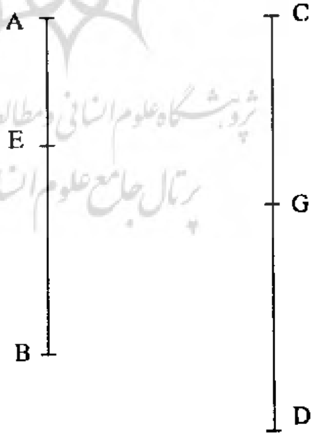
LEXIQUE

plus lourd	أثقل
plus léger	أخفّ
de forme cylindrique	اسطواني الشكل
prouver, preuve	برهن، برهان
rester, le reste	بقي، الباقي
montrer, démontrer, aété démontré	بيّن، تبيّن
restauration et opposition	جبر و مقابلة
sous - multiple, partie	جزء
corps	جرم
genre	جنس
corps cmposé	جسم مركب
resulter, résultat	خرج، الخارج
le cinquième livre des Éléments d'Euclide	خامسة الأستقصات
l'or pur	الذهب الخالص
les contrepoids	الصنجات
multiplier	ضرب
égaler, équilibrer	عدل، يعدل
fléau de la balance	عمود الميزان
argent pur	فضّة خالصة
diviser	قَسَم
plateau de la balance	كفّة الميزان
rapport	نسبة
la mesure de poids: la masse	وزن
le poids mesuré dans l'air	الوزن الهوائي
le poids mesuré dans l'eau	الوزن المائى
quantité, grandeur	المقدار
connu	معلوم
parallèle à l'horizon	موازيا للأفق
corriger, compenser	قاصّ، يُقاصّ
similitude, ressemblance	المجانسة

et demi par dix moins l'inconnue. Il en résulte cent cinq moins dix fois et un demi de l'inconnue, que nous divisons par dix pour obtenir dix et demi moins une fois et la moitié d'un dixième de l'inconnue; c'est GD. GD est aussi égal à dix et trois quarts moins une fois et un dixième de l'inconnue. Ainsi, dix et trois quarts moins une fois et un dixième de l'inconnue est égal à dix et demi noins une fois et la moitié du dixième de l'inconnue. Nous (équilibrons) alors deux côtés et nous avons dix et trois quarts et une fois et la moitié du dixième de l'inconnue qui égalise dix et demi et une fois et un dixième de l'inconnue. Nous compensons, c'est-à- dir nous éliminons les équivalents des deux côtés, et il reste alors qu'un quart égale la moitié du dixième de l'inconnue. L'inconnue égale alors le nombre cinq qui est la quantité d'or. La quantité de tout le composé étant égale à dix, il restera cinq pour la quantité d'argent. Le poids de l'or mesuré dans l'eau CG sera alors égal à cinq et demi car le rapport de dix à onze est comme le rapport de cinq à cinq et demi. Le poids de l'argent mesuré dans l'eau GD sera alors égal à cinq et un quart car le rapport de cinq à cinq et un quart est comme le rapport de dix à dix et demi. Le total de CD est alors égal à dix et trois quarts, et ainsi l'examen montre la conformité entre la réalité et le calcul. C'est ce que nous voulions montrer.



parties de vingt deux. Le rapport de EB à GD est comme le rapport de dix à dix et demi, car c'est le rapport du poids de l'argent mesuré dans l'air à son poids dans l'eau, comme nous l'avons supposé au début, et le rapport de EH à GD est comme le rapport de dix à onze. Ainsi, si GD est égal à dix et demi alors EB sera égal à dix. Si nous posons GD égal à onze, quelle seral la valeur de EB pour que son rapport à dix soit égal au rapport de onze à dix et demi?

Nous multiplions onze par dix et nous divisons le résultat par dix et demi. Nous obtenons dix et dix parties de vingt et un. Si GD est égal à onze, EB sera alors dix et dix parties de vingt et un, EH sera égal à dix, et le restant HB sera égal à dix parties de vingt et un. D'autre part, à la valeur de CD que nous avons posée égale à dix et trois quarts correspond une valeur de HB égale à cinq parties de vingt deux. Quel est alors le nombre dont le rapport à dix et dix parties de vingt et un est égal au rapport de cinq parties de vingt deux à dix parties de vingt et un?

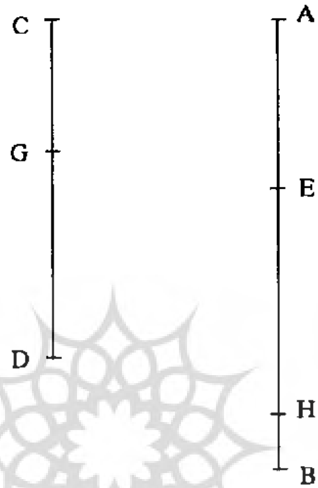
Nous multiplions dix et dix parties de vingt et un par cinq paties de vingt deux et nous divisons le résultat par dix parties de vingt et un. Il en sort cinq qui est la quantité d'argent, car c'est EB et nous avons supposé EB la quantité d'argent. Une fois nous avons connu EB, les autres quantités deviennent connues et c'est ce que nous avons voulu démontré.

Il convient que les plateaux dans lesquels nous pesons ces corps dans l'air et dans l'eau soient d'un même genre, que ce soit en fer ou autre, afin qui'l n'y ait pas de disproportion due à leur différence. De même, il peut y avoir une disproportion due à la différence des formes des corps mais elle est infime et non sensible. Si une personne désire en tenir compte, celà lui sera difficile notamment pour les petits poids.

Nous pouvons les déterminer par une autre voie qui permet probalement un calcul plus facile. Soit AE l'inconnue. C'est le poids de l'or mesuré dans l'air. EB est alors égal à dix moins l'inconnue, et CG est égal à une fois et un dixiéme de l'inconnue car le rapport de AE à CG est comme le rapport de dix à onze, comme nous l'avons dit à plusieurs reprises.

GD est alors égal à dix et trois quarts moins une fois et un dixième de l'inconnue et EB égal à dix moins l'inconnue. Son rapport à GD est comme le rapport de dix à dix et demi, comme nous l'avons indiqué pour le rapport des denx poids de l'argent. Nous mnltiplions alors dix rapport de AE à CG étant connu, le rapport de AH á CD sera connu. CD étant connu, AH sera connu ainsi que le reste HB. Le rapport de EH à GD étant connu ainsi que le rapport de EB à GD.

alors le rapport, de EB à EH sera connu, ainsi que son rapport à HB. HB étant connu, EB sera connu et c'est la quantité d'Argent. Ces choses ont été démontrées dans *Les donnés* <d'Euclide>.



Nous donnons un exemple, pour simplifier. Que le rapport du poids de l'argent mesuré dans l'air à son poids dans l'eau soit égal au rapport de dix à dix et demi, et que le rapport du poids de l'or mesuré dans l'air à son poids dans l'eau soit égal au rapport de dix à onze. Nous prenons une quantité qui en est composée. Nous la pesons dans l'air et nous trouvons son poids égal à dix et trois quarts. Nous la pesons dans l'eau nous trouvons dix. Le rapport de dix à dix et trois quarts est supérieur au rapport de dix à onze, et inférieur au rapport de dix à dix et demi. Nous savons alors qu'elle est réellement composée des deux. Comme nous désirons déterminer leur proportions, nous supposons la valeur AB de l'exemple précédant égale à dix, et la valeur CD égale à dix et trois quarts. AE est supposé être la quantité d'or dont nous ignorons la valeur, et CG son poids dans l'eau. Nous avons dit que le rapport de AH à CD était égal au rapport de AE à CG, et que le rapport de AE à CG était égal au rapport de dix à onze. Le rapport de AH à CD est alors égal au rapport de dix à onze. Nous avons posé CD égal à dix et trois quarts. Nous multiplions alors dix par dix et trois quarts et nous divisons le produit par onze et nous obtenons neuf et dix seps parties de vingt deux, qui est AH. Le restant HB est alors égal à cinq

<Texte> du philosophe vertueux Abû-l' Fath Omar ibn Ibrâhîm al-Khayyāmi sur les astuces à utiliser, pour connaitre les quantités d'or et d'argent dans un corps qui en est composé.

Si nous désirons connaitre les quantités d'or et d'argent dans un corps qui en est composé, nous prenons une quantité d'or pur et nous mesurons son poids dans l'air. De même, nous prenons de l'argent pur et nous mesurons son poids dans l'air. Nous prenons ensuite deux plateaux égaux et semblables dans une balance dont le fléau est homogène et de forme cylindrique. Nous plaçons l'or dans l'un des plateaux qui sera lui-même placé dans l'eau, et dans l'autre plateau ce qui lui fait contrepoids. Nous faisons que le fléau soit paralléle à l'horizon, nous mesurons son poids et nous déterminons le rapport du poids de l'or mesuré dans l'air à son poids mesuré dans l'eau. De même, nous prenons de l'argent pur et nous déterminons le rapport de son poids mesuré dans l'air à son poids mesuré dans l'eau. Nous prenons ensuite le composé et nous déterminons le rapport de son poids mesuré dans l'air à son poids mesuré dans l'eau. Si le rapport est comme le rapport du poids de l'or dans l'air à son poids dans l'eau, alors le composé est en or pur, et ne contient aucunement de l'argent. Si le rapport est comme le rapport de l'argent, alors le composé est en argent et ne contient aucuement de l'or. Si le rapport est entre les deux alors le corps est composé des deux matières.

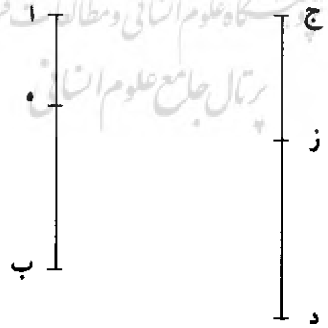
Pour déterminer la proportion de chacun, nous posons le rapport du poids du composé dans l'air à son poids dans l'eau égal au rapport de AB à CD, AB étant le poids mesuré dans l'air. Nous supposons la proportion de l'or <dans le composé> égale à AE, et par conséquent le poids de l'or mesuré dans l'air égal à AE. Son poids mesuré dans l'eau sera CG. Ainsi, le poids de l'argent mesuré dans l'air sera EB et son poids dans l'eau sera GD.

Il est connu que le rapport de AE à CG est inférieur au rapport de AB à CD, car l'or est plus pesant dans l'eau que le composé de celui-ci et d'argent, comme se charge de le démontrer le maitre de la science de la nature, et que le rapport de EB à GD est suérieur au rapport de AB à CD, car l'argent est plus léger dans l'eau que le composé de celui-ci et de l'or. Nous faisons que le rapport EH à GD soit comme le rapport de AE à CG. EH est obligatoirement inférieur à EB, et le rapport de AE à CG étant comme le rapport de EH à GD, le rapport de la totalité de AH à la totalité de CD sera comme le rapport de AE à CG, comme il a été démontré dans la cinquieme livre *des Éléments* <d'Euclide>. Le

من حديد و اما من غيره، حتى لا يقع بسبب اختلافها، تفاوت، معها أنه يمكن أن يقع بسبب اختلاف أشكال الأجرام تفاوت، إلا أنه قليل لايحس به، و إن أراد اءنسان أن يحتاط فيه يشق عليه الأمر في ذلك في الأوزان اليسيرة.

[ ] [٣٩] نستخرجه بطريق آخر فانّه ربّما يكون أسهل في الحساب. نفرض (ا ه) الذي هو وزن الذهب الهوائي شيئا. فيكون (ه ب) عشرة الاّشيئا و (ج ز) شي و عُشر شيء لأن نسبة (ا ه) الى (ج ز) كنسبة عشرةالى أحد عشر كما قلنا مرارا.

فيكون (ز د) عشرة و ثلاثة أرباع الاّ شيئا و عُشر شيء، و (ه ب) عشرة الاّ شيئا، و نسبته الى (ز د) كنسبة عشرة الى عشرة و نصف كما قلناه في نسبة وزني الفضة. فنضرب عشرة و نصفا فيعشرة الاّ شيئا، يبلغ مائة و خمسة الاّ عشرة أشياء [و نصف شيء] [٤٠] فنقسمه على عشرة يخرج عشرة و نصف الاّ شيئا و نصف عشر شيء و هو (ز د). و قد كان (ز د) عشرة و ثلاثة أرباع الاّ شيئا و عشر شيء، فيكون عشرة و ثلاثة أرباع [الاّ شيئا] [٤١] و عشر شيء يعدل عشرة و نصفا الاّ شيئا و نصف عشر شيء. فنجبر و نقابل من كلى الجانبين فتكون عشرة و ثلاثة أرباع و شيئا و نصف عشر شيء يعدل عشرة و نصفا و شيئا و عشر شيء. فنقاص أعني نسقط المجانسة من كلى الجانبين يبقى ربع عدد [٤٢] يعدل نصف عشر شيء، فالشيء الواحد يعدل خمسة أعداد و هو مقدار الذهب، و مقدار جميع المركّب عشرة. فيبقى مقدار الفضة خمسة. و (ج ز) وزن الذهب المائي فتكون خمسة و نصف لأن نسبة عشرة الى احد عشر كنسبة خمسة الى خمسه و نصف، و (ز د) الفضة المائى فيكون و ربعا لأنّ نسبة خمسة الى خمسة و ربع كنسبة عشرة الى عشرة و نصف، و جميع (ج د) عشرة و ثلاثة أرباع، فيتجاوب [٤٣] الحق و الحساب عند الاءمتحان و ذلك ما أردنا بيانه] [٤٤]



٣٩. في كتاب ميزان الحكمة: [الفصل الثالث في معرفة ما في الجرم الممتزج من الذهب و الفضة بالجبر و المقابلة].
٤٠. ناقصة في كتاب ميزان الحكمة. دلّ عليها الحساب و الجملة الموالية لها.
٤١. في كتاب ميزان الحكمة: ثلاثة أرباع أشياء.
٤٢. في كتاب ميزان الحكمة: نسبة.
٤٣. في كتاب ميزان الحكمة: يجاوب.
٤٤. من كتاب ميزان الحكمة.

لتكن [٣١] [نسبة الوزن الهوائي للفضة الى وزنها المائي] [٣٢] كنسبة عشرة الى عشرة و نصف، و نسبة وزن الذهب الهوائي الى وزنه المائيكنسبةعشرةالى أحد عشر، و أخذنا مقدارا مركبا منهما [٣٣] [و وزنّاه في الهواء فوجدناه عشرةو ثلاثة أرباع وزناه في الماء فوجدناه عشرة[٣٤]] . و نسبة عشرة الى عشرة و ثلاثة أرباع أعظم من نسبة عشرة الى أحد عشر و أصغر من نسبة عشرةالى عشرة و نصف، فعلمنا أنّه بالحقيقة مركب منهما [٣٥] ، [و نحن من وراء تعرف مقداريهما فيه] [٣٦] فنفرض مقدار (ا ب) من المثال المتقدم عشرةو مقدار (ج د) عشرة و ثلاثة أرباع، و (ا ه) مقدار الذهب بالفرض و لا نعلم عدده، و (ج ز) مقدار وزنه المائي، و قد قلنا أن نسبة (ا ح) الى (ج د) كنسبة (ا ه) الى (ج ز) [٣٧] ، و نسبة (ا ه) الى (ج ز) كنسبة عشرة الى أحد عشر فتكون نسبة (ا ح) الى (ج د) كنسبة عشرة الى أحد عشر، و قد كنّا وضعفنا (ج د) عشرة و ثلاثة أرباع، فنضرب عشرة في عشرة و ثلاثة أرباع و نقسم المبلغ على أحد عشر فتخرج تسعة و سبعة عشر جزءا من اثنين و عشرين جزءا و هو (ا ح)، فيكون (ح ب) الباقى خمسةأجزاء من اثنين و عشرين جزءا، و نسبة (ه ب) الى (ز د) كنسبة عشرة الى عشرة و نصف، لأنها نسبة وزن الفضة الهوائي الى وزنها المائيكما فرضناه أولا، و نسبة(ه ح) الى (ز د) كنسبة عشرة الى احد عشر. فاذا كان (ز د) عشرة و نصف يكون (ه ب) عشرة، و اءذا وضعنا (ز د) أحد عشركم يكون (ه ب) بنسبة أحد عشر الى عشرة و نصف كنسبة أي شيء الى عشرة. فنضرب أحد عشر في عشرة و نقسم المبلغ على عشرة و نصف، فيخرج عشرة و عشرة أجزاء من واحد و عشرين. فاءذا كان (ز د) أحد عشر يكون (ه ب) عشرة و عشرة أجزاء من واحد و عشرين، فيكون (ه ح) عشرة و (ح ب) الباقي عشرة أجزاء من واحد و عشرين و قد كان (ح ب) بالمقدار الذي و ضعنا به (ج د) عشرة و ثلاثة أرباع و هو خمسة أجزاء من اثنين و عشرين، فنسبة خمسة أجزاء من اثنين و عشرين الى عشرة أجزاء من واحد و عشرين كنسبة أي شيء الى عشرة و عشرة أجزاء من واحد و عشرين. فنضرب عشرة و عشرة أجزاء من واحد و عشرين في خمسة أجزاء من اثنين و عشرين و نقسم المبلغ على عشرة أجزاء من واحد و عشرين فيخرج خمسة و هو مقدار الفضة، اءذ هو (ه ب). و قد كنا فرضنا (ه ب) مقدار الفضة، و لما [٣٨] علمنا (ه ب) فالمقادير البقاقية معلومة، و ذلك ما أردنا أن نبين.

و ينبغي أن تكون الصنجات التي نزن بها هذه الأجرام في الهواء و الماء من جنس واحد اما

---

٣١. في نسخة Gotha : فليكن.

٣٢. في كتاب ميزان الحكمة: [نسبة الوزن الهوائي للفضة الى وزنه المائي] .

٣٣. في كتاب ميزان الحكمة: بينهما.

٣٤. في كتاب ميزان الحكمة: هذه الجملة ناقصة و فيمكانها [و زناه في الماء فكانت عشرة و ثلاثة أرباع] .

٣٥. في كتاب ميزان الحكمة: بينهما.

٣٦. جملة ناقصة من نسخة Gotha ، في مكانها فراغ أبيض .

٣٧. هذا يقف نص نسخة Gotha .

٣٨. في كتاب ميزان الحكمة: مهما.

المائي كنسبة (ا ب) الى (ج د)، و (ا ب) منهما الوزن الهوائي][۲۱]. و نفرض مقدار الذهب (ا ه) فيكون (ا ه) وزن الذهب الهوائي، و وزنه المائي(ج ز). فيكون (ه ب) وزن الفضةالهوائي، و (ز د) وزنها [۲۲] المائي. و معلوم ان نسبة (ا ه) الى (ج ز) أصغر من نسبة (ا ب) الى (ج د)، لأن الذهب في الماء أثقل من المركّب منه و من الفضة، على ما يتكفل برهانه صاحب العلم الطبيعي. و نسبة(ه ب) الى (ز د) أعظم من نسبة (ا ب) الى (ج د)، لأن الفضةفي الماء أخف من المركب منها [۲۳] و من الذهب. و نجعل نسبة (ه ح) الى (ز د) كنسبة (ا ه) الى (ج ز). فبا الاضطرار [۲۴] يكون (ه ح) أصغر من (ه ب)، و نسبة (ا ه) الى (ج ز) كنسبة (ه ح) الى (ز د)، فتكون [۲۵] نسبة جميع (ا ح) الى جميع (ج د) كنسبة (ا ه) الى (ج ز)، كما تبيّن [۲۶] في خامسةالأستقصات [۲۷] . و نسبة (ا ه) الى (ج ز) معلومة، فتكون نسبة(ا ح) الى (ج د) معلومة. و (ج د) معلوم، فيكون (ا ح) معلوما و (ح ب) الباقي معلوما. و نسبة (ه ح) الى (ز د) معلومة، وكذلك نسبة(ز د) معلومة فتكون نسبة (ه ب) الى (ه ح) معلومة، وكذلك الى (ح ب). و (ح ب) معلوم فيكون (ه ب) [۲۸] معلوما، و هو مقدار الفضة و هذه الأشياء برهنت [۲۹] في المعطيات. و نضع لهذا مثالاكي يكون [۳۰] أسهل.

۲۱. ناقص من نسخة Gotha.
۲۲. في نسخة Gotha : وزنه.
۲۳. في نخسة Gotha و في كتاب ميزان الحكمة: منه.
۲۴. في كتاب ميزان الحكمة: فباضطرار.
۲۵. في نسخة Gotha : يكون.
۲۶. في نسخة Gotha : بين.
۲۷. في نسخة Gotha : الاسطق ـ مشطوبة من طرف النّاسخ و معوّضة ب: الاصول.
۲۸. في نسخة Gotha : ح ب.
۲۹. في نسخة Gotha : تبرهنت.
۳۰. في نسخة Gotha : ليكون.

[للحكيم الفاضل أبي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي في الاحتيال لمعرفة مقداري الذهب و الفضة في جسم مركب منها] ١

[ ]٢ إذا أردنا أن نعرف ٣ مقدار كل واحد من الذهب و الفضة في جسم مركب منهما، أخذنا ٤ مقدارا من الذهب الخالص و نعرف وزنه في الهواء، [وكذالک ناخذ فضّة خالصة و نعرف وزنها الهوائي٥ ثم نأخذ ٦ كفّتين متساويتين متشابهتين في ميزان له ٧ عمود متشابه الأجزاء اسطواني الشكل، و نضع ٨ الذهب في احدى الكفتين في الماء و في [الكفة] ٩

الأخرى ما يثقلها، و نجعل العمود موازيا للأفق و نعرف مقداره، ثم نعرف نسبة١٠ الوزن الهوائي للذهب الى وزنه المائي١١ [١٢] [وكذلک نأخذ فضة خالصة و نعرف نسبة وزنها الهوائي الى وزنها المائي١٣] ، [ثم نأخذ المركّب و نعرف نسبة وزنه الهوائي الى وزنه المائي] ١٤ فان كانت النسبة مثل نسبة وزن الذهب الهوائي الى وزنه ١٥ المائي، فان المركّب هو ١٦ من الذهب الخالص، لا شيء فيه من الفضة، و إن كانت النسبة مثل نسبة الفضة، فان المركب هو من الفضة، لا شيء فيه من الذهب، و إن كانت النسبة فيما بينهما، فحينئذ يكون الجرم مركبا ١٧ منهما ١٨ .

[ ]١٩ [و وجه تعرّف مقدار كل واحد منهما] ٢٠ [أن نضع نسبة الوزن الهوائي للمركب الى وزنه

---

١. من نسخة Gotha .

٢. في كتاب ميزان الحكمة: [الفصل الأوّل في صنعة الميزان و الوزن به. قال الامام أبو حفص عمر بن ابراهيم الخيامي].

٣. في كتاب ميزان الحكمة: أردت أن تعرف.

٤. في نسخة Gotha : فخذ.

٥. من كتاب ميزان الحكمة.

٦. في نسخة Gotha : خذ.

٧. في نسخة Gotha : من ميزان و عمود.

٨. في نسخة Gotha : ضع

٩. من كتاب ميزان الحكمة.

١٠. في نسخة Gotha : اعرف مقداره ثم اعرف نسبة

١١. في كتاب ميزان الحكمة: ثم نعرف نسبة وزنها الهوائي الى وزنها المائي.

١٢. في كتاب ميزان الحكمة و في هذا المكان: [وكذلک نضع الفضة في أحدى الكفتين في الماء و في الكفة الأخرى مايثقلها، و نعرف مقداره و نسبة وزنه الهوائي الى وزنه المائي].

١٣. من نسخة Gotha: [وكذلک خذ فضة خالصة و اعرف نسبة وزنها الهوائي الى وزنها المائي] .

١٤. من كتاب ميزان الحكمة: [ثم نأخذ المركّب و نعرف وزنه الهوائي الى وزنه المائي].

١٥. في نسخة Gotha : وزنها.

١٦. ليس في Gotha .

١٧. في Gotha : مركب.

١٨. في كتاب ميزان الحكمة: بينهما.

١٩ . من كتاب ميزان الحكمة: [الفصل الثاني في معرفة]... .

٢٠. في نسخة Gotha: [و وجهه أن تعرف مقدار كل واحد منهما بالوزن الهوائي].

Conclution épistèmologique

Omar Khayyām, comme nous venons de le voir, nous donne non seulement une formule pour la détermination du titrage de l'or et de l'argent dans un alliage, composé de ces deux métaux, mais il rationalise aussi celle-ci, en lui donmant des démonstrations géométrique et algébrique.

Ainsi du point de vue épistémologique, il est le premier savant à avoir appliqué les mathématiques à l'Hydrostatique pour mathématiser cette science experimentale.

Etablissement du Texte

Note

Sur l'établissement du texte et la présentation de l'ouvrage.

Notre édition critique est basée sur le texte d'Omar Khayyām inséré dans *Mizân al-Hikma* d'al - Khazīnī. Le manuscrit de la Bibliothéque de Gotha a servi à compléter ou à corriger celle-ci: la traduction française du traité a été placée en face du texte arabe.

Et comme M_e c'est-à-dire le poids de l'alliage dans l'air est connu, on obtient le poids de l'argent.

Remarques

1. Le principe d'Archimède est valable pour tout fluide véritable. En revanche, la chaleur, le froid et la densité de l'air interviennent dans le calcul du poids. En effet, le poids véritable d'un corps est plus grand que son poids dans l'air. Pour une mesure précise il faut donc lui ajouter une quantité égale au poids de l'air occupant le même volume, c'est-à-dire, si le volume d'un corps est V, le poids spécifique de l'air est d, le poids véritable sera: $M = M_0 + Vd$, d lui-même est une fonction de la température et à zéro degréet sous la pression normale, il est égal à d=1,293 g/1. A d'autres températures, il est de $d = \frac{d_0}{1 + at}$ où "a" est une constante et "t" la température ambiante.

Ce qui est intéressant, c'est de savoir que al-Khazini est le premier à avoir fait intervenir l'air dans ses calculs précis.[8]

2. On suppose normalement que les métaux combinés s'unissent sans éprouver de contraction, de telle sorte que le volume du composé soit précisément égale à la somme des volumes composants. Par exemple, si le volume de l'or est V, et celui de l'argent U, le volume de l'alliage et U+V.

Cette régle n'est cependant pas exacte, dans certains alliages, nous rencontrons des contre-exemples.

La cause en est l'espace vide existant entre les particules des corps. Dans les métaux cristalloïdes dont les particules sont rangées géométriquement, on peut très bien voir, grâce aux rayons X, les distances séparant chaque particule. Parfois, les mélanges entraînent une diminution de volume, comme dans le cas de l'eau et de l'alcool qui, mélangés, diminuent de volume. Car le volume d'un mélange d'eau et d'alcool est toujours plus petit que la somme des volumes de deux liquides et la contraction dépend des proportious de ces deux matières dans le mélange.

La diffusion aussi intervient parfois dans le mélange, car la plupart des corps s'interpéuètrent, mais la force de cohésion n'est pas la mâme entre eux.

---

8. M. Kettani à ce propos écrit: "A-Khazini measured the weight and density of air, observing that air like liquids has lifting force and that the weight of a body immerged in air is less than its real weight." (M. Ali Kettani, "Moslem contributions in the natural science", *Impact of science on society*, 26 (1976), p. 141.)

Avec une opération semblable on peut transformer l'inégalité (2) à l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{D_A}} > \frac{1}{1-\frac{1}{D_c}} \tag{5}$$

Aprè avoir obtenu (4) et (5) Khayyām a choisi un point quelconque H sur la droite AB de telle sorte que:

$$\frac{EH}{GD} = \frac{AE}{CG} \tag{6}$$

(EH < EB) afin qu'il puisse mesurer le poids de l'argent c'est - à - dire $\overline{\mathrm{EB}}$ dans le corps donné.

Dans la relation (6) le rapport $\frac{AE}{CG}$ est connu, on peut donc obtenir facilement le rapport $\frac{EH}{GD}$.

Autrement dit:

$$\begin{cases} \frac{AE}{CG} = \frac{EH}{GD} \\ \frac{AH}{CD} = \frac{AE}{CG} \end{cases} \Rightarrow \frac{EH}{GD} = \frac{AH}{CD} = \frac{AE}{CG} = k(connu)$$

et comme $\overline{\mathrm{CD}}$ est connu, par conséquent, $\overline{\mathrm{AH}}$ sera aussi connu.

D'autre part, d'après la figure nous avons:

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH}$$

AB étant connu d'après notre hypothèse, AH est aussi connu. HB sera donc connu.

Nous avons aussi d'après la figure:

$$\overline{EB} = \overline{EH} + \overline{HB}$$

EH est connu ($\overline{\mathrm{EH}} = \mathrm{k}\overline{\mathrm{GD}}$)

HB est aussi connu, on peut donc obtenir la mesure de $\overline{\mathrm{EB}}$, c'està-dire la quantité d'argent dans le corps donné.

La discussion de Khayyām et les mesures qu'il a obtenues nous permettent de les résumer dans la formule suivante:

$$P'_a = M_e \frac{\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_A}}{\frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_0}}$$

D'après Khayyām, on a toujours l'inégalité suivante:

$$\frac{AE}{CG} < \frac{AB}{CD} \tag{1}$$

car "l'or est plus pesant dans l'eau que le composé de celui-ci et d'argent".

Il a écrit également:

$$\frac{EB}{GD} > \frac{AB}{CD} \tag{2}$$

car "l'argent est plus léger dans l'eau que le composé de celui-ci et de l'or". L'inégalité (1) peut se transformer à l'inégalité suivante:

$$\frac{P_a}{P_e} < \frac{M_a}{M_e} \tag{3}$$

Si V_A est le volume de l'objet àdéterminer, on a d'après le principe d'Archimède:

$$P_e = P_a - (V_A.1)$$

Par ailleurs, si l'on représente par P le poids total d'un corps solide, par D le poids de l'unité de volume de corps ou le poids spécifique et par V son volume, on aura entre ces trois quantités le ralation suivante:

$$P = D.V$$

Soient maintenant D_0 et D_A et D_c respectivement le poids spécifique de l'or, de l'argent et de l'objet inconnu on peut écrire:

$$\frac{P_a}{P_e} = \frac{P_a}{P_a - V} = \frac{1}{1 - \dfrac{V}{P_a}} = \frac{1}{1 - D_0}$$

et

$$\frac{M_a}{M_e} = \frac{M_a}{M_a - V} = \frac{1}{1 - \dfrac{V}{M_a}} = \frac{1}{1 - D_A}$$

L'inégalité (3) peut se transformer à l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{D_0}} < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{D_A}} \tag{4}$$

rapport du poids de celui-ci à son volume, on peut écrire le rapport précédent de la manière suivante:

$$F_x = \frac{1}{1 - \frac{1}{s}}$$

... où s est le poids spécifique du corps examiné. Maintenant, si on appelle d_1 et d_2 ($d_1 > d_2$) les poids spécifiques de l'or et de l'argent, on aura les rapports suivants:

$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{1}{d_1}}, F_b = \frac{1}{1 - \frac{1}{d_2}}$$

Si F_x est égal à F_b ou F_a, le corps est déterminé, c'est-à-dire qu'il est soit de l'or pur soit de l'argent pur.

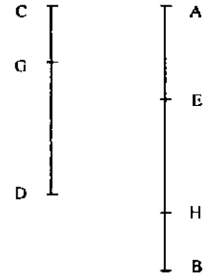
Si par contre F_x est plus grand que F_a nous aurons alors $s < d_1$. En effet, le poids spécifique de corps considéré sera plus petit que le poids spécifique de l'or. Dans ce cas, le corps sera un alliage d'or et d'argent.

Khayyām donne ensuite comme, nous l'avons déjà signalé, deux démonstrations afin d'établir une formule directe pour déterminer le titrage de l'argent dans un alliage de ces deux métaux; ces deux démonstrations sont respectivement géométrique et algébrique. Dans cet article nous analysons uniquement la premiére.

La démonstration géométrique de Khayyām

Après avoir mesuré les poids de l'or et de l'argent dans l'eau et dans l'air pur, il représente ces mesures par des grandeurs linéaires. Ainsi il suppose:

$\overline{AE} = P_a$: le poids de l'or dans l'air
$\overline{CG} = P_e$: le poids de l'or dans l'eau
$\overline{EB} = P'_a$: le poids de l'argent dans l'air
$\overline{GD} = P'_e$: le poids de l'argent dans l'eau
$\overline{AB} = M_a$: le poids de l'alliage dans l'air
$\overline{CD} = M_e$: le poids de l'alliage dans l'eau



Le manuscrit de Gotha nous servira bien entendu pour corriger celui-ci. Nous donnons également à cette édition une traduction française. Mais avant tout cela, nous nous intèrrogeons sur la portée scientifique de ce traité et particulièrement sur la question de savoir si le traité d'Omar Khayyām propose une nouvele idée scientifique. La réponse à cette question est oui et non. A vrai dire, la formule que Khayyām propose pour mesurer les poids absolus et spécifiques des corps coposés de deux substances n'est pas une idée nouvelle, on la trouve chez les savants antérieurs, notamment chez al-Naîrizî. En revanche, l'originalité de-Khayyām réside dans ses démonstrations mathématiques. Autrement dit, si les savants antérieurs à Khayyām donneut une formule basée sur des expériences physiques, celui-ci, qui est un grand géomètre et algébriste, par ses démonstrations géométrique et algébrique, tend à rationaliser cette formule. Cette tendance à la rationalité se trouve également chez al-Khazini qui fut par ailleurs influencé par Khayyām. Car celui-là a exposé cette même formule avec beaucoup de clarté et par des démonstrations mathématiques. La formule d'al-Khazini est la suivante:

Si A représente le poids absolu d'un alliage et «s» son poids spécifique, d_1 et d_2 les poids spécifiques de ces deux composants, et X le poids absolu de l'uu des composants, on a alors[7]:

$$X = A\frac{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}$$

Analyse du traité de Khayyām

Analysons maintenant la méthode d'Omar Khayyām.

On suppose le poids du corps X et son volum V, le poids du corps dans l'eau sera alors X-V car "d" la densité de l'eau est égale à "1". Nous avons alors:

$$F_x = \frac{X}{X - V} = \frac{1}{1 - \frac{V}{X}}$$

D'autre part, sachant que le poids spécifique de tout corps est le

7. S.H. Nasr, *Science et savoir en Islam*, Traduit de l'anglais par Jean-Pierre Guinhut, Paris 1979, p. 196.

inséré l'opuscule en question dans son livre intituleé: *Mizân al - hikma.* Ainsi, grâce à al - Khazinî, nous possédons donc ce petit traité d'Omar Khayyām dans son intégralité.

E. Wiedemann a traduit et étudié, en 1906, le traité de Khayyām à partir du manuscrit de Gotha.[2] Dans cette étude, Wiedemann a comparé la méthode de Khayyām avec celle de Naîrizi, matheématicien persan du Xème siècle, dans son traité intitulé:

رسالة فی استخراج كلية الاجرام المختلطة

(*Traité sur la détermination du titrage dans les alliages*)

ainsi que la méthode exposée dans un traité apocryphe, faussement attribué à Platon intitulé: *Sur la détermination du poids spécifique des objets.*

A la lumière de cette comparaison, Wiedemann a jugé la méthode de Khayyām comme étant la plus difficile.

La version arabe du traité de Khayyām a été publiée pour la première fois en 1933 à partir du manuscrit de Gotha et du texte inséré dans *Mizân al-Hikma* par Soleiman Nadavî.[3]

Ce traité a été également étudié par T. Binesh[4], J. Aghayani Chavoshi[5] et H. Faghih-é- Abdollahi.[6] Ce dernier a donné non seulement une édition critique du texte de Khayyâm, mais il a aussi accompagné celle-ci d'un long commentaire historique et technique. L'édition critique de Monsieur Faghih est basée sur le manuscrit de Gotha, celui-ci, comme nous l'avons déjà signalé, est incomplet. Il ne contient pas, par exemple, la démonstration algébrique que l'on trouve dans le texte de *Mizân al-Hikma.* C'est pour cette raison que nous avons décidé de donner une nouvelle édition critique basée sur le texte inséré dans *Mizân al-Hikma.*

2. E. Wiedemann, "Uber Bestimmung der spezifischen Gewichte" (*Beite. zur Gesch. der Naturwiss.* 8) *SPMSE* (1906), 38, pp. 163 - 80.

3. S. Nadavî, *Sur la vie et l'œuvre d'Omar al-Khayyâmî* (en ourdou) Heydar Abad 1933.

4. T. Binesh, "Pour connaître le titrage de l'or et de l'argent dans un alliage de ces deux métanx" (en persan) *Nashriyé-é Farhang-é Khorâsân,* 2ème année N°12 (1938) pp. 9 - 15

5. a) J. Aghayani-Chavoshi, *Etude sur l'œuvre scientifique et philosophique d'Omar Khayyâm* (en persan) Téhéran 1979 pp. 87 - 90

b) J. Aghayani-Chavoshi, "'Umar Khayyam on specific weights of silver and gold" *Hamdard Islamicus,* vol. II n°1 pp. 47-49.

6. H. Faghih-é-Abdollahi, "Un autre regard sur le traité hydrostatique d'Omar Khayyâm" (en persan), *Mirâth-é- Javidân,* vol. 4 n°3 (1996-97) pp. 17-24.

‘Omar Khayyām et l’Hydrostatique*

Jafar Aghayani Chavoshi
Epistémologue et Chercheur en Histoire des Sciences
&
Faïza Bancel
Chercheur en Histoire des Sciences

Introduction

‘Omar Khayyām grand mathématien et philosophe iranien du XIIème siècle, a écrit un petit traité sur l’hydrostatique intitulé:

فی الاحتیال لمعرفة مقداری الذهب و الفضة فی جسم مرکب منهما

“Les méthodes pour connaître les quantités d’or et d’argent dans un corps qui en est composé” afin de déterminer par une méthode scientifique le titrage de l’or et de l’argent dans un alliage composé de ces deux métaux.

La méthode de Khayyām est basée sur le fameux principe d’Archimède que voici:

“Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale *au poids du liquide déplacé et appliqué au centre de gravité du corps.*” [1]

De ce traité, il n’exite qu’un seul manuscrit se trouvant à la bibliothèque de Gotha en Allemagne. Celui - ci est malheureusement incomplet. Par bonheur, al - Khazinî, savant contemporain de Khayyām a

* L’édition critique du texte d’Omar Khayyām et sa traduction française ont ètè effectuèes par Madame Faïza Bancel; l’analyse du texte ainsi que sa présentation ont été faites par Monsieur Jafar Aghayani - Chavoshi.

1. Le Principe d’Archimède se trouve dans la cinquième proposition du *traitè sur l’Equilibre des corps flottants.*

attirer des ouvrages de haut niveau vers différentes régions de l'Empire musulman.

D'autres facteurs, de type idéologique ou politique, pourraient être évoqués pour tenter d'expliquer la non circulation de certains ouvrages scientifiques importants mais, à notre avis, les recherches ne sont pas assez avancées et assez diversifiées pour permettre une meilleure connaissance du contexte dans lequel a été produite la science en pays d'Islam et pour s'autoriser à élaborer des hypothèses qui pourraient être rationnellement acceptables mais qui ne correspondraient pas à la vérité historique.

Cette non circulation des travaux algèbriques de Khayyām en Egypte et au Maghreb semble même confortée par les deux témoignages dont nous disposons aujourd'hui. Le premier est celui d'Ibn al-Akfānī (m. 749/1348), un mathématicien encyclopédiste qui, pour l'étude des équations algèbriques, recommande le livre de Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et se contente d'évoquer celui de Khayyām en disant "*et al-Khayyām en a donné des démonstrations géométriques*".[55] Pour le Maghreb, nous avons l'impor- tant témoignage de l'historien Ibn Khaldūn qui, après avoir évoqué les six équations canoniques d'al-Khwārizmī, ajoute: "*Et il nous est parvenu qu'un grand mathématicien d'Orient a étendu le <nombre des> équations au delà de ces six espèces et qu'il est allé jusqu'à plus de vingt <équations> et il leur a déterminé des procédures <de résolution> solides qu'il a fait suivre de démonstrations géométriques*".[56]

Jusqu'à ce jour, nous n'avons pas d'explication convaincante au sujet de la non circulation de la plupart des écrits mathématiques de Khayyām d'Orient vers l'Occident musulman et vers l'Europe chrétienne. En tout cas, il ne semble pas que ce soit la distance géographique qui ait été un obstacle à cette circulation et à celle d'autres ouvrages aussi importants, comme les traités d'al-Bīrūnī (m. 442/1050) et d'Abū l-Wafā' (m. 387/997) pour ne citer que deux parmi les savants les plus éminents d'Orient. Il suffit en effet d'évoquer le cas du *Kitāb al-istikmāl* du mathématicien andalou al-Mu'taman, un contemporain de Khayyām, pour se convaincre que le facteur géographique n'est pas déterminant. En effet, ce livre qui a pourtant été publié dans le dernier tiers du XI^{e} siècle, à Saragosse, dans une version inachevée, est étudié et cité au XII^{e} siècle à Marrakech et au Caire puis on en retrouve des copies en Asie Centrale, probablement à Maragha. Là, le mathématicien Ibn Sartāq, un élève de l'un des fils de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, reprend l'étude de l'onvrage puis décide d'en faire une nouvelle rédaction. Ce sont finalement deux copies de cette rédaction du XIII^{e} siècle qui se retrouvent dans deux capitales du Centre de l'Empire: l'une au Caire et l'autre à Istanbul dans la bibliothèque du calife Bayazid lui-même.[57] Comme on le voit, l'existence de foyers scientifiques dynamiques suffisaient pour

55. Ibn al-Akfānī: *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid* [Guide du chercheur vers les buts les plus élevés], Beyrouth, Maktabat Lubnān Nāshirūn, 1998, p. 85.

56. Ibn Khaldūn: *La Muqaddima*, Beyrouth, Maktabat al-Madrasa – Dār al-kitāb al-lubnānī, 1967, p. 899.

57. A. Djebbar: La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI^{e} s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^{e}-XIV^{e} siècles, *Historia Mathematica*, n° 24 (1997), pp. 185-192.

ment, *de al-Yāsamīniyya*, un poème algèbrique d'Ibn al-Yāsamīn,[51] de *l'abrégé en algèbre* d'Ibn Badr (XIII[e] s.)[52] et du *Livre des fondements et des préliminaires en algèbre* d'Ibn al-Bannā (m. 721/1321).[53] Ces écrits contiennent des apports postérieurs au livre d'Abū Kāmil mais rien ne permet de dire qu'ils sont une contribution des mathématiciens d'al-Andalus et du Maghreb ou qu'ils proviennent directement d'Orient. Quoi qu'il en soit ces apports n'ont aucun lien avec les deux contributions de Khayyām, c'est à dire celle qui utilise les sections coniques pour établir l'existence des solutions positives des équations cubiques et celle qui la complète en faisant intervenir le développement binomial pour un calcul approché de ces solutions. Les recherches bibliographiques et les analyses des texted que nous avons effectuées depuis quelques années nous permettent même de douter que la tradition algèbrique de Khayyām, c'est à dire celle de l'étude des solutions des équations à l'aide des intersections de courbes, se soit diffusée en Andalus ou au Maghreb. Pourtant, il semble bien que la résolution des équations cubiques, par radicaux, ait suscité, après le XII[e] siècle, des recherches à la fois en Egypte et en Occident musulman. C'est ce que nous autorise à penser le témoignage du mathématicien égyptien des XIV[e]-XV[e] siècles Ibn al-Majdī (m. 851/1447). Dans son volumineux ouvrage (qui est un commentaire de l'ouvrage maghrébin *at-Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā), cet auteur évoque en effet les tentatives de résolution d'Ibn al-Faḥḥām et d'Ibn al-Hā'im sans toutefois les rattacher à la grande tradition des XI[e]-XII[e] siècle puisqu'il ne se réfère, à aucun moment, aux écrits de Khayyām et de Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Pourtant, dans le même chapitre, il discute longuement des équations de degré supérieur ou égal à trois, en traitant un de ses aspects originaux qui est le dénombrement des équations pour lequel il donne une méthode de récurrence pour déterminer le nombre d'équation de degré n à partir de celui des équations de degré (n+1).[54]

51. T. Zemouli: *Les écrits mathématiques d'Ibn al-Yasamin (m. 1204)*, op. cit.

52. J.A. Sanchez-Perez: *Compendio de Algebra de Abenbeder* (édition, traduction espagnole et analyse mathématique), Madrid, 1916.

53. a. Djebbar: *Le Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fi l-jabr wa l-muqābala d'Ibn al-Bannā (1256-1321)* [Le livre des fondements et des prémisses de l'algèbre et de la muqābala], édition critique, traduction française et analyse. In: *Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IX[e]-XVI[e] siècles): Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, Thèse de Doctorat, Nantes, 1990.

54. A. Djebbar: *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII-XIV siècles.* Paris, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1980, n° 81-02, pp. 36-37.

dans son *De postulato quinto.*[48] A lui seul, ce fait nous autorise à dire que les mathématiciens européens n'ont pas eu connaissance des textes arabes les plus importants sur ce sujet, et plus particulièrement celui de Khayyām car, sinon, ils les auraient préférés au texte apocryphe de moindre envergure.

En ce qui concerne la Théorie des rapports, l'influence des travaux de Khayyām sur ceux de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī est manifeste, en particulier dans son *Kitāb ash-Shakl al-qaṭṭā'* [Livre de la figure sécante].[49] Mais les recherches ne sont pas assez avancées pour se faire une idée claire de la place de la théorie des proportions dans les autres écrits mathématiques d'Orient postérieurs au XII^e siècle. Quant à l'Occident musulman, nous ne connaissons, à l'heure actuelle, qu'un seul document s'inscrivant dans la même préoccupation que celle de Khayyām, au moment où il a décidé de rédiger son épître du mathématicien du XI^e siècle Ibn Mu'ādh al-Jayyānī (XI^e s.), intitulée *Epître sur l'explication de <la notion de> rapport.* Comme Khayyām, et peut-être à la même époque que lui, Ibn Mu'ādh se propose de clarifier les définitions données par Euclide dans le cinquième Livre des *Éléments.* Mais son travail, qui est loin d'avoir la profondeur de celui de Khayyām, ne s'inscrit pas dans la même problématique puisqu'il vise, comme l'avait fait avant lui an-Nayrīzī, en Orient, à justifier les formulations euclidiennes du rapport et de l'identité de deux rapports.[50]

Cela dit, le fait qu'à la même épouqe, et à des milliers de kilomètres de distance, deux mathématiciens de l'empire musulman se préoccupent d'expliciter une même notion mathématique peut laisser penser qu'un minimum de circulation des idées et des écrits avaient lieu entre les foyers scientifiques de l'Empire musulman. Pourtant, à aucun moment, Ibn Mu'ādh n'évoque la contribution de Khayyām et ce dernier ne fait référence qu'à ses prédécesseurs de l'Orient musulman.

En Algèbre, les tois publications de l'Occident musulman qui nous sont parvenues sont toutes postérieures au XII^e siècle et elles se rattachent clairement à la première phase de développement de cette discipline, c'est à dire celle d'al-Khwārizmī et de ses commentateurs, ou à la seconde phase, c'est à dire celle d'Abu Kāmil. Il s'agit, chronologique-

48. Wallis: *Opera Mathematica*, Oxford, 1693, Vol. II, pp. 669-673.
49. A. Pacha Caratheodory: Traité du quadrilatère. Constantinople, 1891.
50. E.B. Plooij: *Euclid's Conception of Ratio and his definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*, Rotterdam, 1950.

626 / 1228)[44] contiennent des procédés d'extraction de racines d'ordre supérieur ou égal à deux. Mais aucun d'eux ne se réfère à un texte mathématique d'Orient et à fortiori au traité que Khayyām a consacré à ce sujet.

En Géométrie euclidienne, la contribution de Khayyām, qui concerne la critique du postulat des parallèles et sa tentative de démonstration a circulé en Orient, au moins jusqu'à la second moitié du XIII[e] siècle, puisque nous en trouvons des extraits, accompagnés de commentaires, dans l'épître de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 673/1274), intitulée *Opuscule qui délivre des doutes concernant les droites parallèles*.[45] Avant cette période, nous ne savons pas si l'épître de Khayyām a circulé d'Orient en Occident. Aucun texte maghrébin ou andalou connu n'y fait référence. Quant à la ciruclation totale ou partielle de son contenu vers l'Europe chrétienne, elle a fait l'objet de discussions et d'hypothèses parmi les spécialistes qui ont comparé son contenu avec des écrits de Wallis (m. 1703) et de Saccheri (m. 1733). Les similitudes entre des propositions de ce dernier mathématicien et celles de Khayyām permettent effectivement de s'interroger sur la diffusion, directe ou indirecte, d'une copie de son épître ou tout au moins des idées qu'elle renfermait. Mais, dans l'état actuel de nos connaissance de l'histoire de la transmission des textes mathématiques d'Orient vers l'Occident, ce n'est là qu'une simple hypothèses.[46]

D'une manière générale, il semble bien que les écrits des mathématiciens des pays d'Islam sur la Théorie des parallèles, n'ont pas circulé en Europe. Il y a toutefois une exception qui concerne un texte apocryphe, attribué à Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, et dont le contenu est moins élaboré que celui de Khayyām. Ce texte a été imprimé en Arabe, à Rome en 1594, par l'imprimerie Medicis, et il a été traduit en latin.[47] C'est cette traduction latine qui a été utilisée en particulier par Wallis,

44. A. Djebbar: *Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes*, op. cit., pp. 131-140.

45. K. Jaouiche: *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, (traduction française et analyse de textes), Paris, Vrin, 1986, pp. 207-210; K. Jaouiche: *Naẓariyyat al-mutawāziyyāt fi l-handasa al-islāmiyya* [La théorie des parallèles dans la géométrie islamique] (édition critique de textes), Tunis, Bayt al-ḥikma, 1988, pp. 166-170.

46. K. Jaouiche: De la fécondité mathématique: d'Omar Khayyam à G. Saccheri, *Diogène*, n° 57, janvier-mars 1967, pp. 97-113.

47. *Euclidis elementorum geometricorum libri tridecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum arabice impressi*, Romae in Typographia Medica MDXCIV, cum licentia superiorum.

La Circulation des Écrits Mathématiques de Khayyām

L'importance et l'originalité des travaux de Khayyām en Algèbre, en Calcul et en Géométrie pourrait laisser penser que leur diffusion a été rapide et que leur influence a été profonde. Ce n'est pourtant pas l'impression qui se dégage des sources qui nous sont parvenues. En effet les informations disponibles actuellement, sur un éventuel enseignement de Khayyām et sur la circulation directe ou indirecte de ses écrits mathématiques, sont rares et souvent vagues et imprécises. L'historien al-Bayhaqī, qui dit avoir rencontré Khayyām, évoque deux de ses Étudiants, ʿAli al-Qā'inī et Abū Ḥātim al-Isfizārī. Le premier n'a pas retenu l'atten- tion des biographes dont nous avons consulté les ouvrages. Le second est bien connu, à la fois pour ses écrits mathématiques et pour ses contributions originales en Statique qui ont été reprises, un peu plus tard, par al-Khāzinī dans son livre *Mizān al-ḥikma.*[40] Un autre contemporain de notre mathématicien, al-ʿArūḍī, a été également son disciple, comme l'a été Sharaf ad-Dīn al-Masʿūdī (m. 582/1186). Il semble que ces denx derniers aient bénéficié, auprès de Khayyām, d'un enseignement philosophique.[41]

A défaut de pouvoir repérer des auteurs ayant joué le rôle de vecteurs directs en commentant et en développant les travaux de Khayyām, nous allons nous conttenter de présenter quelques informations qui pourraient aider le lecteur, à travers le cas des écrits de Khayyām, à se faire une idée sur le phénomène de circulation des idées et des écrits scientifiques à l'intérieur de l'Empire musulman et à l'extérieur.

Dans le corpus médiéval du calcul produit en Orient, nous n'avons trouvé aucune référence au livre perdu de Khayyām qui traite des procédés d'approximation. Pour ce qui est de l'Occident musulman, les écrits andalous et maghrébins les plus anciens qui nous sont parvenus, comme le *Kitāb al-kāmil* d'al-Ḥassār (XII^e s.),[42] le *Talqīḥ al-afkār* d'Ibn al-Yāsamīn (m. 601 / 1204)[43] et le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munʿim (m.

---

40. B.A. Rosenfeld & G.P. Matviyevskaya: *Arabic, Persian and Turkish Mathematicians and Astronomers and theirs Works (7-18th. C.),* E. Ihsanoglu (édit.), Istanbul, IRCICA, sous presse, n° 417.

41. Aṣ-Ṣafadī: *al-Wāfī bi l-wafayāt,* Wiesbaden, 1974, t. 2, p. 142.

42. M. Aballagh & A. Djebbar: «Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.): le Livre I du Kāmil», *Historia Mathematica,* n° 14 (1987), pp. 147-158.

43. T. Zemouli: *Les écrits mathématiques d'Ibn al-Yasamin (m. 1204).* Magister d'Histoire des Mathématiques. Alger, E.N.S., Mars 1993.

mence par critiquer Euclide pour avoir posé comme définitions des affirmations qui ne sont pas du tout évidentes et qui ont besoin d'une démonstration rigoureuse. Puis, il se propose de donner ces démonstrations en introduisant la notion d'unité divisible pour mesurer un rapport. Cette unité lui permet d'associer, à chaque rapport, un nombre abstrait qui correspond à ce que nous appelons aujourd'hui un nombre réel positif. Quant à la manière dont chaque rapport est lié au nombre réel qui lui est associé, Khayyām dit ceci, qui révèle son souci de séparer la définition mathématique, d'un objet donné, de sa définition philosophique: "*Quant à savoir si le rapport de grandeur contient le nombre dans son essence ou accompagne le nombre, ou bien si le nombre lui est rattaché à l'extérieur de son essence, à cause d'autre chose, ou si le nombre lui est rattaché par une cause accompagnant son essence, sans la nécessité d'un jugement extérieur, cela est <du domaine> de l'étude philosophique et le géomètre n'a absolument pas à l'aborder*".[38]

Et comme il n'avait pas, à son époque, les outlis mathématiques qui pouvaient lui permettre de construire ces nouveaux nombres et de les décrire, il répond par avance aux critiques qu'on pouvait lui faire, en faisant remarquer ceci: "*Nous ne signifions pas que nous pouvons réaliser cette idéd dans toutes les grandeurs, c'est à dire que nous pouvons faire ce que nous disons à l'aide d'un procédé pratique. Nous voulons plutôt signifier par là que, pour l'esprit, cela n'est pas impossible; et notre incapacité à réaliser cela ne signifie pas que le problème est impossible dans son essence*".[39]

Au delà de leurs aspects purement scientifiques, ces phrases témoignent de la profondeur de pensée de Khayyām et de la fécondité de ses démarches où s'interpénètrent des méthodes mathématiques et des conceptions philosophiques, comme elles révèlent aussi les limites dans lesquelles se réalisait, au jour le jour, la pratique des mathématiciens des pays d'Islam. D'où l'intérêt de savoir si les travaux de ce savant, ses méthodes, ses réflexions et ses difficultés ont été repriss et analysés après lui et s'ils ont contribué à favoriser de nouvelles avancées et de nouveaux débats sur les objets et les outils des mathématiques.

38. *op. cit.*, p. 65.
39. *op. cit.*, p. 69.

idée et avait même proposé de remplacer cette définition par une autre qui était plus maniable et qui utilise l'algorithme d'Euclide (dit aussi procédé par anthyphérèse) tel qu'il est établi au tout début du Livre X des *Éléments*.[36] Khayyām va suivre la même voie mais en introduisant de nouveax outils et en clarifiant une fois pour toute les liens qui existent entre la notion de rapport de deux grandeurs et la notion abstraite de nombre. Il donne d'abord la définition de l'identité de deux rapports, à l'aide de l'anthyphérèse, et il lui ajoute la définition d'un rapport plus grand qu'un autre. Puis, il affirme un résultat important sur lequel repose toute sa démarche: il s'agit du théorème qui assure l'existence d'une quatrième grandeur d, proportionnelle à trois grandeurs données, a, b, c, c'est à dire: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Il en donne une démonstration basée sur un important principe philosophieque qui affirme la possibilité de diviser indéfiniment une grandeur donnée. Voici d'ailleurs ce qu'il dit à propos de ce résultat et qui montre comment l'intuition de Khayyām était limitée à la fois par la nature des outils mathématiques de son époque et, surtout, par le rôle que jouait encore la Philosophie dans le champ de la pratique mathématiaque: "*Cette prémisse est philosophique (· · ·). Je dis qu'il est nécessaire que le rapport de c à une autre grandeur existe dans l'esprit non dans la réalité et il importe peu qu'elle existe dans la réalité puisqu'on n'en a besoin que dans les démonstrations*".[37] Khayyām consacre le reste de son second chapitre à établir rigoureusement l'équivalence entre ses propres définitions de l'égalité et de l'inégalité des rapports et celles d'Euclide.

Dans le troisième chapitre, intitulé *Sur la composition du rapport et sa réalisation*, il étudie, du point de vue théorique, la notion de rapport composé qui était constamment utilisée par les mathématiciens et surtout par les astronomes, mais dont les fondements n'avaient jamais été clairement établis; c'est – à – dire que les calculateurs substituaient à la composition de deux rapports leur multiplication au sens de l'arithmétique des entiers, sans avoir défini clairement ce que signi- fiait une multiplication entre des objets qui n'étaient, en général, ni des entiers ni même des fractions au sens classique de terme.

Comme dans les autres chapitres de son ouvrage, Khayyām com-

36. *op. cit.*, Volume III, 1998, Livre X, p. 94.

37. A. Djebbar: *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyām (1048-1131) Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide*, introduction et traduction française, Paris, Université Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, 1997, n° 97-38, p. 48.

droits, les deux droites, si elles étaient prolongées indéfiniment, se rencontreraient du côté où les angles sont inférieurs à deux angles droits".[35] Comme ses prédécesseurs, Khayyām pense que ce postulat n'en est pas un mais que c'est plutôt une proposition qui a besoin d'être rigoureusement justifiée.

Avant d'exposer sa propre démonstration de ce postulat, Khayyām critique celles qui avaient été données avant lui et en particulier celle d'Ibn al-Haytham, parce qu'elle repose sur la notion de mouvement qui, selon Khayyām, n'est pas une notion propre à la Géométrie. Puis, il remplace le cinquième postulat par un principe qui lui a semblé plus acceptable et à partir duquel il a tenté de démontrer le postulat. Ce principe dit que "*deux droites concourantes se coupent et qu'il est impossible qu'elles s'écartent l'une de l'autre dans la direction où elles se coupent*".

En réalité ce principe contient, à lui seul, deux propositions qui sont équivalentes au cinquimème postulat. Il ne pouvait donc pas permettre d'élaborer une démonstration satisfaisante. Malgré tout, cet écrit de Khayyām a une grande importance historique parce qu'il nous éclaire sur les conceptions de son auteur concernant la Géométrie. Il nous informe également sur la circulation des idées mathématiques en pays d'Islam et nous amène à nous interroger sur leur circulation à l'extérieure même du Dār al-Islām.

La Théorie des Proportions

Il nous reste à dire quelques mots de la dernière contribution de Khayyām qui concerne la notion de nombre réel positif. Cette contribution se trouve dans le deuxième et le troisième chapitre de son *Épître sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide.* Dans le deuxième chapitre, qui est intitulé *Fī dhikr an-nisba wa ma'nā at-tanāsub wa ḥaqīqatuhā* [Sur l'évocation de la proportion, de la notion de proportionnalité et de leur sens véritable], Khayyām commence par critiquer la cinquième définition du Livre V des *Éléments* d'Euclide en disant, qu'à ses yeux, ce n'était pas une définition mais une proposition qui avait donc besoin d'une démonstration.

Il faut préciser que, là aussi, Khayyām n'était pas le premier à avoir critiqué cette définition. Déjà, au IX^e^ siècle, al-Māhānī avait eu la même

35. Euclide: *Les Éléments, Livres I-IV: Géométrie plane*, traduction et commentaires par B. Vitrac, Paris, Presses Universitaires de France, Volume I, 1990, p. 175.

obtenues comme intersections de deux coniques (cercle, parabole ou hyperbole). En second lieu, Khayyām ne montre jamais comment il trouve les courbes en question. Comme il n'est pas concevable qu'il les ait découvertes par hasard, il ne reste qu'une explication à son silence: partant de l'équation dont il cherche une solutions (positive), il a supposé que la solution existe puis, par analyse, il en a déduit, à chaque fois, trois relations entre les coefficients de l'équation et la solution cherchée. Ce qui lui a permis, en séparant ces relations, deux par deux, d'obtenir les équations de deux courbes coniques. Cette démarche est la plus vraisemblable parce que c'est une généralisation naturelle de celle que les Grecs avaient suivie pour réaliser la trisection d'un angle.

En revanche, il démontre, par la démarche classique de la synthèse, que l'intersection des deux courbes trouvées donnent, à chaque fois, une ou deux solutions au problème étudié. Il faut enfin signaler que, contrairement à sa propre démarche dans son *Epître sur le quart de cercle*, comme à celle de son successeur Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 610/1213), Khayyām ne se préoccupe pas de calculer des solutions approchées pour chaque équation.[33]

Tous ces éléments confirment le but de Khayyām qui était d'établir une théorie générale permettant de résoudre toutes les équations cubiques, projet qui avait peut-être préoccupé des mathématiciens avant lui mais qu'il était le premier à avoir réalisé.

La Géométrie

La contribution de Khayyām en Géométrie nous est parvenue à travers le premier chapitre de sa *Risāla fī Sharḥ mā ashkala min muṣādarāt Kitāb Uqlīdis* [Épître sur l'expli- cation des prémisses problématiques du livre d'Euclide]. Dans ce chapitre, intitulé *Sur l'essence véritable des parallèles et l'évocation du doute bien connu*, notre savant reprend la discussion sur le cinquième postulat du Livre I des *Éléments* d'Euclide qu'avaient déjà entreprise un certain nombre de mathématiciens des pays d'Islam avant lui, comme Thābīt Ibn Qurra, al-Jawharī (X^e s.), an-Nayrīzī (X^e s.) et Ibn al-Haytham.[34]

Ce postulat affirme que "*Si une droite, tombant sur deux droites, engendre des angles intérieurs d'un même côté inférieurs à deux angles*

33. Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *œuvres mathématiques*, R. Rashed (édit.), Paris, Les Belles Lettres, 1986.

34. K. Jaouiche: *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin, 1986.

ne les a-t-elle pas obligés à les examiner; peut-être enfin rien de ce qu'ils en ont dit n'a-t-il été traduit dans notre langue. Quant aux Modernes [c'est à dire les savants des pays d'Islam], c'est al-Māhānī qui, parmi eux, fut amené à analyser par l'algèbre le lemme qu'Archimède a utilisé, le considérant comme admis, dans la quatrième proposition du second chapitre de son ouvrage sur **La sphère et le cylindre***; or il est parvenu à des cubes, des carrés et des nombres formant une équation qu'il ne réussit pas à résoudre après y avoir longtemps réfléchi; il trancha donc en jugeant que c'était impossible, jusqu'à ce que parût Abū Ja'far al-Khāzin qui résolut l'équation par les sections coniques*".[29]

Plus lion dans son traité, Khayyām donne lui-même des précisions importantes sur les travaux qui ont précédés les siens et qui les ont, d'une certaine manière préparés. Il s'agit de la contribution d'Abū l-Jūd à la résolution de certains des équations cubiques qui est présentée de la manière suivante: "*Cinq ans après que j'eusse composé ce traité, quelqu'un qui connaît un peu de géométrie m'a raconté que le géomètre Abū l-Jūd Muḥammad ibn al-Layth parle de l'énumération de ces espèces et de la décomposition de la plupart en sections coniques, sans toutefois en épuiser toutes les formes et sans distinguer les cas possibles des cas impossibles, mais seulement selon qu'ils se présentent lorsqu'on les examine dans les problèmes particuliers*".[30]

A ce témoignage, il faut bien sûr ajouter les informations que nous fournissent d'autres sources mathématiques qui n'étaient peut-être pas accessibles à Khayyām et qui concernent la résolution, par des mathématiciens du X^e^ et du XI^e^ siècle, de quelques problèmes algèbriques ou même géométriques aboutissant à l'une des 14 équations cubiques. Il s'agit en particulier des travaux d'Ibn al-Haytham (m. 433/1041)[31] et d'al-Kūhī (X^e^ s.).[32]

Quant à la démarche de Khayyām, dans son livre, elle est différente de celle qu'il avait suivie dans son *Épître sur le quart de cercle*: en premier lieu, il ne s'intéresse, ici, qu'aux équations abstaites dont il étudie, à chaque fois, une forme générale, c'est à dire avec des conffficients quelconques et dont il donne des solutions géométriques qui sont

29. *op. cit.*, pp. 11-12.

30. *op. cit.*, p. 68.

31. Ibn al-Haytham: *Istikhrāj mas'ala 'adadiyya mujassama*, Ms. Londres, India Office 1270/17, ff. 118-119.

32. F. Woepcke: *L'Algèbre d'Omar al-Khayyāmī, publiée traduite et accompagnée de manuscrits inédits*, Paris. Benjamin Duprat, 1851, pp. 91-116.

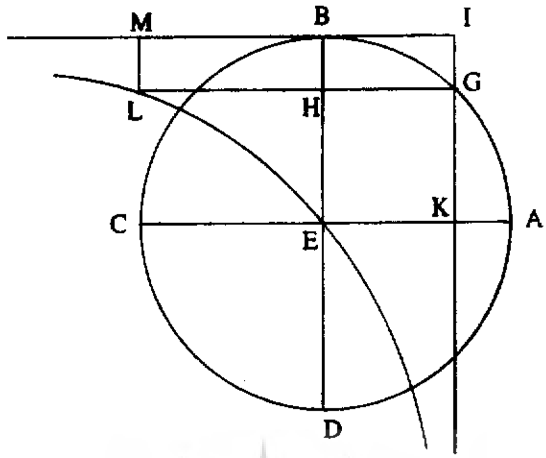


Fig. 2

Le second écrit de Khayyām en Algèbre, qui est intitulé *Maqāla fī l-jabr wa l-muqābala* [Traité sur l'algèbre et la muqābala], est, de loin, le plus important de ses écrits mathématiques car il contient, pour la première fois, une théorie géométrique des équations cubiques. Pour bien comprendre la contribution de Khayyām et son importance, il faut rappeler que, pour les mathématiciens islamiques du moyen âge, il y avait 25 équations de degré inférieur ou égal à 3, car ils ne travaillaient qu'avec des équations dont les coefficients sont positifs et dont le second membre est toujours différent de zéro. Il faut aussi rappeler que, parmi ces 25 équations, 6 avaient déjà été étudiées par al-Khwārizmī dans son *Mukhtaṣar fī ḥisāb l-jabr wa l-muqābala* [l'Abrégé du calcul par l'algèbre et la muqābala]. Il s'agit des équations de degré inférieur ou égal à 2.

Parmi les équations restantes, 5 sont de degré 3 mais elles peuvent se ramener, à l'aide d'un changement d'inconnue, à l'une des 6 équations d'al-Khwārizmī. Quant aux 14 dernières équations, il faut rappeler également qu'elles n'ont pas été étudiées uniquement par Khayyām. En effet, c'est lui-même qui nous informe, dans l'introduction de son ouvrage, sur la contribution des mathématiciens grecs et islamiques qui l'ont précédé en disant ceci, à propos des problèmes qui aboutissent à des équations du 3^e^ degré: "*Quant aux Anciens [c'est à dire les Grecs], il ne nous est rien parvenu de ce qu'ils en ont dit; peut-être, après les avoir recherchés et examinés, ne les ont-ils pas saisis; peut-être leur recherche* des procédés d'approximation en pays d'Islam n'a pas encore été écrite et elle ne pourra pas être écrite, même partiellement, avant que ne soit exhumés, analysés et comparés de nombreux textes: traités, chapitres dans des ouvrages algèbriques et astronomiques ou simples algorithmes isolées. Cela nous permettrait alors soit de retrouver soit de reconstituer la contribution de Khayyām dans ce domaine et de confirmer, du même coup, le jugement qu'il porte lui-même sur cette contribution.

L'Algèbre

Le premier écrit de Khayyām en Algèbre est une épître d'une dizaine de page intitulée *Qismat rub' ad-dā'ira* [La division du quart de cercle]. Elle est consacrée à la résolution d'un problème géométrique qui a peut-être été suggéré à Khayyām par ses recherches en Astronomie. Le problème consiste à diviser un quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ en deux parties en un point G, (dont la projection sur le rayon EB est H) de telle sorte que (figure 1): $\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB}$.

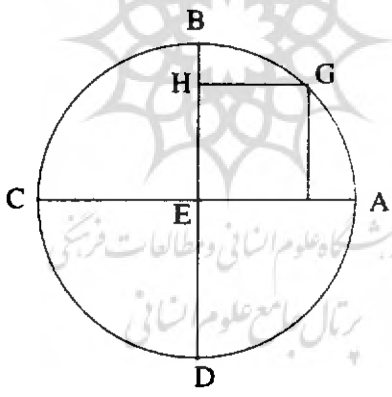


Fig. 1

L'analyse du problème, faite par Khayyām, aboutit à une équation du 3^e degré. Il en donne une solution géométrique en utilisant l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole (figure 2). Puis, ne pouvant pas trouver la solution algèbrique, c'est à l'aide d'une formule exacte, il donne la méthode pour trouver une solution approchée en disant, au sujet de la précision des calculs: "*et il est possible d'augmenter la précision jusqu'à ce que l'erreur soit imperceptible*".[28]

28. R. Rashed & A. Djebbar: *L'œuvre algèbrique d'al-Khayyām*, op. cit., pp. 171-181.

lide et, enfin, dans la théorie des proportions avec la critique des définitions anciennes et la mise en évidence de l'existence théorique d'une notion de nombre plus générale que les nombres qui étaient utilisés alors en Astronomie et dans les autres domaines appliqués des Mathématiques.

Le Calcul par Approximation

Le livre de Khayyām sur l'extraction des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre n'a pas encore été retrouvé. Les seules informations qui nous sont parvenues à son sujet nous sont fournies par l'auteur lui-même dans son livre d'algèbre, à l'occasion de la résolution de l'équation "*un nombre égal des carrés*". Khayyām nous dit en effet ceci: "*Les Indiens possèdent des méthodes pour déterminer les côtés des carrés et des cubes, reposant sur une induction <fondée> sur peu <de nombres>; c'est à dire la connaissance des carrés de neuf chiffres, à savoir le carré de un, de deux, de trois < ··· >, ainsi que des produits de l'un par l'autre, à savoir le produit de deux par trois, et de même pour les cas similaires. Nous avons composé un ouvrage pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes, je veux dire que nous avons montré comment déterminer les côtés du carré-carré, du carré-cube, du cubo-cube, et ainsi de suite, ce en quoi personne ne nous avait précédé*".[26]

Même si Khayyām ne le dit pas, on sait qu'avant lui, des mathématiciens ont fourni des procédés de calcul de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre et que d'autres, après s'être heurtés à l'obstacle de la recherche des solutions exactes d'une équation (algèbrique ou trigonométrique) ont élaboré ou simplement appliqué des algorithmes leur permettant de trouver des solutions approchées à leurs équations.[27] Comme notre savant devait être bien informé de la production antérieure dans ce domaine, et si on tient compte de sa méthode de d'expostion dans ses autres écrits qui nous sont parvenus, il est possible de déduire de la dernière phrase de son propos que son épître contenait à la fois un bilan de ce qui avait était fait avant lui et une contribution qualitativement supérieure à ce qui était pratiqué jusqu'à son époque.

L'histoire de l'élaboration, du perfectionnement ou de l'utilisation

26. R. Rashed & A. Djebbar: *L'œuvre algèbrique d'al-Khayyām*, op. cit., p. 20.

27. A. Djebbar: «Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes», *Premier Symposium International de l'ICOMIDC sur Informatics and the teaching of mathematics in developing countries*, Monastir, 3-7 Février 1986. Parue dans les Actes du Symposium, M. Amara & al. (édit.) Tunis 1987, pp. 131-140.

avons déjà évoqués, dont la réalisation lui avait été confiée par l'Etat Seljouqide et auxquels ont participé les meilleurs astronomes qui se trouvaient à cette époque à l'observatoire d'Ispahan.

Le premier projet, qui a été complètement réalisé, concernait la confection d'un ensemble de tables astronomiques qui ont été rassemblées dans un ouvrage intitulé le *Zīj Malik Shāhī*. Malheureusement, nous ne sommes pas très informés sur le contenu exact de cet ouvrage car seule une petite partie nous en est parvenue: il s'agit des tables contenant les valeurs des coordonnées écliptiques et des tables donnant, pour une année, les grandeurs des 100 étoiles les plus brillantes.[24]

Le second projet, qui est resté inachevé, concernait la réforme du calendrier. Le nouveau calendrier, appelé Malikī, était basé sur un cycle de 33 ans. La particularité de ce cycle était que les années y étaient inégales puisque les sept années du cycle qui sont multiples de 4 et la dernière, avaient chacune 366 jours. Avec cette répartition des années de 366 jours, la différence entre le calendrier malikī et le calendrier solaire était d'un jour au bout de 5.000 ans, alors qu'avec le calendrier grégorien cette différence d'un jour était atteinte au bout de 3.333 années.[25]

Parallèlement à ses activités en Astronomie, et peut-être grâce à ses succès dans ce domaine, Khayyām semble avoir pratiqué l'Astrologie à la cour de Malik Shāh, bien qu'al-'Arūḍī précise à ce sujet que Khayyām ne croyait pas aux résultats de cette discipline. Il l'aurait peut-être pratiquée pour répondre à des sollicitations de ses protecteurs qui se conformaient à une croyance largement répandue à l'époque. Cette croyance considérait l'Astrologie astronomique comme un bon instrument de prévision des événements concernant la vie privée des individus ou le destin des peuples et des pouvoirs qui les gouvernaient. Mais, à notre connaissance, Khayyām n'a rien publié dans le domaine de l'Astrologie.

Les Mathématiques

En Mathématique, Khayyām a apporté des contributions importantes dans quatre domaines: en Calcul, avec l'approximation de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre; en Algèbre, avec la résolution géométrique des équations cubiques; en Géométrie avec sa discussion du cinquième postulat d'Euc-

---

24. Ms. Paris, Bibliothèque Nationale, n° 5968. Fac-simile avec traduction russe dans: B.A. Rosenfeld & A.P. Youschkevitch: *Omar Khayyam, Traktaty*, Moscou, 1961, pp. 225-235.

25. F.K. Ginzel: *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*, Leipzig, 1906, I, pp. 300-305.

Dans cette partie de notre étude, nous allons nous préoccuper essentiellement des activités scientifiques de Khayyām parce qu'elles sont beaucoup moins connues que sa production littéraire, parce qu'elles illustrent parfaitement à la fois la fécondité du savant, son haut niveau technique, la profondeur de ses idées et, enfin, parce que sa contribution en Astronomie, en Musique, en Physique et en Mathématique n'a pas fait l'objet de controverses et son contenu n'a pas été soumis à des interprétations contradictioires, comme cela a pu être le cas pour le contenu de ses écrits poétiques et philosophiques.

La Musique

Le seul écrit de Khayyām sur la musique qui nous soit parvenu devrait être rattaché, en fait, aux Mathématiques selon la classification grecque que les savants des pays d'Islam avaient conservée.[22] Il s'agit d'un petit texte qui porte le titre de *Qawl fī l-ajnās allatī bi l-arba'* [Propos sur les genres contenus dans une quarte] et dans lequel l'autenr se propose de résoudre le problème de la division d'une quarte en trois intervalles. Cela le conduit à chercher trois rapports, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, qui doivent vérifier la relation suivante: $\frac{a}{b}[\frac{c}{d}(\frac{e}{f})] = \frac{4}{3}$, où la fraction du second membre correspond à la valeur de la quarte.

Khayyām donne 22 solutions du problème, parmi lesquelles un certain nombre avait déjà été donné soit par al-Fārābī dans son *Kitāb al-mūsiqā al-kabīr* [le Grand livre de la musique], soit par Ibn Sīnā dans son *Kitāb ash-Shifā'* [le Livre de la guérison].[23] Mais, il ne se contente pas de donuer ces solutions, il les discute en fonction d'arguments esthétiques. Quant aux outils qu'il utilise pour résoudre son problème, ils reposent sur la théorie des proportions du Livre V des *Éléments* d'Euclide qui, comme on le verra plus loin, fera l'objet d'une étude approfondie dans un autre écrit de Khayyām.

L'Astronomie

En Astronomie, Khayyām a dirigé deux projets importants, que nous

22. Une copie de cet écrit nous est parvenue (Ms. Bibliothèque de Manisa, en Turquie Collection, n° 1705, ff. 90b-92b). Voir une édition du texte dans: J. Humai: *Khayyāmi-nāmah*, Téhéran, 1967, pp. 341-344.

23. Al-Fārābī: *Kitāb al-mūsīqā al-kabīr*, R. d'Erlanger (trad.), Paris, 1930; Ibn Sīnā: *Kitāb ash-Shifā'*, Le Caire, 1975-80; Ibn Sīnā: *Le livre de science*, M. Achena & H. Massé (trad.), Paris, Les Belles Lettres, 1958, pp. 217-239.

met de l'Etat Seljouqide qui en avait découlé, ont eu comme première conséquence tangible la suppression des subventions qui avaient permis à l'observatoire de mener à bien la réalisation des tables astronomiques commandées par Malik Shāh et la mise en chantier de la réforme du calendrier. Les activités de l'observatoire ne tarderont d'ailleurs pas à cesser et la réforme du calendrier est restée inachevée. De plus, mais cette fois sur un plan plus personnel, Khayyām semble avoir perdu son statut antérieur et il serait même devenu la cible des critiques de certains hommes du pouvoir, parmi lesquels des théologiens Sunnites.

Nous n'avons que très peu d'informations sur la vie et sur les activités de Khayyām durant les 25 années suivantes, c'est à dire entre 485/1092 et 512/1118: nous savons par exemple qu'en 506/1112, il est invité à Balkh chez l'émir Abū Sa'īd Jarrāḥ et qu'il séjournera quelque temps dans cette ville en compagnie d'al-Isfizārī, un astronome qui avait travaillé à l'observatoire d'Ispahan. Ce séjour à Balkh est confirmé par l'historien al-'Arūḍī as-Samarqandī qui nous dit, dans son livre *Chahār Maqāla*, qu'il l'avait rencontré dans cette ville à l'occasion d'une soirée.[21]

Sous le règne de Sanjār, le troisième fils de Malik Shāh, Khayyām quitte Ispahan et s'installe à Marw qui était devenue la capitale des Seljouqides. C'est peut-être dans cette ville qu'il a écrit ses deux ouvrages de Statique. Le premier est intitulé *Mizān al-ḥikam* [Balance des sagesses] et le second *Risāla fi l-qusṭās al-mustaqīm* [Epître sur la balance droite].

Nous ne savons rien sur les dernières années de la vie de Khayyām mais il semble qu'il les ait passées dans sa ville natale, Nishapur, où il est mort en 526/1131.

Le Contenu de l'Œuvre Scientifique de Khayyām

Comme nous l'avons vu dans les pages précédentes, Khayyām a travaillé et produit dans des domaines parfois éloignés les uns des autres, comme la Poésie, la Philosophie, la musique, la Physique, l'Astronomie et les Mathématiques. Les écrits qui nous sont parvenus témoignent de la qualité de sa production dans chacun de ces domaines, du niveau très élevé qu'il avait atteint et de son originalité, en particulier dans les disciplines scientifiques. Ses écrits témoignent également d'une grande culture et d'une totale indépendance d'esprit, en particulier dans la poésie qu'on lui attribue.

21. al-'Arūḍī As-Samarqandī: *Chahār maqāla* [Les quatre discours], Téhéran, 1899.

sur la génération et sur l'obligation]. Il sera complété, quelque temps plus tard, par un second texte intitulé *al-Jawāb 'an thalath masā'il: ḍarūrat at-taḍād fī l-'ālam, wa l-baqā'* [Réponse à trois questions: la nécessité de la contradiction dans le Monde, le déterminisme et la pérennité]. A peu près à la même époque, il publie un troisième texte philosophique, la *Risāla fī kulliyāt al-wujūd* [Épître sur l'universalité de l'existence]. Deux autres écrits philosophiques sont attribués à Khayyām et ont peut-être été publiés à cette époque là. Il s'agit de la *Risāla fī l-wujūd* [Epître sur l'existence] et de la *Risālat aḍ-ḍiyyā' al-'aqlī fī mawḍū' al-'ilm al-kullī* [Epître sur la Lumière rationnelle sur le sujet de la science universelle]. Les spécialistes qui ont analysé les écrits philosophiques de Khayyām sont d'accord pour dire qu'il s'inscrivent dans la tradition philosophique d'Ibn Sīnā. Mais nous ne savons rien sur l'impact qu'ils ont pu avoir à une époque où l'orthodoxie Seljouqide était triomphante.[19]

C'est probablement à cette époque là, aussi, qu'il se mit à publier ses fameux quatrains. Mais, là aussi, nouse ne savons rien de précis sur le contenu réel de sa production dans ce domaine puisque les spécialistes qui se sont intéressés à cette question pensent qu'il n'est pas vraiment l'auteur des tous les quatrains qu'on lui attribue aujourd'hui. Il ne nous est donc pas possible d'utiliser les quatrains pour compléter nos connaissances sur les réflexions que Khayyām a pu tirer de son expérience de chercheur en mathématique et en Astronomie.[20]

Il semble qu'à partir de 485/1092, c'est à dire après l'assassinat de Niẓām al-Mulk et la mort du sultan Malik Shāh, le statut de Khayyām se soit détérioré à cause précisément des relations privilégiées qu'il avait entretenues avec Niẓām al-Mulk. En effet, ce sont les adversaires de ce dernier qui prennent le pouvoir après la mort de Malik Shāh puisque, à leur tête, il y avait Turkān Khatūn, la deuxième femme du sultan défunt qui s'était violemment opposée à Niẓām al-Mulk au sujet de choix du futur prétendant au sultanat Seljouqide. Il faut également ajouter que durant la régence de Turkān Khatūn, les théologiens orthodoxes deviennent beaucoup plus influents à la cour.

Tous ces événements et le chagement de rapport de force au som-

---

19. Sur les écrits philosophiques de Khayyām, voir: M. 'Abbasi: *Kulliyāt athār-i parsī-yi hakīm 'Umar-i Khayyām*, Téhéran, 1939; S. Govinda: *The Nectar of Grace, 'Omar Khayyam's Life and Works*, Allahabad, 1941.

20. Sur la discussion au sujet de l'authenticité des quatrains de Khayyām, voir: A. Christensen: *Recherches sur les Rubâiyat de 'Omar Hayyâm*, Heidelberg, 1904; A. Christensen: *Critical studies in the Rubaiyât of 'Umar-i-Khayyâm*, Copenhague, 1927.

l'on peut supposer en pensant au passage de son livre d'algèbre que nous avons déjà cité et dans lequel il se plaint des mauvaises conditions de travail. Mais on ne sait pas s'il fait allusion au milieu scientifique de Samarcande ou à celui qu'il avait connu avant d'être invité dans cette ville.

Il semble que quelque temps après l'accession au pouvoir du Seljouqide Malik Shāh, c'est à dire vers 466/1073 ou 467/1074, Khayyām s'installe à Ispahan où il reste environ 18 ans. Ces années seront pour lui les plus calmes et les plus fécondes sur les plans scientifique, philosophique et littéraire. Mais nous n'avons pas beaucoup de détails sur ses activités scientiques pendant cette longue période. On sait toutefois que l'Astronomie y prend une grande place puisque il a alors la direction d'une équipe de savants qui collaborent avec lui, à l'observatoire de la ville, pour réaliser les tables astronomiques qui portent le nom de *Zīj Malik-Shāhī.*

Vers 472/1079, il achève un autre travail collectif important commandé par Malik Shāh lui-même et qui concerne la réforme du calendrier. Les travaux et les observations servant à établir le nouveau calendrier, appelé Malikī, seront poursuivis jusqu'à la mort de Malik Shāh. C'est le grand historien Ibn al-Athīr qui nous fournit cette information, dans son livre *al-Kāmil fī t-tārīkh* [le Livre complet en Histoire]: pour l'année 467/1074, il dit en effet ceci: "*Cette année-là, Nizām al-mulk et le sultan Malik Shāh ont réuni un groupe d'astronomes éminents et ils ont fixé le Nayrūz au moment du passage du Soleil au milieu du Posson; ce qu'avait fait le sultan devint ainsi le point de départ du calendrier et, sur cette base, ont été faites les observations pour le sultan. C'est un groupe d'éminents astronomes qui ont collaboré à sa réalisation, parmi lesquels 'Omar ibn Ibrāhīm al-Khayyāmī, Abū l-Muẓaffar al-Isfizārī, Maymūn Ibn an-Najīb al-Wāsiṭī et d'autres. On dépensa pour ce projet des sommes colossales. Les observations se sont poursuivies jusqu'à la mort du sultan en 485 [1092] et elles cessèrent après sa mort.*"[18]

Parallèment à ses activités à l'observatoire d'Ispahan, Khayyām poursuivait la rélisation d'importants travaux en Mathématique et Philosophie. C'est ainsi qu'en 470/1077, il achève son traité intitulé *Risāla fī sharḥ mā ashkala min muṣādarāt Kitāb Uqlīdis* [Épître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide]. A partir de 473/ 1080, il publie une série de textes sur différents sujets philosophiques débattus à son époque. Le premier est intitulé *Risāla fī l-kawn wa t-taklīf* [Epître

18. cité dans R. Rashed & A. Djebbar: *L'œuvre algèbrique d'al-Khayyām*, op. cit., partie arabe, p. 12.

après la conquête du Khurasan par les Seljouqides.[15] On ne sait pas quelles ont été les conséquences de cette conquête sur le dynamisme de la ville natale de notre savant. Le témoignage de l'historien Rashīd ad-Dīn (XIII^e-XIV^e s.) laisse à penser que rien, à Nishapur, n'est venu perturber l'enfance et l'adolescence de Khayyām. Mais, le témoignage encore plus tardif d'at-Tabrīzī (XV^e s.) sous-entend que les parents de ce dernier ont quitté Nishapur relativement tôt. En effet, il affirme que ce dernier a passé toute son enfance et son adolescence à Balkh et qu'il y a même acquis une formation solide dans tous les domaines de la Philosophie (c'est à dire, selon le sens ancien, également en mathématique). Si ce témoignage est vrai, on peut penser que les parents de Khayyām ont peut-être été, à un moment donné, contraints de quitter Nishapur. Mais ce n'est là qu'une hypothèse.[16]

Les biographes ne disent rien sur les maîtres de Khayyām en mathématique et sur le contenu de sa formation auprès d'eux. Mais, l'analyse du contenu de ses écrits qui nous sont parvenus nous permet d'affirmer qu'il a d'abord parfaitement assimilé les *Éléments* d'Euclide, les *Coniques* d'Apollonius et le *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [L'abrégé sur le calcul par le restauration et la comparaison] d'al-Khwarizmī, avant de s'engager dans la lecture des recherches mathématiques de ses prédécesseurs et de ses contemporains des pays d'Islam. On ne sait non plus à quelle époque il a commencé à écrire ses premiers articles scientifiques, mais il semble que l'une de ses premières publications, réalisée avant 22 ans, ait été une étude géométrico-algèbrique d'une dizaine de pages, qui nous est parvenue, et qui est intitulée *Epître sur la division du quart de cercle.* Son second écrit mathématique, dont on ne connaît pas le titre exact et que l'auteur considère comme une contribution originale, a été également publiée alors que l'auteur n'avait pas encore 22 ans. En effet, on sait que c'est à cet âge, alors qu'il était à Samarcande, qu'il entreprit de rédiger son important traité, *Risāla fī l-jabr* [Epître sur l'Algèbre], dans lequel il mentionne ce second écrit.[17]

Les conditions dans lesquelles Khayyām avait entrepris ces premières recherches ne devaient pas être des plus favorables. C'est du moins ce que

15. Une abondante littérature savante a été consacrée à la vie et à l'oeuvre de Khayyām. On peut en trouver une excellente synthèse dans: A.P. Youschkevitch & B.A. Rosenfeld: *Al-Khayyāmī*, In: C. Gillespie: *Dictionnary of Scientific Biography*, New York, Schribner, 1970-1980, Vol. III, pp. 323-334.

16. op. cit.

17. R. Rashed & A. Djebbar: *L'œuvre algèbrique d'al-Khayyām*, op. cit., p. 20.

plan vertical. Certaines de ces courbes sont vraisemblablement celles qui auraient pu fournir les solutions géométriques aux équations de degré supérieur à 3 que Khayyām a évoquées dans son Traité d'Algèbre.[12] D'après le témoignage de son élève, le grand philosophe Ibn Bājja (m. 533/1138), le géomètre Ibn Sayyid a même pu utiliser ces nouvelles courbes pour résoudre un problème qui n'était toujours pas résolu en Orient à l'époque où as-Samaw'al écrivait son traité intitulé Kitāb A'wār al-munajjimīn. Il s'agit du problème de la division d'un angle en n parties égales, avec n>3 et du problème qui en découle et qui consiste à trouver n grandeurs qui font, avec deux grandeurs données, une proportion continue.[13]

En Algèbre, nous savons que l'ouvrage d'al-Khwārizmī et celui d'Abū Kāmil ont été étudiés très tôt en Andalus et qu'ils ont permis le développement d'une tradition régionale relativement importante si on en croit le témoignage du grand historien Ibn Khaldūn (m. 809/1406). Pourtant, jusqu'à maintenant, aucun ouvrage algèbrique du Maghreb ou d'al-Andalus, écrit avant la fin du XII^{e} siècle ne nous est parvenu. Les rares informations dont nous disposons, au sujet du contenu de l'Algèbre de cette tradition, nous sont fournies par un ouvrage du XIV^{e} siècle qui évoque précisément les contributions d'al-Qurashī (m. 580/1184). Ces contributions se rattachent essentiellement à la tradition algèbrique d'Abū Kāmil et ne permettent pas de dire si des préoccupations analogues à celles de Khayyām ont pu naître en Andalus et si elles ont suscité des recherches.[14]

Les Activités Scientifiques de Khayyām

Khayyām est né à Nishapur, en 440/1048, c'est à dire quelque temps

12. A. Djebbar: «Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^{e} siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid», *Colloque International sur Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII^{e} siècle*, Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984. Paru dans: M. Folkerts & J.P. Hogendijk (édit.): *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam-Atlanta, GA 1993, pp. 79-91.

13. Si a et b sont deux grandeurs données, il s'agit de trouver n grandeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui vérifient $\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}$.

14. A. Djebbar: «Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman», *Premier Colloque Maghrébin d'Alger sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*, 1-3 Décembre 1986. Paru dans les Actes du Colloque, Alger, Maison du Livre, 1988, pp. 99-123.

classiques (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racine) aux nouveaux objets de l'Algèbre qui sont les monômes et les polynômes. [10]

En ce qui concerne l'Occident musulman, Khayyām était probablement informé des grands évènements politiques et militaires qui s'y déroulaient, tant à l'intérieur qu'à ses frontières commençaient à se modifier après plusieurs siècle de stabilité. Mais il n'est pas sûr qu'il était informé de l'activité mathématique et astronomique de cette région de l'Empire musulman et du contenu de sa production. Il est donc utile d'évoquer, même brièvement, les aspects de cette production qui peuvent avoir un lien avec les préoccupations scientifiques et les travaux de Khayyām.

Après une période d'assimilation des traductions arabes des écrits mathématiques et astronomiques grecs (toutes réalisées en Orient), des foyers scientifiques se sont constitués au Maghreb (Kairouan au IXᵉ siècle, Marrakech et Bougie au XIIᵉ) et en Andalus (Cordoue au Xᵉ siècle, Tolède, Saragosse et Valence au XIᵉ, Séville au XIIᵉ). Dans ces villes qui avaient atteint le niveau scientifique des foyers d'Orient, une production mathématique et astronomique diversifiée et parfois originale a commencé à être publiée. Dans la Géométrie des coniques et ses applications, on peut signaler les travaux d'Ibn as-Samḥ (Xᵉ s.) sur les sections de cylindre (qui prolongent ceux des frères Banū Mūsā et de Thābīt Ibn Qurra) et les contributions d'al-Mu'taman (m. 478/1085), dans son *Kitāb al-istikmāl*, relatives à l'étude des propriétés des sections coniques et à la détermination de l'aire d'une portion de parabole.[11] C'est également du vivant de Khayyām, que le mathématicien de Valence, Ibn Sayyid (XIᵉ s.) s'est engagé dans des recherches qu'il n'a malheureusement pas pu achever et qui concernaient l'étude de nouvelles courbes, obtenues par intersection de solides puis par projection sur un

---

d'Histoire des Mathématiques Arabes, Tunis, 1-3 Décembre 1988; in: Actes du Colloque, Tunis, Université de Tunis I-I.S.E.F.C. - A.T.S.M., 1990, pp. 5-19.

10. Selon le témoignage du mathématicien du XIIᵉ siècle, as-Samaw'al al-Maghribī (m. 1175), c'est al-Karajī (m. 1029) qui serait l'auteur des premiers travaux dans ce domaines. Cf. S. Ahmed & R. Rashed: *al-Bāhir fī l-jabr d'as-Samaw'al*, Damas, Publications de l'université de Damas, 1972.

11. J.P. Hogendijk: Discovery of an 11th century geometrical compilation: The Istikmal of Yusuf al-Mu'taman Ibn Hud, King of Saragossa. *Historia Mathematica* **13** (1986), pp. 43-52; J.P. Hogendijk: «Le roi géomètre al-Mu'taman Ibn Hud et son livre de la perfection (kitab al-Istikmal)». *Premier Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*, 1-3 Décembre 1986. Paru dans la version française des Actes du Colloque. Alger, La Maison des Livres, 1988. pp. 51-66.

la première question, on constate, et Khayyām était bien informé sur ce point, que du IX[e] siècle à la fin du XI[e], des mathématiciens éminents, tels que Thābīt Ibn Qurra, an-Nayrīzī et Ibn al-Haytham, ont tenté de démontrer le cinquième postulat du Livre I des *Éléments* d'Euclide sur lequel repose tout l'échafaudage de la géométrie dite "euclidienne". C'est également au milieu du IX[e] siècle que le mathématicien al-Mahānī (m. 275/888) a, semble-t-il ouvert un nouveau domaine de réflexion et de débat, celui de la redéfinition de la notion de rapport telle qu'elle est exposée par Euclide dans l'introduction au Livre V des *Éléments*. Cette question importante va être reprise par an-Nayrīzī puis par Ibn al-Haytham mais elle restera, apparemment, sans réponse satisfaisante jusqu'à la fin du XI[e] siècle. Parallèlement, l'actualité de cette question a été régulièrement affirmée par les astronomes qui ont été, dans leur pratique calculatoire quotidienne, de grands utilisateurs des rapports et des formules qui permettaient de les manipuler. En tant qu'émiment astronome, Khayyām était bien évidemment au courant de ces pratiques et des interrogations qu'elles suscitaient à propos de leur justification théorique. Il n'est donc pas étonnant qu'à un moment donné il ait décidé de se pencher sérieusement sur la question.

Khayyām était également bien informé des progrès et des obstacles qu'a connu l'Algèbre depuis la publication du livre d'al-Khwārizmī, "*L'abrégé sur le calcul par le jabr et la muqābala*", entre 198/813 et 218/833. Ses informations, sur la production orientale dans ce domaine, étaient probablement plus riches que celles que nous allons brièvement exposer.[8]

Après la période de commentaire du livre d'al-Khwārizmī, sur laquelle nous sommes peu informés, les travaux d'Abū Kāmil (m. 318/930) et de son école ont permis l'intervention systématique de nouvelles catégories de nombres (autres que les entiers et les rationnels positifs) comme coefficients et comme racines des équations à résoudre, ce qui a ouvert la voie à la manipulation d'équations à coefficients réels positifs quelconques. Ils ont permis également la généralisation de la notion de monôme et d'équations polynomiales se ramenant aux six équations canoniques d'al-Khwārizmī[9] et, surtout l'extension des opérations arithmétiques

8. A. Djebbar: *Quelques aspects de l'Algèbre dans la tradition mathématique arabe d'Orient*, Université d'été de Toulouse, 6-12 Juillet 1986. Paru dans les Actes de l'Université d'été sur l'Histoire des Mathématiques, Toulouse, I.R.E.M., 1988, pp. 257-286.

9. Dans ce domaine, il nous est parvenu la contribution de Sinān Ibn al-Fatḥ. Cf. Y. Atik: *L'épître d'algèbre de Sinān Ibn al-Fatḥ*, Deuxième Colloque Maghrébin

ments d'Euclide, celle des méthodes d'exhaustion d'Archimède et celle des *Coniques* d'Apollonius. A partir du corpus ancien, de nouvelles tendances vont alors se dessiner. La première est partie des problèmes de constructibilité des points et des figures du plan qui permettait l'affirmation de l'existence des grandeurs cherchées. Après avoir été souvent confrontés à ce type de problème, les mathématiciens ont été amenés à élargir la notion d'existence géométrique (et même algèbrique) par l'utili- sation systématique des sections coniques. C'est ce qui se faisait, en particulier, à l'époque de Khayyām. La seconde tendance a visé l'étude des courbes pour elles-mêmes dans le but d'en connaître les propriétés les plus accessibles, compte tenu des instruments théoriques dont on disposait alors. Elle est représentée par les travaux de Thābīt Ibn Qurra (m. 289/901) sur les ellipses, ceux d'as-Sijzī sur les hyperboles et ceux d'Ibn al-Haytham qui ont probablement concerné des courbes non coniques. C'est du moins ce que l'on peut déduire raisonablement du témoignage de Khayyām lui-même qui nous dit, à propos de la résolution de certaines équations de degré supérieur à 3: "*Si on dit: «un carré quelconque est égal à un nombre de parties du cube de son côté», la solution de ceci n'est pas possible par les méthodes que nous avons exposées, car il est besoin de faire appraître quatre droites entre deux droites pour que les six soient en proportion continue. Ceci a été démontré par Abū 'Alī Ibn al-Haytham; seulement c'est très difficile, aussi ne pouvons-nous le joindre à notre livre*".[7]

La troisième tendance en Géométrie a consisté à résoudre des problèmes de mesure, à l'aide de méthodes infinitésimales qui se sont inspirées du contenu des deux écrits d'Archimède qui ont pu être traduits en arabe, celui de *La mesure de cercle* et celui de *La sphère et le cylindre.* Inaugurés par les contributions des frères Banū Mūsā (IX^{e} s.), ces travaux se sont poursuivis par ceux de Thābīt Ibn Qurra, d'Ibrāhīm Ibn Sinān, d'Ibn al-Haytham et d'al-Kūhī qui ont concerné, essentiellement, la détermination des aires de portions de sections coniques, les volumes de portions solides de révolution engendrées par des rotations de coniques.

En relation étroite avec la Géométrie, des recherches et des débats (qui vont intéresser au plus haut point Khayyām) ont concerné deux questions importantes: celle du postulat des parallèles qui est à rattacher aux fondements des mathématiques, et celle de la tentative de justification de l'extension de la notion de nombre. En ce qui concerne

---

7. *op. cit.*, pp. 65-66.

comportement des hommes de science.

Mais nous avons tenu à les évoquer ici pour mieux situer la vie et l'oeuvre de Khayyām et pour aider à comprendre certains orientations de ce savant ou certaines des réflexions qu'il fait ici ou là dans ses écrits scientifiques, philosophiques ou même poétiques. En disant cela, nous pensons surtout au fameux passage de son livre d'Algèbre où il dit: "*Je n'ai pu cependant me consacrer exclusivement à l'acquisition de ce bien, ni y penser avec persévérance, détourné que j'en étais par des vicissitudes. Car nous nous trouvons éprouvés par le dépérissement des hommes de science, à l'exception d'un groupe en nombre aussi petit que ses afflictions sont grandes, et dont le souci est de saisir le temps au vol pour se consacrer cependant à l'achèvement et au perfectionnement de la science*".[5] Cette réflexion amère a probablement des bases objectives liées aux conditions dans lesquelles se pratiquait la science à son époque mais qui peut aussi refléter l'état d'esprit d'un savant qui est au courant des événements extra scientifiques qui agitaient alors le monde et qui menaçaient l'Empire.

Les Activités Mathématiques Enpays d'Islam Jusqu'a la Fin du XI^{e} Siècle

Lorsque le jeune Khayyām publie son premier travail scientifique, il sait qu'il ne fait que prolonger une tradition déjà ancienne, commencée avec les traductions des ouvrages indiens et grecs qui se sont étalés entre la fin du VIIIe siècle et le début du X^{e}.[6] Mais, comme on le verra plus loin, il n'est pas sûr qu'il ait été bien informé sur la production de ses prédécesseurs des différents foyers scientifiques de l'Orient et de l'Occident musulman, dans les domaines qui l'intéressaient, c'est à dire en Géométrie, en Calcul, en Algèbre et en Astronomie. Il est donc utile de faire une brève description de la situation des mathématiques, jusqu'au début du XII^{e} siècle, dans les différents foyers scientifiques des pays d'Islam et même au delà des frontières de l'Empire.

En Orient, les activités géométriques ont été essentiellement un prolongement des différentes traditions grecques, c'est à dire celle des *Élé-*

5. R. Rashed & A. Djebbar: *L'œuvre algèbrique d'Al-Khayyām*, Alep, Institut for the History of Arabic Sciences, 1981, p. 12

6. A. Djebbar: *Le phénomène de traduction et son rôle dans le développement des activités scientifiques en pays d'Islam.* In: S. ÖNEN & C. PROUST: *Les Ecoles savantes en Turquie: Sciences, philosophie et arts au fil des siècles*, Actes des journées d'Ankara (24-29 Avril 1995), Istabul, Éditions Isis, 1996, pp. 93-112.

ont eu également une politique de défense des territoires musulmans contre les Chrétiens d'Occident. Leur champ d'action a été l'Espagne musulmane qui avait connu auparavant la chute du califat de Cordoue et son remplacement, dans la première moitié du XI[e] siècle, par plus de vingt principautés, appelés *royaumes des Taïfas.*

L'échec politique de ces royaumes favorise le développement d'un puissant mouvement d'opinion, animé par les religieux Malékites, qui finit par contraindre les rois des Taïfas à faire appel aux armées Almoravides. Ces dernières lancent une première offensive militaire qui aboutit à la victoire de Zallāqa contre l'armée castillane (481/1088), victoire qui ouvre la voie aux Almoravides pour la gestion directe de l'Espagne musulmane.

A partir de cette période, et jusqu'à leur chute en 541/1146, les Almoravides vont affronter une double contestation politique alimentée par le mécontentement populaire face à la lourdeur des impôts dont certains étaient même illicites au regard du Droit Malékite, et une contestation idéologique anti-malékite qui montre qu'au Maghreb aussi l'empreinte Shi'ite était encore profonde et que la victoire de l'orthodoxie n'était pas encore complètement assurée.[4]

Il nous faut dire quelques mots aussi de l'Egypte des XI[e]-XII[e] siècles qui était contrôlée par les Fatimides et qui demeurait encore un Etat puissant, malgré l'offensive Seljouqide qui va l'affaiblir en grignotant sa zone d'influence et en éliminant ses partisans ou ses alliés traditionnels dans les grands métropoles d'Orient.

La lutte entre les deux pouvoirs Seljouqide et Fatimide s'est poursuivie, directement ou indirectement, jusqu'au début du XII[e] siècle, c'est à dire même après l'intervention des premiers croisés en terre d'Islam.

A leur époque, les événements que nous venons de résumer n'étaient pas connus dans le détail mais les plus importants d'entre eux ou les plus durables ont probablement fini par parvenir aux oreilles des citoyens des pays d'Islam, même à ceux qui, comme Khayyām, étaient assez éloginés du théâtre des opérations militaires. Cela dit, nous ne pouvons pas mesurer aujourd'hui le véritable impact qu'ont eu ces événements sur le comportement des habitants de la cité islamique et sur leur mentalité; ce qui rend difficile notre appréciation des conséquences réelles qu'ont eu ces événements au niveau du vécu quotidien et en particulier sur le

4. Sur l'Histoire du pouvoir Almoravide, voir: Ch. A. Julien: *Histoire de l'Afrique de Nord,* Paris, Payot, 1969, pp. 76-92; A. Laroui: *L'Histoire du Maghreb, un essai de synthèse,* Paris, Maspéro, 1970, pp. 147-167.

trente années qui s'étaient écoulées. Cette organisation se fera sous la conduite du célèbre ministre Niẓām al-Mulk qui gouvernera pendant 29 ans, c'est à dire de 456/1063 à 485/1092.

Parmi les décisions que ce ministre prendra pour renforcer l'orthodoxie Sunnite et combattre l'idéologie Shi'ite très présente à son époque et très active, la plus importante est incontestablement la création des fameuses Madrasa, collèges supérieurs financés et gérés par l'Etat. La construction de la première Madrasa aura lieu à Bagdad, en 473/1080, puis d'autres seront construites dans les principales villes d'Asie Centrale et en particulier à Nishapur. Ces universités vont non seulement concurrencer les Bayt al-'ilm (Maison de la Science) qu'avaient constuits les communautés Shi'ites qui étaient très puissantes à Bagdad, au Caire et dans les principales villes de Syrie, mais elles vont surtout combattre les aspects idéologiques de leur enseignement.[3]

En Occident musulman, le siècle de Khayyām correspond également, sur le plan idéologique et politique, à une réaction à la fois contre le pouvoir chrétien d'Espagne et contre le pouvoir et l'idéologie des Fatimides. Ces derniers, depuis leur conquête de l'Egypte, en 359/969, ne gouvernaient plus directement le Maghreb mais ils le faisaient encore, indirectment, par l'intermédiaire de leurs vassaux, les Zirides qui contrôlaient une grande partie de la région. Cette réaction politique et idéologique sera animée, à partir du milieu de XI^e siècle, par les Almoravides et par leurs propagandistes Malékites.

Après une longue période de lutte, les Almoravides fondent la ville de Marrakech qui devient très vite un carrefour de l'or africian et la capitale de l'empire naissant. En 1080, les armées almoravides, dirigées par Yūsuf Ibn Tashfīn (466/1073-500/1106), achèvent la conquête du nord du Maghreb.

Sur le plan politique et idéologique, ces conqêtes avaient été préparées par une puissante campagne de prédications animées par les savants religieux (fuqaha) Malékites. Après la conquête, ces mêmes fuqaha étaient devenus des fonctionnaires de l'Etat qui avaient prêché le Malékisme officiel en veillant au bon déroulement de la lutte quotidienne menée contre le Shiisme et contre le Kharédjisme. Mais, ces hommes de religion, gardiens de l'orthodoxie, ne tardèrent pas à entrer en conflit avec l'Etat almoravide.

A l'image des Seljouqides face aux Croisés d'Orient, les Almoravides

3. Sur l'Histoire du pouvoir Seljouqide, voir: N. Elisseef: *L'Orient musulman au moyen-âge (622-1260)*, op. cit., pp. 208-308.

ment conquise et qui échappe définitivement au contrôle des musulmans. En 487/1094, c'est autour de Valence d'être occupée par les troupes du Cid, chef de guerre chrétien qui avait d'abord servi la Castille puis le royaume musulman de Saragosse, contre la Castille, et qui s'était finalement décidéd à se constituer un principauté pour lui tout seul.

Tous ces événements n'étaient en fait que les prémisses à un phénomène beaucoup plus profond, plus vaste et plus durable qui est le phénomène des croisades. Ces entreprises, à la fois militaires, religieuses et économiques, ont commencé à la fin du XI^e siècle.

Une des conséquences de ces actions militaires a été la naissance et le développement du monopole des marchands vénitiens sur une grande partie du réseau commercial méditerranéen de l'époque et ce au détriment du monopole musulman sur ce secteur de l'économie.[2]

Aux événements extérieurs que nous venons d'évoquer brièvement, vont s'ajouter d'autres événements et d'autres conflits qui vont surgir presque simultanément, mais cette fois-ci à l'intérieur de l'empire musulman. Les principaux acteurs de ces événements sont les Seljouquides en Asie et les Almoravides au Maghreb. Les conséquences politiques et surtout idéologique de leurs actions vont profondément marquer les sociétés islamiques de l'époque et même celles qui vont leur succéder. En effet, si on fait abstraction de leurs visées politiques régionales et de leurs stratégies respectives pour les réaliser, on constate que les deux nouvelles puissances militaires musulmanes, à l'est et à l'ouest de l'empire, poursuivaient, sur le plan idéologique, un objectif commun: rétablir l'orthodoxie Sunnite là où elle avait cédé la place aux différents sensibilités non orthodoxes et en particulier là où se maintenait encore l'idéologie Shi'ite, ou des idéologies qui s'en inspiraient.

L'offensive Seljouqide qui a commencé au Tabaristan dans les années quarante du XI^e siècle et qui s'est poursuivie pendant une quinzaine d'année aboutit au contrôle des provinces musulmanes d'Asie et de leurs métropoles régionales: Samarcande, Balkh, Marw, Isphahan, sans oublier Nishapur, la ville natale de Khayyām. La seconde étape de l'offensive des Seljouqides a été favorisé par l'appel du Calife de Bagdad qui affrontait la contestation Shi'ite (soutenue par les Fatimides du Caire).

A partir de 466/1073, les Seljouqides entrent dans une phase d'organisation et de gestion des territoires qu'ils avaient conquis au cours des

2. Sur le phénomène des Croisades et ses conséquences, voir: C. Cahen: *Orient et Occident au temps des Croisades*, Paris, Aubier, 1983.

de créativité qu'elles avaient connus au cours des siècles précédents.[1]

Cela ne siguife pas que ces activités ont changé de nature ou que leur dynamisme s'est considérablement affaibli, mais on constate qu'elles reposent désormais, en grande partie, sur les acquis de la première période et que leurs champs d'action respectifs vont connaître un rétrécissement significatif: rétrécissement de l'espace géographique pour l'Economie, réduction des thèmes de recherche pour les Sciences, appauvrissement du champ de la réflexion pour la Philosophie. Il faut tout de suite préciser que ce phénomène n'est pas apparu partout à la même époque et qu'il n'a pas connu le même degré d'intensité dans toutes les régions de l'Empire.

Les facteurs à l'origine de ce phénomène ne sont pas toujours faciles à identifier et, à cause du peu d'informations dont nous disposons, leurs effets respectifs ne se laissent pas quantifier aisément. Cela dit, il est raisonnable de penser que parmi ces facteurs, il y eut les grands affrontements politiques, idéologiques et militaires que les historiens ont consignés dans leurs chroniques et que nous allons évoquer brièvement afin de mieux situer la vie et les activités du grand savant.

Les Affrontements du Siècle

Pour la plupart des historiens du moyen âge, l'événement majeur du siècle de Khayyām, celui aussi qui a eu le plus d'impact sur la mentalité des gens de cette époque, est incontestablement l'offensive militaire de l'Europe chrétienne contre des villes et des territoires qui étaient jusque-là sous contrôle musulman. Il y eut tout d'abord la conquête de la Sicile par les Normands qui a commencé en 444/1052 et qui s'est achevée en 465/1072. Cette conquête a sérieusement affaibli le pouvoir musulman en Méditerranée et encouragé de nouvelles offensives contre des villes ou des régions du Maghreb et de l'Espagne. C'est ainsi qu'en 474/1081, les Normands et les Gênois attaquent Mahdiyya en Ifriqya et qu'en 475/1082, l'armée du roi de Castille Alphonse VI assiège la ville de Tarifa, dans le sud d'al-Andalus. Quatre ans plus tard, c'est à dire en 478/1085, cette même armée castillane assiège Tolède qui est rapide-

1. Pour cette période, voir, en particulier: R. Mantran: *L'expansion musulman (VII^e-XI^e siècles)*, Paris, P.U.F., 1969; D. Sourdel: *L'Islam médiéval.* Paris, P.U.F., 1979; M. Lombard: *L'Islam dans sa première grandeur (VII^e-XI^e siècle)*, Paris, Flammarion, 1971; C. Cahen: *L'Islam, des origines au début de l'empire ottoman;* Paris, Bordas, 1970, pp. 1-208; N. Elisseef: *L'Orient musulman au moyen-âge (622-1260)*, Paris, Armand Colin, 1977, pp. 1-207.

de sa production scientifique et, lorsque cela a été possible, sur les conditions dans lesquelles cette production s'est réalisée. Dans une troisième partie, nous avons tenté de présenter, le plus clairement possible et en évitant les anachronismes faciles, les aspects connus de sa production dans les disciplines que nous avons déjà évoquées, en accordant une plus grande place aux différents sujets mathématiques qu'il a eu à traiter parce que, pour la plupart d'entre eux, nous disposons de copies des écrits de notre savant et d'un certain nombre de recherche qui ont concerné leurs contenus. Dans une dernière partie nous aborderons le problème délicat de la diffusion, directe et indirecte (ou de la non diffusion) de la production de Khayyām (et plus généralement celle des savants d'Asie Centrale), soit vers les autres foyers scientifiques de l'Empire musulman, soit vers les premiers foyers européens qui vont s'approprier, dès le début de XII^{e} siècle, une partie de la production mathématique et astronomique écrite en arabe entre le IXe et la fin du XI^{e} siècle.

Le Siècle de Khayyām

L'importance de Khayyām tient également aux éléments extérieurs à sa vie et à ses activités et qui ont pu avoir sur elles une influence directe ou indirecte. Ces éléments concernent bien sûr la société islamique des XI^{e}-XII^{e} siècles dans son ensemble, avec ses activités économiques, politiques et culturelles et avec ses affrontements idéologiques internes, mais ils concernent également les événements internationaux de l'époque, c'est à dire les Croisades à l'ouest, l'offensive Seljouqide à l'est et l'avènement du pouvoir almoravide au Maghreb, trois événements majeurs qui vont marquer durablement à la fois la vie dans la cité islamique et le comportement de ses habitants.

Dans l'histoire multiforme de l'Empire musulman, le siècle de Khayyām peut être considéré, à différents niveaux, comme un tournant, même si certains éléments qui caractérisent les changements qualitatifs de ce siècle ne seront identifiés que bien plus tard. En premier lieu, ce siècle constitue, sur le plan interne, un aboutissement et un palier pour le processus de développement économique, scientifique et culturel qui était né au centre de l'Empire, au lendemain des premières conquêtes faits au nom de l'Islam, puis qui s'était étendu aux régions de l'Orient et de l'Occident musulman. On peut dire en effet qu'à partir de la fin du XII^{e} siècle, les activités économiques scientifiques et culturelles de la cité islamique n'auront pas le même degré de vitalité et le même type

‘Omar Khayyām et les Activités Mathématiques en Pays d’Islam aux XI^{e}-XII^{e} Siècles

Ahmed Djebbar
Université Paris-Sud

Introduction

Si l’on exclut, à chaque époque, quelques rares spécialistes bien au fait des contributions scientifiques de ‘Omar Khayyām (ou al-Khayyāmī), la célébrité de ce dernier repose, depuis le XII^{e} siècle, sur une partie des activités qu’il a réellement exercées durant sa longue vie, comme la Poésie, la Philosophie et, dans moindre mesure, l’Astronomie. Elle repose aussi sur des activités, des initiatives et des comportements qui lui ont été attribués mais qui, jusqu’à aujourd’hui, n’ont pu être confirmés par des témoignages concordants. Dans le même temps, la plupart des personnes qui ont entendu parler de lui ignore presque tout sur le contenu de ses activités scientifiques et sur ses contributions dans les différents domaines dans lesquels il a eu à exercer son talent, c’est à dire en Calcul, en Algèbre, en Géométrie, en Astronomie et en Statique, comme nous le rélèlent les écrits qui nous sont parvenus ou les témoignages sur des écrits perdus.

Dans la première partie de cette modeste étude, nous avons essayé de replacer l’activité scientifique à l’époque de Khayyām dans ses différents contexts: géographique, économique, politique et cultural. Dans une seconde partie, nous nous sommes occupé essentiellement des aspects de la biographie de Khayyām qui nous éclairent sur les différents époques

Farhang, vol. 12, no. 29-32, pp. 1-31

Farhang, **Vol. 12, No. 29-32, Spring 2000**

IN THE NAME OF GOD

Farhang

The Scientific & Research Journal of the Institute for Humanities and Cultural Studies

Issue Topic: Commemoration of Khayyām

ISSN 1017-4117

Farhang is a quarterly journal published by the Institute for Humanities and Cultural Studies. The journal aims to contribute towards research in humanities and cultural studies. Each issue deals with a specific field. The authors assume responsibility for their views expressed here. Articles and photographs may be reproduced.

Mailing address
Farhang
Institute for Humanities and Cultural Studies
P. O. Box 14155/6419, Tehran, Iran
Tel (98) 21-8046891-3
Fax (98) 21-8036317