خیام و نوموگرافی

احمد شرف‌الدین
استاد گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان

مقدمه

حکیم عمر خیام از ریاضی‌دانان بزرگ ایران اسلامی در قرن ششم هجری قمری است. کارهای علمی او در ریاضیات از چنان اهمیتی برخوردار است که نیمه‌ی دوم قرن یازدهم میلادی، «عصر عمر خیام» نامیده شده است (جورج سارتن ۱۹۵۰: ص‌ص ۷۵۹-۷۶۱).

از جمله آثار ریاضی خیام رساله‌ی جبر و مقابله است که فرانتس وُپکه آن را در ۱۸۵۱م از عربی به فرانسوی ترجمه کرده و در پاریس منتشر نموده است.

استاد دکتر غلامحسین مصاحب نیز بر اساس همین ترجمه‌ی فرانسوی، رساله‌ی مزبور را به فارسی ترجمه کرده و در ۱۳۳۵هش در تهران منتشر ساخته است.

خیام، در رساله‌ی جبر و مقابله، معادلات درجه‌ی سوم را به صورت منظمی دسته‌بندی کرده و روش حل هر یک از آنها را با استفاده از مقاطع مخروطی تعیین نموده است و من باب مثال، حل معادله‌ی

$$x^3 + px = q; \qquad p, q > 0$$

را که موضوع بحث ما است، به تعیین نقاط تقاطع یک سهمیِ ثابت و یک دایره‌ی متغیر منجر ساخته (غلامحسین مصاحب ۱۳۳۵: ص‌ص ۱۹۳-۱۹۴) و با این روش مبتکرانه‌ی خود،

فرهنگ، ۲۹-۳۲، بهار ـ زمستان ۷۸، ص‌ص ۹-۱۵

در واقع نخستین گام‌ها را در راه نوموگرافی برداشته است. استاد دکتر محسن هشترودی، روش خیام را برای معادلات درجه‌ی چهارم نیز تعمیم داده و ثابت کرده است که این معادلات را می‌توان از تقاطع یک سهمیِ ثابت و یک دایره‌ی متغیر حل نمود.
اما پیش از بررسی این تعمیم، مناسب است به تحلیل روش خود خیام بپردازیم تا بهتر بتوانیم به رابطه‌ی آن با نوموگرافی آشنا شویم.

۱. روش خیام برای حل معادله‌ی $x^۳ + px = q$

شیوه‌ی وی برای حل معادله‌ی

$$x^۳ + px = q; \qquad p, q > ۰ \tag{۱}$$

با استفاده از علائم جبری امروزی به صورت زیر است:
ابتدا پاره‌خط $\overline{AB}$ را به طول $\sqrt{p}$ رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی B عمود Bx را بر $\overline{AB}$ بنا می‌کنیم و بر این عمود، طول $\overline{BC}$ را چنان اختیار می‌نماییم که

$$\overline{AB}^۲ . \overline{BC} = q$$

باشد.

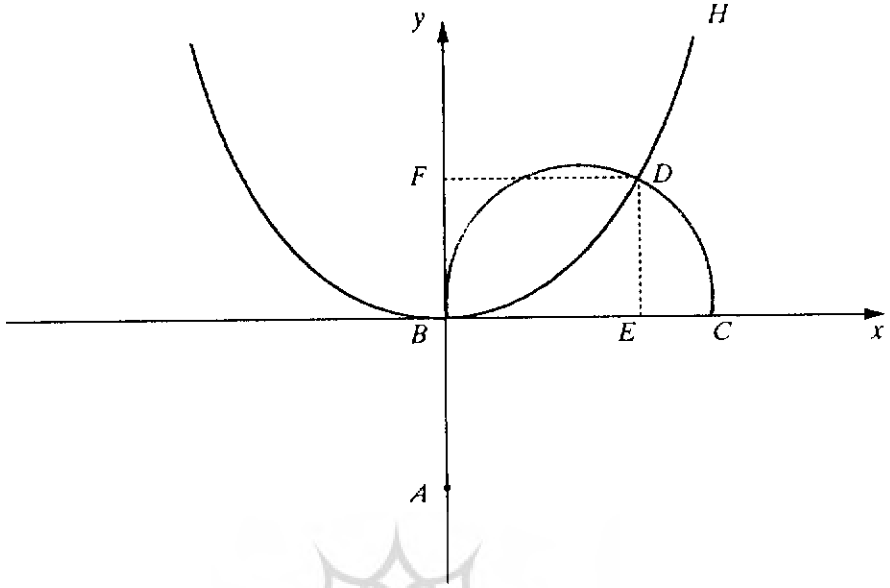
اکنون سهمی H را به رأس B و محور By، عمود بر Bx در نظر می‌گیریم. آن‌گاه نیم‌دایره به قطر $\overline{BC}$ را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن با سهمیِ H را D می‌نامیم.

از نقطه‌ی D عمود $\overline{DE}$ را بر خط Bx فرود می‌آوریم. طول پاره‌خط $\overline{BE}$، پاسخ معادله‌ی (۱) است.

برهان

از نقطه‌ی D عمود $\overline{DF}$ را بر خط By بنا می‌کنیم. در این صورت در سهمیِ H داریم:

$$\overline{DF}^۲ = \overline{AB} . \overline{BF} \tag{۲}$$



با رعایت آنکه $\overline{DE} = \overline{FB}$ و $\overline{DF} = \overline{EB}$ است؛ رابطه‌ی (۲) به رابطه‌ی (۳) تبدیل می‌شود:

$$\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{BE} : \overline{ED} \quad (۳)$$

حال با توجه به اینکه در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDC معادله‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{BE} : \overline{ED} = \overline{ED} : \overline{EC} \quad (۴)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌های (۳) و (۴)، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AB}^{2} : \overline{BE}^{2} = \overline{BE} : \overline{EC}$$

و یا:

$$\overline{BE}^{3} = \overline{AB}^{2}.\overline{EC} \quad (۵)$$

پس:

$$\overline{BE}^{3} + \overline{AB}^{2}.\overline{EB} = \overline{AB}^{2}.\overline{EC} + \overline{AB}^{2}.\overline{EB}$$

و یا:

$$\overline{BE}^{۳} = \overline{AB}^{۲}.\overline{BC} \qquad (۶)$$

و با رعایت اینکه

$$\overline{AB}^{۲}.\overline{BC} = q \quad , \quad \overline{AB}^{۲} = p \text{ ،}$$

رابطه‌ی (۶) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\overline{BE}^{۳} + p\overline{BE} = q \text{ .} \qquad (۷)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی (۷) با معادله‌ی (۱) معلوم می‌شود که طول پاره‌خط $\overline{BE}$، جواب معادله‌ی (۱) است.

۲. تعمیم روش خیام از دکتر محسن هشترودی[۱]

اگر دو سهمی محورهای عمود بر هم داشته باشند، چهار نقطه‌ی تقاطع آنها بر یک دایره واقع‌اند. با استفاده از این مطلب می‌توان حل معادلات درجه‌ی سوم و چهارم را به تقاطع یک سهمیِ ثابت با یک دایره‌ی متغیر منجر نمود.

حل

هرگاه دو سهمی را با معادلات زیر در نظر گیریم:

$$y = ax^{۲} + bx + c, \qquad x = a'y^{۲} + b'y + c' \text{ ،}$$

بدیهی است که محورهای آنها، به علت توازی با محورهای مختصات، بر هم عمود است. از طرف دیگر مختصات نقاط تقاطع این دو سهمی، در هر ترکیب خطی از دو معادله‌ی فوق صدق می‌کند. اکنون ترکیب خطیِ

$$ay' + ax = aa'(x^{۲} + y^{۲}) + a'bx + ab'y + ac' + a'c$$

را تشکیل می‌دهیم؛ این ترکیب خطی که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$aa'(x^۲+y^۲)+(a'b-a)x+(ab'-a')y+ac'+a'c=۰\text{،}$$

معادله‌ی یک دایره است. بنا بر این چهار نقطه‌ی حاصل از تقاطع دو سهمی که محورهای آنها عمود بر هم هستند بر یک دایره واقع‌اند.

اکنون فرض می‌کنیم که معادله‌ی درجه‌ی چهارمِ

$$x'^۴+a'x'^۳+b'x'^۲+c'x'+d'=۰$$

در دست باشد (به ازای $d'=۰$، معادله‌ای از درجه‌ی سوم است.). هر گاه در آن به‌جای متغیر x' مقدار $x-\frac{a'}{۴}$ را قرار دهیم، معادله‌ی جدید فاقد جمله‌ی درجه‌ی سوم خواهد بود و به صورت معادله‌ی

$$x^۴+ax^۲+bx+c=۰$$

درخواهد آمد. سپس فرض می‌کنیم

$$x^۲=y$$

که خود سهمی ثابتی است، زیرا پارامتر ندارد. و بنا بر این معادله‌ی درجه‌ی چهارم فوق به صورت

$$y^۲+ay+bx+c=۰$$

درمی‌آید که معادله‌ی یک سهمی، و محور آن بر سهمیِ $y=x^۲$ عمود است. نقاط تقاطع این دو سهمی، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی چهارم را به‌دست می‌دهد. ولی این نقاط بر دایره‌ی

$$x^۲+y^۲+bx+(a-۱)y+c=۰$$

واقع‌اند و بنا بر این، حل معادله‌ی درجه‌ی چهارمِ $x^۴+ax^۲+bx+c=۰$ (یا درجه‌ی سوم؛ اگر $c=۰$ باشد) منجر به تعیین نقاط تقاطع سهمیِ ثابتِ $y=x^۲$ و دایره‌ی متغیرِ

$$x^۲+y^۲+bx+(a-۱)y+c=۰$$

خواهد شد.

حال اگر سهمی را با دقت کافی روی کاغذ میلی‌متری رسم کنیم، هر بار با ترسیم دایره‌ی متغیر، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی چهارم به‌دست می‌آید.

۳. حل معادله‌ی درجه‌ی سومِ $x^3 + px = q$ با روشی ملهم از شیوه‌ی خیام

چنان‌که ملاحظه شد، خیام معادله‌ی درجه‌ی سومِ $x^3 + px = q$ را به تعیین نقاط تقاطع یک سهمیِ ثابت بر یک دایره‌ی متغیر تبدیل نموده است.

اکنون نویسنده‌ی این سطور با الهام از روش خیام، راه حل این معادله را به صورت زیر ارائه می‌نماید.

در معادله‌ی $x^3 + px = q$، با تغییرِ متغیرِ $x = \sqrt{p}u$ معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$u^3 + u = k \qquad (k = q/p\sqrt{p}) \tag{1}$$

جواب‌های معادله‌ی (۱) عبارت از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی چهارم زیر است. (البته به‌جز جواب $u = 0$.)

$$u^4 + u^2 = ku \tag{2}$$

حال فرض می‌کنیم که $y = u^2$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$y^2 + u^2 = ku \tag{3}$$

و بنا بر این حل معادله‌ی (۲) به تعیین نقاط تقاطع سهمیِ ثابتِ $y = u^2$، و دایره‌ی متغیر به معادله‌ی (۳) بدل خواهد شد.

۴. سخنی کوتاه درباره‌ی نوموگرافی

نوموگرافی[1] مبحثی از هندسه است که در آن بعضی از محاسبات به کمک نمودارها انجام می‌گیرد. این گونه نمودارها را نوموگرام یا آباک[2] می‌نامند. هر مسئله‌ای دارای نوموگرافی خاص

1. Nomographie 2. Abaque

خود است. این نوموگرام‌ها در فنونی مانند مساحی، مهندسی، نقشه‌برداری، هواپیمایی و توپخانه مورد استعمال فراوان دارند. آباکِ اسمیث از جمله آباک‌های مهمی است که در الکترونیک در مبحث اَبَربسامد به کار می‌آید و با آن می‌توان عباراتی شامل متغیرِ مختلط را به‌آسانی و باسرعت محاسبه نمود.

واضعِ مبحث نوموگرافی، کِرمونا (۱۸۳۰-۱۹۰۳) است و موریس دُکانی (۱۸۶۲-۱۹۲۸) به صورت فوق‌العاده‌ای در بسط و تعمیم آن کوشیده است.[۲]

پی‌نوشت‌ها

۱. استاد هشترودی این تعمیم را در یکی از آثار خود (← : تمرینهای ریاضیات مقدماتی. ۱۳۴۵. تهران: انتشارات مجله‌ی یکان، ص‌ص ۳۱۸-۳۱۹) آورده است. نیز ← :

آقایانی چاوشی، جعفر. ۱۳۵۸. سیری در افکار علمی و فلسفی حکیم عمر خیام نیشابوری. تهران: انجمن فلسفه‌ی ایران، ص‌ص ۳۸-۳۹. علیرضا امیرمعز، همین مطلبِ استاد هشترودی را به انگلیسی ترجمه کرده و با مشخصات زیر در امریکا به چاپ رسانده است:

Amir Moéz, A.R. 1962. "Khayyām's Solution of Cubic Equations", *Mathematics Magazine*, vol. 35, no. 5, pp. 270-273.

۲. برای آگاهی بیش‌تر در این باره، ← :

D'Ocagne, M. 1921. *Traité de Nomographie*. Paris; Gient, A. 1954. *Abaques ou Nomogrammes*. Paris; Khovanski, G. 1979. *Elements de Nomographie*. Moscow.

کتابنامه

مصاحب، غلامحسین. ۱۳۳۵. حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر. تهران: انجمن آثار ملی.

Sarton, G. 1950. *Introduction to the History of Science*. vol. I, Baltimore: Pub. for the Carnegie Ins. of Washington, by the Williams and Wilkins Co.

Woepcke, F. 1851. *L'Algèbre d'Omar Al-Khayyāmī*. Publiée, traduite et accompagnée d'Extraits de manuscrits inédits, Paris.