'Αλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ ΓΔ ἑκατέρου τῶν ΑΒ, ΕΖ μεῖζον·
καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ ἐπίτριτον.
ἐπεὶ οὖν οἵων ἐστὶν τὸ ΑΒ δύο τοιούτων τὸ ΓΔ τεσσάρων, οἵων δὲ τὸ ΓΔ τεσσάρων τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν, καὶ οἵων ἄρα τὸ ΑΒ δύο τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν. συνῆκται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ λόγος διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία τοῦ τε ὑποδιπλασίου καὶ τοῦ ἐπιτρίτου, ὁ ὑφημιόλιος.

ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων.
Καὶ δῆλον ὡς ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἄκρων ἀφανισθέντος, ὁ λοιπὸς τῶν συντιθέντων καταλειφθήσεται.

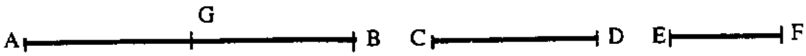
Mais alors ensuite que CD soit plus grand que chacun des AB, EF.
Et que d'une part AB soit moitié de CD, d'autre part CD épitrite de EF.
Puis donc que de ces [égales] dont AB est deux, de celles-ci CD [est] quatre, et de celles dont CD [est] quatre, de celles-ci EF [est] trois, et donc de celles dont AB [est] deux, de celles-ci EF [est] trois. De nouveau donc le rapport de AB relativement à EF est conjoint par le terme médian CD: celui de deux relativement à trois, [composé à partir] du sous-double et de l'épitrite: [soit] le sous-hémiole.
Alors semblablement aussi pour plus de deux [rapports] et dans les cas restants.
Et il est évident que si du rapport composé l'un quelconque des composés est retranché – l'un des extrêmes étant écarté – il sera laissé finalement l'autre des [rapports] composés.

Texte 4 : *Commentaire de Théon d'Alexandrie à l'* Almageste, Livre I, Ch. 13[1]

Lemme

Εἷς λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.

Un rapport est dit être composé à partir de deux rapports, ou plus, quand les tailles des rapports, multipliées, produisent une certaine taille de rapport.



Ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγον·

En effet qu'il y ait un rapport donné de AB relativement à CD et un rapport [donné] de CD relativement à EF;

λέγω ὅτι ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τοῦ λόγου πηλικότητα ποιεῖ τὴν τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ.

je dis que le rapport de AB relativement à EF est composé de [celui] de AB relativement à CD et de [celui] de CD à EF, autrement dit que si la taille du rapport de AB relativement à CD est multipliée par celle de [celui de] CD relativement à EF, elle produit la taille du rapport de AB relativement à EF.

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΔΓ μεῖζον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ.

En effet d'abord que d'une part AB soit plus grand que CD, d'autre part CD que EF.

καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ διπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιον.

Et que d'une part AB soit double de CD, d'autre part CD triple de EF.

ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιόν ἐστιν, τὸ δὲ ΑΒ τοῦ ΓΔ διπλάσιον, τὸ ἄρα ΑΒ τοῦ ΕΖ ἐστὶν ἑξαπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γάρ ἐστιν κυρίως σύνθεσις.

Puisqu'en effet d'une part CD est triple de EF, d'autre part AB, double de CD, donc AB est sextuple de EF, puisqu'aussi bien, si nous doublons le triple de quelque chose, il est produit son sextuple. En effet ceci est bien une composition au sens propre.

Ἢ οὑτωσί.

Ou de cette manière :

ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἐστὶν διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ ΑΒ εἰς τὰ τῷ ΓΔ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ ἐστὶν τριπλάσιον, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΕΖ ἐστὶν τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ ἐστὶν ἑξαπλάσιον.

puisque AB est double de CD, que AB soit divisé en parties égales à CD : AG, GB. Et puisque CD est triple de EF, alors pour les mêmes raisons aussi, GB est triple de EF. Donc le tout AB est sextuple de EF.

ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ λόγου καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ.

Donc le rapport de AB relativement à EF est conjoint par le terme médian CD, composé à partir du rapport [de] AB relativement à CD et de [celui de] CD relativement à EF.

Ἀλλ'ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἔλαττον ᾖ ἑκατέρου τῶν ΑΒ, ΕΖ τὸ ΓΔ, τὸ αὐτὸ συναχθήσεται.

Mais semblablement aussi, si CD est plus petit que chacun des AB, EF, la même chose arrivera.

ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ τριπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ ἥμισυ τοῦ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ ἥμισυ ἐστιν τοῦ ΕΖ, τοῦ δὲ ΓΔ τριπλάσιον τὸ ΑΒ, τὸ ΑΒ ἄρα ἡμιολιόν ἐστιν τοῦ ΕΖ· ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισακις.

Car de nouveau que d'une part AB soit triple de CD, d'autre part CD moitié de EF. Et puisque CD est moitié de EF et AB triple de CD, donc AB est hémiole de EF. Car si nous triplons la moitié de quelque chose, on l'aura une fois et demi.

Ἢ καὶ οὕτως.

Ou aussi ainsi :

ἐπεὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἐστὶν τριπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ ἥμισυ, οἵων ἐστὶν τὸ ΑΒ ἴσων τῷ ΓΔ τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ ΕΖ δύο. ὥστε ἡμιολιόν ἔσται τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ.

puisque d'une part AB est triple de CD, d'autre part CD moitié de EF, de ces égales à CD dont AB est trois, de celles-ci EF est deux. De sorte que AB sera hémiole de EF.

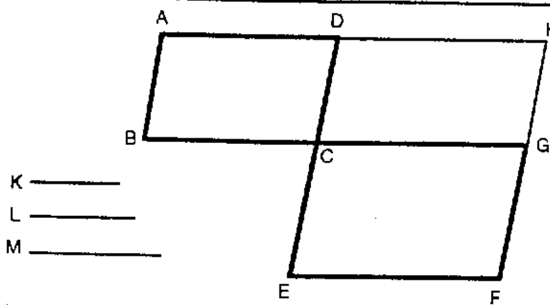
ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ λόγου καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ.

Donc le rapport de AB relativement à EF est conjoint par le terme médian CD, composé à partir du rapport [de] AB relativement à CD et de [celui de] CD relativement à EF.

1. Éd. A. Rome, *Studi e Testi* n°72. Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936, p. 532, l. 1–p. 535, l. 9.

ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον,	Or puisqu'il a été démontré d'une part que comme K [est] relativement à L, ainsi [est] le parallélo-gramme AC relativement au parallélogramme CH, d'autre part que comme L [est] relativement à M, ainsi [est] le parallélogramme CH relativement au parallélogramme CF.	Compar. de deux séries conjointes
δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.	à égalité [de rang] donc, comme K [est] relativement à M, ainsi [est] le [parallélogramme] AC relativement au parallélogramme CF.	V.22
ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν·	Mais K a, relativement à M, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés;	Rappel
καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.	et donc AC a, relativement à CF, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.	V. 11
Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν·	Donc les parallélogrammes équiangles ont, l'un relativement à l'autre, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.	Conclusion générale
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ce qu'il fallait démontrer.	CQFD

Texte 3 : Euclide, *Éléments*, VI. 23

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.	Les parallélogrammes équiangles ont, l'un relativement à l'autre, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.	Énoncé
		
Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τα ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ·	Soient les parallélogrammes équiangles AC, CF ayant l'angle sous BCD égal à celui sous ECG.	Ecthèse
λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.	Je dis que le parallélogramme AC a, relativement au parallélogramme CF, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.	Diorisme
Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ·	En effet, qu'ils soient placés de telle sorte que BC soit en alignement avec CG;	Condition supplém.
ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ.	DC est donc aussi en alignement avec CE.	I. 15 et I. 14
καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον,	Et que le parallélogramme DG soit complété,	Constr. potentielle
καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεία ἡ Κ,	et que soit posée une droite quelconque K,	Ecth.
καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.	et qu'il soit fait que d'une part comme BC [est] relativement à CG, ainsi [soit] K relativement à L, d'autre part comme DC [est] relativement à CE, ainsi [soit] L relativement à M.	VI. 12
Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.	Les rapports, ceux de K relativement à L et de L relativement à M, sont donc les mêmes que les rapports des côtés, ceux de BC relativement à CG et de DC relativement à CE.	Construct. de représentants conjoints
ἀλλ᾽ ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ·	Mais le rapport de K relativement à M est composé du rapport de K relativement à L et de celui de L relativement à M :	Assomption Conjonction intuitive
ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.	de sorte aussi que K a, relativement à M, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.	Substitut.
καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ,	Et puisque comme BC [est] relativement à CG, ainsi est le parallélogramme AC relativement à CH,	VI. 1
ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ,	mais que comme BC [est] relativement à CG, ainsi [est] K relativement à L,	Rappel
καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ.	donc aussi comme K [est] relativement à L, ainsi [est] AC relativement à CH.	V. 11
πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ,	Ensuite, puisque comme DC [est] relativement à CE, ainsi est le paralléloramme CH relativement à CF,	VI. 1
ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ,	mais que comme DC [est] relativement à CE, ainsi [est] L relativement à M,	Rappel
καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.	donc aussi, comme L [est] relativement à M, ainsi [est] le parallélogramme CH relativement au parallélogramme CF	V. 11

Texte 2 : a. Euclide, *Éléments*, Définition (VI. 5). Ed. Heiberg, *EHS*, II, p. 40

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.	Un rapport est dit être composé à partir de rapports quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose.

PARALLÉLISMES

b. Théon d'Alexandrie, *Commentaires à l'* Almageste. Ed. A. Rome, pp. 532-536

εἷς λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.	Un unique rapport est dit être composé à partir de deux rapports mais aussi plus, quand les valeurs des rapports, étant multipliées, produisent une certaine valeur de rapport.

c. Scholie anonyme à la Df. (VI. 5), n°4, ed. Heiberg, *EHS*, V, 2, p. 5, l. 1-3

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.	Un rapport est dit être composé à partir de deux rapports mais aussi plus, quand les valeurs des rapports, étant multipliées, produisent une certaine valeur de rapport.

d. Domninos de Larissa, *Πῶς ἐστι λόγον ἐκ λόγου ἀφελεῖν*
(Comment peut-on retrancher un rapport d'un rapport ?). Ed. C. E. Ruelle, pp. 82-94

Λόγος δὲ ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα·	Un rapport est dit être composé à partir de rapports, quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent une certaine valeur de rapport.

e. Eutocius, Comm. in Arch. *SC*, II. 4. *Arch.*, Ed. Heiberg, vol. III, p. 120, l. 12-19

Ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι.	On doit d'abord rappeler comment un rapport est dit être composé de rapports;
Ὡς γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει·	en effet d'après les *Eléments*,
ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ...	[c'est] quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose, "valeur" désignant évidemment le ...

f. Eutocius, Comm. in Apoll. *Con.*, I. 11. *Apoll.*, Ed. Heiberg, Vol. II, p. 218, l. 16-19

λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος.	Un rapport est dit être composé de rapports quand les tailles des rapports, multiplées par elles-mêmes, produisent quelque chose, étant entendu qu'il est évident que "taille" se dit du nombre duquel le rapport est paronyme.

g. *Introduction anonyme à l'* Almageste
Texte grec édité dans Knorr, W. R.,*Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, 1990, p. 196, l. 1-3.

ὁ δὲ τοῦ συγκειμένου λόγου οὕτως· λόγος φησὶν ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσίν τινα·	Quant au rapport composé, il en est ainsi : un rapport, dit-il, est dit être composé à partir de rapports, quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose.

ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν σχέσεων δῆλον, ὅτι αὐτη ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπι τὸν ἑπό-μενον ὅρον τοῦ λόγου ποεῖ τὸν ἡγούμενον.

(h) Et il est évident d'autre part que, de toutes les relations, cette même taille, multipliée par le terme conséquent du rapport, produit l'antécédent.

ἔστω τοίνυν λόγος ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰλήφθω τις αὐτῶν μέσος, ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ, καὶ ἔστω τοῦ Α, Γ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ Γ, Β ὁ Ε, καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποείτω.

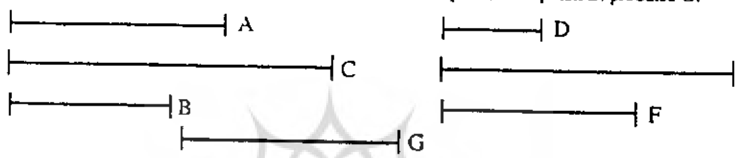
(i) Soit donc le rappport de A relativement à B et que soit pris un certain terme moyen entre eux, au hasard, C, et que la taille du rapport (A, C) soit D, celle du [rapport] (C, B), E, et que D multipliant E produise F.

λεγω, ὅτι τοῦ λόγου τῶν Α, Β πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ, τουτέστιν ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τον Α ποιεί.

Je dis que la taille du rapport de (A, B) est F, c'est-à-dire que F, multipliant B, produit A.

ὁ δὴ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω.

Alors que F, multipliant B, produise G.



ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α.

Puis donc que D, d'une part multipliant E, a produit F, d'autre part multipliant C a produit A, on a donc : comme E [est] relativement à C, F [est] relativement à A.

πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Η.

Ensuite puisque B, d'une part multipliant E, a produit C, d'autre part multipliant F a produit G, on a donc : comme E [est] relativement à F, C [est] relativement à G.

ἐναλλάξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Η.

D'une manière alterne : comme E [est] relativement à C, F [est] relativement à G.

ἦν δέ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α· ἴσος ἄρα ὁ Η τῷ Α, ὥστε ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν.

Mais on avait : comme E [est] relativement à C, F [est] relativement à A. Donc G est égal à A. De sorte que F, multipliant B, a produit A.

μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι μαθηματικαῖς μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστιν.

(j) Mais les lecteurs ne doivent pas s'inquiéter de ce que ceci a été démontré par des moyens arithmétiques; même si, en effet, les Anciens faisaient usage de ces démonstrations par les proportions qui sont davantage mathématiques qu'arithmétiques, et ce parce que l'objet de la recherche est arithmétique.

λόγοι γὰρ καὶ πηλικότητες λόγων καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι, κατά τὸν εἰπόντα· ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά.

(k) Car les rapports et les tailles des rapports et les multiplications des nombres appartiennent en premier lieu aux nombres et, de là, aux grandeurs, selon le diction : « car ces sciences mathématiques paraissent être sœurs ».

Annexes

Apollonius, *Coniques*, Proposition I. 11
(Ed. Heiberg, vol. I, p. 40, l. 8-10)

« Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει τον συγκειμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ· »

Mais le [carré] sur BC, relativement au [rectangle contenu] par BA, AC, a comme rapport, celui composé de celui qu'a BC relativement à CA et de BC relativement à BA.

Texte 1 : Commentaires d'Eutocius
(Ed. Heiberg, vol. II, p. 218, l. 1 — p. 220, l. 25)
Traduction de "travail" par B. Vitrac[1]

δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσις ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν·

(a) D'une part il est démontré dans le sixième Livre des *Éléments*, dans le vingt-troisième théorème, que les parallélogrammes équiangles ont l'un relativement à l'autre le rapport composé des [rapports] des côtés.

ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως·

(b) Et puisque, d'autre part, cette question a été exposée par les commentateurs d'une manière au plus haut point inductive, et non point selon le mode apodictique, nous avons cherché à la connaître et avons écrit à son sujet dans ce qui a été publié par nous à propos du quatrième théorème du deuxième Livre d'Archimède *Sur la sphère et le cylindre*, et dans nos scholies au premier Livre de la *Composition* de Ptolémée.

οὐ χεῖρον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι διὰ τὸ μὴ πάντως τοὺς ἀναγινώσκοντας κἀκείνοις ἐντυγχάνειν; καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ.

(c) Mais il n'est pas plus mauvais que ceci soit écrit aussi ici parce que les lecteurs n'ont généralement pas eu affaire à ces exposés-là; et parce qu'à peu près l'exposé tout entier des *Coniques* en fait usage.

λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα,

(d) Un rapport est dit être composé de rapports quand les tailles des rapports, multipliées par elles-mêmes, produisent quelque chose.

πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος.

(e) étant entendu qu'il est évident que "taille" se dit du nombre duquel le rapport est paronyme.

ἐπι μὲν οὖν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι τὴν πηλικότητα, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι καὶ μόριον ἢ μόρια,

(f) D'une part c'est pour les [rapports] multiples qu'il est possible qu'un nombre entier soit la taille, pour les autres relations il est nécessaire que la taille soit un nombre et une partie ou des parties.

εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀρρήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέθη.

(g) à moins toutefois que quelqu'un ne soutienne qu'il existe aussi des relations inexprimables, comme le sont celles entre les grandeurs irrationnelles.

---

1. Nous introduisons un découpage en paragraphes désignés par des lettres (a), (b), ..., afin de faciliter les références dans notre discussion de ce texte.

des Sciences de l'Institut de France, Sciences mathématiques et physiques, vol. 14, 1856, pp. 658-720. Reproduit dans F. Woepcke, *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques*. Réimpr. par F. Sezgin. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenchaften an der J.W. Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 1986, Vol. 1, pp. 648-710.

matique de Ptolémée. Texte grec et traduction française de l'Abbé Halma. Paris, Merlin, 1821. Réimpr. Paris, Blanchard, 1993.

Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. E. Hiller. Leipzig, in aed. B.G. Teubner, 1878.

Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon.* Ed. et trad. franç. J. Dupuis. Paris, 1892. Réimp. Bruxelles, Culture et Civilisation, 1966.

Textes médiévaux (éditions et traductions)

The Arabic Tradition of Euclid's Elements: *Book V.* Edition et tradnction anglaise par J.W. Engroff. Cambridge Mass., Harvard University Ph.D. Dissertation, non publiée, 1980.

The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements *made directly from the Greek.* Ed. H.L.L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 1987.

The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona. Ed. H.L.L. Busard. Leiden, E.J. Brill, 1984.

Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's Elements: Books I-VI. Ed., trad. anglaise et comm. B.H. Sude, Princeton University, Ph.D, 1974.

Djebbar, A., *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'Épître d'al-Khayyām (1048-1131).* Sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide. Orsay, Université de Paris-Sud. Mathématiques. Prépublications 97-39, 1997.

Rashed, R. et Vahabzadeh, B., *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Blanchard, 1999.

Ouvrages de références et études

Decorps-Foulquier, M., *Les Coniques d'Apollonius de Perge.* Atelier National de Reproduction des Thèses, Lille, 1994.

Drake S., *Galileo at Work.* The University of Chicago Press, 1978, Pœnix Edition, 1981.

Knorr, W.R., *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry.* Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1989.

Mogenet J., *L'introduction à l'Almageste.* Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Classe de Lettres. 2° série, Tome LI, fasc. 2. Bruxelles, 1956.

Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Leiden, E.J. Brill, 1974.

Tannery P., *Mémoires scientifiques*, 17 vol. Paris/Toulouse, Gauthier-Villars, 1912-1950.

Woepcke, F., 'Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles', *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie* grecs relatifs à la musique, Paris, Firmin Didot, 1884.

The Euclidean Division of the Canon. Greek and Latin Sources. New critical Texts and Translations with introduction, annotations...by André Barbera. University of Nebraska Press. Lincoln and London, 1991.

Géminos, *Introduction aux Phénomènes.* Ed. et trad. franç. G. Aujac. Paris, Belles Lettres, 1975, pp. 111-117.

Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, ed. W. Schmidt, Leipzig, in aed. B.G. Teubner. I.: *Pneumatica, Automata* (1899, W. Schmidt); II.: *Mechanica, Catoptrica* (1900, L. Nix & W. Schmidt); III.: *Metrica, Dioptra* (1903, H. Schöne); IV.: *Definitiones, Geometrica* (1912, I.L. Heiberg); V.: *Stereometrica* (1914, I.L. Heiberg).

Iamblichi in Nicomachi arithmeticam Introductionem Liber, Ed. H. Pistelli. Leipzig, in aed. B.G. Teubner, 1894.

Musici Scriptores Græci (Aristoteles, Euclides, Nicomachus, Bacchius, Gaudentius, Alypius et melodiarum veterum quidquid exstat). Rec. Carl Jan. Leipzig, in aed. B.G. Teubner, 1895. Nouvelle édition, Stuttgart et Leipzig, 1995.

Barker, A., *Greek Musical Writings, II*: Harmonic and Acoustic Theory. Cambridge University Press, 1989.

Nicomachi Gerasini Introductionis ArithmeticæLibri II, Ed. R. Hoche. Leipzig, in aed. B.G. Teubner, 1866.

Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic,* Trad. angl. et comm. M.L. D'Ooge. New York, Mac Millan, 1926.

Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique.* Trad. franç. et comm. J. Bertier. Paris, Vrin, 1978.

Nicomaque de Gérase, *Manuel d'Harmonique.* trad. franç. Ch-Em. Ruelle. Collection des auteurs grecs relatifs à la musique. Paris, Baur, 1881.

Porphyrius, *Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios.* Ed. I. Düring. Göteborg, Elanders Boktryskeri Aktiebolag, 1932. Réimpr. Hildesheim, New York, Georg Olms Verlag, 1978.

Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia, ed. I.L. Heiberg, Leipzig, in aed; B.G. Teubner: I.: Syntaxis Mathematica, Lib. I-VI, 1898; II.: Syntaxis Mathematica, Lib. VII-XIII, 1903.

Composition Mathématique. Ed. et trad. franç. M. Halma. 2 vol. Paris, H. Grand, 1813-1816. Réimp. Paris, A. Blanchard, 1988.

Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios. Ed. I. Düring. Göteborg, Elanders Boktryskeri Aktibolag, 1930. Réimpr. Hildesheim, Zürich, New York, Georg Olms Verlag, 1982.

Proclus Diadochus, *Hypotyposis Astronomicarum Positionum.* Ed. C. Manitius. Leipzig, in aed. B.G. Teubner, 1909. Nouvelle édition, Stuttgart, 1974.

Théon d'Alexandrie *Commentaires sur l'Almageste.* Ed. A. Rome. L. I-II, Studi e Testi n°72. Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936.

Commentaire de Théon d'Alexandrie sur les Livres I et II de l Syntaxe mathé-

originaux en algèbre. Plus simplement encore les intentions de nos deux auteurs ne sont tout simplement pas les mêmes. Eutocius fournit aux éventuels lecteurs d'Archimède et d'Apollonius les éclaircissements mathématiques ou historiques qu'il croit nécessaires à propos des notions mises en œuvre dans ces textes. Khayyām souligne, dès son introduction, qu'il s'agit, grâce à l'examen critique des (de certaines) prémisses d'Euclide, d'une entreprise de fondements des mathématiques. Rien d'étonnant donc à ce que ses développements, à la fois mathématiques au sens technique du terme et épistémologiques, nous impressionnent davantage.

* * *

Bibliographie

Textes anciens (éditions et traductions)

Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis (*Eutocius*). *I-II.* Ed. J.L. Heiberg. Leipzig, in aed. B.G. Teubner. 1891-1893. Réimp. Stuttgart, Teubner, 1974.

Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, I-III. Iterum ed. I.L. Heiberg. Lipsiae, in aed. B.G. Teubner, 1910-1915 (réimpr. Stuttgart, 1972).

Archimède, *Œuvres.* Ed. et trad. franç. Ch. Mugler, 4 vol. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1970-1974.

Les œuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon. 2 vol. Trad. franç. par P. Ver Eecke, Paris/Bruxelles 1921, (réimp. Paris, A. Blanchard, 1960).

Euclidis Elementa, post Heiberg ed. E.S. Stamatis, Leipzig, B.G. Teubner: I. El. I-IV (1969); II. El. V-IX (1970); III. El. X (1972); IV. El. XI-XIII (1973); V, 1. El. XIV-XV, Scholia in lib. I-V (1977); V, 2. Scholia in lib. VI-XIII (1977).

Euclid, *The Elements.* Trad. angl. et comm. T.L. Heath. New York, Dover Pbu., 3 vol., 1956, réedition de la 2nd édition, Cambridge University Press, London, 1926.

Les livres arithmétiques d'Euclide, Trad. franç. J. Itard. Paris, Hermann, coll. Histoire de la pensée, X, 1961.

Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments.* Paris PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences. Introduction générale par Maurice Caveing. Trad. franç. et comm. par Bernard Vitrac, Volume I. Livres I à IV, 1990. Volume II. Livres V à IX, 1994. Volume III. Livre X, 1998. Volume IV. Livres XI à XIII, en préparation.

Euclide, *La division du Canon.* Trad. franç. Ch-Em. Ruelle. Coll. des auteurs

"arithmétisation" de la théorie des proportions, même si elle tourne court. Chez Khayyām il faudrait plutôt parler d'une algébrisation, au sens où il s'agit d'associer domaine numérique et domaine des grandeurs, c'est-à-dire dépasser la dichotomie fondamentale qui sévissait au sein de la notion ancienne de quantité (discret/continu) dès avant Aristote et Euclide, en envisageant des grandeurs "super-abstraites" qui ne sont plus géométriques (ni, *a fortiori*, physiques) et qui doivent saisir ce qu'il y a de numérique dans les rapports de grandeurs.

• Il est donc très tentant d'évoquer les nombres réels (strictement positifs) à propos de l'entreprise du Persan et les Modernes n'ont pas manqué de le faire. Djebbar, dans l'introduction de sa traduction n'hésite pas à dire que Khayyām clarifie «... une fois pour toutes les liens qui existent entre la notion de rapport de deux grandeurs et la notion abstraite de uombre».[144] Certes il le dit à propos du Chapitre II du *Commentaire* et de l réduction (réussie) de la théorie euclidienne des proportions à la théorie anthyphérétique. Mais le chapitre III impose d'introduire une petite réserve. Khayyām est certainement allé beaucoup plus loin qu'Eutocius dans cette voie, et avec davantage de rigueur, mais lui aussi a été obligé de s'arrêter en chemin. Au moment où il fallait préciser quel est le statut de cette association entre rapporte de grandeurs et nombre, Khayyām pose le problème en des termes (attribution essentielle, accidentelle...) qui le conduisent à conclure que ceci est un problème philosophique. Le géomètre qui dans l'épistémolgoie aristotélicienne n'a pas à rendre compte de ses principes n'a donc pas à s'en soucier.[145]

• S'il est sans doute quelque peu exagéré de dire que le concept de nombre réel positif est parfaitement dégagé chez Khayyām, il ne s'agit pas non plus d'affirmer que tout ce que l'on trouve chez ce dernier existait déjà chez Eutocius. Il est trop clair d'après ce qui précède qu'il n'en est rien. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'accabler l'un et/ou l'autre de nos deux auterus, ou de nous livrer à une sorte de palmarès mathématique rétrospectif uu peu facile. Leurs environnements mathématiques ne sont pas complètement étrangers l'un à l'autre, mais ils ne sont pas identiques non plus. Il ne faut pas négliger l'approfondissement de l'exégèse des textes mathématiques grecs (en particulier des pas négliger l'approfondissement de l'exégèse des textes mathématiques grecs (en particulier des *Éléments* d'Euclide, surtout pour les Livres V et X) par les savants des IX^e-XI^e siècles, ni les développements mathématiques

144. V. [Dj. 1997], p. 20.
145. V. [Dj. 1997], p. 65, l. 22-26; [Vahab., 1999], p. 374, l. 8-14.

sance, ou autre. Elle pourra jouer le même rôle formel que jouait la πηλικότης d'Eutocius dans la démonstration 1 mais il n'est sans doute pas nécessaire de souligner une fois encore que le souci fondationnel que manifeste Khayyām vis-à-vis du statut de sa gradeur G est sans commune mesure avec l'explication historique et pan-arithmétique qu'invoque Eutocius pour rassurer ses lecteurs. S'il faut compter Khayyām au nombre de ceux-ci, il est clair qu'il n'a pas été convaincu!

* * *

Pour conclure

Au terme de cette comparaison il n'est pas inutile d'en récapituler les résultats:

• Il me semble que l'on peut, avec une certaine vraisemblance, donner un peu de substance historique à la mention d'Eutocius par Khayyām. Je crois que celui-ci mentionne son prédécesseur à cause des indications de ce dernier sur les rapports composés de rapports contenues dans sou commentaire à la Proposition I. 11 des *Coniques*. J'ai essayé de montrer que certaines particularités du texte de Khayyām, des passages particulièrement allusifs, elliptiques, ou ce qui semble être un aparté un peu en dehors du sujet traité, s'expliquent bien si l'on fait l'hypothèses que Khayyām connaissait ce texte d'Eutocius et, de surcroit, qu'il n'était pas du tout d'accord avec la manière dout le commentateur d'Apollonius évacuait le problème des rapports non numériquement exprimables.

• Nos deux auteurs présentent uu certain nombre de traits communs: l'un et l'autre se fondent en dernière analyse sur le texte des *Éléments* d'Euclide et sur ce qu'ils y lisent comme Définition du rapport composé de rapports. Ni l'un, ni l'autre ne remet en cause l'authenticité des énoncés en question. Ils soulignent l'importance du problème et connaissent l'ensemble des différents contextes mathématiques dans lesquels la notion de «rapport composé de rapports»iutervient. Leurs solutions se veulent techniques et présentent une certaine similitude formelle.

• Elles s'inscrivent dans une même double problématique épistémologique: la substantification progressive de la notion de rapport, ou si l'on préfère utiliser une terminologie aristotélicienne, son passage progressif de la catégorie du *relatif* (πρός τι) à celle de la quantité (ποσόν), avec corrélativement, une extension progressive de la notion de nombre. Chez Eutocius ou pourrait peut-être parler d'une tentative d' citation rapportée ci-dessus l'unité conventionnellement adoptée est une *grandeur.* Le contexte mathématique n'est donc pas le calcul fractionnaire, associé à la classification des rapports numériques de Nicomaque, comme chez Eutocius, mais plutôt celui de la Définition X. 3 des *Éléments* d'Euclide et de la co-mesure des grandeurs.[141] En témoigne le fait que si le rapport n'est pas numérique, on rapportera le carré de l'une des grandeurs au carré de l'autre – ce qu'Euclide appellerait une comparaison *en puissance* – ou le carré du carré ou le carré du carré du carré... qui permettent de comparer ce qu'un Moderne appelerait des irrationnelles de la forme "racine 2^n-ièmes de a". Mais Khayyām (l'algébriste Khayyām?) a compris que ce cadre des irrationnelles quadratiques ou multi-quadratiques du Livre X n'était pas non plus suffisant. Il faut donc admettre que pour *n'importe quel rapport donné* entre grandeurs, A : B, on peut trouver une unité U et une grandeur connue G, telles que le rapport de U à G soit égal au rapport donné.

Khayyām repousse alors l'objection que pourrait lui adresser le partisan d'un point de vue strictement constructif. Ce couple (U, G) pourra ne pas être déterminé par une règle *géométrique* (et *a fortiori* arithmétique) effective à partir des grandeurs A et B.[142] Mais U étant choisie, la grandeur G pourra du moins être conçue. Ici les nécessités mathé- matiques conduisent sans doute Khayyām à faire violence à ses principes épistémologiques fondamentalement aristotéliciens, selon les- quels les objets mathématiques sont le résultat d'une abstraction faite à partir des sensibles. Pour déterminer la nature quantitative de cette relation qu'est le rapport il faut, au-delà des habituelles grandeurs mathématiques (ligne, surface, volume) – qui sont déjà des abstractions – ou physicques (le temps), postuler l'existence, purement conceptuelle, de grandeurs "doublement" abstraites.[143] Cette grandeur exprimera l'aspect quantitatif et numérique du rapport, – en un sens dès lors très élarge – que celui-ci soit numérique, numérique en puis-

141. «Cela étant supposé il est démontré que par rapport à une droite proposée, il existe des droites, infinies en multitude, commensurables ou incommensurables [avec elle], les unes en longueur seulement, les autres aussi en puissance. D'une part donc que la droite proposée soit appelée *exprimable* et, celles [qui sont] commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, *exprimables*; d'autre part que celles [qui sont] incommensurables avec elle soient appelées *irrationnelles*».

142. V. [Dj. 1997], p. 69, l. 3-5; [Vahab., 1999], p. 380, l. 2-3.

143. V. [Dj. 1997], p. 68, l. 8-12; [Vahab., 1999], p. 378, l. 17-23.

celle-ci à son propos. Manifestement le mathématicien persan n'hésite pas à innover si nécessaire, comme nous l'avons vu à propos du produit de deux grandeurs. D'un autre côté j'ai suggéré à plusieurs reprises que Khayyām conuaissait les remarques d'Eutocius sur les rapports composés de rapports contenues dans le *Commentaire* aux Coniques d'Apollonius et qu'il portait, à leur égard, un jugement critique. Si tel est le cas, Khayyām connaissait donc la Df. {VI. 5} et sa multiplication des "quantités (πηλικότης) de rapports".[137] Je crois que les importants commentaires qu'il fait sur l'association propsée par lui entre "rapport" et "grandeur abstraite" confirment cette hypothèse.

4. Les considérations épistémologiques de Khayyām

Au tout début de Chapitre III, après avoir rappelé les trois assertions euclidiennes (**i**-**ii**-**iii**) qu'il va ensuite justifier, Khayyām revient sur la multiplication des rapports incluse dans l'énoncé (**i**) en des termes qui me paraissent faire écho à ceux d'Eutocius:

«Quant à ce qu'il (Euclide) a indiqué au sujet de la multiplication du rapport, c'est que le rapport de trois à cinq signifie trois cinquièmes de un; et cela en supposant une grandeur unité, c'est-à-dire en supposant une grandeur que l'on appelera "un" et à laquelle on rapportera les autres grandeurs».[138]

Cette explicitation ne dit en fait rien de la "multiplication" du rapport; en revanche il s'agit d'un quasi-commentaire, sur l'exemple du rapport 3 : 5, de la notion de πηλικότης chère à Eutocius. Mais ni le terme, ni le fait souligné par ce dernier qu'une extension de la notion de nombre entier à celle de nombre fractionnaire[139] est requise ne sont mentionnés ici par Khayyām. En revanche, dans la première partie de la preuve de sa Proposition 1, il revient sur la notion d' "unité", fait référence aux procédés du calcul[140] et, comme Eutocius, souligne qu'il faut concevoir une unité divisible (et non pas prendre comme "Un" la monade de l'arithmétique).

Cela dit, ce sont moins les relations entre πηλικότης et calcul fractionnaire qui intéressent Khayyām, que le cas des rapports non numériquement exprimables. Même dans cette référence aux calculs des praticiens il donne des exemples comme "racine de cinq"... Déjà dans la

137. Cf. Annexe, Texte 1, §d.
138. V. [Dj. 1997], p. 65, l. 1-4; [Vahab., 1999], p. 372, l. 21-25.
139. Cf. Annexe, Texte 1, §f.
140. V. [Dj. 1997], p. 68, l. 13-21; [Vahab., 1999], p. 378, l. 23-35.

auparavant la nature éminemment abstraite.[135] Il en déduit donc que d x Un $= e$ x z et il substitue alors à (z, e, d) leur "signification" en termes de rapports, tout en observant que d x Un $\equiv d$. Il en déduit que le produit du rapport $a : b$ par le rapport $b : g$ est le rapport $a : g$.

Par comparaison avec Eutocius on peut dire que l'égalité $d = e$ x z correspond à l'égalité F = E. D du commentateur d'Apollonius et que la grandeur z, par exemple, introduite par Khayyām, correspond à la πηλικότης du rapport $b : a$. D'où la ressemblance formelle entre nos deux auteurs. En même temps Eutocius – malgré l'affirmation du contraire – raisonne en termes de nombres, en utilisant des résultats de la théorie des proportions numériques (VII. 17, 18, 13) et en fondant sa démarche sur la notion arithmético-calculatoire de "πηλικότης". Khayyām introduit des "grandeurs abstraites" dont il justifie l'existence par la postulation; il utilise le théorème δι' ἴσου (V. 22 ou V. 23, peu importe ici) qui est effectivement le fondement euclidien des rapports doublés, triplés et composés de rapports. Il peut donc croire que la portée de sa preuve est plus grande que celle d'Eutocius, qu'elle est mieux fondéd, et, d'une certaine manière, plus fidèle à Euclide.

De plus, elle fait l'économie de l'incertaine notion de "quantité de rapports" et c'est pourquoi l'assertion (**i**), par contraste avec la Df. {VI. 5}, parle de multiplier directement les *rapports* entre eux. C'est également la forme de la conclusion de la Proposition 1 comme nous venons de le voir. Le principe (i) était donc particulièrement bien adapté à la pratique effective de Khayyām dans la suite de son texte. Mais il est censé avoir été énoncé par Euclide! La coïncidence fait qu'il paraît difficile de trancher la question de savoir, si, avec (i), on est en présence d'une traduction de la Df. {VI. 5},[136] ou si Khayyām a délibérément adaptée

135. Il a précisé en particulier que nous ne pouvons pas dire de la grandeur z, s'il s'agit d'une ligne, d'une surface, d'un solide ou un temps, mais qu'elle doit être considérée en faisant abstraction de ces éventuelles caractérisations qui conservent une "dimension" perceptive. Si Khayyām avait choisi une droite pour l'Unité de référence, les "grandeurs" (z, d, e) seraient également des droites, auterment dit les rapports donnés seraient "linéarisés" (Cf. *supra*, Partie III, 1). Le produit correspondrait simplement au rectangle coutenu par les droites (VI. 16). C'est substantiellement la démarche que propose Galilée dans le petit dialogue auquel j'ai déjà fait allusion *supra*, n. 126. V. Drake, *op. cit.*, p. 435. Cela dit, en maintenant cette approche géométrique on aboutit au paradoxe qu'une droite d se trouvera égale à un rectangle e x z. On comprend qu'il faille adopter un point de vue "abstrait".

136. Particulièrement libre, ou réalisée à partir d'un modèle grec sensiblement différent de celui que nous connaissons par les mss de la tradition directe et par la version de Isḥāq-Thābīt.

troisième –, de la manière suivante: z (resp. d) est telle que le rapport de l'Un à z (resp. d) est comme le rapport de $a : b$ (resp. $a : g$). Autrement dit ces deux grandeurs sont des qnatrièmes proportionnelles pour les triplets (a, b, Un) [resp. (a, g, Un)].[133] Leur mode d'existence a été discuté juste avant et est, en dernière analyse, rapporté à une prémisse de type philosophique – le postulat d'existence de la quatrième proportionnelle à trois grandeurs quelconques données – prémisse introduite au début du Livre II du *Commentaire*.[134] En revanche la grandeur e est introduite de telle manière que ce soit le rapport de e à l'Un qui est comme g à b, inversion commode pour la suite du raisonnement. On a donc:

$$\text{Un} : d \equiv a : g \quad \text{et} \quad e : \text{Un}\ equivg : b.$$

Le texte de Khayyām évoque alors le rapport à égalité de rang (ou le rapport dit d'égalité, ou $\delta\iota'$ $\text{ἴ}\sigma o\upsilon$ en grec), ce qui correspond à la Proposition V. 22 d'Euclide. Cela dit, on voit qu'il utilise plutôt le théorème $\delta\iota'$ $\iota\sigma o\upsilon$ "perturbé" (V. 23), car les deux séries conjointes: (a, g, b) et (e, Un, d) sont mises en correspondance en perturbant l'ordre de prise en considération des termes. Il en déduit donc que:

$a : b \equiv e : d$, alors que, par hypothèse, $a : b \equiv$ Un : z. D'où $e : d \equiv$ Un : z.

Parvenu à ce point Khayyām n'hésite pas à généraliser les Propositions VI. 16 et VII. 19 d'Euclide, lesquelles affirment que le "produit" des extrêmes de quatre droites (resp. nombres) en proportion est égal au "produit" des moyens, généralisation à des grandeurs dont il a souligné

---

133. Le commentaire de B. Vahabzadé, p. 298, en particulier n. 14, me paraît inadéquat. Il affirme que Khayyām considérait G telle que G/U = A/B mais que le texte, par inadvertance (*sic*), porte U/G = A/B. Ceci ne vaut que pour la grandeur e; les deux autres sont des quatrièmes proportionelles. Cette affirmation oblige Vahabzadé à introduire, dans sa paraphrase mathématique, une inversion (avec référence à V. 7 Por.) qui ne se trouve pas dans le texte de Khayyām. Vahab. se ramène à V. 22 alors que le texte semble utiliser de V. 23. Elle le conduit apparemment aussi à modifier sa traduction p. 380, l. 15-16 qui diverge ici de celle de Djebbar, p. 69, l. 15-17, dans laquelle les rapports apparaissent d'abord inversés (b : a; g: b; g : a), avant d'être "rétablis" à la fin (a : b; b : g; a : g).

134. V. [Dj. 1997], p. 48 <Prémisse 1>; [Vahab., 1999], p. 350. C'est Khayyām lui-même qui précise que cette prémisse est philosophique; il ne saurait donc y en avoir de démonstration géométrique. Il l'illustre par un "exemple" fondé sur l'indéfinie divisibilité de la grandeur et le fait de pouvoir doubler infiniment toute grandeur. Etant donnée une grandeur g et un rapport a : b, ceci permet d'encadrer le rapport a : b par des rapports g : e < a : b < g : z. Khayyām en déduit – confondant densité et continuité – qu'il doit exister une grandeur d, intermédiaire, telle que g : d ≡ a : b.

3. La démarche mathématique

Ce respect textuel explique partiellement une certaine similitude des démarches mathématiques, en particulier la volonté commune à Eutocius et Khayyām de démontrer l'assertion (ii) à partir de ce qu'ils perçoivent comme une Définition dn rapport composé de rapports: la Définition {VI. 5} chez Eutocius, l'assertion (i) chez Khayyām.[126] L'un et l'autre en déduiront une extension au cas où plusieurs termes intermédiaires sont insérés entre les extrêmes.[127] Ils raisonnent sur quatre termes [(A, C, D, B) chez Eutocius;[128] (A, B, G, D) chez Khayyām] en admettant une sorte de principe de substitution "associatif" que l'on peut résumer sommairement ainsi (avec le lettrage d'Eutocius):

$$\mathrm{A : B \equiv A : D * D : B \text{ et } A : D \equiv A : C * C : D;\ d'où\ A : B \equiv (A : C * C : D) * D : B}$$
$$\equiv \mathrm{A : C * C : D * D : B.}$$

Khayyām, mais pas Eutocius, en déduit les Définitions V. 9-10 [l'assertion (iii)] sous forme d'un corollaire, faisant des rapports doublés et triplés des cas particuliers de rapports compsés de rapports, en l'occurrence composés de rapports "identiques".[129]

Les démonstrations produites par nos deux auteurs pour l'assertion (ii) se comparent moins facilement, car si elles ont à peu près la même structure formelle, elles reposent sur des principes différents. Dans la démonstration de la Proposition 1 de Khayyām, nous pouvons distinguer deux parties: la première[130] associe à tout rapport donné $(a : b)$ une grandeur dépendant d'une unité (ou "un") supposé(e) douné(e) elle aussi. Khayyām commente assez longuement cette association qui concentre les difficultés du problème. Il n'y a rien de tel chez Eutocius. La seconde partie[131] est la démontration proprement dite de l'assertion (ii) à partir des "grandeurs associées" aux différents rapports. L'auteur introduit trois grandeurs: z, d, e[132] – avec une petite différence pour la

---

II de la Syntaxe mathématique de Ptolémée. Texte grec et traduction française de l'Abbé Halma. Paris, Merlin, 1821. Réimpr. Paris, Blanchard, 1993, pp. 278-285.

126. C'est ce qu'établit la Proposition 1 de Khayyām sur laquelle il nous faudra revenir.

127. C'est ce qu'établit la Proposition 2 de Khayyām, [Dj. 1997], pp. 69-70; [Vahab., 1999], p. 380.

128. V.Comm *in SC* II 4, Ed. Heiberg, p. 126, l. 4-20; Mugler, p. 86, l. 1-11; Ver Eecke, p. 632.

129. V. [Dj. 1997], p. 70; [Vahab., 1999], p. 382.

130. V. [Dj. 1997], p. 68, l. 7 – p. 69, l. 7; [Vahab., 1999], p. 378, l. 16 – p. 380, l. 6.

131. V. [Dj. 1997], p. 69, l. 8-20; [Vahab., 1999], p. 380, l. 6-20.

132. Dans le lettrage de [Dj. 1997]. La correspondance est la suivante:
(a, b, g, z, d, e), [Dj. 1997]→(A, B, C, G, D, E), [Vahab., 1999].

tradition procédant d'Ibn Sīnā.[120]

Le cas de l'assertion (i) est nettement moins clair. Djebbar[121] la rapproche de la Définition {VI. 5} du texte grec, mais cette identification n'est pas sans soulever quelques petits problèmes:

- Le texte attribué à Euclide par Khayyām ne coïncide pas avec une traduction – même très libre – de la Df. {VI. 5}. Eu particulier on multiplie (ou augmente) les *rapports* l'un par l'autre, et non pas leurs *quantités* (πηλικότητες).[122]
- A la différence des assertions (ii) et (iii), explicitement rapportées aux prémisses du Livre V,[123] il n'est pas dit ici qu'Euclide a iuséré (i) au début du Livre VI.
- La recension d'Ibn Sīnā, à laquelle semble se référer Khayyām, ne possède pas cette Df. {VI. 5}.

Khayyām l'a donc puisé ailleurs, peut-être chez l'un de ces prédécesseurs, Eutocius, an-Nayrīzī ou Ibn al-Haytham.[124] Quoi qu'il en soit, il faut souligner une même attitude culturelle de la part d'Eutocius et de Khayyām: ni l'un ni l'autre ne cherchent à évacuer les difficultés du texte d'Euclide tel qu'il leur est parvenu, en recourant à la solution (parfois de facilité) prisée des Modernes: remettre en cause l'authenticité du texte transmis.[125]

---

120. V. [Dj., 1997], p. 12 et R. Rashed, B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Blanchard, 1999, Introduction, p. 4.

121. V. [Dj., 1997], p. 64, n. 37.

122. Rappelons que dans les deux variantes de la version attribuée à Isḥāq-Thābit, le terme "πηλικότης" est rendu par "quantité" (kimiya) ou "grandeur (maqdar). Cf. *supra*, n. 57.

123. Déjà dans l'introduction du commentaire ([Dj., 1997], p. 26, l. 6-9; [Vahab., 1999], p. 312, dernier paragraphe), rapporte l'assertion (ii) au début du Livre V.

124. Ce dernier, dans ses *Sharḥ Muṣādarāt Kitāb Uqlīdis fī al-'Uṣūl*, consacre un long commentaire à la Df. {VI. 5}. Lui aussi tente de démontrer l'assertion (ii), mais sa tentative me paraît non probante. V. *Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's* Ellements: Books I-VI. Ed., trad. anglaise et comm. B.H. Sude, Princeton University, Ph. D, 1974, pp. 218-229.

125. A cet égard l'attitude de Galilée est assez différente. Dans le petit texte très simple qu'il consacre au commentaire de notre Df. {VI. 5}, il n'hésite pas à faire dire à Sagredo que celle-ci est soit inauthentique, soit altérée. V. la traduction anglaise par S. Drake, dans *Galileo at Work*. The University of Chicago Press, 1978, Phœnix Edition, 1981, pp. 432-433. De même R. Simson (1756), dans ses commentaires à la Proposition VI. 23, se montre extrêmement sévère avec Théon d'Alexandrie auquel il attribue la responsabilité de l'insertion de cette Df. dans le texte des *Éléments*. Ce texte a d'ailleurs été traduit en français par l'Abbé N. Halma et inclus comme note additionnelle au Livre I de son édition et traduction du premier Livre du Commentaire de Théon à l'*Almageste*. V. *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur les Livres I et*

deuxième et du rapport de la deuxième à la troisième».
(iii) «Chaque fois que trois graudeurs sout proportionuelles, le rapport de la première à la troisièue est le double du rapport de la première à la deuxième. Et de même, si l'on a quatre grandeurs, et cinq grandeurs, et ainsi de suite par analogie».

L'assertion (iii) est clairemeut la combinaison, eu une seule unité de ce qui, dans le texte grec, constituent les Définitions V. 9-10. Elle ne correspond pas vraiment à aucune des deux variantes de la version attribuée à Isḥāq-Thābīt – qui distinguent les deux Définitious[115] –, mais plutôt à la combinaison que l'ou trouve dans le Ṣīfa' d'Ibn Sīnā. Pour (ii) Khayyām précise qu'Euclide l'a insérée au début du Livre *V*, comme un postulat, sans démonstration. Il s'agit d'une formulation correspondant à ce que j'appelle la composition de rapports conjoints. Rien de tel n'existe dans les manuscrits grecs à cet endroit du Livre V. Cette assertion (ii) n'existe d'ailleurs pas non plus dans la plupart des manuscrits de la version attribuée à Isḥāq-Thābīt, mais on la trouve dans des manuscrits composites[116] comme les ms Esc. 907,[117] Rabat 1101 et elle existe églement dans la version arabo-latine de Gérard de Crémone.[118] Surtout elle est présente, une fois encore, dans le Ṣīfa' d'Ibn Sīnā.[119] Les indications que nous venons de relever pour les assertions (ii) et (iii) suggèrent donc que la version des *Éléments* que consulte Khayyām a quelque parenté – du moins pour ce qui concerne les principes du Livre V – avec la recension d'Ibn Sīnā. Ceci n'est guère surprenant puisqu'on sait que Khayyām a étudié la philosophie dans la

---

115. V. *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements: *Book V.* Ed. et trad. angl. par J.W. Engroff. Cambridge Mass., Harvard University PhD. Dissertation, non publiée, 1980, pp. 62-63 et pp. 167-168.

116. Au sens qu'ils combinent à plusieurs reprises une version majoritaire, attribuée à Isḥāq-Thābīt, avec d'autres éléments parfois explicitement rapportés à la version de al-Ḥağğağ. Malheureusement aucune précision n'est donnée sur l'origine "ḥağğağienne" éventuelle de (ii).

117. V. [Engroff, 1980], p. 167, n. 37 de l'apparat critique et son commentaire p. 286. La formulation dans ces deux mss est cependant légèrement différente: «Etant données trois grandeurs (aqdār) quelconques, le rapport de la première à la troisième est comme le rapport de la première à la deuxième doublé par (muthannā bi) le rapport de la deuxième à la troisième»(Communication personnelle, A. Djebbar).

118. «Et omnium trium quantitatum proportio prime ad tertiam est sicut proportio prime ad secundam duplicata cum proportione secunde ad tertiam». V. Ed. Busard, p. 117, l. 57-60.

119. V. [Dj., 1997], p. 64, n. 38.

2. Les données textuelles

S'il est en revanche un point commun à nos deux auteurs, c'est évidemment leur dépendance vis-à-vis d'un certain état du texte des *Éléments* d'Euclide qui n'est pas tout-à-fait celui que nous possédons aujourd'hui à la suite de l'édition critique du texte grec par Heiberg. Celui que connaît Eutocius correspond à ce qu'on trouve dans certains manuscrits grecs: la Proposition sur le rapport des parallélogrammes équiangles est la vingt-troisième du Livre VI – ce n'est pas le cas dans les versions médiévales arabes et arabo-latines – et la Définition inauthentique {VI. 5} existait déjà dans le texte d'Eutocius (sans que nous puissons préciser sous quel numéro) avec la même formulation.[113] La différence avec l'édition critique est minime et tient à une différence d'appréciation: Eutocius n'a pas soupçonné de la Df. {VI. 5}. Au contraire, il a essayé de fonder sur elle la pratique des rapports composés de rapports, en particulier ce que j'ai appelé la composition de rapports conjoints.

L'état textuel des *Éléments* auquel auquel se réfère Khayyām est plus incertain. On sait que le traité d'Euclide a été traduit plusieurs fois en arabe dès le IX^e siècle, que différentes recensions ont été composées à partir de ces traductions, que les différentes versions se sont mutuellement contaminées... . En absence d'éditions critiques de ces textes on comprend que les deux traducteurs français du *Commentaire* restent très discrets sur la version des *Éléments* à laquelle Khayyām avait accès. Cette question dépasse largement ma compétence mais quelques remarques limitées au sujet de la Df. {VI. 5} sont nécessaires. Au début de son troisième chapitre Khayyām cite Euclide à trois reprises:

(i) «si l'on prend deux rapports et qu'on les multiplie l'un par l'autre, on obtient un certain rapport; et ce rapport sera composé de ces deux rapports par l'autre).[114]

(ii) «Chaque fois que l'on a trois grandeurs homogènes, le rapport de la première à la troisième sera composé du rapport de la première à la

113. Rappelons que la place d'insertion de cette Df. n'est pas la même dans tous les mss grecs dans lesquels elle existe et que la formulation contenue dans le *Commentaire* de Théon à l'*Almageste* et la scholie n°4 à la Df. {VI. 5} ne coïncide pas tout-à-fait avec le texte d'Eutocius-Heiberg. Cf. *supra*, Partie III, 2 et IV, 2.

114. Trad. [Vahab., 1999], p. 372, l. 8-10. La version [Dj., 1997], p. 64, l. 7-10 est substantiellement équivalente malgré quelques écarts. En particulier, au lieu de «multiplier l'un par l'autre», Djebbar dit «augmenter l'une par l'autre autant de fois»; le féminin vient de ce qu'il utilise "proportion" et non "rapport". Les deux citations qui suivent sont également empreuntées à [Vahab., 1999], p. 372, l. 12-18. Cf. [Dj., 1997], p. 64, l. 12-17.

culier que l'arithmétique et la géométrie sont des disciplines distinctes qui ne sont pas dans un rapport de science hégémonique à science subordonnée, même si la géométrie utilise quelques notions empruntées à la science du nombre. La discussion est manifestement d'inspiration aristotélicienne. Khayyām observe à juste titre que la conjonction de ces deux spécialités est nécessaire pour le Livre X des *Éléments*, ce qui justifie l'insertion de Livres arithmétiques dans le traité d'Euclide dans la mesure où celui-ci visait l'autonomie. C'est l'occasion d'une critique (somme toute plutôt modérée) de la progression euclidienne à laquelle j'ai déjà fait allusion:[110] d'un point de vue logique, l'auteur des *Éléments* aurait dû faire précéder les questions géométriques par les questions arithmétiques.

L'aparté sur l'indépendance relative de l'arithmétique et de la géométrie rappelle la discussion aristotélicienne de l'incommunicabilité des genres.[111] Mais elle contient aussi une critique implicite de l'avertissement d'Eutocius au lecteur de son *Commentaire* à Apollonius. Celui-ci suggérait que la théorie des proportions, et les démonstrations qui en procèdent, sont d'abord *arithmétiques* et qu'elles constituent à la fois une origine historique et un fondement logique à leur usage en géométrie. Manifestement Khayyām laisse entendre qu'il ne partage cet optimisme un peu simple. Compte-tenu du lien assez ténu que cet aparté a avec ce qui précède et suit dans l'exposé de Khayyām, j'aurais tendance à penser qu'il doit son insertion à la volonté de se démarquer d'Eutocius. Autrement dit la structure de cette partie du *Commentaire* serait un indice supplémentaire du fait que Khayyām a eu accès à la version apollinienne des remarques de son prédécesseur grec. A un niveau contextuel un peu plus général, une autre divergence entre le Grec et le Persan réside dans le fait que le premier semble adhérer à une philosophie mathématique d'inspiration (néo)-platonico-pythagoricienne tandis que les *Seconds Analytiques* d'Aristote constituent la référence de Khayyām.[112]

---

110. V. *Supra*, n. 100.

111. V. par exemple Aristote, *An. post.*, I. 7, 75 a38-b20.

112. C'est très clair dans la préface du commentaire qui mentionne explicitement l'ouvrage sous le titre «*Livre de la démonstration*». V. [Dj., 1997], p. 23, l. 7; [Vahab., 1999], p. 308, l. 6. Khayyām fait allusion à ce qui est pour nous *An. post.*, I. 10, 76 a 30-77 a 4 dans l'édition du texte grec.

d'Apollonius.[104] Notre lecteur n'en sera sans doute pas étonné. Il est peut-être significatif que Khayyām ne mentionne pas ici Archimède et son problème *SC* II. 4,[105] ni d'ailleurs Nicomaque et les différents commentateurs. Souvenons-nous qu'Eutocius mentionne les différents protagonistes de cette histoire seulement dans son commentaire à *SC* II. 4, mais pas dans celui à Apollonius I. 11. Il se pourrait donc que Khayyām ait eu seulement accès à cette version passablement abrégée du commentateur d'Ascalon. Cela expliquerait qu'il en fasse finalement assez peu de cas.

Comme son devancier grec, l'illustre Persan prend en compte la totalité du "quadrivium pythagoricien" mais avec une importante différence: il oppose d'une part les sciences mathématiques du "continu", que sont la géométrie et l'astronomie et, d'autre part, les disciplines du "discret": arithmétique et musique.[106] Il affirme que la composition utilisée en Musique est autre, qu'il s'agit plutôt d'une combinaison[107] numérique et de séparation – qui n'est elle-même qu'un certain type de combinaison.[108] Il remarque qu'Euclide en a parlé dans son huitième Livre, là encore dans une Proposition sans usage pour la suite du traité. Il est bien dommage qu'il ne nous donne aucune explication sur cette différence qui lui paraît importante. Pour reprendre les termes de la discussion grecque la différence porte-t-elle sur le fait que, dans les rapports numériques, on peut toujours très facilement se ramener à des rapports conjoints, sans utilisation de la quatrième proportionnelle – prémisse importante pour l'approche de Khayyām – ou bien est-ce parce que la composition des rapports en géométrie implique l'intervention de "quantités de rapports" non numériquement exprimables? Khayyām se contente de renvoyer à un traitement antérieur sur l'*Explication des difficultés du Livre sur la musique.*[109]

Quoi qu'il en soit, cette opposition lui permet une sorte d'excursus sur les relations entre les sciences mathématiques. Il souligne en parti-

104. V. [Dj., 1997], p. 66, l. 9-19; [Vahab., 1999], p. 374, dernier paragraphe.

105. Problème qu'il connaît cependant puisqu'il le mentionne au début de sa préface au *Traité d'algèbre et d'al-muqābala.*

106. V. [Dj., 1997], p. 66, l. 20 – p. 67, l. 2; [Vahab., 1999], p. 376, l. 1-15.

107. Khayyām se fonde sur la distinction des termes "ta'līf" et "tarkīb". V. [Vahab., 1999], p. 376.

108. Séparer un rapport d'un rapport n'est en effet rien d'autre que de composer celui-ci avec le rapport inverse de celui-là.

109. J'iguore si cet écrit – différent du traité sur les genres existant dans les quartes – nous est parvenu.

selon son compterendu toutes les sciences du "quadrivium pythagoricien" sont concernées par le problème des rapports composés, et cinq traditions textuelles antiques des époques hellénistiques et romaines au moins sont "contaminées" dans cette affaire: Euclide, Archimède, Apollonius, Ptolémée et Nicomaque, sans oublier les commentateurs.

V. Le troisième chapitre du *Commentaire* de Khayyām

1. L'aspect contextuel

Quoiqu'il s'agisse d'expliquer les prémisses indûment admises par l'auteur des *Éléments*, Khayyām n'ignore pas les différents aspects du problème. Euclide, remarque-t-il, utilise la composition du (ou des?) rapports(s)[100] dans la Proposition VI. 23 – au sens de la multiplication de l'un des rapports par l'autre[101] – mais celle-ci n'a aucun emploi dans la suite du traité. Il en est de même pour ce que sont, pour nous, les Df. V. 9-10 (rapports doublés et triplés) – perçues par Khayyām comme un postulat – à la seule exception de leur mention pour les rapports des côtés des surfaces et solides semblables,[102] ce qui n'était même pas nécessaire.[103] Dans ces conditions on peut s'interroger sur les motivations d'Euclide à insérer de telles Propositions et prémisses. A la différence de certains modernes, Khayyām ne va pas jusqu'à suspecter l'authenticité de ces séquences; du moins n'affirme-t-il rien de tel.

Mais, qu'il cherche à justifier l'insertion euclidienne ou à souligner l'intérêt de son propre troisième chapitre, Khayyām insiste sur l'importance du problème du rapport composé de rapports pour toutes les questions délicates en géométrie et en astronomie. Il mentionne en particulier Ptolémée et sa célèbre figure sécante, ainsi que les *Coniques*

---

100. Divergence singulier/pluriel entre [Dj., 1997], p. 65, l. 32 et [Vahab., 1999], p. 374, l. 19.

101. Khayyām ajoute certainement cette précision pour différencier la composition des rapports, au sens de la Df. {VI. 5}, de la composition *d'un* rapport (*σύνθεσις λόγου*), introduite dans la Df. Heiberg V. 14 (V. 15 dans la version Isḥāq-Thābit et chez Gérard de Crémone, V. 13 dans la tradition adélardienne), manipulation qui fait passer du rapport (a : b) au rapport (a + b : b).

102. Allusion aux Propositions VI. 19-20; XI. 33; XII. 8, 12, 18 (numérotation Heiberg).

103. Euclide aurait effectivement pu utiliser les rapports des carrés (resp. des cubes) décrits sur les côtés ou les diamètres, plutôt que les rapports doublés (resp. triplés) des côtés ou des diamètres.

Pour conclure sur les prédécesseurs grecs de Khayyām, en particulier Eutocius, revenons à la remarque apaisante, insérée à la fin du commentaire à la Proposition I. 11 des *Coniques*,[98] pour rassurer le lecteur inquiet du caractère arithmétique de la preuve justifiant la composition des rapports conjoints. Cette adresse au lecteur est un mixte étonnant de modernité et de passéisme:

• elle témoigne d'une inflexion significative dans les mathématiques grecques qui trouvera son aboutissement avec Dedekind, si je puis me permettre cet anachronisme. Alors que les Anciens ont semble-t-il admis la supériorité *logique* de l'arithmétique sur la géométrie (parce que ses principes sont plus simples), ils n'en ont pas moins établi et reconnu la primauté "opératoire" de la géométrie. La structure des *Éléments* d'Euclide[99] en est le témoignage le plus éclatant. Pour Eutocius la "fondation" est à chercher du côté des nombres, et c'est en ce sens qu'il ne peut-être pas tout-à-fait incongru d'évoquer Dedekind et l'entreprise d'artihmétisation du XIX^{e} siècle.

• En même temps il est assez clair qu'Eutocius, élève d'Ammonius à Alexandrie, a la conviction de renouer, par l'intermédiaire de Nicomaque de Gérase, avec une antique tradition pythagoricienne. Dans ce mouvement perçu comme un retour aux sources du pythagorisme et du platonisme, tant en mathématique qu'en philosophie, le prestige de l'arithmétique est considérable et il semble que l'autorité des œuvres de Nicomaque y soit pour quelque chose.

Cela dit, Eutocius est le point d'aboutissement de plusieurs courants:

---

98. V. *infra*, Annexe, Texte 1, §§j-k.

99. Particulièrement frappante est la structure globale du traitement eculidien de la proportionnalité dans les Livres V, VII et X. Euclide n'introduit pas d'emblée la distinction entre les rapports exprimables – c'est-à-dire dicibles en termes de nombres – et ceux qui ne le sont pas. Dans la définition de la notion de "rapport" (Df. V. 3), Euclide se cantonne à un niveau très abstrait et dans l'ensemble du Livre V il se contente d'établir les propriétés générales de la proportionnalité. Dans les Livres arithmétiques les rapports numériques sont bien introduits et étudiés mais aucun exemple, sinon "partie" et "multiple", n'est donné. La structure des suites de nombres en proportion (ou en proportion continue) dans un rapport donné est élucidée dans une séquence de Propositions des Livres VII et VIII reposant sur les Définitions VII. 3-5 et 21 mais les problèmes que pose cet ensemble ne sont pas minces. Finalement la connexion entre rapports de grandeurs et de nombres n'est établie qu'au Livre X. La difficulté que représente l'existence de rapports non exprimables n'est explicitée (et encore) qu'en ce point du traité et l'on comprend que tous les commentateurs – al-Māhānī, an-Nayrīzī, Ibn al-Haytham, al-Ǧayyanī, 'Omar Khayyām, Campanus and, last but not the least, Clavius anticipent sur cette question dès le Livre V. L'exposé euclidien apparaît, à la plupart de ses lecturs médiévaux et renaissants, comme antipédagogique.

le lien qui existe entre le procédé de calcul des rapports composés de rapports et la nomenclature desdits rapports.[97]

A partir de ces considérations une Définition du genre de notre Df. {VI. 5} a pu être forgée et appliquée d'abord aux rapports numériques pour être ensnite indûment généralisée, et insérée dans le Livre VI des *Éléments*, puisqu'Euclide n'avait pas pris la peine de préciser ce qu'il entendait par "rapport compsé de rapports". Si tel est le cas, autant que des considérations calculatoires, ce sont aussi des préoccupations "fondationnelles" et lexicologiques qui sont à l'origine de notre Définition {VI. 5}. Ces deux explications ne sont d'ailleurs pas contradictoires; l'enseignement a pu être le lieu commun de leur investissement mutuel.

Pour ce qui concerne les considérations calculatoires je serai porté à mettre davantage l'accent sur le développement du calcul fractionnaire, et l'élaboration de la notion de "fraction générale" par Diophante, même s'il est très difficile d'en décrire le développement et le degré exact d'explicitation, plutôt que sur les calculs astronomiques. Ces derniers se font à l'aide du système sexagésimal (précisément pour éviter la manipulation des fractions), et il me semble qu'on est alors loin de la problématique de la dénomination. En revanche ces calculs ont pu tenir le rôle que leur reconnaît Itard, à un niveau plus général, en favorisant l'assimilation des rapports de grandeurs à des quantités, ce dont témoigne toute cette histoire, comme je l'ai souligné à plusieurs reprises.

Quant aux préoccupations "fondationnelles" et lexicologiques, esquissées dès l'époque classique, elles intensifient – dès la fin de l'Époque hellénistique avec Géminus de Rhodes –, la connexion intime établie entre les notions les plus fondamentales des mathématiques et la réflexion philosophique, l'importance des considérations classificatoires, par le biais d'éclaircissements terminologiques, la mise au point des nomenclatures. On peut, comme Tannery, y voir l'indice d'une décadence des mathématiques. C'est surtout l'indice d'une inflexion dans l'inscription sociale de ces sciences: leur capture quasi-complète par la philosophie. Elles se voient confinées à une rôle instrumental et pédagogique dans l'enseiguement dispensé par les écoles philosophiques et le commentaire en est la forme littéraire adéquate.

* * *

97. C'est ce lien qu'explicitent les scholies VI, n°3, 8, 10 (les calculs sont souvent menés en nombres sexagésimaux).

d'une partie qui doit être considérée dans les pythmènes, pas dans les plus grands.[93]

• L'exposé de la génèse des différents types d'épimère (XIX, 1) est incomplet [limité aux couples de la forme (2n-1, n)]. Nous n'apprendrons rien sur la dénomination des épimères dans la suite de l'ouvrage. On peut remarquer au passage que le paragraphe que le paragraphe que Théon consacre aux pythmènes des rapports (l. II, §XXIX) ne fait aucun lien avec la dénomination.

• En revanche la relation multiplépimore (XXII, 1-2) permet à Nicomaque d'expliquer que le rapport est "composé" de deux parties, de même que son nom, la première partie étant dénommée à partir de la quantité du multiple contenu, la deuxième étant dénommée à partir de la partie (comme un épimore ou un sous-épimore).

Ainsi l'auteur de l'*Introduction arithmétique* n'a finalement traité de la dénomination que pour les rapports paronymes (entièrement ou partiellement) d'une partie donnée: la moitié, le tiers, le quart, ..., et donc d'un nombre donné.[94] Et donc la situation, pour les rapports numériques, n'est pas si différente de celle que l'on observe pour les nombres eux-mêmes, dans la classification des chapitres VIII à XII de la première partie du Livre I.[95] Pour incomplètes qu'elles soient, les remarques de Nicomaque sur la dénomination des rapports d'une part, les spéculations sur les intervalles musicaux et leur conjonction d'autre part ont peut-être constitué autant d'invitations à "étendre" la notion de quantité paronyme d'un rapport,[96] et à étudier systématiquement

---

93. *τὸ« μόριον, οὗ παρώνυμος ἕκαστος ἐστι τῶν ἐπιμορίων ἐν τοῖς ἥττοσι θεωρεῖται > τῶν πυθμένων <, ἐν δὲ τοῖς μείζοσιν οὐδαμῶς»*, Ed. Hoche, p. 50, l. 19-21. "*τῶν πυθμένων*" manque (avec raison) dans le ms *C*. Une remarque substantiellement équivalente se trouve chez Théon de Smyrne, *Expositio*, L. II, §XXIV.

94. La problématique de la désignation des parties paronymes ou homonymes à un nombre existe aussi dans les Propositions VII. 37-39 des *Éléments*.

95. Les pairs sont classés en pairement-pairs, pair-impairs et impairs-pairs selon qu'ils admettent respectivement toutes leurs parties pairement-paires par la dénomination (*ἀρτιώνυμον*) et par la puissance (*ἀρτιοδύναμον*), toutes leurs parties sont d'un nom opposé à la puissance (*ἐναντιώνυμον τῇ δυνὰμει*), certaines parties d'un nom opposé à la puissance mais d'autres non contraires. Parmi les impairs on distingue les nombres premiers et non composés, qui n'ont comme seule partie que la partie paronyme (*τὸ παρώνυμον μόριον*), autrement dit l'unité, tandis que les nonpremiers auront des parties hétéronymes (*τὸ ἑτερώνυμον μόριον*).

96. Un exposé déjà plus sytématique de l'*ὀνομασία* des rapports se trouve dans le commentaire de Jamblique. Mais j'ignore totalement ce qu'il en a été de la transmission de ce texte.

Or nous avons vu qu'Eutocius se réfère précisément au premier Livre du *Sur la Musique* de Nicomaque ainsi qu'au commentaire de Héronas à l'*Introduction arithmétique* (du même Nicomaque). N'ayant plus accès ni à l'un, ni à l'autre, nous devrons nous contenter des indications que livre l'*Introduction arithmétique.* Remarquons pour commencer que le chapitre V du Livre II est consacré à ce que Nicomaque appelle les "synthèses" des rapports" (*αἱ τῶν λόγων συνθέσεις*). Pour l'essentiel il montre que l'on obtient la série des rapports multiples comme composés des rapports épimores. Il souligne que le rapport double est composé de l'hémiole et de l'épitrite, résultat établi dans la proposition 6 de la *Division du canon* attribuée à Euclide et que Nicomaque verse d'ailleurs au crédit de Pythagore dans son *Manuel d'harmonique.*[90] Il mentionne aussi l'idée inverse de "dénouer" (ou dissocier, *διαλύεσθαι*) un rapport en deux rapports. Mais il n'y a, dans ce contexte de la synthèse des rapports, *aucune référence* aux modalités de leurs désignations.

Ce sont les deux classifications, celle des nombres eux-mêmes – en fait des pairs[91] – et celle des relations numériques, en corrélation avec la détermination de leur "pythmène" (ou des "nombres pythmènes" dans un rapport donné – ce que nous appelerions le représentant minimal ou irréductible d'un rapport –), qui donnent l'occasion à Nicomaque de développer des considérations sur leurs désignations.[92] Mais celles-ci sont nettement moins importantes que ce que les remarques d'Eutocius pouvient laisser espérer (craindre?):

- Au Livre I, chapitre XVII, il explique comment chaque espèce du "plus peti que" sera désignée à partir de l'espèce correspondante du "plus grand que" grâce à l'adjonction du préfixe "sous" (*ὑπό*).
- Au chapitre XVIII les multiples sont présentés, ainsi que leurs premières sous-espèces: doubles, triples, quadruples, quintuples, mais sans même qu'il soit précisé qu'ils sont "paronymes" des termes successifs de la suite des entiers.
- C'est au chapitre XIX («Relation épimore et sous-épimore») que nous trouvons les indications les plus nettes. Le §6 introduit la notion de "nombres pythmènes" (les premiers dans une relation donnée) et au §7 Nicomaque précise que chacun des nombres épimores est paronyme

90. Au Ch. 6. V. éd. C. Jan, p. 248, l. 1-6; trad. Barker, p. 257.

91. Dans les Chapitres VIII à XII du premier Livre de son *Introduction.*

92. On en trouve également quelques bribes dans l'ouvrage de Théon de Smyrne [Partie, I, ch. VIII (Df. des nombres pairement-pairs); Partie II, Ch. XXIII (partie et multiple homonyme d'un nombre.)

ses scholies au Livre de l'*Almageste*.[87] Il n'y a donc aucun doute qu'il connaît l'aspect astronomico-calculatoire du dossier de la "πηλικότης" que j'ai présenté dans le paragraphe précédent. Pourtant ce n'est celui sur lequel il met l'accent, en particulier quand il s'agit d'expliquer la signification de terme: selon lui, la "πηλικότης" d'un rapport «se dit évidemment du nombre duquel le rapport donné est *paronyme*». C'est donc une autre problématique qui entre en scène, celle qu'à la suite des mathématiciens médiévaux et renaissants d'expression latine nous pouvons appeler «problématique de la *dénomination*».

Nommer et classer les choses sont des manières de les connaître; cet aspect "linguistique" de l'activité mathématique peut paraître marginale, ou philosophique, au mathématicien moderne qui privilégie habituellement les aspects opératoires. Mais il n'en est pas de même dans le cadre des mathématiques anciennes qui s'expriment dans la langue naturelle. Dans le cas particulier des Grecs on peut ajouter que l'interaction entre mathématiques et philosophie est parfois assez forte, tout particulièrement dans les manuels d'inspiration néo-pythagoricienne du début de notre ère (Nicomaque, Théon de Smyrne, Jamblique...); les considérations classificatories n'y sont pas rares.[88] Mais les relations entre mathématiques et langage existent également chez des auteurs nettement plus techniques comme Euclide. Ainsi, même si cela est un peu perdu de vue à cause du filtre des traductions latines puis vernaculaires, les grandeurs "rationnelles" du Livre X des *Éléments*, ou les rapports "rationnels" entre grandeurs, désignent initialement des mesures, ou des relations, que l'on peut *exprimer* numériquemnt; pour ma part je traduis non pas "rationnelle" mais "exprimable". La même problématique comme la *Division du canon* attribuée à Euclide. Dans ce cas l'existence d'un nom simple pour un rapport numérique est censé correspondre à une propriété musicale (la consonance) de l'ntervalle associé.[89]

---

87. V. *infra*, annexe, Teste 1, §b.

88. L'exposé d'une classification des relations numériques en genres et espèces est incontestablement l'apport essentiel de la deuxième partie du Livre I de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque (Ch. XVII-XXIII). V. mon commentaire dans Euclide, les *Éléments*, Paris, PUF, 1994, vol. 2, pp. 483-487. On trouve également des éléments de cette classification dans l'*Expositio* de Théon de Smyrne (L. II, §XXII-XXIV). Celui-ci cite abondamment Adraste le péripatéticien, ce qui amène à penser que cette classification n'est en rien un trait propre à la doctrine pythagoricienne.

89. V. mon commentaire dans Euclide, les *Éléments*, Paris, PUF, 1998, vol. 3, pp. 36-37.

remplacer les produits A.C (resp. B.D) par le rectangle contenu par les droites A, C (resp. B, D) et dans la Proposition VI. 23, Euclide énonce justement que les parallélogrammes équiangles (donc les rectangles) ont comme rapport mutuel le rapport composé à partir des côtés. Nous avons vu que ce sont précisément les deux seuls résultats que les *Éléments* ont retenu sur la composition des rapports! Tout au plus faut-il admettre la possibilité d'un traitement mêlant nombres et grandeurs, mais je crois pas que cette postulation implicite – sur laquelle nos logiciens contemporains insistent tant – ait beaucoup gêné les Anciens. Qu'il s'agisse des usages géométriques de la notion de "rapport composé de rapports" à l'œuvre chez Euclide, Archimède, Apollonius, fondés du point de vue opératoire sur le cas conjoint et le théorème δι' ἴσου, ou que l'on considère le point de vue de l'astronome-calculateur, rien n'oblige en effet à définir explicitement l'expression "rapport composé de rapports", c'est-à-dire le verbe "συγκεῖσθαι", parfaitement clair par ailleurs, à l'aide de la notion manifestement incertaine de "quantité (πηλικότης) d'un rapport". D'ailleurs ni Ptolémée, ni ses commentateurs n'explicitent les "quantités" des rapports de nombres séxagésimaux qu'ils manipulent autrement.[86] Si l'on se rappelle les exemples de Théon, seuls quelques cas très simples peuvent être interprétés en termes de "πηλικότης", quand on parle des rapports double (πηλικότης = 2), triple (πηλικότης = 3), hémiole (rapport 3k : 2k, πηλικότης = 1+1/2)... . Dans ces conditions on ne voit donc pas bien l'intérêt de la Définition {VI. 5}. Pourtant la nécessité d'insérer une telle prémisse dans les *Éléments* a été ultérieurement ressentie. La définition interpolée doit donc relever *aussi* d'autres questionnements. A cet égard le témoignage d'Eutocius dont nous sommes partis fournit de précieuses indications, en particulier sur les sources d'inspiration de cette entreprise.

3. Πηλικότης et désignation des rapports chez Nicomaque

Dans son commentaire à *SC* II. 4 d'Archimède, Eutocius cite Pappus et Théon; dans son texte sur la Proposition I. 11 des *Coniques*, il signale qu'il a également traité des rapports composés de rapports dans

a priori des entiers, mais on peut les convertir en "secondes" pour se ramener à ce cas.

86. Ils n'utilisent même pas la règle que l'on peut dériver de Eucl., VIII. 5; ils reviennent au cas de rapports conjoints par la prise de nombre (rationnel) quatrième proportionnel et l'intercalation de terme intermédiaire. V. par ex. *Theo in Alm.*, ed. Rome, p. 589, l. 5 – p. 596, l. 4, Domninos dans [Knorr, 1990], pp. 202-207, *Introduction anonyme à l'Alm.*, dans [Knorr, 1990], pp. 185-190.

de la Df. {VI. 5} dans les *Éléments*, il me semble que l'hypothèse la plus économique est d'admettre que la version la plus ancienne est celle du lemme de Théon, dans le commentaire à l'*Almageste*, introduite dans les scholies des manuscrits euclidiens comme on le voit dans ***B***, ***q*** (avec perte de Εἶς). Ultérieurement, mais avant Eutocius et sans doute même Domninos de Larissa, une partie de cette scholie a été insérée dans le texte lui-même et transformée en Définition, avec une nouvelle mutilation (perte de *πηλικότητα λόγου*). Pour sa part Heiberg avait émis l'hypothèse qu'il puisse s'agir d'une interpolation préthéonienne.[83] Cela me paraît difficile à concilier avec le fait que les manuscrits grecs procédant de l'édition de Théon, mais aussi le ou les modèles de la version gréco-latine (que ne connaissait pas Heiberg) et les manuscrits (grecs) consultés par Thābīt divergent les uns des autres. A cause de son absence du texte principal de ***P***, il me semble plus raisonnable de penser – avec Jean Itard[84] – qu'il s'agit d'un ajout théonin (n'oublions pas que Théon a réédité les *Éléments*), voire post-théonin. Itard, même s'il n'a pas relevé le lemme de Théon, ni sa coïncidence partielle avec la scholie mentionnée, considérait donc que l'interpolation de la {Df. VI. 5} tirait son origine du développement des calculs astronomiques.

Mais, à bien y réfléchir, cette explication, du moins à elle seule, est un peu courte. Pour le développement du type de calcul utilisé en astronomie, il est suffisant de posséder des règles de formation des rapports composés à partir des termes des rapports "composants". La règle utile, en effet, est que le composé du rapport A : B et du rapport C : D est le rapport A.C : B.D. Or ceci est démontré dans la Proposition VIII. 5 des *Éléments* pour les nombres entiers.[85] Pour les segments de droites, il faut

actéristiques de la langue de Théon, *op. cit.*, p. LXXXVI) ne se retrouve pas dans la scholie. Cf. *Theo in Alm.*, p. 535. 7 et *EHS*, V, 2, p. 6. 17. La scholie a aussi perdu quelques formules de transition, comme celle qui introduit le troisième cas de figure ('Αλλὰ *δὴ πάλιν ἔστω τὸ* ΓΔ *ἑκατέρου τῶν* AB, EZ *μεῖζον*, *Theo in Alm.*, p. 534. 26), d'ailleurs non traité dans la version du ms. **B**.

83. *EHS*, II, p. 39.

84. *Les Livres arithmétiques d'Euclide*, Paris, Hermann, coll. Histoire de la pensée, X, 1961, p. 63. Très intéressante aussi est sa remarque que le texte des Df. {VI. 5-6} se trouve dans le *Traité du quadrilatère complet de* Naṣīr al-Dīn aṭ-Ṭūsī et que Pacioli dit avoir trouvé la Df. VI. 5 dans un mannscrit de l'*optique* de Witelo, fortement inspirée par celle d'Ibn al-Haytham. L'énocé de la Définition {VI. 5} est en effet absente des versions médiévales latines majoritaires des *Éléments*, celles de la tradition adélardienne et en particulier de Campanus. Mais il se pourrait qu'elle ait trouvé unécho par d'autres canaux de transmission dont celui des traités optiques.

85. Évidemment les nombres utilisés par les astronomes dans leurs tables ne sont pas

• Théon et le texte tardif des *Éléments* procèdent d'un modèle commun qui est donc antérieur au milieu du IV^e siècle de notre ère.

La première hypothèse est la moins vraisemblable. Le texte que nous trouvons dans le *Commentaire* de Théon à l'*Almageste* est plus précis et plus complet que celui que l'on trouve dans les manuscrits grecs des *Éléments* et qu'a édité Heiberg:
– présence chez Théon de l'ajectif numéral "Εἷς" ("Un") qui s'oppose à "*δύο*" ("deux") pour marquer l'unification que constitue une "composition";
– clause généralisante "*ἢ καὶ πλειόνων*" ("mais aussi plus")
– "*τινα πηλικότητα λόγου*" ("une certaine taille de rapport") chez Théon, au lieu du simple indéfini "*τινα*" ("quelque chose") des *Éléments*, lequel ne permet pas de savoir s'il est produit un rapport ou une quantité de rapport.

Si l'on examine les différentes "citations" de la Df. {VI. 5} que nous livre la tradition grecque, nous constatons deux choses:
• que le texte abrégé et détérioré que l'on trouve dans les manuscrits grecs des *Éléments* est également celui que connaissent Domninos de Larissa (V^e siècle de notre ère), l'auteur de l'*introduction anonyme à l'*Almageste[78] et Eutocius, c'est-à-dire les auteurs les plus tardifs.[79]
• qu'il existe une version "intermédiaire", sans "Εἷς", mais avec la clause généralisante et la précision "*τινα πηλικότητα λόγου*" dans l'une des nombreuses scholies à la Définition {VI. 5} publiée par Heiberg,[80] sous le n°4, et qui se trouve dans les manuscrits **B** et **q**.

Ladite scholie inclut d'ailleurs non seulement cette "citation" de la Df. {VI. 5}, mais aussi la plus grande partie du Lemme de Théon. La comparaison des deux textes ne laisse aucun doute à ce sujet: la manière d'énoncer la Définition est quasi-identique; on y trouve la même distinction de cas de figures[81] et les mêmes exemples; une formulation quasi-identique des justifications.[82] Par conséquent, pour expliquer la présence

78. Pour ces deux textes, la référence aux *Éléments* – à la différence d'Eutocius – n'est pas explicite. Elle est cependant probable, surtout pour le second qui commence par une citation de la Df. V. 3 (version de Théon), explicitement rapportée aux *Éléments*, suivie d'une seconde référence au même traité, juste avant de citer la Df {VI. 5}. Dans son édition, Knorr n'hésite d'ailleurs pas à intercaler en titre [Definition of compound ratio, from the Elements]. *Op. cit.*, p. 186.

79. V. *infra*, Annexe, Texte 2, **d**, **e**, **f**, **g**.

80. V. *EHS*, V, 2, p. 5, l. 1 – p. 6, l. 20.

81. Mais la scholie dans le ms **B** n'inclut que les deux premiers cas de figures.

82. Mais l'expression "*ὡς ὅτι*" (que Rome considère comme l'un des traits car-

donné?».

Lorsqu'il explique ce chapitre 13 du premier Livre de l'*Almageste*, Théon d'Alexandrie (IVe siècle de notre ère), éditeur d'Euclide et infatiguable commentateur de Ptolémée, propose une sorte de Lemme[76] qui commence de la manière suivante:

«Εἷς λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου»(Un rapport est dit être composé à partir de deux rapports, ou plus, quand les tailles des rapports, multipliées, produisent une certaine taille de rapport).

Il explique ensuite que si les rapports AB : CD et CD : EF sont donnés, AB : EF est composé des rapports AB : CD et CD : EF, ce que j'ai appelé la composition de rapports conjoints. Sa démonstration distingue trois cas de figure, selon que l'on a:

(i) AB > CD > EF (CD est un "vrai" terme moyen entre AB et CD)
ou (ii) CD < AB et CD < EF ou (iii) CD > AB et CD > EF.

Mais ses justifications sont inductives – ce que lui reprochait Eutocius – et reposent à chaque fois sur un exemple:

(i) si AB est le double de CD et CD le triple de EF, AB est le sextuple de EF;
(ii) si AB est le triple de CD et CD la moitié de EF, AB est hémiole de EF (3k : 2k);
(iii) si AB est la mi-partie de CD, et CD épitrite de EF (CD : EF :: 4k : 3k), AB : EF est le rapport uphémiole (2k : 3k).

De plus Théon n'explicite même pas les "πηλικότητες" [certaines sont fractionnaires] des différents rapports qu'il manipule.[77] Il ne doune d'ailleurs aucune explication sur la signification de cette expression.

Quoi qu'il en soit, le lecteur aura certainement reconnu dans la phrase d'ouverture notre suspecte Définition {VI. 5} et trois explications, au moius, sout possibles:

- Théon cite Euclide. Dans cette hypothèse on pourrait défendre l'authenticité de la Df. suspectée;
- La version du Lemme de Théon est à l'origine de la Df. interpolée dans les *Éléments*;

76. Texte grec dans *Commentaires sur l'Almageste*. Ed. A. Rome. L. I-II, Studi e Testi n°72. Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936, p. 532, l. 1 – p. 535, l. 9. Ce "lemme" est placé au milieu du Ch. 13, lui-même mutilé dans tous les manuscrits du *Commentaire* de Théon sauf un, le Laurentianus 28, 18 que Rome, désigne par le sigle *L*, et qu'il considère comme le témoin le plus fidèle. La palace de ce lemme dans les différents mss, les mutilations qu'il a subies dans certains, pourraient jeter quelques doutes sur son authenticité. Toutefois Rome conclut dans ce sens. V. *op. cit.*, p. 532. V. *infra*, Annexe, Texte 4.

77. V. *infra*, Annexe, Texte 4.

tercalant un terme intermédiaire et en n'uttilisant que le cas du rapport composé de rapports conjoints, ainsi que des substitutions de rapports identiques.

Rien de très nouveau dans cette affaire, mais dans la partie calculatoire (l'établissement des tables numériques), les notions de "rapport compsé de rapports" et de "*πηλικότης*" vont, indirectement, se rencontrer dans un même contexte mathématique. Comme je l'ai déjà dit, Ptolémée lui-même n'utilise le terme "taille" que pour des grandeurs géométriques, cordes et arcs de cercle. On pourrait donc croire qu'il s'agit d'un synonyme de "grandeur" ou de "longueur",[73] mais il faut observer que la plupart des occurrences du terme, assez nombreuses,[74] renvoient à cette taille quand celle-ci est numériquement exprimée en fonction d' "unités de mesure": les arcs sont exprimés à l'aide de la 360ᵉ partie de la cironférence complète du cercle, les cordes à l'aide de la 120ᵉ partie du diamètre. Autrement dit la "*πηλικότης*" des grandeurs s'insère en quelque sorte dans un contexte métrologique[75] ou, du moins, comme réponse à une question (sous-entendue) du type «"combien grand" est...?», «quelle est la taille de?», que l'on pose en principe à l'aide de l'adjection interrogatif "*πηλίκον*". Aux grandeurs géométiques, droites et arcs de cercles vont être substituées des valeurs numériques, exprimées en nombres sexagésimaux (avec minutes et secondes), et les deux cas de figures du théorème de Ménélaus fourniront, après substitution des "valeurs" numériquques (très souvent approchées), des égalités de rapports du type:
$A : B \equiv C : X * D : E$, où (A, B, C, D, E) sont des nombres connus.

Ptolémée demande alors que l'on "retranche" du rapport $A : B$, le rapport $D : E$, ce qui permettra de trouver le rapport $C : X$, à partir duquel on calculera X. Il est clair que $C : X \equiv A : B * E : D \equiv AE : BD$ (d'après VIII. 5, étendu aux nombres fractionnaires), mais pour sa part l'auteur de l'*Almagest* se contente d'énoncer le résultat des opérations, sans expliquer ni même décrire ces dernières. C'est cette abstention qui, de la part des commentateurs, va susciter la production des textes tardifs du genre «Comment peut-on retrancher un rapport d'un rapport

73. V. par ex. Claudii Ptolemaei, *Syntaxis Mathematica*. Ed. Heiberg, Leipzig, 1898, Pars I, p. 31, l. 19 où les "*πηλικότητες*" sont reprises à la ligne suivante par "*τὰμεγέθη* [*τῶν εὐθειῶν*]" (les grandeurs des droites).

74. V. *Op. cit.*, Ch. 10, (Titre), p. 31, l. 8, 10; p. 43, l. 4, p. 47, l. 1, 4, 6, 12; Ch. 12, p. 64, l. 2; Ch. 13, p. 58, l. 16; Ch. 1, p. 77, l. 8; Ch. 15, p. 82, l. 3.

75. C'est aussi le cas des scholies euclidiennes X, n°9 et n°21 qui mentionnent les "*πηλικότητες*" des coudées et des pieds comme unités conventionnelles de mesure.

attesté dans les *Harmoniques* de Ptolémée, dans des scholies relativement récentes[71] aux *Éléments* et chez les commentateurs de l'*Almageste*. Ceci renforce – s'il en était besoin – les doutes que l'on pouvait avoir sur l'authenticité de la Df. {VI. 5}. L'inflexion sémantique du terme mértie d'être soulignée: je l'interprêterais volontiers comme l'indice d'un changement de conception de la notion de "rapport". Dans les Éléments, cette notion a un statut pour le moins ambivalent: défini primairement comme la *relation mutuelle* qui existe entre deux grandeurs, le rapport – du moins dans certains cas particuliers, comme ceux des multiples et des parties aliquotes –, est aussi considéré lui-même comme une quantité ou quelque chose qui possède un aspect quantitatif, que l'on peut bien appeler "taille", "valeur"... et que le terme "πηλικότης" s'efforce de saisir. A cet égard, le Livre V lui-même n'est pas toujours très cohérent, qui dit que rapports sont les *mêmes* (jamais il n'est dit qu'ils sont égaux – attribut de la quantité), mais qui admet simultanément que deux grandeurs peuvent avoir un rapport mutuel *plus grand* que le rapport mutuel de deux autres grandeurs (Df. V. 7).[72] Cela dit, si l'on affirme explicitement que le rapport a une taille – ce qu'on ne disait auparavant que des nombres et des grandeurs – c'est qu'il est désormais envisagé comme une "chose" et même comme une quantité.

2. Le calcul des astronomes et la Définition {VI. 5}

Dans ce processus de reconnaissance progressive de la "taille des rapports", certains usages ont pu jouer un rôle important, en particulier ceux que l'on observe dans les prolégomènes aux démonstrations sphériques des chapitres 13 à 15 du Livre I de l'*Almageste*. Ptolémée y explique comment construire la table des déclinaisons solaires et comment calculer les ascensions droites. Sa méthode est fondée sur le célèbre théorème dit de Ménélaus (il s'agit du théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaus tel que nous le fait connaître la version arabe conservée), lui-même énoncé en termes de rapport composé de rapports. Ptolémée raisonne sur une configuration traditionnellement appelée "figure sécante". Ses preuves géométriques procèdent à la manière euclidienne, autrement dit en in-

---

71. Le terme aurait pu figurer dans la scholie V, n°36 (à V. 14) si l'auteur avait pris la peine de compléter la Df. des rapports compsés. Cette scholie se trouve dans les mss ***PBF*** et dans la collection *Vat*, *i.e.* les collections auciennes de scholies. Mais on ne doit pas oublier que, selon Heiberg, ces collections prendraient leur sources dans les commentaires de Pappus et de Proclus principalement.

72. C'est ce qu'a perçu l'auteur de la scholie V, n°71 qui fait le lien entre "rapport plus grand" et "πηλικότης" (*EHS*, V, 1, p. 236, l. 14).

14, dans celles à la Df. {VI. 5}, à VIII. 5 et 11, il s'agit de "taille de rapports". De cette même problématique de commentaire euclidien relèvent quelques mentions dans les *Definitiones* de Héron,[65] ou les citations de la Df. V. 3 chez Prophyre (dans son commentaire aux *Harmoniques* de Ptolémée).[66] Dans chacune de ces occurrences il s'agit de la "taille de grandeurs", pas de "quantité de rapports".

Il en va pour ainsi dire de même dans l'unique mention de l'*introduction arithmétique* de Nicomaque[67] quoiqu'il s'agisse ici de nombres, et non plus de grandeurs, plus précisément de "Parties de nombres", maximales quant à la taille, minimales en quantité. Cette Définition du "pair" est présentée comme pythagoricienne[68] et est totalement isolée du reste de l'exposé de Nicomaque.[69] Il est clair toutefois qu'il s'agit de "taille d'objects" et non de "taille de relations".

En revanche on trouve une unique mention des "*πηλικότητες* de rapports" dans les *Harmoniques* de Ptolémée.[70] Elles se multiplient dans quatre ou cinq textes plutôt tardifs: le Livre I du *Commentaire à l'*Almageste par Théon d'Alexandrie, le petit texte de Domninos de Larissa «Comment peut-on retrancher un rapport d'un rapport donné?», la dernière partie de l'*Introduction anonyme à l'*Almageste et, bien entendu, dans les deux extraits des commentaires d'Eutocius dont j'ai déjà abondamment parlé. La source commune de tous ces auteurs – s'il en est une – pourrait se trouver dans les commentaires de Pappus au Livre I de l'*Almageste*, perdus, mais auquel se réfère l'auteur de l'*Introduction anonyme*, ainsi qu'Eutocius. On sait par ailleurs que Pappus est souvent le modèle de Théon.

Le bilan est donc le suivant: si le sens descriptif de "taille des choses" semble ancien – il correspond aux adjectifs "*πηλίκος, —η, —ον*", "*ὁπηλίκος, —η, —ον*" au corrélatif "*ὁπηλικοσοῦν, —ηοῦν, —ονοῦν*", – le sens calculatoire de "taille ou valeur d'un rapport" paraît plus tardif,

65. N°127. 1 (Citation de la Df. V. 3), *Hero*, IV, p. 82, l. 21-22; n°136. 9, *ibid.*, p. 116, l. 20 (coïncide avec la scholie n°21 *in* Eucl. X); n°136. 35, *ibid.*, p. 140, l. 15 (coïncide avec la scholie n°14 *in* Eucl. V. Cf. *EHS*, V, 1, p. 215, l. 25 – p. 216, l. 2).

66. Ed. Düring, p. 87, l. 28; p. 90, l. 24; p. 139, l. 4.

67. I. 7, Hoche, p. 13, l. 17

68. *κατὰ « δὲ τὸ Πυθαγορικὸν ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ τὴν εἰς τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα κατὰ ταὐτὸ τομὴν ἐπιδεχόμενος, μέγιστα μὲν πηλικότητι, ἐλάχιστα δὲ ποσότητι, κατὰ φυσικὴν τῶν δύο τούτων γενῶν ἀντιπεπόνθησιν».*

69. Elle sera cependant paraphrasé par Jamblique qui n'ajoute aucune information. V. *Jamb. in Nic.*, éd. Pistelli, p. 12, l. 1-9.

70. L. III, Ch. II, éd. Düring, p. 87, l. 15-16.

("τὸ ποσόν").[59] Le même terme se trouve aussi dans la Définition de l'astronomie mathématique proposée par Gérminus à la suite de Posidonius.[60] Par ailleurs, dans les traités mathématiques formalisés, à une exception près, le terme "πηλικότης" est plutôt rare: on ne le trouve ni chez Archimède, ni Diphante, ni Pappus, ni même chez Théon de Smyrne. L'exception est de taille, puisqu'il s'agit de la *Composition mathématique* de Ptolémée. Celui-ci utilise le terme pour désigner la *taille* des droites dans le cercle (ou cordes) et celle des arcs de cercles que ces dernières sous-tendent. Comme dans le cas de la Définition V. 3 des *Éléments* on peut considérer que le terme appartient au registre de la géométrie et des grandeurs. Nous verrons toutefois que les usages de l'*Almageste* introduisent déjà une inflexion perceptible.

Si l'on poursuit l'inventaire, à côté des deux occurences des *Éléments* et de celles de l'*Almageste*, on trouve "πηλικότης" – comme on pouvait s'y attendre – dans les scholies euclidiennes (en particulier aux Df. V. 3[61] et VI. 5[62]!). Relevons d'ailleurs qu'à l'exception des scholies 13-14 du Livre V (qui se rapporte donc à la Df. V. 3), et certainement aussi les scholies au Livre X, toutes les autres occurrences se trouvent dans des annotations dont il n'y aucune raison (philologique) de penser qu'elles remontent à l'Antiquité. On est même à peu près sûr du contraire pour plusieurs d'entre elles.[63] Dans les scholies anciennes (Livres V et X), le sens est celui de "taille de grandeurs";[64] en revanche dans la scholie à V.

59. V. *Intr. arith.*, L.I, Ch. III, 1-2, éd. Hoche, p. 5, l. 10-12; p. 5, l. 13 – p. 6, l. 7. V. mon commentaire dans Eucl., *Éléments*, Paris, PUF, 1994, vol. 2, p. 21, §3 et n. 42 à 44.

60. Et cité par Alexandre d'Aphrodise selon Simplicius, *In Arstt.*, Phys., *CAG*, éd. Diels, p. 291*sq.* Reproduit et traduit par G. Aujac dans son éd. de Géminus, pp. 111-112 (en particulier p. 111d, l. 14-15).

61. Scholies V, n°13, 14, *EHS*, V, 1, p. 215, l. 8 – p. 216, l. 9.

62. Scholies VI, n°2, 3, 4, 5, 7, 10, *EHS*, V, 2, p. 1, l. 6 – p. 7, l. 16; p. 9, l. 17-25; p. 10, l. 4-7. Le terme apparaît aussi dans les scholies V, n°71 (à V. 14, *EHS*, V, 1, p. 235, l. 23 – p. 236, l. 16), VIII, n°10 (à VIII. 5, *EHS*, V, 2, p. 62, l. 7-15) et n°27 (à VIII. 11, *EHS*, V, 2, p. 65, l. 16-22), dans les scholies X, n°9 (liminaire, *EHS*, V, 2, p. 92, l. 4 – p. 98, l. 19), n°21 (à la Df. X. 3, *EHS*, V, 2, p. 101, l. 1-11) et 39 (à. X. 2, *EHS*, V, 2, p. 104, l. 13 – p. 106, l. 15).

63. La scholie n°6 du Livre VI (*EHS*, V, 2, p. 7, l. 17 – p. 9, l. 16) est due à Maxime Planude; au demeurant le terme "πηλικότητες" n'y figure pas. La très longue scholie des f°118v-121v du ms *B* (*EHS*, V, 2, p. 337-341) pourrait être de la main de Léon le mathématicien.

64. Même chose chez Proclus dans les *Hypotyposes des planètes*, Ch. IV, Sect. 71, l. 2 (il s'agit de la dimension apparente du soleil avec référence aux Anciens et à Ptolémée).

• Dans la Df. {VI. 5} il s'agit de la "taille" ou de la "valeur des rapports".[56] *A priori* il devrait s'agir d'un usage technique et même calculatoire, les πηλικότητες devant être multipliées entre elles.

Il serait quand même assez suprenant qu'Euclide ait utilisé le même terme avec deux significations différentes dans ses Définitions. Qui plus est, l'enquête terminologique sur "πηλικότης" à laquelle j'ai fait allusion suggère que la seconde acception est – précisément à l'exception de notre Df. {VI. 5} – nettement plus tardive que la première. Par conséquent, à partir de ces différentes considérations, codicologiques, terminologiques et mathématiques, il me semble que la conclusion s'impose – malgré Hultsch[57] –, que nous sommes en présence d'une portion de texte inauthentique, interpolée avant l'époque d'Eutocius. Je crois que l'étude des utilisations du terme "πηλικότης" permet même d'être un peu plus précis.

IV. La notion de "πηλικότης" chez Ptolémée, Théon d'Alexandrie, Nicomaque..., et les autres

1. L'enquête terminologique

Le terme "πηλικότης" n'est pas rare mais a, généralement, le sens vague de *taille*. Parfois il est utilisé comme synonyme de "τὸ πηλίκον" – les deux termes sont de la même famille – pour désigner l'une des catégories de la quantité.[58] Pour Nicomaque, "τὸ πηλίκον" constitue l'objet même de la géométrie – la grandeur déterminée – par opposition à la grandeur indéterminée ("τὸ μέγεθος") et à la quantité discrète

dar) pour traduire "μέγεθος", et "πηλικότης" l'autre utilise deux termes différents mais de la même famille (miqdar et qadr) que Djebbar propse de rendre respectivement par "grandeur" et "en mesure". Gérard de Crémone traduit le second par "mensurationis".

56. Les traducteurs arabes parleront de la quantité (kimiya) des rapports ou de la "grandeur" (aqdar) des rapports selon les familles de manuscrits. Gérard utilise "quantitatis proportionum". Seule la version gréco-latine, littérale, maintient l'homogénéité lexicale apparente en disant dans la première occurrence "secundum quantitatem", "proportionum quantitatis" dans la seconde.

57. Cité par Heath, *TBE*, II, p. 190. Heath lui-même n'est d'ailleurs pas très conséquent. Cf. p. 189 «it is beyond doubt that this definition of ratio (*sic*) is interpolated»et p. 190 «If the definition is after all genuine...»; la conclusion étant qu'il puisse s'agir d'une trace fossile de la vieille théorie préeudoxienne des proportions!

58. V. les comm. au *Parménide* (p. 867, l. 7) et an *Tim.* (II, p. 227, l. 8, 9) de Proclus, qui utilisent les deux termes de manière interchangable. V. aussi la scholie à X. 2, n°39, *EHS*, V, 2, p. 104, l. 20.

division d'un rapport en [plusieurs] rapports. Les Définitions {VI. 5-6} existent effectivement dans la version Isḥāq-Thābīt,[51] mais étaient vraisemblablement absentes de la (les?) version(s) de al-Ḥağğağ qui ne connaissai(en)t sans doute qne les deux ou trois premières Définitions du Livre VI.[52] De ces données codicologiques et de la remarqne de Thābīt, il faut certainement dédnire qne notre Définition {VI. 5} n'existait pas dans tous les manuscrits grecs des *Éléments*.

En outre sa formulation est assez particulière. L'expression « *ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα*» relève clairement du langage de l'arithmétique et/ou du calcul et fait nn peu désordre au début du Livre VI, consacré aux figures planes semblables. D'aillenrs le réfléchi "*ἐφ' ἑαυτὰς*" n'est pas très logique et semblerait mienx convenir à une définition du rapport doublé; on lui préfèrerait "*ἐπ' ἀλλήλας*".[53] Le cas du terme "*πηλικότης*" est plus délicat et réclame une petite enquête terminologique. Pour nous limiter, provisoirement, aux *Éléments*, remarquons que le terme n'y est utilisé que deux fois, la première dans la Df. V. 3 – donc en connexion avec la notion de "rapport" –, la seconde, ici-même, dans la problématique Df. {VI. 5}. Or ces deux seuls usages du terme ne renvoient pas au même sens:

• dans la Df. V. 3 il s'agit de la "taille" des grandeurs. Je comprend qu'il s'agit d'un usage *peu technique*, descriptif ou métalinguistique: il s'agit de préciser de quel type est la relation considérée, qu'il ne s'agit pas, par exemple de leur ordre de consécution;[54] c'est pratiquement l'équivalent de rapport de grandeurs, "en tant que grandeurs".[55]

51. Avec des variantes importantes, selon les manuscrits, de formulation et même de place: ainsi le ms Téh. Malik 3586 et les *Šukūk* d'Ibn al-Haytham possède la Df. {VI. 5} en troisième position comme les mss grecs *Bp* (et GC qui intercale cependant une Df. VI. 2 alternative); les mss Thurston 11, Téh. Majlis 200, Rabat 1101, Esc. 907 et les *Muṣādarāt* du même Ibn al-Haytham l'ont en 5^e (voire 6^e) position. Le ms Pétersb. 2145 a un ordre propre et n'a pas la Df. de la division d'un rapport! Nous devons ces informations à la courtoisie d'A. Djebbar.

52. Les versions arabo-latines attribuées à Adélard de Bath, Robert de Chester et Hermann de Cairnthie ne poosèdent que les deux premières Df. du L. VI. Le *Šifā* d'Ibn Sinā inclut les Df. VI. 1, 2, 3. En revanche les Définitions {VI. 5-6} sont connues d'an-Nayrīzī, d'Ibn al-Haytham et de aṭ-Ṭūsī.

53. Cela dit on connaît quelques autres emplois du réfléchi à la place du pronom réciproque y compris chez Hérodote et Thucydide. V. Liddell-Scott, 1968, p. 466a.

54. Relation à laquelle se rattachent des notions non définies comme celles d' "antécédents", de "conséquents", ou définies comme celles d' "homologues" (Df. V. 11).

55. Les traducteurs arabes seront gênés par la proximité sémantique des termes: dans la traduction de la Df. V. 3 un groupe de manuscrits utilise un seul terme (miq-

A, B, C, D le rapport composé des rapports A : B et C : D sera le rapport des rectangles contenus par (A, C) et (B, D) respectivement. Tous ces cas particuliers sont abondamment utilisés par Archimède, Apollonius ou Pappus, en particulier pour la théorie des coniques. D'après ce qu'Apollonius en dit lui-même dans sa préface, les premiers livres des *Coniques* constituent un remaniement des traités antérieurs sur le sujet, sans doute ceux d'Aristée l'Ancien et d'Euclide. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que ce dernier ait inclus un tel résultat dans ses *Éléments* s'il ne se trouvait déjà pas dans les recuils antérieurs.

• Dans les deux Propositions où intervient la notion de «rapport composé de rapports»il n'est fait aucune mention, ou même allusion, à la Définition {VI. 5}. On argumente sur la notion de rapport composé mais sans faire intervenir la notion de "valeur d'un rapport" ni la multiplication desdites valeurs. Ceci est un premier avertissement quant à l'inauthenticité de cette Définition sur laquelle il nous faut maintenant revenir.

2. La Définition interpolée {VI. 5}

La Définition {VI. 5} a été copiée par la main principale dans la marge du manuscrit ***P***, elle se trouve pas dans le texte lui-même.[47] Sa place varie dans les autres codices. En cinquième position dans les manuscrits ***FV***, elle est troisième dans les mss ***Bp***, comme dans la version grécolatine.[48] Il en est de même dans la traduction faite à partir de l'arabe par Gérard de Crémone.[49] Selon Gérard, Thābīt dit: «on touve à cet endroit, dans une autre copie:[50] "on dit que le rapport est compsé (aggregatur) à partir de rapports quand, à partir de la multiplication de la quantité des rapports, lorsqu'elles sont multipliées par elles-mêmes, naît quelque rapport". Cette version contient en outre une Définition {VI. 6} de la

47. Pour désigner les manuscrits grecs des *Éléments*, j'utilise le *conspectus siglorum* de Hieberg; v. *EHS*, vol. I, *præfatio*, pp. VIII-IX; vol. II, *præfatio*, p. V.

48. V. *The Mediaeval Latin Translation of Euclid's* Elements *made directly from the Greek*. Ed. H.L.L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 1987, p. 125, l. 7-8.

49. V. *The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona*. Ed. H.L.L. Busard. Leiden, E.J. Brill, 1984, p. 137, l. 28-35.

50. Selon J.W. Engroff [*The Arabic Tradition of Euclid's* Elements: *Book V*. Edition et traduction anglaise. Cambridge Mass., Harvard University PhD. Dissertation, non publiée, 1980, pp. 27-28], seuls les manuscrits Oxford, Thurston 11 et Uppsala 321 précisent que Thābīt a fait cette trouvaille dans des copies *grecques*. D'après A. Djebbar, on peut leur adjoindre les mss Téh. Malik 3586 et Pétersb. 2145 (communication personnelle).

jets" qui, "par nature" ont des "côtés". On devrait donc rattacher ces développements à la géométrie, et non pas à une "algèbre abstraite" des rapports. Cependant deux circonstances nous imposent une certaine réserve:

• ces notions sont "communes" à la géométrie et à l'arithmétique; elles sont aussi appliquées aux nombres (entiers) dans les *Éléments.*

• Surtout l'insertion des Définitions des rapports doublés, triplés, du rapport *δι' ἴσου* en termes de grandeurs abstraites – donc indépendamment de toute notion géométrique de "dimension" – au début du Livre V, en souligne la généralité et justifie – par anticipation si l'on peut dire – les extensions que l'on trouvera chez Archimède et Apollonius.

Archimède, dans la proposition 8 du Livre II de la *Sphère et du Cylindre*, introduira la notion de "rapport hémiolé" (*ἡμιόλιος*) d'un rapport, le rapport hémiolé d'un rapport de surface étant un rapport de volume. Surtout, dans la même Proposition, Archimède considèrera un rapport doublé d'un rapport d'aires et s'affranchira donc des restrictions liées à des formulations douées d'un sens strictement géométrique, restrictions que nous mentionnons pour les *Éléments* (et la plupart des autres exemples des mathématiques grecques). Apollonius lui aussi s'affranchit des limites que pourrait imposer une interprétation géométrique stricte quand il considère un rapport compsé de deux rapports d'aires.[46] Euclide pouvaient d'ailleurs bien connaître ces extensions mais n'en avoir pas l'usage dans un traité élémentaire.

Pour conclure à propos des rapports composés de rapports dans les *Éléments*, j'ajouterai deux remarques:

• la Proposition VI. 23 est le seul endroit des Livres géométriques des *Éléments* où intervient cette notion, mais je ne partage pas le point de vue des commentateurs qui veulent minimiser l'importance, voire soupçonner l'authenticité de ce théorème. Je crois au contraire que les *Éléments* se devaient de contenir un résultat aussi fondamental. En le particularisant on sait désormais que les parallélogrammes semblables, les parallélogrammes compléments dans une configuration du type de la Proposition I. 43, les rectangles, ont comme rapport mutuel le rapport composé à partir de ceux des côtés; de même les triangles auront comme rapport mutuel le rapport composé à partir de celui des bases et de celui des hauteurs, les carrés auront comme rapport mutuel le rapport doublé de celui des côtés, etc. A l'inverse étant données quatre droites

46. V. par ex. Prop. III. 54, *Apoll.*, I, p. 440. 5-18 ou III. 59, *Apoll.*, I, p. 446. 19-448. 3.

ment démonstratif pour les rapports doublés, triplés et les rapports composés de rapports, là où certains préfèreraient considérer que les deux premières notions sont des cas particuliers de la troisième (rapports composés de rapports identiques).

Si l'on poursuit la comparaison des deux résultats euclidiens, on voit que la Proposition VIII. 5 ramène la composition de rapports numériques à deux multiplications, celle des antécédents et celle des conséquents. Pour les grandeurs, les choses vont être un peu plus compliquées car il faut remplacer la multiplication des nombres par une opération pourvue de sens. Il est assez naturel de rapprocher, par analogie, le produit de deux nombres et le rectangle contenu par deux droites.[44] Cela suppose donc que le rapport de grandeurs soit "linéarisé" ou "linéarisable", c'est-à-dire représentable comme un rapport de droites. Dans BI. 23 la production de deux séries de représentants des deux rapports, celui des parallélogrammes et le rapport composé des côtés, en terms conjoints et "linéaires", est facile: pour le premier on exhibe un moyen proportionnel grâce à VI. 1, pour le second on recourt à une double construction de droites quatrièmes proportionnelles (VI. 12). Ceci est généralisable aux aires quarrables et aux volumes dont on sait faire la chubature. Mais dans le cas général il faudrait recourir au postulat d'existence d'un grandeur quatrième proportionnelle.

Comme la "linéarisation" des rapports paraît nécessaire pour contourner l'éventuelle difficulté de la "multiplication" des grandeurs, Euclide, ailleurs que dans les Définitions du Livre V, ne considère, dans la plupart des cas,[45] les rapports doublés ou triplés qu'à propos de droites, et le rapport doublé désignera un rapport d'aire, le rapport triplé, un rapport de volume. De même, la notion de "rapport composé à partir de rapports" n'intervient, dans le traité euclidien, qu'à propos de parallélogrammes ou de nombres plans, en tout cas à propos d' "ob-

44. La formulation VI. 23 (en termes de parallélogrammes équiangles) est, comme d'autres Prop. du L. VI, le résultat de la recherche de la plus grande généralité possible: la rectitude est une hypothèse inutile et l'équiangularité des parallélogrammes suffit. Pour le voir il s'agissait simplement de réfléchir un peu sur la trés classique configuration de parallélogramme des Prob. VI. 24, 26 des *Éléments* et sur les propriétés des compléments et des parallélogrammes autour de la diagonale.

45. L'exception existe – momentanément – dans la Proposition XI. 33: la démonstration affirme que «le rapport du solide AB relativement au solide KO est le rapport triplé de celui du solide AB relativement au solide EQ»; mais on constate immédiatement que ce second rapport de solides est ramené à un rapport de figures planes (parallélogrammes), puis de droites (par XI. 32, puis VI. 1).

composé des côtés, on construit des représentants (K, L, M) en proportion continue (grâce à VI. 12) des deux rapports "latéraux". Dans VIII. 5 on peut utiliser directement un résultat antérieur sur les proportions numériques continues (VIII. 4). Ceci fait, rien n'empêche ensuite d'utiliser V. 11 pour dire qu'un rapport qui est *le même* que le rapport compsé de r et r' est lui aussi composé de r et r'.

Les preuves ne sont pas si brèves pourtant,[42] car une précaution s'impose: montrer que le rapport composé de deux rapports donnés, dans le cas conjoint, ne dépend pas des représentants choisis. Autrement dit, si (a, b), (b, c) et (a', b'), (b', c') sont deux familles de représentants des deux mêmes rapports, c'est-à-dire si $a : b \equiv a' : b'$ et $b : c \equiv b' : c'$, alors:

$$a : b * b : c \equiv a' : b' * b' : c', \text{ c'est-à-dire } a : c \equiv a' : c'.$$

Le lecteur aura sans doute reconnu le résultat de la Proposition V. 22 sur la proportionnalité à égalité de rang (*δι' ἴσου*). Clairement, le rapport *δι' ἴσου*, introduit dans la Définition V. 17,[43] correspond à la même notion que celle de "rapport composé", du moins dans le cas conjoint, mais énoncé d'un point de vue légèrement différent, à savoir celui de la proportionnalité entre deux suites de termes – le marqueur *δι' ἴσου* sert à porter l'attention sur le même "rang" daus les deux suites comparées –, et non du point de vue du rapport mutuel de deux termes, en fonction des termes intermédiaires, à l'intérieur de l'une de ces suites, ce à quoi renvoie l'expression "rapport composé de rapports". Composer un rapport à partir de rapports conjoints, le diviser en intercalant un terme intermédiaire sont donc des manipulations dont le caractère licite est garanti par le théorème *δι' ἰσου*. L'avantage d'avoir fait un sort particulier à cette proportionnalité *δι' ἰσου* dans la Définition V. 17 et la Proposition V. 22 est de mettre en évidence le même fonde-

---

42. V. mon commentaire dans Euclide, les *Éléments*, Paris, PUF, 1994, vol. 2, p. 216.

43. V. *EHS*, II, p. 3, l. 12-17: « *Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ, λόγῳ, ὅταν ῇ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸς τὸ ἔσχατον, ο ὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσ–χατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων*»(Il y a rapport à égalité de rang quand, étant [donné] plusieurs grandeurs et d'autres qui leur soient égales en multiude, lesquelles prises deux par deux soient dans le même rapport, comme la première est relativement à la dernière dans les premières grandeurs, ainsi est la première relativement à la dernière dans les deuxièmes grandeurs; ou, autrement: quand on prend les extrêmes avec mise à l'écart des moyens.)

des tentatives d'Eutocius. Pour l'instant contentons-nous d'observer qu'avec cet auteur les différentes traditions textuelles que l'Antiquité a produites sont bien mêlées. A la suite des commentateurs de l'*Almageste*, en particulier Pappus et Théon, il a voulu éclairer la question des rapports composés de rapports, non plus en fournissant quelques exemples dont la fonction principale semble avoir été de dissiper les doutes que pouvait faire naître l'ambiguïté de la notion de terme "moyen" ou "médian", mais en en proposant une fondation démonstratrice. Il l'injecte au sein des corpus archimédien et apollonien car il ne faut pas oublier que, du moins dans les manuscrits grecs, les commentaires accompagnent généralement les œuvres commentées. Comment procéder à cette fondation? En revenant aux *Éléments* bien entendu: il y trouve une procédure, la conjonction intuitive des rapports, et une Définition, dont il ne perçoit pas qu'elle est interpolée. Manifestement il n'est pas satisfait de l'absence de connexion que l'on peut observer entre les deux et, en bon utilisateur des *Éléments*, il cherche à justifier la procédure à partir de la Définition. Il nous faut donc regarder d'un peu plus près ce qui se passe dans le texte d'Euclide. Celui-ci est aussi, de par son projet même, le point de départ de Khayyām.

III. Euclide

1. Les rapports compsés de rapports dans les *Éléments*

Outre la problématique Définition {VI. 5}, la notion de "rapport composé de rapports" intervient deux fois dans les *Éléments* d'Euclide tels qu'ils nous sont parvenus, dans les Propositions VI. 23 et VIII. 5:

VI. 23: Les parallélogrammes équiangles ont, l'un relativement à l'autre, le rapport composé à partir [de ceux] des côtés.[40]

VIII. 5: Les nombres plans ont, l'un relativement à l'autre, le rapport composé à partir [des rapports] des côtés.

Il suffit de lire les démonstrations des Propositions VI. 23[41] et VIII. 5 pour voir que l'Auteur des *Éléments* ne fait usage – au niveau opératoire – que du cas des rapports conjoints. Dans VI. 23, pour exhiber le rapport

40. L'expression "rapport composé à partir des côtés" (τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν) est brachylogique: dans mes traductions je supplée [du ou des rapports]. La même chose vaut dans les *Éléments* pour les rapports doublés et triblés. Le même raccourci à propos de rapports composés se trouve dans les *Données* d'Euclide, chez Théon d'Alexandrie et Eutocius, mais pas chez Ptolémée qui présente une formule plus explicite.

41. V. *infra*, Annexe, Texte 3.

rationnelles (*τὰ ἄλογαμεγέθη*).[36] Bien évidemment tout le problème est là. Comment peut-on déterminer les *πηλικότητες* de rapports de grandeurs incommensurables, non exprimables en nombres? Et si on ne peut pas le faire, comment pourra-t-on les multiplier?[37]

• Ce qu'il ajoute à la suite de la preuve ne répond pas vraiment à cette question, même si Eutocius semble vouloir rassurer son lecteur. Celui-ci ne doit pas s'émouvoir de la nature arithmétique de la preuve, car, affirme-t-il, la théorie des proportions a d'abord été appliquée aux nombres, puis, à partir de là, aux grandeurs «car ces choses mathématiques paraissent être sœurs». L'allusion à Nicomaque, et par delà, aux Pythagoriciens,[38] est évidente. Eutocius aurait-il oublié la "malignité" des irrationnelles?

Rein n'est moins sûr. Sinon, pourquoi toutes ces précautions oratoires: dans la version archimédienne références aux autorités (*Éléments* d'Euclide, Nicomaque), explication terminologique, distinction d'un usage "propre" (*κυριώτερον*) et d'une extension de sens, avertissement au lecteur à la fin de la version apollinienne...? Mais tout cela ne l'empêche pas, ici comme dans le commentaire à *Sphère et cylindre*, de conclure par la même règle:

«Et il est *évident*... que, de *toutes les relations*, cette même taille, multipliée par le terme conséquent du rapport, produit l'antécédent».[39]. Faut-il y voir, à l'instar des historiens du XIXᵉ siècle, l'indice de la décadence scientifique de l'Antiquité tardive, le témoignage de l'inconsistance d'Eutocius? Ou une géniale anticipation d'al-Khayyām et/ou de Dedekind?

Nous reviendrons en conclusion sur ce qui paraît être la signification

---

36. V. *infra*, Annexe, Texte 1, §g.

37. Le problème est également soulevé par l'auteur de la scholie VI, n°2 à la Df. {VI. 5}: « *ἀπορήσαις δ' ἂν εἰκότως ἐπὶ τῶν ἄλων μεγεθῶν τὰς γὰρ πηλικότητας αὐτῶν οὐκ ἔχοντες ἐν ῥητοῖς ἀριθμοῖς πῶς ἄρα πολλαπλασιάσομεν τοὺς λόγους; ἢ τὸ πολλαπλάσιου τοῦτο, κἂν μὴ ἐν λόγοις ρητοῖς ἢ, όμως τῆ εαυτοῦ φύσει ἐχει τὸν λόγον; η γὰρ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, εἰ καὶ μὴ ἐχη λόγον ρητόν, ἀλλ' οὖν τῆς πηλικότητος ἐχει, καθ' ὸν λέγομεν αὐτὴν εἶναι διπλασίαν δυνάμει*», *EHS*, V, 2, p. 2, l. 9-15.

38. V. *infra*, Annexe, Texte 1, §§j-k. Nicomaque transmet la même formule à la fin de ce qui est censé être une citation du pythagoricien Archytas de Tarente (*Intr. arith.*, L. I, Ch. 3, ed. Hoche, p. 7, l. 1-2 = Archytas, Fgrt 1, DK 47 B1, t. I, p. 431, l. 36 – p. 432, l. 8). Au Livre VII de la *République* (530 d6-10), Platon rapporte une opinion similaire, cette fois à propos de l'astronomie et de l'harmonique, opinion qu'il présente comme pythagoricienne.

39. V. *infra*, Annexe, Texte 1, §h

juste avant reste valide.[30] A partir de là, Eutocius démontre que si l'on a trois nombres A, C, B dans cet ordre: le "nombre" – faut-il dire le rationnel? – qui, multipilé par B, donne A, est le produit de celui qui, multiplié par C, donne A et de celui qui, multiplié par B, donne C. Pour ce faire il admet des résultats de théorie des proportions, que nous pouvons interpréter soit comme des *extensions* de certaines Propositions de Livre VII (VII. 13, 17, 18) – extensions aux nombres rationnels positifs et non plus seulement aux entiers supérieurs ou égaux à 2 comme dans les *'Eléments* –, soit comme des "particularisations" – aux cas des rapports de grandeurs commensurables – de certains résultats du Livre V (V. 7Por., 9).[31]

Dans les trois exemples numériques qui suivent,[32] Eutocius reprend les trois cas de figures envisagés par certains de ses prédécesseurs, en particulier Théon d'Alexandrie, car il ne faut pas perdre de vue que que le terme moyen (*μέσος ὅρος*) est ici simplement un terme intermédiaire, quand à la consécution, et pas nécessairement un moyen, au sens de la théorie des médiétés. Enfin Eutocius montre comment étendre la Proposition à plus de deux rapports en admettant une sorte d'associativité de la composition des rapports.[33] La preuve était requise par la clause "*ἤ καὶ πλειόνων*" ("mais aussi plus") contenue dans le commentaire de Théon et reprise dans la scholie n°4 à la Df. {VI. 5}.[34]

Dans le commentaire aux *Coniques* la preuve est abrégée mais substantiellement la même.[35] Eutocius ajoute cependant deux indications très importantes:

• Au moment où il discute de la notion de "quantité (*πηλικότης*) d'un rapport" – après avoir rappeléle fait que la quantité, pour les rapports autres que les multiples, fera intervenir une part ou des parts –, il évoque la possibilité de prendre en considération les relations non exprimables (*ἀρρήτους σχέσεις*), comme celles qui existent dans les grandeurs ir-

30. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 120, l. 30 – p. 122, l. 9; Mugler, p. 83, l. 4-13; Ver Eecke, pp. 629-630.

31. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 122, l. 10 – p. 124, l. 7; Mugler, p. 83, l. 14 – p. 84, l. 21; Ver Eecke, pp. 630-631.

32. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 124, l. 8 – p. 126, l. 3; Mugler, p. 84, l. 22 – p. 85, l. 23; Ver Eecke, pp. 631-632.

33. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 126, l. 4-20; Mugler, p. 85, l. 24 – p. 86, l. 11; Ver Eecke, p. 632.

34. V. *infra*, Annexe, Texte 2, **b** et **c**.

35. V. *infra*, Annexe, Texte 1, §i.

l'*Introduction arithmétique* du même Nicomaque, commentaire que nous n'avons pas non plus. Si l'on en croit Eutocius, selon Nicomaque:

«la πηλικότης [d'un rapport] se dit évidemment (δηλονότι!) du nombre duquel le rapport donné est paronyme».[26]

L'expression est reproduite quasiment à l'identique – y compris le savoureux "δηλονότι" – dans le commentaire aux *Coniques.*[27] Peut-être Nicomaque et ses commentateurs se contentaient-ils de cette version "nominaliste" ou "nominalisante", mais Eutocius ajoute une version "opératoire": c'est le nombre qui, «multiplié par le terme conséquent du rapport, produit l'antécédent».[28]

Evidemment la détermination de ce "nombre" ne va pas forcément de soi et Eutocius ne se le dissimule pas: légitimement (κυριώτερον) c'est seulement pour les rapports multiples que l'on peut prendre cette "quantité". Déjà pour les rapports simples que sont les épimores et les épimères, on ne peut, dit-il, prendre la valeur en laissant l'unité indivisible; il faut alors abandonner les règles de l'arithmétique pour celles de la logistique et l'unité se divise en partie ou parties (κατὰ τό μέρος ἤ τὰ μέρη).[29] Par exemple la quantitié du rapport hémiole est une unité et la moitié d'une unité; celle du rapport épitrite: une unité-un-tiers. On vérifie, par le calcul, que dans ce cas la règle opératoire proposée

Mais il n'y a aucune référence ni à la "pêlikotês des rapports", ni à la nomination. Cela dit, à plusieurs reprises, il promet un traitement détaillé du sujet, en plusieurs Livres (ce que suppose le titre mentionné par Eutocius). Nous possédons quelques fragments d'un autre traité de Nicomaque consacré à la musique. Selon Fabricius, cité et suivi par Ch. -E. Ruelle, certains fragments de ce traité perdu seraient à l'origine de ce qu'on appelle improprement le Livre II du *Manuel d'Harmonique*. V. [Ruelle, 1881], p. 2, n. 1 et 5. Ces sept fragments sont traduits par [Ruelle, 1881], pp. 41-55; on n'y trouve malheureusement rien ni au sujet des rapports composés, ni au sujet de la "valeur" d'un rapport.

26. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 120, l. 19-23; Mugler, p. 82, l. 22-26; Ver Eecke, p. 629.

27. V. *Apoll.*, II, éd. Heiberg, p. 218, l. 18-19 et *infra*, Annexe, Texte 1, §e. La même Df. de la "πηλικότης" se trouve dans certaines scholies au texte des *Éléments*, par exemple, les scholies VI, n°3 (« πηλικότητας δέ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται, ως ἀπὸ τῶν δύο ο διπλάσιος», *EHS*, V, 2, p. 2, 1. 19-20; « ἐπεὶ ως εἴρηται πηλικότητες οι ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αι σχέσεις ὀνομάζονται, οἷον ἀπὸ τοῦ β καὶ τρία καὶ τέσσαρα ο διπλάσιος καὶ τριπλάσιος καὶ τετραπλάσιος λόγος...», *Ibid.*, p. 3, l. 2-5), VI, n° 10 (« Πηλικότητες λέγονται ο λόλος...», *Ibid.*, p. 10, l. 4-5).

28. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 120, l. 23-25; Mugler, p. 82, l. 26-28; Ver Eecke, p. 629, Cf. *infra*, Annexe, Texte 1, §h.

29. V. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 120, l. 25-30; Mugler, p. 82, l. 28 – p. 83, l. 3; Ver Eecke, p. 629. Cf. *infra*, Annexe, Texte 1, §f.

respectivement.
Et (ac : bc) et (bc : bd) sont des représentants des mêmes rapports dont les termes sont conjoints. On pourra dire que le rapport (ac : bd) est "composé" des rapports (ac : bc) et (bc : bd), et donc, des rapports (a : b) et (c : d).[21] Mais dans le cas général des grandeurs, la réduction (ii) → (i) requiert l'usage du postulat de la quatrième proportionnelle: étant donnés deux rapports quelconques (a : b), (c : d), on peut trouver une grandeur, quatrième proportionnelle à (c, d, b), soit e, telle que $c : d \equiv b : e$, et alors affirmer que le rapport composé de (a : b), (c : d) est le même que celui composé de (a : b), (b : e), soit (a : e).

Nous aurons l'occasion de voir qu'Euclide, dans ses *Éléments*, procède à peu près de cette manière. Mais ce n'est pas celle qu'a suivie Eutocius. Tant dans son commentaire à Archimède que dans celui à Apollonius il introduit en effet une toute autre définition du «rapport composé de rapports», définition qu'il lit d'ailleurs dans *sa* version du texte d'Euclide:

«Un rapport est dit être composé de rapports quand les tailles des rapports, multiplées par elles-mêmes, produisent quelque chose...».[22]

Il s'agit d'une Définition qui se trouve en effect dans certains manuscrits grecs des *Éléments*, au début du Livre VI, et sous le n°5 dans l'édition de Heiberg.[23] Elle est aujourd'hui considérée comme une interpolation.[24] Cet énoncé pose plusieurs problèmes: manifestemeut il paraît tronqué; surtout il fait référence à la notion de "quantité (πηλικότης) d'un rapport", elle-même non définie, et qui n'est pas transparente. Nous reviendrons en détails sur ces deux points lorsque nous discuterons d'Euclide. Eutocius a moins partiellement perçu la difficulté et se croit tenu de donner quelques explications sur cette notion. Pour ce faire, il cite le premier Livre d'un traité *Sur la Musique* de Nicomaqne – qui ne nous est pas parvenu[25] – ainsi que le commentaire d'un certain Héronas à

---

21. C'est substantiellement ce que démontre la Proposition VIII. 5 des *Éléments d'Euclide*.

22. Texte 1, §d. Cf. *SC* II 4 comm., ed. Heiberg, p. 120, l. 16-19; Mugler, p. 82, l. 19-22. Ver Eecke, p. 629.

23. *Euclidis Elementa*, post Heiberg ed. E.S. Stamatis (abréviation dans ce qui suit: *EHS*), Leipzig, B.G. Teubner, vol. II, p. 40, l. 1-3.

24. C'est pourquoi nous la notons Df. {VI. 5} avec des accolades {}. V. *infra*, Partie III, 2, pour le problème de l'authenticité et de l'origine de cette Df.

25. Nous possédons un *Manuel d'Harmonique* (αρμονικοῦ ἐγχειριδιου), éd. C. Jan, *Musici Scriptores Græci*, Teubner, 1895. Réimpr. 1995, pp. 236-265. Trad. angl. *in* A. Barker, *Greek Musical Writings*, II, 1989, pp. 247-269. Au chapitre 6 Nicomaque parle des "rapports numériques des notes" (οι ἀριθμητικοὶ τῶν φθόγγων λόγοι) ou de la quautité numérique (η κατ' ἀριθμὸν ποσότης) des principales consonances.

Introduction arithmétique, Nicomaque traite des compositions des rapports (α ἱ συνθέσεις τῶν λόγν) à partir d'exemples empruntés à la canonique.[19] Le traité n'est pas propre aux auteurs néo-pythagoriciens. D'ailleurs la source de l'exposé musical de Théon, comme celui-ci le reconnaît, est souvent Adraste le péripétaticien, ce dernier complétant lui-même Ératosthène. Or la Définition 125 du recueil des *Definitiones* attribué à Héron rapporte précisément une telle comparaison, faite par Ératosthène, entre la "com-position" d'intervalles – ici semble-t-il géométriques –, c'est-à-dire leur juxtaposition, et la "com-position" des rapports.[20]

• Ce petit détour par la musique peut nous convaincre que les procédures de notation, la représentation des iutervalles musicaux sous forme de segments de droites, aussi bien qu'une métaphore à connotations musicales peuvent justifier une telle assimilation entre juxtaposition des intervalles et "com-position" des rapports qui leur sont associés. Dans cette perspective on peut franchement douter qu'il soit nécessaire de *définir* ce que l'on peut appeler une "conjonction intuitive". Manifestement ce n'est le cas dans les *Éléments* ni pour la "com-position" des nombres, ni pour celles des grandeurs: la notation suffit à l'exprimer.

• Mais la "com-position" des rapports est sans doute plus délicate parce qu'un rapport admet difféfents représentants et il faut, pour notre affaire, distinguer deux cas:

(i) celui des rapports conjoints, type (a : c), (c : b);

(ii) le cas de deux rapports quelconques (a : b), (c : d), que l'on aimerait ramener au cas précédent.

Dans le domaine des nombres la réduction (ii) → (i) est élémentaire. Étant donnés deux rapports dont les termes sont disjoints (a : b), (c : d), on a:

a : b ≡ ac : bc et c : d ≡ bc : bd par Eucl., *Él.*, VII. 18 et 17

συνῳδοὶ ταῖς τῶν ταύτας λόγων συνθέσεσί τε καὶ διαιρέσεσιν ...», *Expositio*, L. II, Ch. XIII bis, ed. Hiller, p. 62, 1. 1-4.

19. Nicomaque évoque aussi non pas la "division" des rapports mais le fait d'être délié (διαλύεσ θαι).

20. «... Effectivement Ératosthène dit que, de même que pour les intervalles égaux et placés en alignement, les intervalles seront dupliqués, de même pour les rapports, ponr ainsi dire placé en alignement, la 1è, relativement à la 3è, est dite avoir un rapport doublé de [celui] par rapport à la deuxième»; *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omina*, ed. W. Schmidt, Leipzig, in aed. B.G. Teubner, vol. IV, *Definitiones, Geometrica* (1912, ed. Heiberg), p. 80, l. 12-26; bien entendu il s'agit de commenter la Df. V. 9 des *Éléments*.

que A : C, C : B, dont le conséquent de l'un est l'antécédent de l'autre, sont *conjoints.* Composer des rapports conjoints, c'est donc simplement faire "disparaître" le terme intermédiaire.

• Le verbe utilisé par Eutocius, "*συγκεῖσθαι*", signifie précisément "placer conjointement", "conjoindre". Archimède, Apollonius, Ptolémée, Pappus et Eutocius à l'occasion, utilisent en outre le verbe "*συνάπτειν*" (conjoindre) dont la signification est encore plus claire. Si l'opération est interprétée par les Modernes comme une multiplication de rapports: $\frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{A}{B}$, la terminologie ancienne est additive. Ce qui le montre c'est le nom de l'opération inverse: on parle de "retrancher" (*αφελεῖν*) un rapport d'un rapport (cela revient à intercaler un terme intermédiaire). En outre, le même verbe "*συγκεῖσθαι*" – "*συντίθεσθαι*" est utilisé dans les *Éléments* d'Euclide à propos des segments de droites ou des nombres, comme AB, BC produisant AC: les Modernes parlent alors d' "addition".

• Paul Tannery a suggéré que cette terminologie de "com-position" des rapports avait peut-être une origine musicale.[16] Dans un tel contexte, la "com-position" des rapports correspond à la simple consécution des intervalles musicaux. Pour reprendre l'exemple favori des auteurs musiciens, l'intervalle d'octave, associé au rapport numérique (12 : 6), est (musicalement) composé d'un rapport numérique (12 : 9) et d'un intervalle de quinte, associé au rapport numérique (9 : 6). Il est donc naturel de dire que le rapport (numérique) (12 : 6) est "composé" des rapports numériques (12 : 9) et (9 : 6), ou, à un niveau métalinguistique, que le rapport double est "com-posé" du rapport épitrite et du rapport hémiole.[17]

• Ce rapprochement n'est pas seulement le fait des Modernes. Théon de Smyrne (IIᵉs.) souligne ce point: «on constate évidemment que les compositions et les divisions des consonances sont homologues et en accord avec les compositions et les divisions des rapports correspondant à celle-ci...».[18] De même, dans le chapitre V du Livre II de son

---

rapports sont identiques, et non pas égaux.

16. Tannery, P., *Mémoires scientifiques*, 17 vol. Paris/Toulouse, Gauthier-Villars, 1912-1950, vol. III, n°71, pp. 68-89 en part. 72-73.

17. Dans la proposition 6 de la *Division du Canon* attribuée à Euclide on trouve une version légèrement différente: l'intervalle double est composé à partir des deux plus grands épimores, l'hémiole et l'émiole et l'épitrite. La problématique de la "composition" ou de la "soustraction" des *intervalles* – et non des logoi – se retrouve dans plusieurs Propositions de ce traité, notamment les Prop. 1 à 4, 6 à 8, 10 à 13.

18. « *δῆλον δὲ ὅτι καὶ αἱ συνθέσεις καὶ αἱ δαιρέσεις τῶν συμφωνῶν ὁμόλογοι καὶ*

rapport des nombres pris au départ est composé du rapport qu'a le premier relativement au moyen et de celui qu'a le moyen relativement au troisième»,[10]
soit, en exemplifiant:

«Soit en effet deux nombres A et B, et qu'un certain terme moyen C soit pris entre eux. Il faut alors démontrer que le rapport de A à B est composé de celui qu'a A relativement à C et de celui de C relativement à B».[11]

Quelques remarques s'imposent:

• Eutocius propose explicitement un traitement *général* puisqu'il s'agit – comme il l'explicite à deux reprises[12] – de prendre un terme intermédiaire entre deux *nombres* ou deux *grandeurs*. En même temps ses démonstrations sont rédigées systématiquement avec des notations comme "ὁ A", "ὁ B", ..., qui suggèrent fortement qu'il raisonne sur des nombres.[13] Ce détail est très important à cause de la Définition, essentiellement arithmétique et calculatoire, qu'Eutocius pour le «rapport composé de rapports», ce qui va lui poser quelques problèmes comme allons le voir bientôt.

• Le choix du mot "moyen" (μέσος) n'est pas non plus très heureux. Il risque de suggérer que l'on a nécessairement A>C>B ou A<C<B. Il n'en est rien: C est simplement un terme intermédiaire, ce que tous les auteurs grecs qui traitent de la question précisent bien – cela paraît même être la motivation fondamentale des commentaires de Théon par exemple – Eutocius y compris.[14]

On voit donc que l'assertion qu'Eutocius – mais aussi Khayyām – se propose de démontrer peut être abrégée de manière symbolique sous la forme $A : B \equiv A : C * C : B$.[15] Pour ma part je dis que des rapports tels

10. V. Ed. Heiberg, p. 120, 1. 12-15; Mugler, p. 82; Ver Eecke, pp. 628-629. La formulation générale du problème n'est même pas mentionnée dans le commentaire aux *Coniques*, qui expose directement le théorème en termes de "taille des rapports" (v. *infra*, Annexe, texte 1, §i). Le lecteur doit suppléer quelques intermédiaires ou se reporter au traitement antérieur de *SC* II. 4 comm.

11. V. Ed. Heiberg, p. 122, l. 11-14; Mugler, p. 83; Ver Eecke, p. 630.

12. V. Ed. Heiberg, p. 120, 1. 12; p. 126, 1. 5; Mugler, p. 82, l. 15; p. 85, l. 25. Ver Eecke, p. 628 (il a omis de traduire la seconde, p. 632).

13. Le mot est masculin en grec, contrairement à "taille" (féminum), "grandeur", "terme" (neutre).

14. Dans les exemples qu'il donne à la suite de sa démonstration et repris à ses prédécesseurs. V. Ed. Heiberg, p. 124, l. 17-20; Mugler, p. 85, l. 3-6; Ver Eecke, p. 631.

15. La notation A : B désign le rapprot de A à B, "*" signifie la composition des

que son texte soit autonome, et ce, d'autant que la suite du traité des *Coniques* fait abondamment usage de cette notion de «rapport composé de rapports»(Texte 1, §c).

En bonne logique historique, il nous faut donc partir du commentaire à Archimède, quitte à voir ce qu'ajoute le texte postérieur sur les *Coniques.*[8] C'est dans la célèbre Proposition 4 du second Livre de *La Sphère et le cylindre* qu'Archimède fait intervenir pour la première fois (dans ce traité) la notion de «rapport composé de rapports». Son objectif est de résoudre le problème suivant: «Couper une sphère donnée de sorte que les segments de sphère aient, l'un relativement à l'autre, le même rapport qu'un [rapport] donné«. Il expose à cette fin une analyse qui contient un maniement assez virtuose de ladite notion. Eutocius – dès cette première tentative –, remarque que la question n'a pas été traitée convenablement par les commentateurs antérieurs. Ici il mentionne Pappus, Théon et un certain Arcadius; leurs écrits, selon lui, se bornent à une présentation inductive et non démonstrative, ce à quoi Eutocius se propose donc de remédier.[9]

Son but est de *démontrer* l'assertion suivante:

«si un terme moyen est pris entre deux nombres ou grandeurs, le

---

Geometry. Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser, 1989, pp. 190-201 (trad. anglaise partielle, *op. cit.*, pp. 185-190). Il conteste l'attribtion à Eutocius de cette introduction (*op. cit.*, Part I, Ch. 7: «On Eutocius: A Thesis of J. Mogenet», pp. 155-177).

8. En même temps il faudrait savoir quel a pu être le rôle respectif de ces deux textes dans la transmission, en particulier par le biais des traductions en arabe et en latin, mais ce point dépasse mes compétences. On sait que le commentaire d'Eutocius aux deux Livres de *Sphère et Cylindre* a été traduit en latin par Guillaume de Moerbecke en 1269. En revanche j'ignore si le commentaire à *SC* II ait été complètement traduit en arabe. Il existe, ou a existé, une traduction du commentaire au premier Livre, ainsi qu'à la Prop. *SC* II, 1, contenant le célèbre résumé historique à propse du problème des deux moyennes. Mais je ne sais pas ce qu'il en est de la suite, et en particulier du comm. à *SC* II, 4, problème que les savants des pays d'Islam connaissaient bien au demeurant. [Sezgin, 1974], p. 130 n'est pas très catégorique. Il mentionne une traduction partielle du commentaire d'Eutocius à *SC* II 4, par Thābit Ibn Qurra – contenu dans les folios 191-192 du ms ar. 2457 de la BNF – que Woepcke ('Essai d'un restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles', 1856, p. 670) présente comme une traduction du comm. d'Eut. à *SC* II 2. D'après l'intitulé il me semble qu'il s'agit plutôt du comm. à *SC* II, 1 sur le problème de l'intercalation de deux moyennes! Quant au commentaire d'Eutocius sur les *Coniques*, les traducteurs d'Apollonius y ont peut-être eu accès, mais j'ignore s'il a été traduit en arabe. Je n'ai rien trouvé de très tranché à ce sujet dans la thèse de M^{me} Decorps-Foulquier, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Lille, 1994.

9. V. Ed. Heiberg, p. 120, 1. 5-11; Mugler, p. 82; Ver Eecke, p. 628. Pour l'exemple de Théon, V. *infra*, Annexe, Texte 4.

la première mention qu'il en fait, Khayyām reproche à Eutocius (et à Héron) de ne pas avoir abordé le problème du postulat des parallèles, il n'est donc pas *a priori* invraisemblable que Khayyām ait mentionné Eutocius précisément pour l'un de ses traitements des rapports composés. Au demeurant, dans l'une et l'autre de ses tentatives, le mathématicien d'Ascalon se réfère bien évidemment à Euclide, nous aurons l'occasion d'y revenir.

Quoi qu'il en soit des relations historiques avérées d'Eutocius et de Khayyām, il paraît intéressant de comparer les démarches de ces deux auteurs, très proches à certains égards, mais s'inscrivant dans des perspectives assez différents. Cette comparaison est l'objet du travail qui suit, bein évidemment conçu du point de veu d'un historien des mathématiques grecques, attentif à leur postérité, en particulier médiévale, mais qui ne lit pas l'arabe et qui n'a donc qu'un accès indirect au texte de Khayyām. Heureusement deux traductions françaises du commentaire ont été récemment publiées[5] et c'est grâce à elles que cette comparaison a été possible pour moi. Je partirai des témoignages d'Eutocius pour remonter à travers la tradition grecque jusqu'à Euclide, point de départ de la question. Cette exploration éclaire – me semble-t-il – certains aspects du texte de Khayyām, auquel je reviendrai dans la dernière partie.

II. Eutocius

Lorsqu'il commente la Proposition I. 11 des *Coniques* d'Apollonius[6] (caractérisation de la parabole) laquelle utilise la notion de «rapport composé de rapports», Eutocius renvoie explicitement à la Proposition VI. 23 (sous ce numéro) des *Éléments* (Texte 1, §a) et souligne l'insuffisance des traitements proposés par ses prédécesseurs. Il précise que lui-même en a déjà traité dans son commentaire à Archimède, *SC* II 4, et dans ses scholies au premier Livre de l'*Almagest* (Texte 1, §b) – scholies auxquelles certains spécialistes, dont Joseph Mogenet, identifient l'*Introduction anonyme* qui précède le traité de Ptolémée dans de nombreux manuscrits grecs.[7] Il croit cependant utile de reprendre brièvement la question afin

5. Références dans la note précédente.

6. V. *Apoll.*, II, éd. Heiberg, p. 218, l. 1 – p. 220, l. 25 et *infra*, Annexe, texte 1.

7. V. Mogenet J., *L'introduction à l'Almageste.* Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Classe de Lettres. 2° série, Tome LI, fasc. 2. Bruxelles, 1956. W. Knorr a produit une édition de la portion du texte grec portant sur la question des "rapports composés de rapports" dans Knorr, W.R., *Textual Studies in Ancient and Medieval*

d'autres auteurs avaient abordé la question – «Anciens et Modernes», pour paraphraser Khayyām – tels Thābit Ibn Qurra, an-Nayrīzī, Ibn al-Haytham. Chez les Anciens il faut mentionner Eutocius d'Ascalon,[1] et cela, pour deux raisons au moins:

• Eutocius – l'un des derniers mathématiciens grecs anciens – constitue notre source d'informations la plus importante pour cette question dans la tradition antique. Il l'aborde à deux reprises, une première fois dans ses commentaires à la célèbre Proposition 4 du Livre II de *La sphère et le cylindre* d'Archimède,[2] la seconde dans ceux portant sur la Proposition 11 du premier Livre des *Coniques* d'Apollonius.[3]

• Eutocius est explicitement nommé par Khayyām lui-même, avec Héron d'Alexandrie, comme faisant partie des Anciens qui se sont consacrés à l'explication des difficultés que contiennent les *Éléments* d'Euclide.[4]

Malheureusement Khayyām ne donne aucun détail: s'il a lu cet auteur ou non, en particulier sur la question des rapports composés de rapports, ni, *a fortiori*, s'il l'a fait dans l'un et/ou l'autre des textes que je viens de signaler. Mais, comme on ne sait rien d'un hypothétique commentaire qu'Eutocius aurait consacré aux *Éléments*, que, de plus, dans

---

1. Surtout connu comme rééditeur des quatre premiers Livres des *Coniques* d'Apollonious de Pergè, comme commentateur d'Archimède et du même Apollonius.

2. V. *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, I-III.* Iterum ed. I.L. Heiberg, Lipsiae, in aed. B.G. Teubner, 1910-1915 (réimpr. Stuttgart, 1972), vol. III, p. 120, l. 1-p. 126, l. 20; *Œuvres.* Ed. et trad. franç. Ch. Mugler, 4 vol. Collection des Universités de France, Paris, Belles-Lettres, 1970-1974, vol. IV, p. 82, 1.4 – p. 86, l. 11. Traductions française dans Mugler, *op. cit.*, et dans *Les œuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon.* 2 vol. Trad. franç. par P. Ver Eecke, Paris/Bruxelles 1921, (réimp. Paris, A. Blanchard, 1960), Tome II, pp. 628-632.

3. V. *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis* (*Eutocius*), *I-II.* Ed. J.L. Heiberg. Leipzig, in aed. B.G. Teubner. 1891-1893. Réimp. Stuttgart, Teubner, 1974, vol. II, p. 218, l. 1 – p. 220, l. 25. A ma connaissance il n'existe pas de traduction française du commentaire aux *Coniques.* Nous traduisons le passage consacré à la notion de «rapport composé de rapports»dans l'Annexe, Texte 1.

4. Dans l'introduction du commentaire; v. Djebbar, A., *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'Épître d'al-Khayyām (1048-1131)* Sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide, Orsay, Université de Paris-Sud. Mathématiqlues. Prépublications 97-39, 1997, traduction française du commentaire (basée sur l'édition du texte arabe par A.I. Sabra), p. 24, 1.5; p. 29, 1. 19, ou la nouvelle édition du texte arabe avec traduction française du commentaire par B. Vahabzadeh dans Rashed R. et Vahabzadeh B., *Al-Khayyām mathématicien,* Paris, Blanchard, 1999, p. 308, dernière 1., p. 320, 1. 2.
Dans ce qui suit je désigne ces deux ouvrages par les abréviations [Dj., 1997], [Vahab., 1999].

‘Omar Khayyām et Eutocius:

Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire *sur certaines prémisses problématiques du Livre d’Euclide**

Bernard Vitrac
CNRS, UMR 8567,
Centre Louis Gernet, Paris

I. Introduction

A la fin de l’an 1077 de l’ère chrétienne (470 H) ‘Omar Khayyām achève son commentaire sur certaines prémisses problématiques du Livre d’Euclide (*Risāla fī sharḥ ma ashkala min muṣādarāt Kitāb Uqlīdis*), commentaire en trois chapitres, précédés d’une introduction importante, aussi bien du point de vue historique qu’épistémologique. Les historiens des mathématiques privilégient généralement les deux premiers chapitres du traité de Khayyām, consacrés à des questions fondamentales de l’exposé euclidien: la théorie des parallèles et les Définitions fondationnelles de la théorie des proportions du Livre V; à juste titre sans doute, compte-tenu des apports originaux qu’ils recèlent.

Le troisième chapitre, traitant de problèmes apparemment plus techniques posés par la notion de «rapport composé de rapports», a reçu moins d’attention. Il est d’ailleurs nettement plus bref que les précédents. Son originalité est peut-être moins évidente également. Bien entendu

* Je remercie le Docteur Jafar Aghayani-Chavoshi d’avoir sollicité et permis cette modeste contribution à la commémoration internationale du 900[e] anniversaire de Khayyām.