فلسفهٔ شهودی ریاضیات

(عدد محوری)

مگردیچ تومانیان

دانشکده ریاضی دانشگاه تبریز

مقدمه

قبل از معرفی عدد و براساس آن ریاضیات، مناسب خواهد بود که دو مفهوم دانش و علم را معرفی کنیم.

کلمه دانش را به جای Knowledge بکار می‌گیریم، در اینصورت معنی بسیار وسیع خواهد داشت و شامل تمام دانستنیهای بشری است، در حقیقت در مقابل نادانی است.

کلمه علم را بجای Science قرار می‌دهیم و آن قسمتی از دانش است که قابل تجربه، اثبات و یا تکرارپذیر باشد که بطور منظم از قانون کلی پیروی نماید. بعبارت کوتاهتر، علم، معرفت منظم و قابل اثبات است. هر سخن علمی باید درست باشد ولی هر سخن درست لزوما علمی نیست. قوانین علمی، نظم و پایداری را بیان می‌کنند و از نظر منطقی شکل کلی دارند و معمولاً با کلمات هیچ، همیشه، هر یا همه آغاز می‌شوند.

- همه جا بطور طبیعی حرارت از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود.
- همیشه آب از ترکیب دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن ایجاد می‌شود.
- هر خط عمود بر یکی از دو خط موازی بر دیگری نیز عمود است.
- هیچ مثلثی وجود ندارد که مجموع زاویه‌های آن در هندسه اقلیدسی، کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.

فلسفه نوعی آگاهی از جهان است که از طریق حس و تجربه مستقیماً بدست نمی‌آید. در نتیجه در تعریف علم نمی‌گنجد.

فلسفه بطور عام مجموعه تمام آگاهیهای بشر است و بالاخص آگاهیهای مربوط به مابعدالطبیعه است.

بخش اول

عدد، مجردترین ایده‌ای است که ذهن آدمی توانایی شکل‌گیری آن را دارد. پیدایش اولیه عدد به یک، دو و زیاد محدود شده است.

ریاضیات به منزله یکی از تجلیات ذهن انسان، منعکس کننده اراده فعال، عقل تامل گر و علاقه وافر به کمال زیبایی شناختی است.

بیشتر دانش ما از ریاضیات قدیم که در مصر پایه‌گذاری شده است، از دو پاپیروس رایند (Rhind) که در سال ۱۶۵۰ ق م نوشته شده است و شامل ۸۵ مسأله است و پاپیروس مسکو که شامل ۲۵ ساله است، به دست آمده است.

بابلیان در حدود ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، مجموعه‌ای وسیع از مطالب را که امروزه از مقوله جبر مقدماتی به شمار می‌رود، گرد آوردند، ولی ریاضیات به صورت علم به مفهوم امروزی آن، در سده‌های چهارم و پنجم پیش از میلاد در یونان پدید آمد.

در دوران فتح بابل توسط اسکندر مقدونی، یونانیان با دست آوردهای ریاضیات و نجوم بابلی آشنا شدند و در معرض مباحث فلسفی یونان قرار گرفتند. یونانیان از مشکلات بزرگی مانند مفاهیم، پیوستگی، حرکت و بینهایت آگاه شدند و با تلاش در خور تحسینی، به مقابله با این مشکل پرداختند.

برای ذکر نام چند نفر از ریاضیدانان باید گفت:

۱ـ طالس ۶۲۵ـ۵۴۵ ق م. که روش ایجاد زاویه قائمه و قضیه معروف را بیان و اثبات کرد.

۲ـ فیثاغورث ۵۸۰ـ۵۰۰ ق م. معرفی اعداد فیثاغورثی، قضیه معروف فیثاغورث و معرفی عدد اصم.

۳ـ افلاطون ۴۲۹ـ۳۴۸ ق م. نظریه اعداد اصم براساس مفاهیم هندسی را بنیان گذاشت.

(جمله معروف هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود از او است)
۴ـ ارسطو ۳۸۴ـ۳۲۲ ق م. برهان خلف را برای شناخت اعداد اصم بکارگرفت (نسبت ضلع به قطر مربع)
۵ـ پرنفوذترین ریاضیدان همه اعصار یعنی اقلیدس در حدود ۳۰۰ ق م. و در زمان سلطان قدرتمند وقت بطلمیوس اول ۳۰۶ـ۲۸۳ ق م. میزیسته و جمله معروف اقلیدس به سلطان وقت این است که، هیچ راه شاهانه‌ای برای هندسه وجود ندارد.
در حقیقت اقلیدس را باید پدر هندسه نامید.
۶ـ ارشمیدس، در ۲۸۷ـ۲۱۲ ق م. که مبنای علم مکانیک را بنا نهاد.
۷ـ اراتستون ۲۷۶ـ۱۹۶ ق م. که جدول و غربال معروف خود را برای یقین اعداد اول ابداع کرد.

این قسمت از بحث ما، دیدگاه فلسفی اقلیدسی در مورد ریاضیات است، هر چند اقلیدس نظم دهنده مفاهیم هندسی است، ولی اعتقاد داشت که عدد پایه و سنگ بنای ریاضیات است، یعنی اگر وجود اعداد پذیرفته شود، بقیه ریاضیات براساس آن ساخته می‌شود و حتی ریاضیدانان بعد از آن بر این اعتقاد بودند که اگر وجود اعداد پذیرفته شود، جهان ساخته می‌شود.

اقلیدس ۱۳ جلد کتاب نوشت که بنام اصول معروف شدند، می‌گویند پس از کتاب مقدس، بیش از هر کتاب دیگر تجدید چاپ شده‌اند.

چهار کتاب اول، در مورد هندسه مسطحه است.

کتاب پنجم، نظریه تناسب است.

کتاب ششم، نظریه تشابه اشکال هندسی سطح است.

کتاب‌های هفتم، هشتم و نهم در نظریه اعداد از دیدگاه هندسی است.

کتاب دهم، طبقه‌بندی اعداد احم و ریشه دوم بصورت $\pm\sqrt{b}$ و $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ است.

کتابهای یازده، دوازده و سیزدهم در مورد هندسه فضایی است، حجم اشکال متوازی السطوح، منشورها، هرمها، کره محاسبه شده‌اند. همچنین، وجود و انحصاری بودن پنج جسم افلاطونی موضوع بحث این کتابها است.

بخش دوم

پس از یک دوره تدارک و تحول کند و تدریجی، مرحله جدی و قاطع انقلاب ریاضیات در قرن هفدهم و با پیدایش هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال آغاز شد. اگرچه هندسه یونانی همچنان جایگاه مهم خود را حفظ کرد.

در قرن نوزدهم تجدید نظر در مبانی ریاضیات، به خصوص دیفرانسیل و انتگرال براساس مفهوم زیربنایی حد، صورت گرفت.

برخی معتقداند که ریاضیات محض دستگاهی از نتایج حاصل از تعریفها و اصول موضوعی است که نسبت به بهم سازگاراند، البته این دیدگاه به این صورت درست نیست، بلکه ریاضیات بطور کلی محض و کاربردی از طبیعت گرفته شده و برای شناخت علمی طبیعت بوجود آمده و در حال گسترش است. در اینجا ذکر چند نمونه ضروری است.

کارگری در محل ساختمان، برای بالا بردن جسم سنگینی، اگر ارتفاع کم باشد، از یک تخته که بصورت سطح شیب‌دار کار گذاشته است استفاده می‌کند و اگر ارتفاع زیاد باشد از قرقره کمک می‌گیرد. اندیشمند ریاضی با دیدن این صحنه بفکر فرو می‌رود که قانون ریاضی برای این پدیده‌ها، چه می‌تواند باشد، در نهایت فرمول حرکت جسم در سطح شیب‌دار و قانون مربوط به قرقره‌ها و بعد از آن با توسعه آن قانون قرقره‌های مرکب را بیان و اثبات می‌کند.

قانون سقوط سیب از درخت مورد دیگری است، اولر با دیدن رژه سربازان، نظریه مربعهای لاتین را ابداع می‌کند بدون اینکه به کاربردهای دیگر آن توجه کند. همینطور با دیدن چند پل بر رودخانه در شهر Königsberg نظریه گراف را بوجود می‌آورد و اصلاً بفکر کاربرد آن نیست.

وقتی پدیده‌ای بصورت مجرد بیان گردید، ممکن است بسادگی نتوان فهمید که فکر اولیه چگونه ایجاد شده است و یا خواستگاه طبیعی این موضوع چه بوده است. در هر حال پدیده اولیه حالت بسیار خاصی از نظریه به ظاهر مجرد ریاضی است. اصولاً فلسفه وجودی ریاضیات، سرچشمه دوگانه دارد، یک چشمه پرآب و زلال آن، طبیعت است، چشمه دیگر آن فکر خلاق ریاضیدان است که ساختار ریاضی را معرفی می‌کند و اصلاً بفکر کاربرد آن نیست و فقط تولید می‌کند. علوم دیگر یعنی فیزیک، طبیعی، مهندسی، علوم اجتماعی و اقتصاد و

غیره هستند که ممکن است بتوانند از ساختار حاصل برای پیشبرد اهداف خود کمک بگیرند.

اگر قرار باشد ریاضیدان از ابتدا بفکر کاربرد باشد، پیشرفت ریاضی بسیار کند خواهد شد، نمونه بارز آن نظریه تانسورها و نسبت انیشتن است که از نظر زمانی یکصد سال با هم اختلاف دارند. یعنی بعد از صد سال کاربرد بسیار مهمی برای تانسورها ظاهر شد، از طرف دیگر بدون تانسورها، نظریه انیشتن ساختار ریاضی پیدا نمی‌کرد و در نهایت قابل ارائه نمی‌شد.

بخش سوم

ریاضیدانان در طی قرون و اعصار به اشیایی مورد بحث خود، مانند عدد، نقطه، خط و غیره به چشم اشیای واقعی که فی النفسه مطرح‌اند می‌نگریسته‌اند، در مواردی تلاش برای توصیف رضایت بخش این موجودات، به شکست انجامیده است، بعنوان مثال نقطه را اثر مدادی نوک تیز بر یک صفحه کاغذ یا سطح صاف معرفی می‌کردند، در حالی که صفحه خود تعریف نمی‌شد، چه اگر می‌توانستند در ابتدا صفحه را تعریف کنند، اشتراک دو صفحه، خط و اشتراک دو خط، نقطه را معرفی کرد. از طرف دیگر اثر مداد بر کاغذ، زیر ذره‌بین یک ناحیه‌ای از صفحه خواهد بود که خود مشتمل بر بینهایت نقطه است. بنابراین ملاحظه می‌شود که در هر علمی باید موجودات اولیه و بدون تعریفی را پذیرفت، یعنی اگر نقطه، خط، سطح و حجم را مفاهیم بدون تعریف بپذیریم، روابط بین آنها علم هندسه را مشخص می‌کنند.

آنچه اهمیت دارد و آنچه به واقعیت تحقیق‌پذیر مربوط می‌شود، ساختار و روابط است، اینکه دو نقطه خطی را معینی می‌کنند، اینکه عددها طبق قواعد معینی ترکیب می‌شوند و عددهای دیگری را پدید می‌آورند، دیدگاهی روشن مبنی بر ضرورت و واقعیتی از مفاهیم بنیادی ریاضی و یکی از مهمترین و پرثمرترین نتایج پیشرفت اصل موضوعی ریاضیات است.

یونانیان مفاهیم نقطه و خط را پایه ریاضیات می‌دانستند، اما اصل این است که همه گزاره‌های ریاضی باید سرانجام قابل تحویل به گزاره‌هایی درباره عددهای طبیعی، ۱، ۲، ۳،... باشند.

کرونکر، در قرن ۱۹، اعتقاد داشت که «خداوند اعداد طبیعی را آفرید، مابقی کار انسان است».

عدد، که ذهن انسان آن را برای شمارش اشیاء ابداع کرد. به مشخصات انفرادی چیزهای شمارش شونده ارتباطی ندارد. خصوصیت انتزاعی مفهوم عدد، تنها در مرحله پیشرفته‌ای از رشد فکری برای شخص روشن می‌شود. برای کودکان عددها همیشه مربوط به چیزهای ملموس و عینی مانند انگشتان دست یا اسباب بازی هستند. جنبه فلسفی گذر از مجموعه اشیاء عینی به مفهوم انتزاعی عدد، اشکالی برای ریاضیدان ایجاد نمی‌کند. فرض وجود اعداد طبیعی را پایه و اساس قرار داده، اعمال جمع و ضرب (تفریق و تقسیم وارون این دو عمل‌اند) معرفی می‌شوند که خود باعث تولید اعداد منفی و اعداد کسری می‌شوند.

اقلیدس نشان داد که اعداد طبیعی نامتناهی‌اند و فرایند گذر، گام به گام از اعداد طبیعی n به عدد طبیعی n+۱ مبنای یکی از بنیادی‌ترین الگوهای استدلال ریاضی، یعنی اصل استقراء ریاضی است.

گاوس (۱۷۷۷) اعتقاد دارد که ریاضیات ملکه علوم است و نظریه اعداد ملکه ریاضیات.

عدد صحیح p را اوّل می‌نامند هرگاه بزرگتر از واحد باشد و به غیر از خود و یک به هیچ عدد صحیح دیگر بخش‌پذیر نباشد.

بخش چهارم

یکی از دیدگاههای فلسفی در ریاضیات، دیدگاه شهودگرایی است که توسط برآور در رساله خود ارائه گردیده است. این دیدگاه در چهارچوب ریاضیات ساختنی Constructive mathematics بیان شده است. که بطور خلاصه عبارتند از:

الف: ریاضیات با ساختارهای ذهنی سر و کار دارد که بلاواسطه و بوسیله ذهن، درک می‌شود و ریاضیات دستکاریهای صوری، علائم نیست و استفاده از زبان ریاضی یک امر ثانوی است و برای ارتباط برقرار نمودن بین ساختارهای ریاضی از آن استفاده می‌شود.

ب: تصوّر صدق یا کذب یک حکم ریاضی مستقل از معرفت نسبت به آن حکم، بی‌معنی است، یک حکم راست است اگر برهانی بر آن داشته باشیم و غلط است اگر بتوانیم نشان دهیم که «فرض اینکه برهانی برای آن وجود دارد» منجر به تناقض می‌شود. بنابراین برای

یک حکم معین نمی‌توان ادعا کرد یا راست است یا غلط.

پ: ریاضیات یک آفرینش آزاد است، ریاضیات بازسازی ذهنی یا درک حقیقت دربارهٔ اشیاء ریاضی که مستقل از ما وجود داشته باشند، نیست. اولین مفهومی که براَور معرفی کرد مفهوم «دنباله انتخاب» است. دنباله‌هایی از اعداد که با انتخاب معین شده‌اند. برحسب این مفهوم توانست اصل پیوستگی را بیان کند.

بطور خلاصه می‌توان گفت که از نظر براَور استدلال ریاضی عبارت است از ساختن یک ساختار ریاضی و حضور زنجیره‌ای از کاربردهای قواعد منطقی. این امر برای استدلالهای منطقی شهودی نیز صادق است. منطق نظری، کاربردی از ریاضیات است بنابراین یک علم تجربی است.

اعداد طبیعی بعنوان یک ساختار ذهنی وجود دارد. ابتدا به تعداد متناهی و سپس با ایده‌آل سازی و تکرار نامتناهی ترکیب آنها، مجموعه اعداد طبیعی N ساخته می‌شود. بدیهی است که همواره و هر ساختاری را نمی‌توان پذیرفت. بعنوان مثال، اگر فرض کنیم A یک حکم ریاضی باشد که تا زمان حاضر نه اثبات شده و نه رد شده است، مثلاً «تعدادی نامتناهی اعداد دوقلو وجود دارد». تعریف زیر را برای عدد طبیعی p در نظر می‌گیریم.

$$p = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ صادق باشد} \\ ۲ & \text{اگر } A \text{ صادق نباشد} \end{cases}$$

از نظر ساختار، این تعریف درست نیست، زیرا صدق A معلوم نیست، یعنی نمی‌توان تعیین کرد که $p = ۱$ یا $p = ۲$.

براَور از بکارگرفتن علائم منطقی احتراز می‌کرد و معتقد بود که به این علائم نیازی نیست.

صوری سازی منطق شهودی کار یکی از شاگردان براَور بنام هیتینگ (۱۹۲۵) است. صوری سازی علاوه بر تسهیل در بیان، خود سرآغاز منطق شهودگرایی گردید.

منطق شهودگرایی

هیتینگ، اساس این منطق را بصورت زیر ارائه کرد:

۱ـ برهان برای $A \wedge B$: عبارت است از ارائه برهانی برای A و ارائه برهانی برای B

۲ـ برهان برای $A \vee B$: عبارت است از ارائه برهانی برای A یا ارائه برهانی برای B

۳ـ برهان برای $A \rightarrow B$: عبارت است از ساختاری که هر برهان برای A را به برهانی برای B تبدیل کند.

۴ـ تناقض هیچ برهانی ندارد، یعنی متناقض بودن بصورت مفهوم بدون تعریف پذیرفته می‌شود.
برهان برای $\sim A$: ساختاری است که برهان برای فرض A را به یک تناقض تبدیل کند.

۵ـ برهان برای $\forall x$ ،$A(x)$: عبارت است از ساختاری که هر برهان برای x را به یک برهان برای $A(x)$ تبدیل کند.

۶ـ برهان برای $\exists x$ ،$A(x)$: عبارت است از ساختن یک x و ایجاد برهانی برای $A(x)$

حساب شهودگرایی: را نیز هیتینگ پایه گذاری نمود. اصول موضوع شهودگرایی، همان اصول پئانو هستند، با این اختلاف که کار پئانو براساس منطق کلاسیک بوده ولی هیتینگ منطق شهودگرایی را اساس قرار داده است.

آنالیز شهودگرایی: نسبت به بقیه ریاضیات ساختاری توسعه یافته‌تر است و دلیل عمده آن نقش برآور است. آنالیز شهودگرایی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد. مرحله‌ای که در آن آنالیز مبتنی بر ساختار اعداد حقیقی باشد. بویژه اصل دنباله‌های انتخاب به صورت ضمنی در کارایی برآور آورده شده است.

جبر شهودگرایی: را نیز هیتینگ بنیان گذاشت. او مفاهیم آشنا مانند گروهها، حلقه‌ها، حوزه‌های صحیح، میدانها، حلقه‌های چند جمله‌ای و غیره را صورتبندی کرد. اختلاف اساسی جبر شهودگرایی و سنت کرونکری در این است که ساختارهای جبری از دید کرونکر گسسته‌اند، در حالی که ساختارهای شهودی‌گرایی، مفاهیم پیوسته را نیز در بر می‌گیرند.

مبانی فلسفی شهودگرایی: از نظر تکوینی، فلسفه برآور شامل دو بخش است. بخش فلسفی آن ترکیبی از ذهن گرایی کانتی است. بخش دوم فلسفه برآور به عناصری مربوط می‌شود که مستقیماً فلسفه ریاضی او را تشکیل می‌دهد. شاخصترین اینها مفهوم «وجود» از بورل و لبک، مفهوم «ساختار» از کرونکر و مفهوم «شهود» از پوانکاره است. برآور هیچ یک از این مفاهیم را به همان شکل اصلی بکار نبرده است.

نظر برآور درباره ساختار ریاضیات برای فهم شهودگرایی اساس است. نظرات او درباره «وجود» اشیاء ریاضی «منطق» و «زبان» همه نتایج این توصیف او از ریاضیات است.

ریاضیات آفرینش آزاد ذهن است. این آفرینش آزاد، ساختار دستگاههای ریاضی براساس شهود است. بنابراین اشیاء ریاضی ساختارهای ذهن هستند.

باید توجه داشت که باگذشت بیست قرن و این همه توسعه در ریاضیات هنوز فرمول کلی برای اعداد اول ارائه نشده است و یا ثابت نشده است که هر عدد زوج را می‌توان بصورت مجموع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ) هر چند که می‌توان عملاً نشان داد که هر عدد زوج در واقع مجموع دو عدد اول است و یا بسیاری از اعداد اول بصورت p و p+۲ هستند.

پس از پذیرش اعداد صحیح و ایجاد اعداد کسری و منفی بکمک اعمال اصلی، بکمک هندسه اعداد گنگ و از آنجا اعداد حقیقی ساخته شدند و پس از معرفی معادلات جبری و حل آنها اعداد موهومی و از ترکیب اعداد حقیقی با اعداد موهومی اعداد مختلط حاصل شد. سپس اعداد جبری، اعداد متعالی، اعداد چهارگان و اعداد هشت گان ساخته شدند. بدلیل اینکه اعداد چهارگان و هشت گان خواص مفید اعداد حقیقی و مختلط را از دست می‌دهند، روند توسعه از این طریق متوقف گردید.

در اواسط قرن بیستم چاره کار در تغییر اعداد صحیح بعنوان مفاهیم بدون تعریف ریاضی و یا مفاهیم خدادادی برای ساختارهای ریاضی، کنار گذاشته شد و با معرفی مجموعه‌ها بعنوان مفاهیم بدون تعریف علم ریاضی تحولی شگرف در ریاضی، تحت عنوان ریاضیات جدید، بوجود آمد.

بخش پنجم

نمی‌توان از ریاضیات صحبت کرد و نقش ریاضیدانان ایرانی را نادیده گرفت. فقط به چند مورد اشاره می‌کنیم:

۱ـ *ابوالوفای بوزجانی* ۹۴۰←۹۹۷، این ریاضیدان قضیه سینوسها در مثلثات کروی را ارائه نمود و جدول سینوس به فواصل ۱۵´ را تا هشت رقم محاسبه نمود.

۲ـ *ابن هیثم* ۹۶۵←۱۰۳۹، ابن هیثم را می‌توان فیزیکدان معروف زمان خود برشمرد. کتاب المناظر ایشان در مغرب زمین معروف شد. روش افنا را برای محاسبه حجم اجسام دوار بکار گرفت.

۳ـ عمر خیام ۱۰۳۸←۱۱۲۳، انجام اصلاحات اساسی در تقویم، بیان اشکالات هندسه اقلیدسی و سعی در جایگزینی اصل پنجم و بالاخره در کتاب معروف خود الجبر و المقابله حل معادلات درجه سوم بکمک مقاطع مخروطی را ارائه نمود.

۴ـ *خواجه نصیرالدین طوسی* ۱۲۰۱←۱۲۷۴، ایجاد رصدخانه مراغه، ایشان مثلثات کروی را بعنوان علم خاصی در خدمت نجوم، ارائه داد.

۵ـ *خوارزمی*: خوارزمی را می‌توان پدر جبر دانست. بعلاوه با معرفی جداول نجومی و مثلثات، روش الخوارزمی به روش الگوریتم امروزه از مفاهیم بنیادی آنالیز عددی است.