا به‌این معنی است که یکدیگر را قطع نمی‌کنند. از اینرو می‌توان بجای موازی آنها را «وتر باز»

نیز نامید. البته اگر وتر a و خط موازی با آن را امتداد دهیم ممکن است در بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند. امّا باید توجه داشت که نقاط بیرونی دایره دیگر متعلق به صفحه هذلولوی نیستند. اگر این تعریف را برای خطوط توازی در هندسه لوباچفسکی بگیریم باید بگوئیم که خطوط بیشمار دیگری نیز از A میگذرند، و با خط AB زاویه‌های حاده می‌سازند، با اینحال خط a را قطع نمی‌کنند. پس نتیجه می‌شود که از نقطه A و از خط a واقع در سطح لوباچفسکی خطوط بیشماری را می‌توان رسم کرد که موازی با a باشند. بنابر[27] این اصل موضوع پنجم اقلیدس در این سطح لوباچفسکی صادق نیست. با اینحال اصول دیگر اقلیدس اعتبار خود را در این هندسه نیز حفظ می‌کنند. در هندسه ریمان برعکس دو خط غیر مشخص یکدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین اصل پنجم اقلیدس در این سطح صادق است. در همین حال روی این سطح آکسیوم‌های دیگر اقلیدس اعتبار خود را حفظ نمی‌کنند. مثلاً در این سطح برخلاف هندسه اقلیدس دو خط فضائی را تشکیل می‌دهند (یعنی فضائی که از تقاطع دو نیمدایره عظیمه تشکیل می‌شود). به‌آسانی می‌توان ثابت کرد مجموع زوایای یک مثلث در هندسه لوباچفسکی کمتر از دو قائمه و در هندسه ریمان بزرگتر از دو قائمه می‌باشد. در صورتیکه این چهارضلعی‌ها متساوی‌الزوایا باشند، این زوایا بترتیب حاده و منفرجه خواهند بود.



چهارضلعی متساوی‌الزوایا
در هندسه ریمان



چهارضلعی متساوی‌الزوایا
در هندسه لوباچفسکی

محور تقارن، این چهارضلعی‌ها را به دو چهارضلعی خیام ـ ساکری تقسیم می‌کند. بطوریکه در هندسه نااقلیدسی لوباچفسکی بترتیب زوایای مجاور به قاعده فوقانی حاده و در هندسه ریمان این زوایا منفرجه می‌باشند. ساقهای این چهارضلعی یکدیگر را در

27. B. A. ROSENFELD, *A History of non-euclidean Geometry*, Springer - verlang, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1988 pp. 232-233

دو قطب محورهای تقارنی قطع می‌کنند که بر دو قاعده دیگر آن عمود است. از اینرو هرگاه قاعده‌های فوقانی و تحتانی بدون تغییر باقی بمانند و دو ساق مجاور آنها را از یک طرف امتداد دهیم آنها بهم نزدیک شده و سرانجام یکدیگر را قطع می‌کنند. به این جهت است که قاعده فوقانی در چهارضلعی خیام ـ ساکری از قاعده تحتانی کوچکتر می‌باشد. برعکس در هندسه لوباچفسکی ساقهای مقابل از یکدیگر دور می‌شوند و هرگاه دو قاعده این چهارضلعی را ثابت نگاه داریم و دو ساق مقابل را امتداد دهیم روی سطح لوباچفسکی از هم دور می‌شوند به همین جهت است که قاعده تحتانی همیشه کوچکتر از قاعده فوقانی می‌باشد. خیام در گزاره سوّم خود این دو حالت را پیش‌بینی کرده بود.

نتیجه

چنانکه دیدیم خیام برای اثبات اصل پنجم اقلیدس که آنرا قضیه‌ای اثبات‌پذیر می‌دانست تلاش کرد و در این تلاش، به هندسه‌های نااقلیدسی بسیار نزدیک شد. امّا استفاده از پوستولائی که خود وضع کرده بود ـ همان پوستولائی که هم‌ارز پوستولای اقلیدس بود کار او را در رسیدن به نتیجه نهائی نافرجام گذاشت. خیام که معتقد بود که

«اسرار ازل را نه تو دانی و نه من
وین حرف معما نه تو خوانی و نه من»

ممکن بود، لااقل به کشف رازی در هندسه نایل آید و معمائی را که قرنها پس از او گشوده شد، در همان زمان بگشاید. گرچه به این کار موفق نشد امّا کار او در این باره بوسیله اسلاف اروپائی‌اش دنبال شد و ساکری که مسلماً از کارش آگاهی یافته بود، در اثرش موسوم به *اقلیدس عاری از نقص* مورد استفاده قرار داد و به علمای پس از خود نیز انتقال داد و بدینگونه بود که هندسه‌های نااقلیدسی کشف گردید.

کتابشناسی

همانطوریکه در مقاله اشاره شد، بحث خیام درباره اصل خطوط توازی اقلیدس در قسمت اول رساله:

شرح ما اشکل من مصادرات کتاب الاقلیدس

آمده است.

متن عربی این رساله را دکتر تقی ارانی برای اولین بار همراه با مقدمه‌ای در سال ۱۳۱۴ هـ ش در تهران به‌چاپ رسانید. این متن بعلت عدم آشنائی ارانی به زبان عربی و نیز ریاضیات قدیم شامل اغلاط زیادی می‌باشد.

متن منقح عربی همراه با ترجمه فارسی و شرحی عالمانه توسط استاد جلال‌الدین همایی در سال ۱۳۴۱ هـ ش در تهران زیر عنوان خیامی نامه به‌چاپ رسید.

متن انتقادی این رساله همراه با ترجمه فرانسوی آن توسط بیژن وهاب‌زاده در سال ۱۹۹۹ در پاریس به‌چاپ رسید (رجوع شود به‌قسمت ترجمه‌های رساله خیام شماره ۳).

متن عربی رساله خیام همچنین در سال ۱۹۶۱ توسط دکتر عبدالحمید صبره* در قاهره به‌چاپ رسیده است.

ترجمه‌های رسالهٔ شرح ما اشکل ....

۱ـ ترجمه انگلیسی این رساله از روی متن چاپ شده تقی ارانی توسط دکتر علیرضا امیرمُعز صورت گرفته است:

A. Amir Moéz "Discussion of difficulties in Euclid by Omar Khayyam" *Scripta Mathematica* vol. XXIV No. 4(1959) pp. 272-303

۲ـ مقدمه کتاب در مقاله زیر به آلمانی ترجمه شده است:

G. Jacob & E. Wiedeman, "Zu Omar-i- Chajjam" *Islam* 3(1012) pp. 42-62

۳ـ از این رساله دو ترجمه فرانسوی موجود است: نخست ترجمه آقای احمد جبار استاد دانشگاه پاریس جنوبی می‌باشد که در همین شماره فرهنگ به‌چاپ رسیده است:

ترجمه فرانسوی دیگر توسط بیژن وهاب‌زاده صورت گرفته و در کتاب زیر به‌چاپ رسیده است:

R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyam Mathématicien* Paris 1999

۴ـ ترجمه روسی این رساله توسط بوریس روزنفلد و ادولف یوشکویچ صورت گرفته و در سال ۱۹۶۲ در مسکو به‌چاپ رسیده است.

---

* Sabra, A. I. *Omar Khayyam, Explanation of the Difficulties in Euclid's Postulates*, Alexandre 1961

تحقیقات درباره قسمت مربوط به خطوط متوازی این رساله:

این قسمت از رساله خیام موضوع تحقیقات متعددی قرار گرفته که بعضی ار آنها عبارتند از:

1- Bakar, O. "Omar Khayyam's Criticism of Euclid's Theory of Parallels" *MAAS Journal of Islamic Science* 1, 2(1985) pp. 9-18

2- Giacardi, L. "Protostoria della Geométrie non-euclidee. Omar Al-Khayyam e il quadrilatero birectangolo isoscele" *Quaderni* n. 1(1986) pp. 11-21

3- Giacardi, L. & Roero, C. S. "Omar Al-Khayyam prédécesseur de J. H. Lambert" *Quaderno* n° 9 dell' Univ. di Torino (1984) pp.

4- Houzel, Ch. "Omar Khayyam et la theorié des parallèles" *Texte du conference au colloque international sur Omar Khayyam* 20-22 septembre 1999 Paris (UNESCO)

5- Jaouiche, K. De la fecondité mathematique: d'Omar Khayyam a G. Saccheri" *Diogène*, 57(1967) pp. 97-113

6- Jaouiche, K. *La theorie des paralleles en pays d'Islam* Paris 1986 pp.

7- Kanani, N. "Omar Khayyam and the Parallel Postulate" *Farhang*, vol. 12, no. 29-32(2000) pp. 107-124

8- Rosenfeld, B. A., *A History of Non-Euclidiean Geometry* Translated by Abe Shenitzer, New - York 1988 pp. 64-71

9- Smith, D. E. "Omar Khayyam, and Saccheri" *Scripta Mathematica* 3(1935) pp. 5-10

10- Youschkevitch, A. *Les Mathematiques arabes (VIII - XV sièches)* Traduction française par K. Jaouiche et Cazevane Paris 1976