

## جستارهایی در فلسفه ریاضیات و منطق

دکتر محمد علی شهابی شجاع - دکتر علی اکبر مهرورز

دانشکده ریاضی دانشگاه تبریز

### مقدمه

فلسفه، خاص انسان‌ها است، وقتی عقل و ادراک و علم و جهل مطرح شود فلسفه نیز مطرح می‌شود. فلسفه با سوال و میل به دانستن عینیت دارد. اما هر سوال و هر دانستن فلسفی نیست. سوالات فلسفی آنهایی هستند که پاسخ آنها با حس و تجربه تنها ممکن نیست و انسان باید به تفکر بپردازد و نتیجه‌گیری کند. انسان وقتی به جهل خود متوجه شد میل به دانستن در او ظاهر می‌شود و او را وادار به سوال و جستجوی پاسخ می‌کند. بدیهی است پاسخ‌های داده شده بستگی به شرایط تاریخی، تربیتی، اقتصادی، اطلاعاتی، فرهنگی و... دارد لذا فلسفه موضوع ثابتی نیست و همواره در معرض تغییر و تحول بوده و راه آن پایان‌ناپذیر است. سوالات و جوابهای انسان‌ها و اقوام مختلف در موضوعات مختلف فلسفه آنها را در آن موضوعات بوجود می‌آوردند. مانند فلسفه خلقت، فلسفه ادیان، فلسفه تعلیم و تربیت، فلسفه فیزیک، فلسفه ریاضی...، فلسفه اسلامی، فلسفه یونانی، فلسفه هندی، فلسفه قرون وسطی و...

موضوع صحبت ما به اختصار فلسفه ریاضیات و منطق خواهد بود.

فلسفه ریاضی نظم دادن و مدون کردن داده‌های بی‌نظم علم ریاضی است که طی سالیان متمادی مطرح گردیده و روی هم انباشته شده است. با توجه به روش‌های بکار رفته می‌توان گفت سه نوع فلسفه اصلی در ریاضیات وجود دارد که هر کدام از آنها طرفداران و منتقدانی دارد.

الف - فلسفه منطوق‌گرا: پیروان این مکتب فلسفی، ریاضیات را بخشی از منطق می‌دانند. در این فلسفه به جای آنکه منطق فقط وسیله‌ای برای ریاضیات باشد تبدیل به کل ریاضیات می‌شود. همه مفاهیم ریاضی باید بر حسب مفاهیم منطق فرمول بندی شوند. همه قضایای ریاضی باید به عنوان قضایائی از منطق بیان و اثبات شوند. وایتهد، فرگه و برتراند راسل از طرفداران بزرگ این مکتب می‌باشند. راسل و وایتهد با تدوین کتاب عظیم اصول ریاضی (۳ جلد) به دفاع از این فلسفه پرداختند که چندین بار تجدید چاپ شد.

فرگه عقیده داشت که فقط قوانین عدد را می‌توان به قوانین منطق تاویل کرد ولی وایتهد و راسل ادعای بزرگی داشتند عبارت از اینکه همه ریاضیات را می‌توان به منطق تبدیل کرد. کتاب اصول ریاضیات راسل و وایتهد با ایده‌های اولیه یا تعریف نشده‌ها و احکام اولیه یا اصول موضوعه شروع می‌شود و هیچگونه اقدامی برای اثبات سازگاری احکام اولیه به عمل نمی‌آید. قضیه‌های ریاضی از احکام و ایده‌های اولیه گسترش یافته و با شروع از حساب گزاره‌ها از طریق تئوری طبقات و روابط به تاسیس دستگاه اعداد طبیعی عمل کرده و سپس همه ریاضیات را از دستگاه اعداد طبیعی استخراج می‌کند.

راسل برای احتراز از تناقضات نظریه مجموعه‌ها، «تئوری طبقات» را بکار می‌گیرد. او معتقد بود که می‌توان با روشی قابل قبول این کار را به سامان رسانید. اساس فکر او این بود که فکر می‌کرد همه پارادوکس‌ها در بر هم زدن قواعد مسلم و معتبر، ریشه مشترکی دارند که وی آنرا «اصل دور باطل» نامید. اما پارادوکس اپیمندیس و پارادوکس کانتور و حتی پارادوکس راسل، اصل دور باطل را نقض کردند.

ب - فلسفه شهودگرا: طرفداران این فلسفه عقیده دارند که اشیاء و برهانهای ریاضیات را فقط باطنی گامهای متوالی و منتهای قابل اطلاق بر اعداد طبیعی می‌توان ساخت یعنی زیربنای ریاضیات شهود اولیه در مورد اعداد طبیعی است.

بر طبق این نظریه پایه ریاضیات بر شهود اولیه قرار دارد و ادراک‌های بعدی متوالیاً انجام می‌گیرد. در این روند رشته‌ای بی‌پایان به دست می‌آید که بهترین مثال آن رشته اعداد طبیعی است. سابقه شهودگرایی به زمان کانت فیلسوف آلمانی بر می‌گردد. به نظر کانت از اینکه حساب بر مبنای نیروی ذهنی شمارش قرار دارد لذا اعداد فقط و فقط وقتی وجود دارند

که به وسیله شمارش در دسترش باشند. مثلاً کانت معتقد بود که در هندسه حداکثر طول وجود ندارد زیرا هر چند خط را می‌توان از دو طرف امتداد داد اما به طور نامتناهی نمی‌توان این عمل را انجام داد. به این ترتیب کانت به جای پیروی از عقیده بیکران بالفعل نظریه بیکران بالقوه یا کلیات نامعین را ابراز مینماید. همچنانکه ارسطو در پارادوکس معروف زنون مفهومی نظیر بیکران بالقوه کانت را به کار برده است. از چهره‌های اصلی و معاصر طرفدار این فلسفه ال.ای. جی. براتور هلندی، هرمان وایل و مایکل دامت است.

ج - فلسفه صورتگرا (صوری گرا): در این فلسفه، ریاضیات با سیستمهای نمادهای صوری سر و کار دارد. از این دیدگاه در واقع ریاضیات عبارتست از گردایه‌ای از چنین دستگاههای مجرد که مفاهیم آن همان نمادها و احکام آن، فرمولهائی است که با این نمادها بیان می‌شوند، یک دستگاه صوری مشتمل است بر:

۱) یک زبان رسمی که گردایه‌ای از نمادها به همراه قواعدی روشن که عبارات این زبان را تشکیل می‌دهد.

۲) گردایه‌ای از احکام اولیه (بنداشتهای اولیه)

۳) یک سیستم استنتاجی

در یک دستگاه صوری مفروض قضیه‌ها با گامهائی منتهای از احکام اولیه نتیجه می‌شوند. عقیده صورتگرایان این است که همه ریاضیات را می‌توان در دستگاه‌های صوری جا داد.

این مکتب فلسفی توسط دیوید هیلبرت آلمانی بعد از اتمام صوری کردن هندسه پایه‌گذاری شد. دیدگاه صورتگرایانه زمانی توسط هیلبرت رشد و گسترش یافت که می‌خواست بحرانی را که توسط پارادوکسهای نظریه مجموعه‌ها بروز کرده و نیز مبارزه‌ای را که به وسیله شهودگرایان با ریاضیات کلاسیک می‌شد مرتفع سازد. موفقیت یا شکست برنامه هیلبرت به حال مساله سازگاری بستگی دارد. هیلبرت اثبات سازگاری به روش مستقیم را نظریه برهان نامید و با همکاران خود بر این بود که توضیح مفصل و کاربردی برای همه ریاضیات کلاسیک از ثوری برهان را در کتابی با عنوان مبانی ریاضیات ارائه دهد. این کتاب را می‌توان اصول ریاضیات فلاسفه صورتگرا نامید. کتاب مبانی ریاضیات در نیمه اول قرن بیستم در دو جلد انتشار یافت. اما مشکلات پیش‌بینی نشده‌ای پیدا شد و نظریه برهان میسر

نگردید. در واقع کورت گودل با روشهایی قاطع و غیر قابل تردید که برای پیروان هر سه مکتب اصلی فلسفی قابل قبول است نشان داد که در یک سیستم استنتاجی بقدر کافی غنی مانند سیستم ریاضیات کلاسیک هیلبرت غیر ممکن است که بتوان سازگاری سیستم را با روشهای متعلق به آن سیستم اثبات کرد. این حکم خارق العاده نتیجه یک قضیه بسیار پیچیده از گودل است که به قضیه عدم تمامیت یا عدم کمال موسوم است.

## منطق دو ارزشی و چند ارزشی

اولین کسی که منطق را به صورت علمی درآورد ارسطو حکیم عالیقدر یونان در قرن چهارم قبل از میلاد است. اثری که ارسطو از خود به جا گذاشته یکی از بزرگترین دستاوردهای فکر انسانی و از وقایع مهم تاریخ رشد فکری بشر است. قبل از ارسطو دانش بشری اطلاعات پراکنده‌ای مبتنی بر تجربه بوده است و ارسطو به وسیله علم منطق این آثار را تفکیک و تنظیم کرد و از آن به بعد هر رشته از دانش بشری به صورت علمی مدون درآمد.

منطق ارسطو بمدت ۲۳ قرن مورد تحقیق دانشمندان قرار گرفت و حواشی و ملحقاتی بر آن افزوده شد. قسمتی از منطق که ساخته و پرداخته ارسطو بوده منطق ارسطو خواننده می‌شود و منطق ارسطو را با ملحقات افزوده شده بر آن منطق کلاسیک می‌خوانند.

هر چند منطق ارسطو تاثیر مهمی در پیشرفت تحقیقات علمی داشته و دانشمندان بزرگی مانند اقلیدس و ارشمیدس اطلاعات زمان خود را به کمک منطق به صورت علمی درآوردند ولی تا نیمه دوم قرن نوزدهم ریاضی دانان توجه کمتری به منطق داشتند، تنها آثاری متفرق از بعضی دانشمندان بجا مانده که اهم آن تحقیقات لایب نیتز و لامبرت ریاضیدانان و فیلسوفان آلمانی است. در نیمه دوم قرن نوزدهم میلادی عده‌ای از ریاضیدانان و فلاسفه از قبیل دمرگان (انگلیسی)، بول (انگلیسی)، پیرس (آمریکائی) و شرودر (آلمانی)، فرگه (آلمانی)، پنانو (ایتالیائی)، برتراند راسل (انگلیسی) بطور جدی به مطالعه علم منطق پرداختند و آثار بزرگی از تحقیقات نفیس خود بجا گذاشتند.

بدون شک بسط و توسعه سریع ریاضیات در آن دوره و پیدا شدن مسائل و مشکلات

در مبانی ریاضیات از علل عمده تحقیق و بحث در اصول علم منطق بوده است و در همین مرحله بود که ناتوانی منطق ارسطو در تحلیل‌های دقیق آشکار گردید و احتیاج به حربه‌ای تواناتر و برنده‌تر محسوس گشت و جستجوی چنین حربه‌ای از عوامل پیدایش منطق جدید گردید. از دانشمندانی که قبلاً از آنها نامبرده شد فرگه، پتانو، و برتراند راسل سهم بزرگی در پی نهادن منطق دارند بخصوص راسل با همکاری وایتهد کتاب معظم (اصول ریاضیات) را در سه جلد تالیف نمودند که منبع الهام مستقیم یا غیر مستقیم اغلب کارهایی است که در سالهای اخیر در منطق انجام گرفته است.

منطق جدید مورد تحقیق عده‌ای از دانشمندان بزرگ و موضوع تدریس در دانشگاه‌های معتبر دنیا است و اخیراً مجلاتی مخصوص بحث در مسایل این علم دایر شده و کتابهای زیادی به رشته تحریر درآمده است. از مشخصات منطق جدید استعمال علامت به جای الفاظ است. مزایای استعمال علامات علاوه از آسان کردن فهم مطالب و تعمیم احکام و آشکار ساختن ساختمان منطقی عبارات و رهانیدن منطق از نارسائیهای زبان و ابهامات و سوء تفاهماتی است که از این راه در کار می‌آید. بدین مناسبت منطق جدید را منطق علامتی یا منطق ریاضی صورت و یا لژیستیک نامگذاری کرده‌اند. منطق جدید نه تنها در ریاضیات بلکه در فیزیک، معرفت الحیات، معرفت النفس، حقوق و علم اخلاق و علم ماوراء الطبیعه مورد استعمال یافته است.

از اقسام جمله‌های زبان (خبری - انشائی یا امری - استهفامی - دعائی - آرزویی و...) فقط جملات خبری در منطق در کار می‌آید و آنرا گزاره می‌نامند. قسمتی از منطق که در مورد گزاره‌ها صحبت مینماید حساب گزاره‌ها نامیده میشود.

منطق ارسطو و منطق جدید یک منطق دو ارزشی است یعنی هر گزاره یا راست یا دروغ است هر چند که ما اطلاع کافی از راست بودن یا دروغ بودن آن نداشته باشیم. گزاره‌ها را با حروفی مانند  $p, q, \dots$  و  $A$  و  $B$ ... نشان می‌دهند و آنها را متغییرهای گزاره‌ای می‌نامند. از ترکیب گزاره‌های ساده با الفاظ چنین نیست که، یا، و، اگر، آنگاه گزاره‌های مرکب بوجود می‌آید. اگر گزاره‌ای راست باشد معمولاً ارزش آنرا با  $T$  یا  $1$  و اگر دروغ باشد ارزش آنرا با  $F$  یا  $0$  نشان می‌دهند. اگر  $p$  و  $q$  گزاره‌ای باشند نقیض  $p$  را با  $\neg p$ ، ترکیب عطفی  $p$  با  $q$  را

بصورت  $p \wedge q$ ، ترکیب فصلی  $p$  با  $q$  را بصورت  $p \vee q$ ، ترکیب  $p$  با  $q$  را بصورت  $p \rightarrow q$  و ترکیب دو شرطی  $p$  با  $q$  را بصورت  $p \leftrightarrow q$  نشان می‌دهند. ارزش این ترکیبها در جدول زیر مشخص شده است.

$p$	$q$	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱

استنتاج منطقی یا استدلال منطقی یا قیاس، از مفاهیم مهم منطق است. علت توجه به صور به دلیل این است که استنتاج منطقی ناشی از صور مقدمات است. کشف این مطلب یکی از بزرگترین و پربهاترین آثار ارسطو است. به گفته وایتهد فیلسوف انگلیسی، ارسطو با دریافت صور گزاره‌ها و دریافت اینکه استنتاج ناشی از صور است علم منطق را تاسیس کرد. اگر  $A_1, A_2, \dots, A_n$  و  $B$  گزاره‌هایی باشند بنابه تعریف  $B$  را نتیجه منطقی،  $A$  مینامند در صورتیکه هرگاه همه  $A_i$ ها راست باشد آنگاه  $B$  هم راست باشد و عبارتی دیگر ترکیب عطفی  $B (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  یک ترکیب همیشه راست باشد و در غیر این صورت استنتاج منطقی نیست.

## منطق‌های چند ارزشی

بطوری که بیان شد منطق دو ارزشی با عباراتی سر و کار دارد که یا درست‌اند یا نادرست و در عین حال هر دو با هم امکان ندارد. اما در هر علم بعضی عبارات وجود دارند که وضعیت مشخصی ندارند یعنی نه کاملاً راست و نه کاملاً نادرست‌اند. برای حل این مشکل دانشمندان، منطق‌های سه ارزشی را که تعمیمی از منطق‌های دو ارزشی است پیشنهاد کرده‌اند. در این منطق‌ها ارزش سومی که بین دو ارزش درست و نادرست است وجود دارد یعنی

گزاره‌هایی که از لحاظ درستی نامشخص یا مبهم هستند و یا غیر قابل تصمیم هستند ارزش سوم را دارند. اولین منطق سه ارزشی توسط لوکاسیویچ منطق دان لهستانی در حدود سال ۱۹۳۰ میلادی عرضه شد سپس منطق‌های سه ارزشی دیگری ارائه گردید. وجه مشترک این منطق‌ها در این است که همگی به گزاره درست ارزش ۱ و به گزاره نادرست ارزش ۰ و به گزاره نامشخص ارزش  $\frac{1}{2}$  می‌دهند. اگر  $a$  ارزش یک گزاره باشد ارزش نقیض آن برابر  $1-a$  تعیین می‌شود. اما این منطق‌ها در مورد حالات ترکیب عطفی، فصلی، شرطی، و دو شرطی با هم تفاوت دارند از مهمترین منطق‌های سه ارزشی منطق سه ارزشی منسوب به لوکاسیویچ، بوخوار، لین، هی تینگ است که در جدول زیر آنرا ملاحظه مینمائید.

	لوکاسیویچ	بوخوار	لین	هی تینگ
$b \quad a$	$\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$	$\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$	$\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$	$\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
۰ ۰	۰ ۰ ۱ ۱	۰ ۰ ۱ ۱	۰ ۰ ۱ ۱	۰ ۰ ۱ ۱
۰ $\frac{1}{2}$	۰ $\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	۰ $\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$	۰ $\frac{1}{2}$ ۱ ۰
۰ ۱	۰ ۱ ۱ ۰	۰ ۱ ۱ ۰	۰ ۱ ۱ ۰	۰ ۱ ۱ ۰
$\frac{1}{2}$ ۰	۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	۰ $\frac{1}{2}$ ۰ ۰
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ۱ ۱	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ۱ ۱
$\frac{1}{2}$ ۱	$\frac{1}{2}$ ۱ ۱ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ۱ ۱ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ۱ ۱ $\frac{1}{2}$
۱ ۰	۰ ۱ ۰ ۰	۰ ۱ ۰ ۰	۰ ۱ ۰ ۰	۰ ۱ ۰ ۰
۱ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
۱ ۱	۱ ۱ ۱ ۱	۱ ۱ ۱ ۱	۱ ۱ ۱ ۱	۱ ۱ ۱ ۱

یک تفاوت اساسی بین منطق‌های سه ارزشی و دو ارزشی این است که بعضی راستگوهای منطق دو ارزشی در حالت سه ارزشی راستگو نیست. بویژه  $a \wedge (\sim a)$  دروغگو نیست و  $a \vee (\sim a)$  راستگو نیست. به جای مفاهیم راستگو و دروغگو در این منطق‌ها از نیمه راستگو و نیمه دروغگو استفاده می‌شود. بدین صورت که یک صورت گزاره‌ای را نیمه راستگو یا نیمه دروغگو مینامیم که بترتیب ارزش آن (۱ یا  $\frac{1}{2}$ ) و (۰ یا  $\frac{1}{2}$ ) باشد.

هم چنانکه منطق دو ارزشی به  $\sim$  ارزشی تعمیم داده شد می توان آنرا به منطق  $n$  ارزشی بازای  $n \geq 4$  تعمیم داد. در این منطق ها ارزش درستی هر گزاره با یک عدد گویا از بازه  $[0, 1]$  تعیین می شود. اولین منطق چند ارزشی را خود لوکاسیویچ عرضه کرد. درجات درستی گزاره ها از مجموعه

$$T_n = \left\{ 0 = \frac{0}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

اختیار می شود. اگر ارزش یک گزاره برابر  $a$  باشد ارزش نقیض آن برابر  $1-a$  خواهد بود. اگر ارزش گزاره  $p$  برابر  $a$  و ارزش گزاره  $q$  برابر  $b$  باشد آنگاه ارزش  $p \vee q$  برابر  $\max\{a, b\}$  و ارزش گزاره  $p \wedge q$  برابر  $\min\{a, b\}$  و ارزش گزاره  $p \rightarrow q$  برابر  $\min\{1-a, 1+b\}$  و ارزش گزاره  $p \leftrightarrow q$  برابر  $1 - |a - b|$  تعریف می شود. مطالب فوق در حالت  $n = 2$  به حالت منطق دو ارزشی تبدیل می شود و اگر  $n$  بسیار بزرگ باشد یعنی  $n \rightarrow \infty$  سر و کار ما با یک منطق بینهایت ارزشی خواهد بود که درجات درستی در آن اعداد گویای بازه  $[0, 1]$  خواهند بود. حالت دیگری از منطق بینهایت ارزشی وجود دارد که در آن درجات درستی اعداد حقیقی بازه  $[0, 1]$  می باشند، منطق اخیر را با  $L_{[0,1]}$  نشان می دهند و آنرا منطق استاندارد لوکاسیویچ می نامند. ارزش ترکیبات مختلف مانند بالا محاسبه می شود.



## منابع

### ۱- تاریخ و فلسفه ریاضیات

سخنرانی دکتر حسین سیفلو (عضو هیات علمی دانشگاه تبریز) در خانه ریاضیات  
پروفسور هشترودی آذربایجان شرقی ۱۳۷۹

### ۲- آشنائی با نظریه مجموعه‌های فازی

تالیف دکتر سید محمود طاهری (عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی اصفهان)، انتشارات  
جهاد دانشگاهی مشهد ۱۳۷۵

### ۳- فلسفه علم و متدلوژی

تالیف دکتر محمود نوالی (عضو هیات علمی دانشگاه تبریز) انتشارات دانشگاه تبریز ۱۳۸۰



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی