حکیم عمر خیام و مثلث حسابی

جعفر آقایانی چاوشی
پژوهشگر تاریخ علوم

مقدمه

برای آنان که با حساب احتمالات و آنالیز ترکیبی سر و کار دارند، «مثلث حسابی» که آن را به خطا «مثلث پاسکال» نیز خوانده‌اند نامی آشنا است. مبتکر این مثلث به‌درستی مشخص نیست؛ ولی آن را در آثار ریاضی‌دانان اسلامی، اروپایی و چینی می‌توان یافت.

از قدیم‌ترین دستنوشته‌های موجود در این زمینه، درمی‌یابیم ابوبکر محمد بن حسین کرجی (ف. حدود ۴۲۰هق) ریاضی‌دان بزرگ ایران در دوره‌ی اسلامی، نخستین دانشمندِ جهان اسلام است که درباره‌ی این مثلث سخن گفته و آن را برای ضرایب بسط دوجمله‌ای به کار برده است.

خیام هم که یک قرن پس از کرجی می‌زیست، چنین ادعا کرده که برای استخراج ریشه‌ی اعداد صحیح، موفق به کشف روشی بدیع شده است. آیا او نیز این مثلث را مستقل از کرجی یافته و آن را به گونه‌ای دیگر به کار بسته است؟ کتابی که وی در آن صرفاً به این موضوع پرداخته باشد به دست نیامده است، ولی مورخان علم بر اساس اظهارات این دانشمند، نیز از آنچه که در آثار ریاضی‌دانان پس از او ــ درباره‌ی مثلث حسابی ــ باقی مانده است به این نتیجه رسیده‌اند که خیام، مستقل از کرجی، مجدداً این مثلث را ساخته و از آن در استخراج ریشه‌ی اعداد صحیح استفاده نموده است.

فرهنگ، ۲۹-۳۲، بهار ـ زمستان ۷۸، ص‌ص ۱۷-۳۱

در این مقاله ضمن اینکه روشن خواهیم ساخت پاسکال (ف. ۱۶۶۲م) ریاضی‌دان فرانسوی، نخستین و یگانه مُبدعِ مثلث حسابی نیست، کوشش می‌کنیم تا سهم دانشمندان دوره‌ی اسلامی ـــ به‌ویژه کرجی و خیام ـــ را نیز در پیدایش و کاربرد این مثلث مشخص نماییم.

الف ـ شیوه‌ی بنای مثلث حسابی و برخی خواص مهم آن

پیش از پرداختن به تاریخ مختصر تحول مثلث حسابی، نخست برای آن دسته از پژوهشگرانی که اطلاع کافی از این مثلث و ویژگی‌های آن ندارند، روش ساختن و بعضی خواص اساسی آن را بیان می‌داریم.

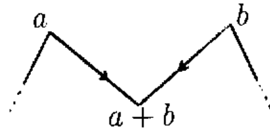
دوجمله‌ای $(A+B)^n$ را که در آن $n \geqslant 0$ است در نظر می‌گیریم. به‌ازای مقادیر مختلف n، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
(A+B)^0 = & & & & & & 1 & & & & & \\
(A+B)^1 = & & & & & \mathrm{A} & + & B & & & & \\
(A+B)^2 = & & & & A^2 & + & 2AB & + & B^2 & & & \\
(A+B)^3 = & & & A^3 & + & 3A^2B & + & 3AB^2 & + & B^3 & & \\
(A+B)^4 = & & A^4 & + & 4A^3B & + & 6A^2B^2 & + & 4AB^3 & + & B^4 & \\
(A+B)^5 = & A^5 & + & 5A^4B & + & 10A^3B^2 & + & 10A^2B^3 & + & 5AB^4 & + & B^5 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

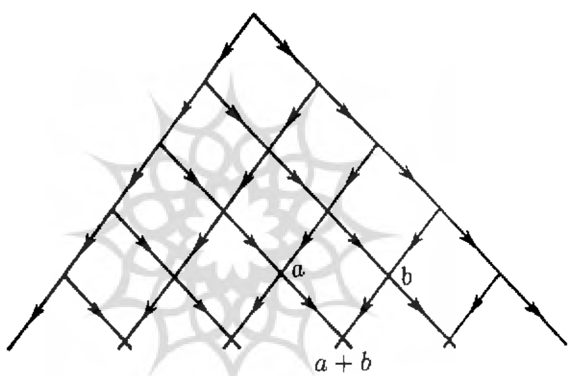
اکنون چنانچه ضرایب بسطِ هر یک از این دوجمله‌ای‌ها را به همان ترتیب بالا در نظر گیریم و بنویسیم، مثلث عددیِ زیر موسوم به «مثلث حسابی» تشکیل می‌شود.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

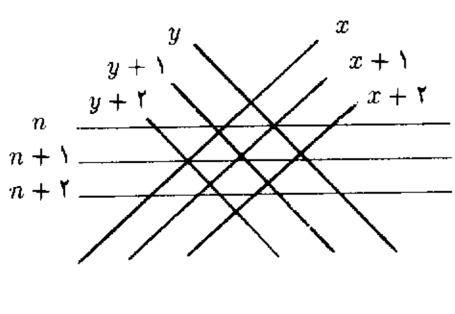
در این مثلث، چنانچه دقت شود، هر عدد برابر با مجموع دو عددِ واقع در شمال شرقی و شمال غربیِ خود است که این مطلب را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد:



براساس قاعده‌ی فوق، مثلث حسابیِ حاصل از بسطِ شش جمله‌ی نخستِ دوجمله‌ای $(A+B)^n$ به شکل زیر درخواهد آمد:

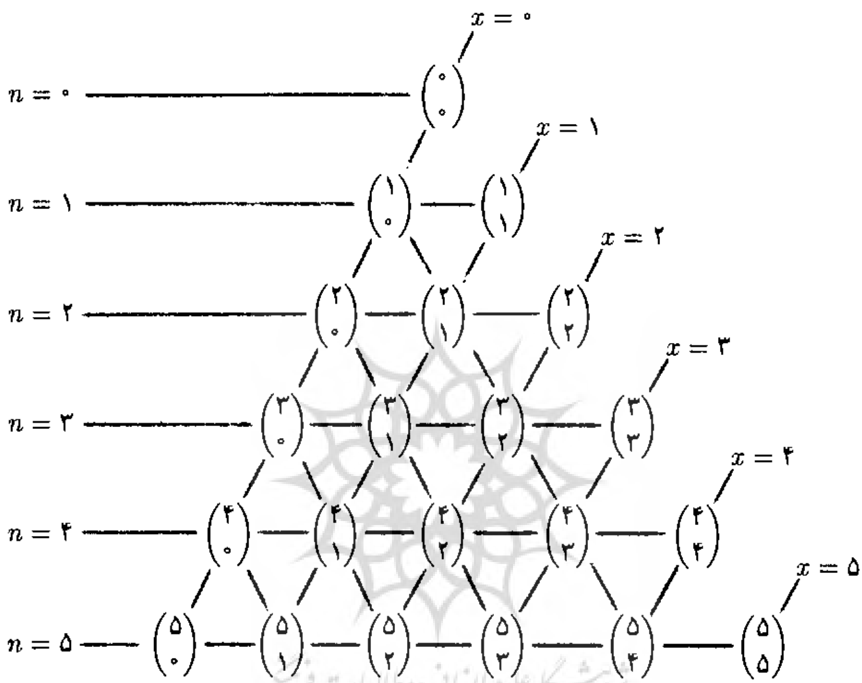


حال اگر خطوطی راکه در جهت پیکان‌ها و به سمت راست امتداد یافته‌اند، yها و خط‌هایی را که هم‌سوی پیکان‌ها و به طرف چپ گسیل شده‌اند، xها و خطوط افقیِ مارّ بر نقاط تقاطعِ دو دسته خطوط مذکور را nها بنامیم، خواهیم داشت:



و بدین ترتیب با استفاده از خطوط xها، yها و nها می‌توان موقعیت هر یک از اعداد «مثلث حسابی» را تعیین کرد؛ برای مثال، عددی از مثلث حسابی به مختصاتِ $\binom{n}{x}$، محل

تلاقی یکی از خطوط xها با یکی از خطوط nها است که در آن x بین ۰ و n تغییر می‌کند و n نیز نماینده‌ی تعداد سطرهای مثلث حسابی است. بر همین مبنا برای شش سطر اول مثلث حسابی (به عبارت دیگر شش جمله‌ی نخست دوجمله‌ای یادشده) می‌توان نوشت:



و با توضیحی که پیش‌تر درباره‌ی خواص اعدادِ مثلث حسابی به دست دادیم، خواهیم داشت:

$$\binom{n-۱}{x-۱} \qquad \binom{n-۱}{x}$$

$$\binom{n}{x} = \binom{n-۱}{x} + \binom{n-۱}{x-۱}$$

رابطه‌های مربوط به جمع اعداد در مثلث حسابی

از ساختمان این مثلث به‌آسانی می‌توان چند خاصیت مهم اعداد را روی $\binom{n}{x}$ تعریف کرد.

۱. مجموع n جمله‌ی واقع بر خطوط افقیِ مثلث حسابی، مطابق زیر و برابر با ۲^n

است:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n;$$

۲. مثلث حسابی نسبت به $\binom{\circ}{\circ}$ دارای تقارن است. بنا بر این:

$$\binom{n}{x}=\binom{n}{n-x};$$

۳. بر اساس قاعده‌ی تشکیل مثلث حسابی که در آن هر جمله (عدد) عبارت از مجموع دو جمله (عدد) فوقانیِ خود است؛ یعنی:

$$\binom{n}{x}=\binom{n-1}{x}+\binom{n-1}{x-1}, \qquad (1)$$

برای جملات (اعداد) دیگر مثلث نیز به همین منوال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{x-1}&=\binom{n-2}{x-1}+\binom{n-2}{x-2}\\ \binom{n-2}{x-2}&=\binom{n-3}{x-2}+\binom{n-3}{x-3}\\ &\vdots\qquad\qquad\vdots\end{aligned}$$

حال چنانچه طرفین این تساوی‌ها را بر اساس خواص آنالیز ترکیبی با یکدیگر جمع کنیم، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\binom{n}{x}=\binom{n-1}{x}+\binom{n-2}{x-1}+\binom{n-3}{x-2}+\cdots\binom{n-x+1}{0} \qquad (2)$$

در اینجا بار دیگر رابطه‌ی (۱) را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که بر اساس آن، روابط

زیر را می‌توان تعریف کرد:

$$\binom{n-۱}{x} = \binom{n-۲}{x} + \binom{n-۲}{x-۱}$$
$$\binom{n-۲}{x} = \binom{n-۳}{x} + \binom{n-۳}{x-۱}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

که با استفاده از خاصیت آنالیز ترکیبی داریم:

$$\binom{n}{x} = \binom{n-۱}{x-۱} + \binom{n-۲}{x-۱} + \cdots + \binom{x-۱}{x-۱}، \qquad (۳)$$

و از مقایسه‌ی رابطه‌های (۲) و (۳) با یکدیگر، خواهیم داشت:

$$\binom{n-۱}{x} + \binom{n-۲}{x-۱} + \cdots + \binom{n-x+۱}{۰} =$$
$$\binom{n-۱}{x-۱} + \binom{n-۲}{x-۱} + \cdots + \binom{x-۱}{x-۱}. \qquad (۴)$$

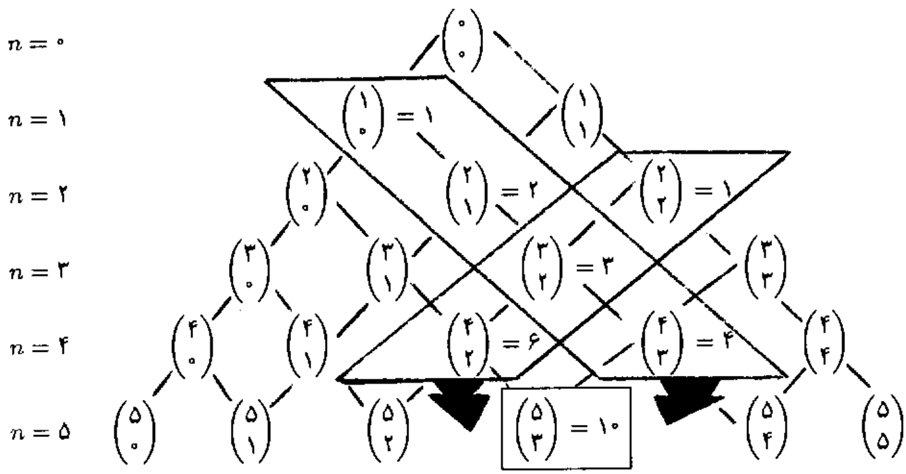
رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که هر جمله (عدد) را در مثلث حسابی، از دو طریق می‌توان به‌دست آورد.

مثال

در صورتی که $n = ۵$ و $x = ۴$ باشد، برای جمله‌ی $\binom{۵}{۴}$، با استفاده از رابطه‌ی (۴) تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۱} + \binom{۱}{۰} = \binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲}$$

شکل زیر که برای شش جمله‌ی نخستِ مثلث حسابی رسم شده است، رابطه‌ی (۴) را به‌خوبی مجسم می‌کند:



رابطه‌های مربوط به ضرب اعداد در مثلث حسابی

تساوی (۳) را در نظر می‌آوریم و آن را برای $x=k$ می‌نویسیم:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\cdots+\binom{0}{0}؛$$

اگر $k=2$ باشد، داریم:

$$\binom{n}{2}=\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{1}+\cdots+\binom{1}{1}.$$

می‌دانیم که مقدار عددیِ $\binom{m}{0}$ برابر با ۱، و مقدارِ $\binom{m}{1}$ برابر با m است. به عبارت دیگر:

$$\binom{n}{1}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{مجموعِ } n \text{ جمله}}=n،$$

و از آنجا می‌توان نوشت:

$$\binom{n}{2}=\underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{\text{مجموعِ } (n-1) \text{ جمله}}=\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (5)$$

با توجه به تساویِ $\frac{n}{۱} = \binom{n}{۱}$، مقدارِ $\binom{n}{۲}$ از حاصل ضرب $\frac{n}{۱}$ در $\frac{n-۱}{۲}$ به دست می‌آید. یعنی:

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

به همین ترتیب برای $\binom{n}{۳}$ و . . . ، با استفاده از استقرای ریاضی خواهیم داشت:

$$\binom{n}{۳} = \frac{n}{۱} \times \frac{n-۱}{۲} \times \frac{n-۲}{۳}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{۱} \times \frac{n-۱}{۲} \times \frac{n-۲}{۳} \times \cdots \times \frac{n-x+۱}{x} ،$$

و یا:

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-x+۱)}{x!} ،$$

و چنانچه صورت و مخرجِ طرف دوم تساوی را در $(n-x)!$ ضرب کنیم، رابطه‌ی (۶) حاصل می‌شود:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad (۶)$$

ب ـ تاریخ مثلث حسابی

چنان‌که پیش از این اشاره شد در کتاب‌های ریاضیِ اروپایی، «مثلث حسابی» را به نام «مثلث حسابی پاسکال» می‌شناسند. علت هم این است که هنگامی که دولِگِ[1] فرانسوی در ۱۸۶۹م، از پایان‌نامه‌ی دکتری خود با عنوان اثبات رابطه‌ی دوجمله‌ای نیوتن از سوی پاسکال(۱) در دانشگاه سوربن دفاع کرده، برای اولین بار، رساله‌ی پاسکال را درباره‌ی مثلث حسابی مورد بحث قرار داده و آن را برای تعیین ضرایب بسط دوجمله‌ای‌ها به کار برده است و از همین تاریخ بود که این مثلث به مثلث حسابی پاسکال موسوم و معروف

1. Delègue

شد. حال آنکه بعدها مورخان ریاضی متوجه شدند که موضوع این مثلث نه‌تنها در آثار ریاضی‌دانان غیر اروپایی، بلکه در نوشته‌های علمای ریاضیِ اروپاییِ قبل از پاسکال ــ نظیر میکاییل شتیفل[2] (ف. ۱۵۶۷م) ــ نیز مطرح شده است (د.ی. اسمیث ۱۹۵۸: ص ۵۰۸؛ اریک تمپل‌بل ۱۳۶۳: ص‌ص ۱۵۳-۱۵۴).

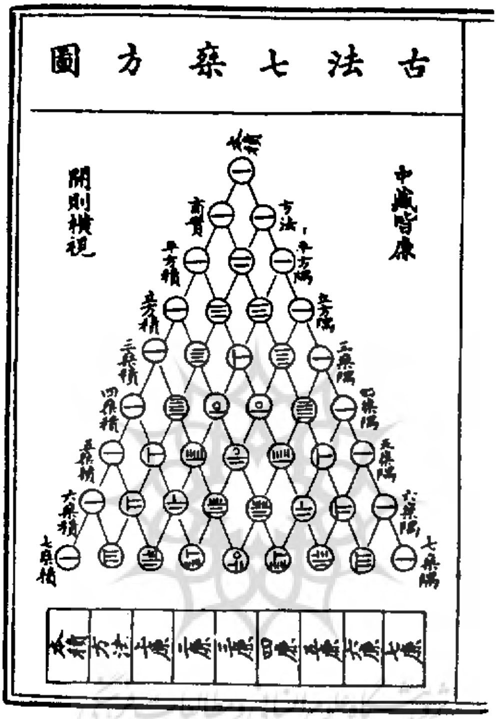
شتیفل، مثلث حسابی را در اثری از خود ــ موسوم به *Arithmetica Integra* ــ آورده و آن را در محاسبات حسابی به کار برده است؛ و بر اساس تحقیقات بوسمن، مورخِ علوم، بود که مشخص شد پاسکال، در رساله‌ی خود درباره‌ی مثلث حسابی، از کتاب مذکور استفاده کرده و تنها کار اصیل وی در خصوص مثلث حسابی هم این بود که آن را به گونه‌ی درخور توجهی در مبحث حساب احتمالات نیز وارد ساخته و به کار برده است (بوسمن ۱۹۰۶: ص ۷۲).

تصویر زیر از مثلث حسابی، نمایی از آن است که در رساله‌ی پاسکال آمده است.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
0	1									

2. M. Stifel

در زیر، شکل دیگری از مثلث حسابی به نقل از کتاب آینه‌ی قیمتی چهار عنصر اثر چو شی‌ـکه[3]، ریاضی‌دان چینی، (تألیف در ۱۳۰۳م) مشاهده می‌شود.



در این قسمت به شرح نحوه‌ی آشنایی دانشمندان دوره‌ی اسلامی از مثلث حسابی می‌پردازیم: علمای مسلمان از دو راه کاملاً متفاوت به نتایج واحدی که دست‌مایه‌هایی برای کشف مجددِ مثلث حسابی شد، دست یافتند؛ این دو طریق را می‌توان در مباحثِ «زبان‌شناسی» و «ریاضی» مطرح و بررسی نمود.

۱. زبان‌شناسی

مبتکر این روش، خلیل بن احمد بن عمرو بن تمیم فراهیدیِ اَزدی (ف. بین ۱۷۰-۱۷۵هق) زبان‌شناس معروف است که برای یافتن قواعد مربوط به وزن و قافیه‌ی شعر عرب کوشش بسیارکرد. او در کتاب العین، برای ارائه‌ی نتیجه‌ی پژوهش‌های زبان‌شناسی خود، محاسباتی

3. Chu Shi-kie

انجام داد که امروزه از آن به «آنالیز ترکیبی» تعبیر می‌شود. خلیل گرچه مثلث حسابی را کشف نکرد ولی راه را برای محققان پس از خود هموار ساخت (رشدی راشد ۱۹۷۴: ص‌ص ۳۹۶-۳۹۷) که از جمله‌ی آنان می‌توان از ابن منعم (ف. ؟) ریاضی‌دان مغربی یاد کرد که در کتاب فقه الحسابِ خود، کار خلیل را دنبال کرده و از راه آنالیز ترکیبی به رابطه‌ی زیر دست یافته است:

$$\binom{n}{x} = \binom{n-1}{x-1} + \binom{n-2}{x-1} + \cdots + \binom{x-1}{x-1}$$

و چنان‌که پیش‌تر بیان شد، خود از رابطه‌های اساسی مربوط به مثلث حسابی است که ابن منعم با قرار دادن اعداد مختلف در آن، برای اولین بار مثلث حسابی را از طریق آنالیز ترکیبی به دست آورد (احمد جبّار ۱۹۸۷: ص ۲۳۲).

۲. ریاضی

گروه دوم از دانشمندان دوره‌ی اسلامی ــ در رأس آنها ابوبکر محمد بن حسین کرجی ــ به‌طوری که اشاره شد ریاضی‌دانانی بودند که از طریق محاسبه‌ی ضرایب بسطِ دوجمله‌ای، به مثلث حسابی دست یافتند و آن را در حالت کلی نیز برای محاسبه‌ی ضرایب این دوجمله‌ای‌ها مورد استفاده قرار دادند.

رساله‌ای که کرجی در آن به شرح روشِ خود پرداخته، تاکنون به دست نیامده است ولی احتمال دارد همان رساله‌ی فی حساب الهند باشد که این ریاضی‌دان در کتاب البدیع فی الحسابِ خود از آن نام برده است (کرجی ۱۹۶۴: ص‌ص ۵۱-۵۲).

خوشبختانه سموئیل مغربیِ ریاضی‌دان (ف. ۵۷۰هـق) در رساله‌ی الباهر فی علم الحساب، از زبان کرجی و بدون اینکه به رساله‌ی وی اشاره‌ای کند، طرز تشکیل مثلث حسابی را شرح می‌دهد و از آن برای تعیین ضرایب بسطِ دوجمله‌ای $(a+b)^n$ استفاده می‌کند؛ شایان ذکر است که دستورالعمل کرجی برای بسطِ دوجمله‌ای مزبور، یعنی:

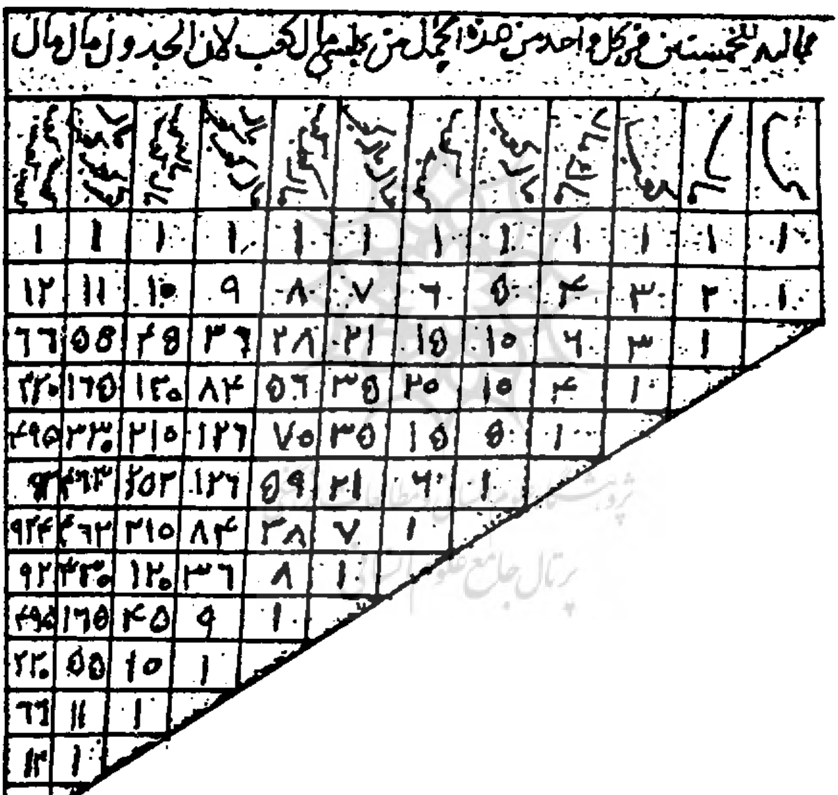
$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r،$$

نیز در حقیقت مبتنی بر رابطه‌ی

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

است، و چنان‌که ملاحظه شد از رابطه‌های اساسی در مثلث حسابی محسوب می‌شود (رشدی راشد ۱۹۷۲: ص‌ص ۵-۷).

مثلث حسابیِ موجود در رساله‌ی سموئیل مغربی، به شکل زیر است (رشدی راشد ۱۹۷۲: ص ۶).



قضیه‌ی مثلث حسابی به همین جا ختم نمی‌شود؛ زیرا چنان‌که قبلاً اشاره شد حکیم عمر خیام یک قرن پس از کرجی، ضمن اینکه در کتاب جبر و مقابله‌ی خود مدعیِ ابداع روشی برای استخراج ریشه‌های اعداد شده، آورده است:

... و هندیان را در استخراج جذر و کعب طریقه‌ای است مبتنی بر اندک استقرایی و آن

> شناسایی مربعاتِ اعدادِ نُه‌گانه، یعنی مربع یک و دو و سه [... تا نُه] و نیز حاصل ضرب [اعداد] دو در سه و امثال آن. و ما را کتابی است در براهین درستی این راه‌ها و منجر شدن آنها به مطلوب و ما انواع این طریقه‌ها را افزون کرده‌ایم، یعنی استخراج مالِ مالْ و مالِ کعبْ و کعبِ کعبْ، و غیره را بر آنها افزوده‌ایم، و این اضافات تازه است. (غلامحسین مصاحب ۱۳۳۹: ص‌ص ۱۷۰-۱۷۱)(۲)

اثری را که خیام در نوشته‌ی خود بدان اشاره می‌کند به دست ما نرسیده است، اما از روی رساله‌ی نصیرالدین طوسی (ف. ۶۷۲هق) در علم حساب، به‌آسانی می‌توان به مقصود خیام پی برد. در اینجا توجه به این مطلب ضروری است که خواجه نصیر با آثار خیام آشنایی کامل داشته و اغلب نظریات او را شرح و یا بسط داده است و بنا بر این این احتمالِ قریب به یقین حاصل می‌شود که از رساله‌ی مفقود خیام نیز استفاده کرده و از آن در رساله‌ی حساب خود بهره برده باشد. وی در رساله‌ای با عنوان جوامع الحساب بالتّخت و التّراب برای یافتن ریشه‌ی nامِ عددی صحیح مانند N به صورت زیر عمل می‌کند.

او عدد n را، در صورتی که فاقد ریشه‌ی صحیح باشد، به صورتِ

$$N = a^n + r$$

نمایش می‌دهد، و با این شرط که r باید در نامساوی زیر صدق کند:

$$r < (a+۱)^n - a^n ،$$

ریشه‌ی تقریبی nامِ عدد N چنین خواهد بود:

$$\sqrt[n]{N} \sharp a + \frac{r}{(a+۱)^n - a^n} .$$

سپس نصیرالدین طوسی برای محاسبه‌ی مقدار $(a+۱)^n - a^n$، از رابطه‌ی

$$(a+b)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

استفاده می‌کند و جدولی را برای تعیین ضرایب بسطِ دوجمله‌ای به دست می‌دهد که همان مثلث حسابی است. او این مثلث را با جزئیات تمام شرح داده و حتی به رابطه‌ی بین اعدادِ

آن اشاره کرده است که با استفاده از علائم ریاضیِ جدید به صورت زیر درمی‌آید:(۳)

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m-1}{n-1}$$

که همان رابطه‌ی اصلی در مثلث حسابی است.(۴)

خواجه نصیر در رساله‌ی خود کم‌ترین اشاره‌ای به ابداعِ این مثلث و روش تقریبیِ ریشه‌گیری که به کار برده، نکرده است و به ظنّ قوی باید آن را از ریاضی‌دانان پیش از خود اقتباس کرده باشد. همچنین از آنجا که شیوه‌ی مذکور، همان روشی است که خیام مدعیِ کشف آن شده است؛ می‌توان احتمال داد که شیوه‌ی نصیرالدین طوسی، مقتبس از روش خیام باشد. نیز با توجه به اینکه خیام ضمن آشنایی کامل با «مثلث حسابی»، آن را برای ریشه‌گیری نیز به کار برده است ــ یعنی روشی که قرن‌ها پس از او در اروپا متداول شد ــ از این‌رو حقّ چنین است که مثلث مذکور را «مثلث کرجی ـ خیام» بنامیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Delègue. 1869. *Démonstration de la formule du binom de Newton d'après Pascal.* Paris.

۲. عین عبارت عربی خیام چنین است:
«و للهند طرق فی استخراج اضلاع المربعات و المکعبات مبنیةٌ علی استقراء قلیل، و هو معرفة مربعات الصور التسعة، أعنی مربع الواحد و الاثنین و الثلاثة، و کذلک مضروب بعضها فی بعض، أعنی مضروب الاثنین فی الثلاثة و نحوها. و لنا کتاب فی البرهان علی صحة تلک الطرق و تأدیتها إلی إلی المطلوبات. و قد غزرنا انواعها، أعنی من استخراج اضلاع مال المال و مال الکعب و کعب الکعب، بالغاً ما بلغ، و لم تسبق الیه...». برای اطلاع بیش‌تر ←:

Rashed, R. et Vahabzadeh, B. 1999. *Al-Khyyām Mathématicien.* Paris: Blanchard, p. 131.

۳. یوشکویچ نیز که این اثر نصیرالدین طوسی را مطالعه کرده، به همین نتیجه رسیده بود؛ او در کتابِ ریاضیات مسلمانان به این مطلب که خواجه نصیر در ارائه‌ی مثلث حسابی، احتمالاً، از خیام الهام گرفته، تصریح نموده و چنین نوشته است:

«Aṭ-Ṭūsī ne prétend en aucune manière avoire découvert lui-même toutes ces formules. Comme il lui est arrivé de développer dans certains cas des idées d'al-

Khayyãm, on peut supposer qu'il s'est inspiré ici de l'ouvrage de ce dernier...». (A.P. Youschkevitch 1976: p. 80)

۴. در این باره همچنین ← (محمدتقی مدرّس رضوی ۱۳۵۴: ص‌ص ۶۴۴-۶۴۵).

کتابنامه

تمپل‌بل، اریک. ۱۳۶۳. ریاضی‌دانان نامی. ترجمه‌ی حسن صفاری. تهران: امیرکبیر.

کرجی، ابی بکر محمد بن حسین. ۱۹۶۴. کتاب البدیع فی الحساب. تحقیق عادل انبوبا. بیروت: منشورات الجامعة اللبنانیة.

مدرّس رضوی، محمدتقی. ۱۳۵۴. احوال و آثار قدوهٔ محققین و... ملقب به نصیرالدین. تهران: بنیاد فرهنگ ایران.

مصاحب، غلامحسین. ۱۳۳۹. حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر. تهران: انجمن آثار ملی.

Bosmans, H. 1906. "Note historique sur triangle arithmétique dit de Pascal", *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, vol. 31, p. 72.

Djebbar, A. 1987. "L'analyse combinatoire au Maghreb entre le XIIe et le XIVe siècle", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* [Nouvelle série] n° 20, p. 232.

Rashed, R. 1972. "L'induction mathématique: al-Karajī, as-Samaw'al", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 9, n° 1, pp. 5-7.

________ . 1974. "Algèbre et linguistique: l'analyse combinatoire dans la science Arabe", *Philosophical Fondation of Science*, Hollande.

Smith, D.E. 1958.*History of Mathematics*. vol. 2, New York: Dover.

Youschkevitch, A.P. 1976. *Les mathématiques arabes* (*VIII-XV siécles*). Paris.