درآمدی بر فلسفه ریاضی
از نگاه متفکران ایران معاصر

مسعود امید

عضو هیات علمی گروه فلسفه دانشگاه تبریز

مقدمه

امروزه فلسفه ریاضی یا فلسفه علم ریاضیات بعنوان یکی از شاخه‌های فلسفی، از دامنه و عمق قابل توجهی برخوردار شده است و مکاتب و دیدگاههای متعددی در حوزهٔ این دانش فلسفی شکل گرفته است. در این میان این نکته روشن است که دست یافتن به دیدگاهی که پاسخگوی تمام مسایل و مباحث مطرح شده در فلسفه ریاضی باشد ـ آنهم بصورت مستدل و مقبولِ همهٔ فلسفی اندیشان ـ امری ممکن به نظر نمی‌رسد و یا آنکه بسیار صعب و دشوار است. اما متفکران براساس اصول و مبادی و علایق ویژه خود به مباحث فلسفی در باب ریاضیات پرداخته و هر یک به اندازهٔ وسع علمی و حوزهٔ مطالعاتی و پژوهشی خود گامهایی را برای تقریب به ماهیت و حقیقت ریاضیات برداشته‌اند. در این میان متفکران و فلاسفه متقدم و معاصر مسلمان نیز از این قاعده مستثنی نیستند و در لابلای آثار خود سعی در تفسیر و تبیین ریاضیات داشته‌اند.

این نوشتار در صدد آن است تا بعنوان گامی آغازین، در حال و هوای تفکر فلاسفه و

متفکران معاصر مسلمان ـ و نه فلاسفهٔ پیشین ـ تأملاتی را در حوزهٔ فلسفه ریاضی صورتبندی نماید. البته این تبیین و تحلیل، الزاماً در تمام موارد حاصل دیدگاه صریح و بی‌واسطهٔ آنان نخواهد بود بلکه در مواردی، نتیجهٔ استنتاج و استنباط بوده و افزوده‌هایی به همراه دارد.

حاصل آنکه در این مقاله سعی بر آن است تا حد امکان به تحلیل و بسط ایده‌هایی که در اندیشهٔ متفکران معاصر مسلمان آمده است، پرداخته شود.

چیستی و تعریف ریاضیات

می‌توان علوم را براساس ملاکها و ضوابط متعددی متمایز و آنگاه تعریف نمود از قبیل موضوع، روش، هدف، تناسب مسایل و... . فلسفی اندیشان معاصر مسلمان ـ همانند اغلب متفکران پیشین مسلمان ـ بر این نظرند که هر یک از علوم موضوعی برای تحقیق و تأمل دارند و بهترین راه برای تعریف یک علم، در نخستین گام، این است که موضوع آن علم روشن شود. البته این تلقی ناشی از این است که از نظر ایشان ملاک مرزبندی و تمایز علوم براساس «موضوع» آن است چرا که بهتر از معیارهای دیگر هدف و انگیزهٔ جداسازی علوم را تأمین می‌کند و با رعایت آن ارتباط و هماهنگی درونی مسایل و نظم و ترتیب آنها بهتر حفظ می‌شود.

لازم به ذکر است که هر چند تمایز علوم براساس موضوعات انجام می‌پذیرد ولی می‌توان در دسته بندی‌های فرعی، معیارهای دیگری را نیز در نظر گرفت. برای مثال می‌توان علمی را با موضوع خاصی لحاظ کرد و آنگاه براساس روش‌های مختلف یا اهداف متفاوت شاخه‌ها و انشعابهای فرعی دیگری را در حوزهٔ همان موضوع ترتیب داد. برای مثال می‌توان ریاضیات را با موضوع خاص خود در نظر گرفت و آنگاه آنرا به شاخه‌های گوناگونی منشعب کرد که هر شاخه براساس هدف خاص مشخص شود مانند ریاضیات فیزیک، ریاضیات اقتصاد و... بر این اساس تلفیقی میان معیارهای مختلف بوجود می‌آید.

به بیان دیگر در این حالت اهداف متعدد بعنوان معیار فرعی در نظر گرفته می‌شود و مسایل متناسب با هر هدف بنام شاخه خاصی از علم مادر معرفی می‌گردد.(۱)

در مورد تعریف ریاضیات باید گفت که ریاضیات دانشی است که در مورد معقولات

ثانی ریاضی بحث می‌کند. مراد از معقولات ثانی ریاضی (که پس از این توضیح داده خواهد شد) مفاهیم درجهٔ دومی است که در حوزهٔ کمیت و مقدار و براساس آن شکل می‌گیرند از قبیل عدد، مجموعه، بعد، پیوستگی، شکل و... . به بیان دیگر ریاضیات از معقولات ثانی ریاضی و مشتقات، قیود، ملحقات و منتزَعات (بی‌واسطه یا با واسطه) آنها بحث می‌کند. حاصل این تلقی از ریاضیات این است این علم در مورد مجموعه‌ای از معقولات و مفاهیم خاص به تأمل می‌پردازد که به نوعی جنبهٔ کمّی دارند. در این حالت ریاضیات از مجموعهٔ موضوعات متعدد برخوردار خواهد بود. البته این عناوین و موضوعات در حال و هوای کمّی قرار دارند. با توجه به این نکات می‌توان گفت که اعتبارات و انتزاعات ریاضی از صبغهٔ «کمّی» برخوردار خواهند بود و معادلات و قواعد حاصل از پژوهش در این امور مربوط به ویژگی‌های کمّی و روابط کمّی خواهند بود. به نظر می‌رسد توسعه و بسط دانش ریاضی در طول تاریخ ریاضیات نیز در همین راستا صورت گرفته است، یعنی در یک حال و هوای کمّی اعتبارات و انتزاعات متعددی صورت گرفته و شاخه‌های متعددی در ریاضیات شکل گرفته‌اند. هلزی هال یکی از محققان و مورخان تاریخ علم در این رابطه به زبان خاص خود چنین می‌نویسد: «دو رشتهٔ اصلی که ریاضیات مقدماتی را تشکیل می‌دهند، حساب و هندسه است. موضوع حساب اعداد است و هندسه به پراکندگی اجسام در مکان و توزیع رویدادها در مکان و زمان می‌پردازد. حساب و هندسه به هم وابسته‌اند. زیرا فاصله‌های زمانی و مکانی را می‌توان اندازه گرفت و اندازه‌ها را با عدد نشان داد. کار شاخه‌های دیگر ریاضیات مقدماتی چیزی جز تاکید بیشتر بر جنبه‌های خاص هندسه و حساب نیست. مثلثات و هندسه تحلیلی، روشهای کاربرد اعداد در هندسه هستند. حرکت‌شناسی، هندسه حرکت است. جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال هم گسترشهای حساب هستند.»(۲)

حاصل آنکه به نظر می‌رسد که تمام انواع گسترشهایی که در ریاضیات صورت گرفته است، به نحو بی‌واسطه و یا با واسطه به معقولات ثانی ریاضی بر می‌گردند.

وحدت موضوع در تحولات تاریخی ریاضیات

نگاهی به تاریخ تحول و بسط دانش ریاضی این نکته را آشکار می‌کند که فعالیت ریاضی ریاضیدانان در طول تاریخ، بطور عمده در ارتباط با محوریت معقولات ثانی ریاضی بوده است. برای آنکه مطلب مذکور تا حدی روشن گردد می‌توان نیم نگاهی به شاخه‌های متعدد ریاضی داشت و موضوعات اساسی و محوری آنها و آنگاه ارتباط و سنخیت آن موضوعات را با موضوعات اصلی ریاضیات به نظاره نشست.

هندسه اقلیدسی بر محور نقطه و خط و سطح و شکل و روابط متقابل آنها می‌چرخد. در هندسه‌های نااقلیدسی نیز بحث اساساً بر محور امتداد فضاهای انتزاعی است و مؤسسان چنین هندسه‌هایی معتقدند که هندسه اقلیدسی تنها جزیی از خواص واقعی فضا و جنبهٔ ویژه‌ای از آنرا منعکس می‌کند و هندسه‌های نااقلیدسی خواص دیگری از فضا را بیان می‌دارد. در واقع این هندسه‌ها نگاه جدیدی را در مورد فضا ـ که ویژگی عمدهٔ آن بعد است ـ بوجود آوردند.

در هندسه فضایی و هندسه تحلیلی یا مختصاتی، مسایل و قضایا حول شکلهایی مانند صفحه‌های چند وجهی، اجسام کروی و سایر اجسام هندسی که دارای شکل ساده‌ای هستند، می‌باشد و این امور نیز صورتهای مختلفی از بعد هستند. فعالیتهای ریاضی دیگری نیز که در همین راستا صورت گرفته است تنها شکلهای پیچیده‌تری را موضوع مورد مطالعهٔ خود قرار داده‌اند و اساساً از حوزه اشکال و آنگاه ابعاد خارج نشده‌اند، شکلهایی مانند بیضی، سهمی، هذلولی و...

مبحث «گراف» در هندسه که با نامهای گوناگونی چون طرح، نگاره، دیاگرام و نقشه نیز نامیده شده است، چیزی جز پردازشی جدید از خطوط و نقطه‌ها نیست. توپولوژی در عین حال که دانشی بسیار انتزاعی است لیکن با توجه به ویژگی اصلی بعد یعنی «پیوستگی» شکل گرفته است. بحث در توپولوژی نیز بر سر اشکال خاص و تبدیلاتی است که اشکال می‌توانند داشته باشند.(۳)

علم حساب در مورد اعداد است و جبر نمایش مقادیر مختلف بوسیلهٔ حروف می‌باشد

و در صدد آن است که قوانین حساب عددی را به کمک عملهایی که روی مقادیر مجهول انجام می‌شود، نمایش دهد. جبر عبارت از تنظیم محاسبه‌ها و استعمال علامتها برای عمومی کردن قواعد است. در این شاخهٔ ریاضی بحث بر سر ویژگی‌های صوری اعداد و روابط کمّی موجود بین اعداد و انجام محاسبات کمی است. به همان نسبت که جبر پیشرفت کرده است، با علومی مانند حساب بی‌نهایت کوچکها، نظریه تابع‌ها و حساب عالی ارتباط ناگسستنی پیدا نموده است.

مثلثات نیز بیان ساده‌ای از محاسبه‌هایی است که در بسیاری از موارد هندسی به کار می‌رود. مثلثات مسطحه درباره روابط میان ضلع‌ها و خطهای مثلثاتی زاویه‌های یک چند ضلعی و مخصوصاً مثلث مطالعه می‌کند. مثلثات کروی درباره مساله‌های شبیه به آن، یعنی رابطه‌های بین اجزای چند ضلعی منحنی الخط روی یک کره که بوسیله دایره‌هایی مشخص شده است، مطالعه می‌کند.

در مورد حساب احتمالات و آنالیز ریاضی یا حساب بی‌نهایت کوچک‌ها نیز باید گفت که در اولی بحث روی محاسبات کمی درباره حوادث متغیر و مختلف است و در دومی محاسبات کمی متوجه مقادیر کوچک می‌باشد. تئوری مجموعه‌ها نیز با مفهوم محوری «مجموعه» مرتبط است. در مورد «مجموعه» می‌توان گفت که اولاً مفهوم مجموعه مفهومی است که با کمیت دارای سنخیت است و مشابهتهایی را با مفهوم عدد نشان می‌دهد. دوم آنکه مقولاتی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل و... که در تئوری مجموعه‌ها کاربرد دارند، منقطع از حوزه کمیت نمی‌باشند.(۲)

چیستی و تعریف فلسفه ریاضی

به عنوان یک تعریف مختصر و آغازین می‌توان فلسفه را بررسی عقلانی، تحلیلی، انتزاعی و پیشین در باب امور و حقایق دانست. هرگاه فلسفه در مورد یکی از حقایق بصورت مضاف (اضافه شده به آن موضوع خاص) بکار برده شود، مراد همانا بررسی عقلانی، تحلیلی، انتزاعی و پیشین همان مورد و موضوع است مانند فلسفه اخلاق، فلسفه علم تاریخ، فلسفه علم

ریاضیات، فلسفه هستی، فلسفه شناخت، فلسفه تکنولوژی و فلسفۀ... چنانکه آشکار است فلسفه در این معنا یک دانش و فعالیت غیر تجربی است. حتی هنگامی که در فلسفه از تجربیاتی چند سود برده می‌شود و یا موضوعی تجربی و حسی مورد تامل قرار می‌گیرد، فعالیت فلسفی ره به لایه‌ها و اضلاع غیر تجربی می‌سپارد و تحلیل‌ها و تاملات و نتیجهٔ آن، غیر تجربی خواهد بود. خلاصه، فلسفه با واقعیت سر و کار دارد ولی نه آنکه نتایج عینی آن الزاماً تجربی و حسی باشند.

فلسفه در حالت مضاف خود به دو دسته از موضوعات اضافه می‌شود:

الف ـ «غیر علوم» یعنی واقعیاتی مانند هستی (فلسفه هستی)، اخلاق (فلسفه اخلاق)، دین (فلسفه دین)، زبان (فلسفه زبان)، تکنولوژی (فلسفه تکنولوژی) و...

ب ـ «علوم»، مانند علوم طبیعی (فلسفه علوم طبیعی)، اجتماعی (فلسفه علوم اجتماعی)، ریاضی (فلسفه علم ریاضیات) و...

از آنجا که ریاضیات یک «علم» و رشته علمی محسوب می‌شود و نه یک واقعیت متعین خارجی مانند دین، زبان، اخلاق و... پس آن شاخه از فلسفه که عهده‌دار بحث از ریاضیات خواهد بود، «فلسفه علم ریاضیات» است. به بیان دیگر در این مقام تأمل فلسفی معطوف به یک دانش و علم است نه یک غیر علم. آری عدد، مجموعه، بعد و... (معقولات ثانی ریاضی) اوصافی واقعی برای برخی موجودات محسوب می‌شود (غیر علم است)، ولی «ریاضیات» یک علم است نه آنکه همان «اوصاف» باشد. ریاضیات «دانشی» است در باب «معقولات ثانی ریاضی». بر این اساس امکان دو شاخهٔ فلسفی وجود دارد: ۱ـ فلسفه علم ریاضیات ۲ـ فلسفهٔ عدد، مجموعه و... (معقولات ثانی ریاضی)، که موضوع اولی از سنخ علوم است و موضوع دومی از سنخ اوصاف عینی و غیر علم. مسایل ایندو شاخهٔ فلسفی نیز در عین حال که بعضاً متداخل می‌باشند ولی حوزه‌های متفاوتی خواهند داشت. (مانند رابطه برخی علوم فلسفی با همدیگر از قبیل رابطهٔ فلسفه اخلاق با فلسفهٔ روان و...). نمودار زیر تمایز حوزه‌های مختلف معرفتی را نشان می‌دهد:

فلسفهٔ علم ریاضیات

↓

علم ریاضیات

↓

عدد، مجموعه، پیوستگی، بعد و... (معقولات ثانی ریاضی) ⟵ فلسفهٔ عدد، مجموعه و... (معقولات ثانی ریاضی)

فلسفهٔ علم ریاضیات یا فلسفه ریاضی دانشی است انتزاعی، تحلیلی و فلسفی در مورد: مفاهیم پایه و اصول اساسی و بنیادی ریاضیات، ماهیت گزاره‌های ریاضی، روش ریاضی، ریاضیات و واقعیت، رابطهٔ ریاضیات با علوم دیگر مانند فیزیک، منطق، متافیزیک و...، تحولات دانش ریاضی و علل آن، جایگاه ریاضیات در دسته‌بندی علوم، ریاضیات و ایدئولوژی و مباحث متعدد دیگر.

تقسیم بندی مباحثِ فلسفهٔ ریاضی

بخش عمده‌ای از مسایل مورد بحث در فلسفه ریاضی را می‌توان در ذیل چند مبحث کلی قرار داده و آنها را مورد تامل و تحقیق قرار داد:

۱ـ مباحث روانشناسی فلسفی *(علم النفس فلسفی)*: مسالهٔ مهمی که در ذیل روانشناسی فلسفی قابل طرح است اینکه ذهن چگونه به درک مفاهیم ریاضی نایل می‌آید یا چگونگی حصول معلومات تصوری ریاضی برای ذهن؟ و...

۲ـ مباحث معرفت شناختی: پرسشهای معرفت شناختی در حوزهٔ فلسفه ریاضی از این قبیل‌اند: مفاهیم پایهٔ ریاضی از قبیل عدد، مجموعه، بعد و... جزو کدام دسته از مفاهیم هستند و نوع مفهومی آنها چیست: ماهوی، منطقی، فلسفی، اعتباری محض و...؟ تفاوت مفاهیم

ریاضی با مفاهیم منطقی و طبیعی در چیست؟ گزاره‌های پایهٔ ریاضی بدیهی‌اند یا نظری؟

آیا گزاره‌های ریاضی را می‌توان «قضیه» نامید؟ این گزاره‌ها تحلیلی‌اند یا ترکیبی (پیشین یا پسین)؟ اوّلی‌اند یا شایع؟ صدق و کذب گزاره‌های ریاضی و دستگاههای ریاضی به چه صورت است؟ آیا معرفت ریاضی نوعی آگاهی از واقع است؟ آیا این معرفت تمام اضلاع و ابعاد واقعیت را شامل می‌شود یا برخی از وجوه آنرا؟ کدامیک از مراتب هستی مشمول قضایا، قواعد و معادلات و محاسبات و... ریاضی تواند بود؟

۳ـ *مباحث وجودشناختی*: در مبحث وجودشناسی پرسش این است که آیا کمیت، عدد، بعد، پیوستگی و موضوعاتی از این قبیل که محور مباحث ریاضی هستند، وجود داشته و عینی‌اند یا وجود ندارند؟ اگر چنانکه این امور عدمی نیستند، وجود آنها متعین و مستقل و جدا از اشیای دیگر تحقق دارد یا چنین نیست؟ آیا آنها از وجود «مُثُلی» و ماورایی برخوردار بوده و در عالم خاصی وجود دارند؟ نحوهٔ وجود آنها چگونه است: طبیعی و مادی است، یا نیمه مجرد یا کاملاً غیر مادی و مجرد است؟ ذهنی‌اند یا عینی؟ از مقولهٔ جوهرند یا عرض؟ ثابت هستند یا متغیر؟(۵)

۴ـ *مباحث روش شناختی*: روش ریاضی چه نوع روشی است، مختصات و ویژگی‌های آن چیست؟ اختلاف و اشتراک روش ریاضی با روش علوم طبیعی و... کدام است؟

۵ـ *ریاضیات، علوم و حوزه‌های دیگر*: نسبت ریاضیات با علومی مانند، منطق، فلسفه و... چگونه است؟ و مسائلی از قبیل ریاضیات و ایدئولوژی، ریاضیات و تاریخ، ریاضیات و مسالهٔ زیبایی و سادگی، جایگاه ریاضیات در دسته بندی علوم و...

۶ـ *مباحث زبانشناختی*: آیا می‌توان از «زبان ریاضی» سخن گفت؟ مختصات زبان ریاضی چیست؟ مسایلی مانند معناداری و بی‌معنایی، مساله دلالت، انشایی یا اخباری بودن و... در ریاضیات چگونه قابل تبیین است؟

۷ـ *مباحث وجودی و انسانی*: ریاضیات چه تاثیر بنیادی در زندگی، زیست و نگرش انسان نسبت به هستی خود و جهان دارد؟ آیا با نگاه ریاضی زیستن، یک نحوه زیستن خاصی است؟ آیا وضعیتهای وجودی و درونی خاصی در تجربه ریاضی وجود دارد؟

تأملاتی چند در بخشی از مباحث فلسفه ریاضی

در این مقاله نظر بر این است تا به پنج بخش از مباحث فوق پرداخته شود و مسایلی در باب هر یک از این بخشها مطرح گردد.

۱ـ مباحث روانشناسی فلسفی

یک پرسش مهم در حوزهٔ روانشناسی فلسفی این است که ذهن چگونه و از چه طریقی به درک مفاهیم پایهٔ ریاضی از قبیل مجموعه، عدد و بُعد واصل می‌شود. پیش از پاسخ به این پرسش نخست به توصیف مفاهیم عرفی، ریاضی و فلسفی عدد و مجموعه پرداخته و آنگاه نحوهٔ انتزاع آنها را، از نظر فلاسفهٔ معاصر، توسط ذهن ریشه‌یابی می‌کنیم.

«عدد» و «مجموعه» در عرف، ریاضیات و فلسفه

به نظر می‌رسد که باید میان سه مفهوم عرفی، ریاضی و فلسفی (وجود شناختی) عدد، قایل به تمایز بود، البته نه تمایز مطلق. در عرف معمولاً به «کاربرد» عدد می‌پردازند و عدد را وسیله‌ای کمّی برای اندازه‌گیری و تعیین تعداد و مقادیر اشیا قلمداد می‌کنند. در عرف اساساً با خود مفهوم مجرد اعداد سر و کاری نیست لیکن فهم عرفی، تعدد و کثرت را در اعداد در می‌یابد.

در مورد معنای ریاضی عدد باید گفت که این معنا با توجه به مکاتب مختلف در فلسفه ریاضی دارای تفاوت است. در این میان می‌توان به دو دیدگاه اشاره داشت: دیدگاه شهودگرایی و دیدگاه منطق گرایی. در دیدگاه شهودگرایی، مفاهیم ریاضی و از جمله عدد را با توجه به دریافت شهودی و بدیهی معنا می‌کنند. عدد در نظر ایشان کمیتی است که ما به تدریج با درک واحدها و تکرار آنها حاصل می‌کنیم.(۶)

نظر دیگر در مورد عدد و بنیاد آن مربوط به مکتب منطق گرایی است. پیشینهٔ این

مکتب چندان طولانی نیست و تنها از اواخر قرن نوزدهم به اینطرف است که ایـن مکـتب مطرح شد، است. این دیدگاه در واقع دنباله‌رو جریانی است که در آن سعی بر این است تا به مفاهیم ریاضی عمق و ژرفای بیشتری داده شود. یعنی در پی کشف فضاهای گسترده و پهناوری است که از افق مفاهیم بنیادی ریاضی نمودار است. و باید گفت که «عمق یک مفهوم ریاضی از دیدگاه ریاضیدان به طریقه‌ای بر می‌گردد که از آن طریق ریاضیدان به ساختارهای بنیادی‌تر و مفاهیم غیر بدیهی‌ای که در بطن موضوع مورد بحث نهفته است، دست پیدا می‌کند».(۷) رجوع به ساختارهای بنیادی‌تر طریقی است که منطق گرایی در پیش گرفته است. بطور خلاصه باید گفت فلاسفه و منطق دانهایی مانند فرگه و راسل و وایتهد نشان دادند که مفهوم عدد از نظر منطقی مفهومی پیچیده است و می‌تواند به مفاهیم ساده‌تر که متضمن ترتیب، رده و تناظرها است، «کاهش» پیدا کند (تحویل گردد). (۸) این مفهوم ساده‌تر همان «مجموعه» است. راسل و وایتهد در کتاب مبانی ریاضیات (principia mathematica) معتقدند که مفهوم مجرد «پنج» عبارت است از مجموعه تمام دسته‌ایی از اشیا که تناظر یک به یک با ۵ دارند.(۹) می‌توان گفت که لب راه حل منطق گرایی تشخیص صحیح حالت منطقی اعداد طبیعی از طریق تحویل مفهوم عدد به مفاهیم بنیادی‌تر است. به نظر ایشان اعداد طبیعی نسبتهایی منطقی‌اند که نه به اشیا بل به مفاهیم تعلق دارند. اینکه عددی خاص مانند ۳، تعداد یک مفهوم است، بدین معنی است که سه شی در تحت آن قرار می‌گیرند. همین مطلب را می‌توان به کمک مفاهیم منطقی نیز بیان داشت برای مثال معنی ۲m(F) اینست که لااقل دو شی در تحت مفهوم F واقع می‌شوند.(۱۰) به عبارت دیگر منطق گرایان در صدد آن هستند تا ایده شهودی شمارش و عدد را به زبان مجموعه‌ها بیان کنند.(۱۱) براین اساس در ذیل مفهوم عدد با مفاهیمی چون مجموعه، تناظر، ردیف سر و کار خواهیم داشت البته با عنایت به این مطلب که مفهوم بنیادی‌تر همانا «مجموعه» خواهد بود.

در مورد معنای فلسفی عدد باید گفت که این مفهوم از آنجا که یک مفهوم ثانی و فلسفی است نمی‌تواند همانند مفاهیم انسان، درخت و سنگ دارای تعریف منطقی (تعریف به جنس و فصل) باشد بلکه راه توصیف چنین مفاهیم فلسفی و غیر ماهوی، رجوع به مفاهیم بسیط و فلسفی دیگر است تا درک آن میسر گردد. عدد در نظر فلسفی با مفهوم «کثرت» و تعدد قابل

توصیف است. عدد در نگاه فلسفی مجموعهٔ واحدها است. از اینرو نه واحد را شامل می‌شود و نه صفر را. عدد کمیت منفصل است که قابل انقسام می‌باشد.

در مورد معنا و مفاد «مجموعه» نیز باید گفت که می‌توان معنای مجموعه را در سه حوزه در نظر گرفت: عرفی، ریاضی و فلسفی. مجموعه به معنای عرفی آن در واقع عبارت از دسته‌ای از اشیا هستند که اکثراً متجانس و یکنواخت بوده و دارای تناهی اجزاء می‌باشند. بعلاوه هر مجموعه باید از چند شی متعین و مستقل و چه بسا محسوس و موجود و بالفعل تشکیل گردد.

معنای ریاضی مجموعه براساس تعریف مؤسس و مبتکر آن یعنی کانتور چنین است:

«مجموعه، هرگونه بر هم نهاده‌ای است چون M، از اشیای مشخص و کاملاً متفاوت تجربه و یا ذهن ما (که هر یک از آنها را عضو M می‌نامیم)، بصورت یک کل».(۱۲)

به بیان دیگر منظور از مجموعه، دسته‌ای از اشیای مشخص و کاملاً متمایز است که عضو آن دسته بوده و بصورت یک کل است. در اینجا «دسته» همواره حاکی از تعدد عضو نیست و ممکن است مجموعه دارای یک عضو باشد یا اصلاً عضوی نداشته باشد. مجموعه ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. «مفهوم «دسته» هیچ حکمی را در مورد یکنواختی نوع چیزهای تشکیل دهنده مجموعه، بیان نمی‌کند. یک مجموعهٔ کاملاً خوب ممکن است متشکل از سه عدد، دو مثلث و یک تابع باشد. روشن است که مفهومی با این کلیت و عمومیت، میدان وسیعی برای مثالهای نامأنوس فراهم می‌سازد. ولی مجموعه‌های مورد توجه در ریاضیات لزوماً آنهایی هستند که از امور ریاضی تشکیل می‌شوند. در یک سطح مقدماتی با مجموعه‌هایی مانند اعداد یا مجموعه‌های نقاط در صفحه، مجموعه‌های منحنی‌های هندسی و مجموعه‌های توابع آشنا می‌شویم و در ریاضیات پیشرفته‌تر به مجموعه‌های متنوع‌تر فراوانی بر می‌خوریم.»(۱۳)

در باب معنای فلسفی و هستی شناختی مجموعه باید گفت که مفهوم مجموعه نیز یک مفهوم فلسفی و مفهوم ثانی است. برای درک مفهوم و معنای مجموعه باید به مفهوم «کثرت» رجوع کرد. چرا که درک مجموعه مبتنی بر درک کثرت است. مجموعه در واقع یگانه و کل دیدن کثرت است. مجموعه مفهومی است که در پیوند کامل با مفهوم کثرت است. علامه

طباطبایی معتقدند کسانی که کثرت را چنین تعریف کرده‌اند که «کثیر مجموعه‌ای از واحدها است»، در واقع یک شی را با خودش تعریف کرده‌اند. ایشان می‌نویسند: «تعریف کثیر با مجموعه همان تعریف کثیر با کثیر است.» (تعریفاً للکثیر بالمجتمع و هوالکثیر بعینه).(۱۴) براین اساس مجموعه می‌تواند شامل امور متجانس یا نامتجانس و متناهی یا نامتناهی باشد. ولی باید توجه داشت که براساس چنین معنایی از مجموعه، مجموعه‌ای با «یک عضو» یا «هیچ عضو و تهی» نمی‌توان داشت چرا که «مجموعهٔ یک عضوی» یا «مجموعهٔ تهی» یک مفهوم متناقض خواهد بود. (البته باید این نکته را در نظر گرفت که اگر مراد از یک عضو، یک کلِ دارای اجزاء باشد، این مفهوم، متناقض نخواهد بود. چرا که این عضو از وحدت مفهومی و ماهوی و کثرت وجودی برخوردار است. بعلاوه اگر مجموعه‌ای را با دو عضو «تهی و یک» فرض کنیم باز اشکالی ندارد. چرا که تهی یا عدم به حمل اولی خودش است و امری قابل فرض است.) نیز باید افزود که مجموعه کثرتی است که بصورت واحد در نظر گرفته شده است و در قالب یک واحد لحاظ شده است. چرا که به نظر فلاسفه، از جهت فلسفی و وجودشناسی «ممکن نیست که کثیر از آن جهت که کثیر است، در خارج موجود باشد و اساساً قابل تصور هم نیست.»(۱۵)

نکته:

در مورد تحلیل فلسفی مفهوم «صفر» و «یک» باید گفت که اولاً ایندو مفهوم فرزندان مفاهیم فلسفی «عدم» و «واحد» هستند که هر دو جزء معقولات ثانی فلسفی می‌باشند. (۱۶)

ثانیاً همانگونه که در وجودشناسی، بحث عدم به نحو استطرادی و بخاطر حل برخی از مسایل مطرح می‌شود (۱۷) این امکان وجود دارد که از مفاهیم صفر و یک در مباحث ریاضی سوده برده شود. ثالثاً «یک»، مقوّم اعداد بوده و اعداد از تکرار واحد حاصل می‌شوند.(۱۸)

چگونگی درک عدد و مجموعه توسط ذهن

نخستین نکته در این قسمت این است که ذهن هیچ تصوری را اعم از تصورات ریاضی یا غیر ریاضی به نحو فطری و متعین و از پیش خود، در خود ندارد.

دوم اینکه تصور اعداد و مجموعه، متفرع بر درک مفهوم وحدت و کثرت (وعدم) هستند. بنابراین پرسش از چگونگی درک عدد و مجموعه به پرسش بنیادی‌تری قابل ارجاع است و آن اینکه وحدت و کثرت (وعدم) چگونه توسط ذهن درک می‌شوند؟

از نظر علامه طباطبایی درک وحدت و کثرت معلول تشکیل قضیه در ذهن است. هنگامی که ذهن انسان قضیه‌ای را تشکیل می‌دهد و آنگاه آنرا در قالب ایجابی (الف ب است) و سلبی (الف ب نیست) در نظر می‌گیرد، از حالت ایجاب به وحدت و از سلب به عدم و کثرت رهنمون می‌شود. (۱۹)

برخی دیگر مانند استاد مصباح یزدی معتقدند مفهوم «عدم» معلول وجدان و فقدان یک حالت نفسانی مانند ترس و.... در درون است که با علم حضوری درک و آنگاه ذهن با مقایسهٔ دو حالت وجدان و فقدان، مفهوم عام «عدم» را از آن بدست می‌آورد. (۲۰) در مورد انتزاع «وحدت» نیز بر این نظرندکه هنگامی که عقل و ذهن، فردی از یک ماهیت و مفهوم را در نظر می‌گیرد و آن را با خود ماهیت مقایسه می‌کند و این تفاوت را مورد توجه قرار می‌دهد که ماهیت قابل صدق بر افراد است ولی افراد این ویژگی را ندارند، عنوان «تشخص» را از فرد انتزاع می‌کند و هنگامی که یک فرد را با چند فرد دیگر مقایسه می‌کند و تعددی در فرد واحد نمی‌بیند، وحدت را از آن انتزاع می‌نماید.(۲۱)

بنابراین هر یک از موجودات خارجی وحدت شخصی دارند و هنگامی که بیش از یکی از آنها را در نظر بگیریم متصف به کثرت می‌گردند. (البته این حالت هم متصور است که می‌توان یک ماهیت را تنها در نظر گرفت و می‌توان آنرا با یک یا چند ماهیت دیگر لحاظ کرد، در این حالت دو مفهوم متقابل واحد و کثیر انتزاع می‌شود.)(۲۲)

در مورد اعداد باید گفت که «مفهوم «یک» یا واحد همانا متکی بر درک وحدت است. اما برای درک اعدادی بیش از یک، مانند دو، سه و...، ذهن ابتدا واحدها یا کثرت را بصورت با

هم در نظر می‌گیرد و آنگاه مفهوم عدد معینی را انتزاع می‌کند. برای مثال هنگامی که افرادی به نحو انفرادی مشاهده می‌شوند، آنها بصورت واحد درک می‌شوند. پس از آن وقتی که دو واحد از آنها با هم در نظر گرفته شوند، مفهوم «دو» انتزاع می‌گردد. به بیان دیگر ذهن واحدها را کنار هم می‌گذارد و یکجا در نظر گرفته و سپس مفهوم عدد را انتزاع می‌کند.»(۲۳) در واقع ذهن به کثرت و واحدها نظر جمعی و مجموعه‌ای نموده و سپس مفهوم عدد را کسب می‌کند. بر این اساس می‌توان گفت که مفهوم «مجموعه» رتبتاً مقدم بر درک مفهوم «عدد» است و برای درک مفهوم عدد ذهن نیازمند آن است تا تصور مجموعه را داشته باشد، یعنی واحدها را بطور مجموعه‌ای و یک کل واحد درک کند. به بیان دیگر تصور مجموعه در تصور عدد مندرج است: «عدد، مجموعه‌ای از واحدها و کثرت است». در مورد تصور مجموعه به عنوان «کثرتی در قالب یک کل»، باید گفت که درک عدد به همراه خود درک مجموعه را نیز دارد چرا که روشن شد درک عدد مبتنی بر درک مجموعه نیز هست. ادراک عدد، ادراک با هم بودگی و ادراک یک کل را نیز به همراه خود دارد.

می‌توان تا اینجا بدین نتیجه رسید که ذهن نخست به درک «واحد و وحدت» نایل می‌شود و آنگاه «کثرت» را در می‌یابد و بدنبال آن به درک «مجموعه» و آنگاه «عدد» واصل می‌شود.

اما در مورد «بُعد» که در قالب حجم و سطح و خط نمودار می‌شود باید گفت که درک بعد به عنوان یک کمیت متصل و امتداد، حاصل تحلیلی است که ذهن در برخورد با وجود اجسام و نحوهٔ وجود آنها انجام می‌دهد. بدین معنی که حجم و سطح و خط سه لحاظ ذهن است که از وجود جسم بدست می‌آورد. جسم، در خارج از یک وجود برخوردار است و ذهن حجم را از حدود آن یعنی از منتهی الیه یا طرف جسم که امری عدمی است، در سه جهت طول و عرض و ارتفاع، بدست می‌آورد. تصور سطح مولود درک منتهی الیه و پایان حجم است و تصور خط نتیجهٔ درک منتهی الیه و نهایت سطح می‌باشد. نقطه نیز از منتهی الیه خط انتزاع می‌گردد. خلاصه ادراک این مفاهیم معلول درک جهات عدمی اشیا و اجسام است.(۲۴)

یک نتیجه‌گیری

یکی از نتایجی که می‌توان در مورد نحوهٔ ادراک مفاهیم پایهٔ ریاضی بدست آورد این است که این مفاهیم بصورت ساده و بدون فعالیتهای خاص ذهنی بدست نیامده‌اند بلکه حاصل کند و کاوها، تحلیلها و مقایسه‌های خاص ذهنی می‌باشند.

۲ـ مباحث معرفت شناختی

برای آنکه مباحث معرفت شناختی در حوزه فلسفه ریاضی از ترتیب و نظم معینی برخوردار گردد می‌توان از دیدگاه روش‌شناسی تحقیقاتی خاص فلاسفه مسلمان که بر پایهٔ تقسیم دو بخشی علم به تصور و تصدیق است، سود برد. دکتر حایری یزدی در این مورد چنین می‌نویسند: «سرلوحهٔ این متدلوژی تحقیقاتی همین دو بخشی کردن علم به تصور و تصدیق است که در بدایت هر دانش اسلامی باید این دوگانگی بصورت اصل موضوعی با یک روش تعلیماتی پذیرفته شده، مسلم فرض شود، تا یک پژوهنده بتواند کار پژوهشگری خود را آغاز کند و به ترتیب معینی به انجام برساند.»(۲۵)

این روش تحقیقاتی طریقی است که برخی از محققان معاصر در تحلیل و بررسی و مقایسه و نقد مباحث معرفت‌شناسی و... از آن سود برده‌اند مانند آنچه در کتاب «اصول فلسفه و روش رئالیسم» آمده است و بر بکارگیری این روش اذعان نموده‌اند.(۲۶)

با الهام از این ایدهٔ تحقیقاتی می‌توان تأملات معرفت شناختی خود را در باب ریاضیات، در دو حوزهٔ مفاهیم و گزاره‌ها پی‌گیری نمود.

الف ـ مفاهیم ریاضی، نوع مفهومی آنها

یکی از پرسشهایی که در حوزهٔ فلسفه ریاضی از جهت معرفت‌شناسی قابل طرح است اینکه مفاهیم پایهٔ ریاضی از قبیل عدد، مجموعه، بُعد و... جزو کدام دسته از مفاهیم هستند؟

برای تعیین نوع مفهومی این قبیل از مفاهیم نخست باید به تقسیم بندی کلی مفاهیم و اوصاف هر یک پرداخت و آنگاه مفاهیم ریاضی را با دسته‌های متعدد مفاهیم، مقایسه و تطبیق نمود.

مفاهیم ریاضی از قبیل عدد، مجموعه و بُعد مفاهیمی کلی (قابل صدق بر کثیرین) هستند. از طرف دیگر مفاهیم کلی که توسط ذهن انسان ساخته می‌شوند، بطور اساسی و کلی، در سه دسته قرار می‌گیرند: ۱ـ ماهوی ۲ـ منطقی ۳ـ فلسفی. بخشی از ویژگی‌های مهم هر یک از این سه دسته از مفاهیم را می‌توان بدین ترتیب بیان داشت:(۲۷)

الف ـ ۱ ـ مفاهیم ماهوی

مفاهیمی از قبیل انسان، درخت، سنگ، میز، دریا و... در این دسته جای می‌گیرند.

ـ مفاهیمی که ذهن بطور خودکار از موارد خاص بدست می‌آورد.

ـ قابل حمل بر امور عینی می‌باشند.

ـ در ازای هر مفهوم ماهوی یک تصور حسی یا خیالی وجود دارد بطوری که میان آنها از جهت کلی بودن و جزیی بودن تفاوت وجود خواهد داشت.

ـ هر مفهوم ماهوی بر دسته‌ای از موجودات معین قابل اطلاق و حمل است و بنابراین دایره شمول و کلیت آنها محدودتر است. مصادیق بالفعل محدودتری دارند.

الف ـ ۲ ـ مفاهیم منطقی

مفاهیمی مانند قیاس، استقراء، قضیه، کلی، جزیی و... از قبیل مفاهیم منطقی هستند.

ـ از مصادیق خاص خارجی بدست نیامده‌اند.

ـ قابل حمل بر امور عینی نیستند.

ـ اوصاف ذهنی برای معقولات و ادراکات موجود در ذهن هستند. و بنابراین مصداق و ما به ازایی در خارج از ذهن ندارند.

الف ـ ۳ ـ مفاهیم فلسفی

مفاهیمی مانند وجود، عدم، علت، معلول، واجب، ممکن و... جزو مفاهیم فلسفی هستند.
- انتزاع این مفاهیم نیازمند کند و کاو ذهنی و مقایسهٔ اشیا با یکدیگر است.
- ما به ازا و مصداقی معین در خارج ندارند، ولی منشا انتزاع دارند.
- قابل حمل بر امور عینی هستند.
- در ازای این مفاهیم، تصورات حسی و خیالی وجود ندارد.
- بر دسته خاصی از موجودات اطلاق نمی‌شود و دایره شمول آنها گسترده است و مصادیق بالفعل بسیاری دارند.
- مربوط به جنبهٔ هستی موجودات‌اند نه چیستی و ماهیت و حدود وجودی آنها.

نوع مفهومیِ تصورات ریاضی

تأملی در ویژگی‌های مفاهیم ریاضی نشان از این دارد که این مفاهیم جزو مفاهیم فلسفی هستند. چرا که:

نخست اینکه همانگونه که در بخش پیشین ـ روانشناسی فلسفی ـ معلوم گردید، این مفاهیم در سایهٔ کند و کاوها، تحلیلها و مقایسه‌های ذهنی حاصل می‌شوند. یک مفهوم ریاضی بسادگی مورد ادراک ذهن واقع نمی‌گردد. ذهن در بدست آوردن این نوع مفاهیم از مقایسه‌ها و نسبت سنجی‌ها و تأملات ویژه‌ای سود می‌برد.

دوم، در برابر مفاهیمی مانند ۶، مجموعه و خط یا مثلث، هیچ فرد معینی در خارج که ما به ازای دقیق همین تصورات باشد، موجود نیست. موطن تمام این تصورات ذهن است.(۲۸) ولی همانگونه که پیشتر مطرح شد این تصورات منشأ انتزاع دارند و واقعیات خارجی زمینهٔ انتزاع این نوع مفاهیم را فراهم آورده است.

سوم، این مفاهیم بگونه‌ای هستند که می‌توانند در باب اشیا خارجی بکار برده شوند و بر آنها حمل شوند. هنگامی که می‌گوییم هفت صندلی یا مجموعهٔ درختان شهر فلان یا این

کتاب مربع است، در واقع به نوعی در پی اتصاف خارج هستیم و این مفاهیم را بر امور عینی حمل می‌کنیم و بکار می‌بریم.

البته روشن است که حمل مفاهیم ریاضی بر امور واقعی بر مبنای «شباهت» امور واقعی با امور ریاضی است نه عینیت و تطابق کامل ایندو امور بر همدیگر. بر همین اساس است که می‌توان قبول داشت مفاهیم ریاضی می‌توانند مصادیقی در خارج داشته باشند و بر آنها حمل شده و در مورد آنها بکار روند ولی نسبت این مفاهیم با مصادیق خود همانند نسبت مفاهیم ماهوی از قبیل انسان، درخت و... با افراد خودشان نیست.

چهارم، در ازای مفاهیم ریاضی از ادراک حسی و خیالی برخوردار نیستیم. ما از اعداد، خط و... هیچ ادراک حسی یا خیالی نداریم.

پنجم، دایره شمول و اطلاق مفاهیم ریاضی بسیار زیاد است. مواردی که مفهوم انسان بر آنها اطلاق می‌شود تنها یک دسته از موجودات است ولی مفهوم عدد یا خط بر رده‌های بسیاری از موجودات قابل اطلاق است یا برای مثال عدد ۶ بر رده‌های مختلفی از موجودات حمل‌پذیر است مانند کتاب، درخت و... یا خط می‌تواند مصادیقی در حوزهٔ کتابها، درختان، جاده‌ها و... داشته باشد.

ششم، تصورات ریاضی ناظر به حدود ماهوی و قالبهای خاص وجودی اشیا نیستند و در صدد تعیین چیستی اشیا نمی‌باشند و نوعیت و جنس و فصل واقعیات را بیان نمی‌دارند. بلکه در مورد وجود و هستی اشیا بکار می‌روند. چرا که در غیر اینصورت تنها بر ماهیت خاص و دستهٔ خاصی از اشیا، مانند انسان و... قابل حمل بودند ولی در واقع چنین نیست.

به بیان دیگر اگر مفاهیم ریاضی مربوط به ماهیت اشیا بود تنها بر اشیای معینی که واجد ماهیت خاصی هستند، حمل می‌شد ولی این مفاهیم بر ماهیات متعدد حمل می‌شوند.

سه نکته:

نکتهٔ نخست اینکه براساس پذیرش این واقعیت که تصورات پایه در مفاهیم ریاضی همانا مفهوم «وحدت» و «کثرت» می‌باشد و از طرف دیگر این دو مفهوم جزو مفاهیم فلسفی -

در حوزه بحث وجودشناسی ـ هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که مفاهیم ریاضی نیز جزو مفاهیم فلسفی می‌باشند.

نکته دوم اینکه ممکن است چنین به نظر آید که مفاهیم منطقی نیز بر خارج از خود مفهوم منطقی صدق می‌کنند و خارج از خود را وصف کرده و بر امور ماورای مفهوم قابل اطلاقند. برای مثال مفهوم «کلی»، در ذهن از افرادی مانند انسان، درخت، دیوار و... برخوردار است. از اینرو نمی‌توان مفاهیم منطقی را در دستهٔ خاصی قرار داد بلکه همانند مفاهیم ریاضی خواهند بود و جزو معقولات و مفاهیم فلسفی هستند.

در پاسخ باید گفت که منظور فلاسفه مسلمان از اتصاف و حمل بر امور عینی و صدق بر افراد خارجی، اطلاق این مفاهیم بر خارج از «مفهوم» آنها نیست. درست است که به یک معنی «خارج» و امور عینی را در مورد آنچه خارج از خود مفهوم است، بکار می‌برند ولی در این مقام نظر به «خارج از ذهن» است نه صرفاً خارج از مفهوم. ذهن امری ذومراتب و دارای درجات است و هر مرتبه از آن می‌تواند نسبت به مرتبه دیگر به عنوان خارج تلقی شود، ولی مراد از خارج همانا خارج از ذهن و تمام مراتب آن است. البته این نکته قابل ذکر است که مفاهیم ثانی فلسفی در خارج از نفسِ مفهومشان در خودِ ذهن نیز دارای افراد بوده و بر موارد و افراد خود قابل اطلاق‌اند. برای مثال مفهوم «وجود» در ذهن از افرادی برخوردار است که همان ذهنیات، تصورات و افکار هستند. یا مفهوم عدد مانند مفهوم سه، بر سه مفهوم موجود در ذهن اطلاق‌پذیر است.

خلاصه نظر فلاسفه مسلمان دربارهٔ اتصاف و حمل پذیری امور عینی توسط مفاهیم فلسفی این است که این مفاهیم علاوه بر آنکه ممکن است در ذهن و دستگاه ادراکی انسان افرادی داشته باشند می‌توانند خارج از حیطهٔ ذهن را نیز در بر بگیرند و در خارج از ذهن نیز افرادی داشته و بر آنها حمل شوند و این خصوصیتی است که مفاهیم منطقی از آن برخوردار نیستند.

در دنبالهٔ این پرسش و پاسخ ممکن است چنین استدلال شود که مفاهیم منطقی از این خصوصیت اخیر نیز برخوردارند، یعنی دارای افراد حقیقی در خارج از ذهن بوده و بر آنها حمل می‌شوند. برای مثال کسی که استدلالی را به زبان می‌آورد و یا استدلال را در روی برگ

کاغذی می‌نویسد، ما به آن اشاره کرده و می‌گوییم «این استدلال قیاسی است» یا «استقرایی» و «تمثیلی» است. در واقع کاری که ذهن در این حالتِ مفروض انجام داده است، حمل یک مفهوم منطقی مانند قیاس، استقراء و یا تمثیل به خارج از ذهن است. این مساله در مورد «قضیه» نیز صادق است.

تحلیلی که می‌توان از این موارد بدست داد این است که عناوین منطقی مانند کلی، قضیه و قیاس، رویدادهایی هستند که در ذهن و ذهنیات رخ می‌دهند. «کلی» وصف مفاهیم ذهنی است، «قضیه» پیوند خاص تصورات ذهنی است، «قیاس» ترتیب و پیوند خاص ذهنیات است. بنابراین مصداق و فرد حقیقی و بالذات مفاهیم منطقی همانا ذهنیات انسان ـ خود یا دیگری ـ است. و اما کلی ملفوظ یا قضیهٔ ملفوظ یا قیاس ملفوظ که در قالب لفظ تعبیر شده‌اند و عبارتهای لفظی را بوجود آورده‌اند فی نفسه و بدون لحاظ معانی و مفاهیم و مدلولات خود که همانا ذهنیات باشند، مصادیق حقیقی مفاهیم منطقی قلمداد نمی‌شوند. و لحاظِ «مدلولاتِ» ذهنی این تعابیر ملفوظ بعنوان افراد حقیقیِ عناوین منطقی، یعنی پذیرفتن اینکه این عناوین و مفاهیم منطقی افراد خارجی ندارند و افراد آنها ذهنی‌اند. تعابیر ملفوظ در واقع، افراد فرضی این مفاهیم خواهند بود. (این نکته نیز قابل ذکر است که مفاهیم ریاضی قابلیت کاربرد در اشیای طبیعی را نیز دارند ولی مفاهیم منطقی چنین نیستند).

نکتهٔ سوم اینکه ممکن است این پرسش نیز مطرح شود که اتصاف خارج و حمل و کاربرد مفاهیم ریاضی در امورد عینی، اگر در مورد برخی از مفاهیم ریاضی صدق بکند در مورد تمام مفاهیم ریاضی و مفاهیم مجردی که در مراحلی از فعالیت ریاضی نمودار می‌شوند، درست نخواهد بود.

در پاسخ باید گفت که مراد از حمل پذیری و اتصاف خارج و کاربرد مفاهیم ریاضی در امور عینی کاربرد بالفعل آنها نیست. نظر بر این نیست که مفاهیم، قضایا و مدلهای ریاضی در همان مرحلهٔ ظهور و پیدایش، در خارج کاربرد خواهند داشت. بلکه مرادِ معرفت شناسان این است که معرفت ریاضی در ذات خود چنان هستند که اقتضای کاربرد و قابلیت کاربرد در خارج را دارد. این قابلیتی است که در معرفت منطقی وجود ندارد. لازمهٔ این سخن این است که یک معرفت ریاضی ممکن است تا ابد به نحو بالفعل در مورد رویدادهای عینی بکار نرود

ولی این سخن بدین معنا نیست که قابلیت کاربرد در خارج را ذاتاً ندارد. این قابلیت همواره در معرفت ریاضی وجود دارد. البته ممکن است این پرسش به نظر آید که چرا ریاضیات از چنین قابلیتی برخوردار شده است، پاسخ این است که ریاضیات ـ چنانکه گذشت ـ ناظر به اوصاف «وجود» اشیا است و تحلیلهایی است که از «نحوهٔ هستی اشیا» بعمل آمده و آنگاه تبدیل به معرفت ریاضی شده است. از اینرو پیوند آن با واقعیت همواره محفوظ است، هر چند که این پیوند عام بوده و کاربرد ویژه‌ای را اقتضا نمی‌کند.

پی‌یر مارشل در کتاب «تاریخ هندسهٔ» خود نکاتی را که قریب به مضمون فوق است، می‌آورد:

«هندسه که از ابتدا، هنگام مطالعه در مسایل روزانهٔ زندگی بوجود آمد، کم کم بخودی خود «علمی» شد و از مسایل عملی مولد خود استقلال پیدا کرد. اما وقتی که مجموعه مسایلی را که ضمن رشد و توسعه بر آن افزوده گشت، امتحان می‌کنیم چنین به نظر می‌آید که این علم کم کم از حقیقت دور می‌شود، تا جایی که چنین تصور می‌شود که بعضی از شعب آن دارای هیچ گونه فایده‌ای نیستند و فقط بعضی مشغولیات فکری می‌باشند که اگرچه ارزش فوق العاده‌ای دارند، اما در عمل از آنها استفاده نمی‌شود.

جواب این موضوع بسیار ساده است و خاص هندسه نمی‌باشد، بلکه در مورد تمام شعب علوم ریاضی صحت دارد، هیچ تئوری ریاضی وجود ندارد که روزی مورد استفاده واقع نشود و مورد استعمال عملی پیدا نکند. هر قدر هم که مجرد باشد، هر قدر هم که نظری بوده و با حقیقت رابطه‌ای نداشته باشد، هر قدر هم که در ظاهر بی‌فایده به نظر آید، هر چند ممکن است گاهی از اوقات مدت زمان نسبتاً طویلی بعد از پیدایش بکار رود.»(۲۹)

تذکر این نکته شایسته است که در سخنان پی‌یر مارشل اولاً دلیل کاربرد ریاضیات در عالم خارج ذکر نشده است در حالیکه گفته شد که این کاربرد پذیری از جهت معرفت‌شناسی مربوط است به عنایت به هستی اشیا در معرفت ریاضی و به بیان کلی‌تر قرار گرفتن مفاهیم ریاضی در گروه مفاهیم ثانی فلسفی است. پایه‌های تصوریِ معرفت ریاضی اقتضای چنین کاربردی را فراهم می‌آورند. ثانیاً وی از کاربرد پذیری بالفعل سخن می‌گوید، هر چند در زمانهای دور. ولی گفته شد که کاربردپذیری ریاضیات بالقوه است و هیچ تضمین قطعی برای بکارگیری بالفعل تمام ریاضیات در واقع وجود ندارد.

ب ـ تأملی در گزاره‌های ریاضی

نخستین مساله در بحث گزاره‌های ریاضی این است که آیا این گزاره‌ها را می‌توان به معنای منطقی، «قضیه» دانست یا نه؟ از آنجا که مهمترین عنصر یک قضیه قابلیت صدق و کذب آن است پس می‌توان این گزاره‌ها را قضیه قلمداد کرد.

مساله دوم تحلیلی یا ترکیبی بودن این قضایا است. نظریات متعددی در این مورد از طرف فلاسفه مسلمان مطرح شده است که بدانهااشاره می‌گردد.

نظریهٔ اول (مصباح یزدی)

در قضایای هلیات مرکبه (قضایایی که محمول آنها را «موجود» یا معادل آن تشکیل نمی‌دهند مانند «آب مرطوب است») اگر مفهوم محمول از تحلیل مفهوم موضوع به دست بیاید قضیه را «تحلیلی» و در غیر اینصورت آنرا «ترکیبی» می‌نامند. به بیان دیگر در صورتیکه مفهوم موضوع، مشتمل بر مفهوم محمول باشد قضیه را تحلیلی و در غیر اینصورت ترکیبی می‌نامند. برای مثال قضیهٔ «هر پدری فرزندار است»، تحلیلی است زیرا وقتی مفهوم «پدر» را تحلیل می‌کنیم مفهوم «فرزندار» از آن بدست می‌آید ولی این قضیه که «هر پدری معلم است» ترکیبی است زیرا از تحلیل موضوع یعنی پدر به مفهوم «معلم» نمی‌رسیم.

در مورد خود قضایای ترکیبی می‌توان تقسیم‌بندی دیگری را در نظر گرفت:

اینکه قضایای ترکیبی، یا پسین و مؤخر از تجربه هستند یا پیشین و مقدم بر تجربه می‌باشند. قضایای پسین یا مؤخر از تجربه قضایایی هستند که حکم به صدق و کذب آنها و یا تصدیق به ثبوت یا عدم ثبوت محمول برای موضوع در آنها، نیازمند تجربه می‌باشد. مانند این گزاره‌ها که: «آب و هوای جنوب ایران مرطوب و گرم است» یا «قطب جنوب پوشیده از برف است». قضایای پیشین یا مقدم بر تجربه قضایایی هستند که صدق و کذب آنها و یا تصدیق به ثبوت یا عدم ثبوت محمول برای موضوع در آنها، نیازمند تجربه نیست. مانند این قضیه که «واجب الوجود علت هستی بخش جهان است» یا «عدل خوب است».(۳۰)

براساس این تحلیل از قضایای تحلیلی و ترکیبی باید گفت که «قضایای ریاضی جز قضایای ترکیبی‌اند و ثانیاً ترکیبی پیشین».(۳۱) برای مثال از این قضایا می‌توان نام برد:

«هر مثلثی دارای مجموع زوایای °۱۸۰ است» یا «کوتاهترین فاصله بین دو نقطه، خط مستقیم است» یا «دو بعلاوهٔ دو مساوی چهار است».

نظریهٔ دوم (حایری یزدی)

قضیهٔ تحلیلی قضیه‌ای است که محمول آن از نهاد موضوع ـ ذات و ذاتیات موضوع ـ بدست آید و نفی آن موجب تناقض گردد و از ضرورت صدق ذاتی برخوردار باشد. مانند ضرورت باب کلیات خمس که در آن ذات و ذاتیات (جنس و فصل و نوع) از نهاد موضوع بدست می‌آیند. قضیهٔ ترکیبی قضیه‌ای است که از نهاد موضوع بدست نیامده و نفی آن موجب تناقض نگردد و از ضرورت صدق ذاتی برخوردار نباشد یعنی نیازمند دلیل باشد تا صادق دانسته شود. در قضایای ریاضی مانند «چهار زوج است»، «دو بعلاوهٔ دو مساوی چهار است» و...، از آنجا که محمول آنها ذاتی باب برهان است یعنی محمولاتی است که ناشی از نهاد موضوع نبوده بلکه از لوازم غیر قابل انفکاک موضوع هستند (عوارض ذاتی) و از طرف دیگر دارای ضرورت بوده و ذات موضوع برای حمل محمولات کافی است، نه تحلیلی‌اند و نه ترکیبی.

به بیان دیگر تأملی در ویژگی‌های محمولاتی که ذاتی باب برهان هستند، یعنی لوازم موضوع خودشان هستند نه آنکه از نهاد آنها برآیند، لازم می‌آورد که این نوع قضایا نه جزو قضایای تحلیلی باشند و نه جزو قضایای ترکیبی. قضایای ریاضی هم با قضایای ترکیبی اشتراک دارند و هم با قضایای تحلیلی. این قضایا از دو جهت با قضایای ترکیبی اشتراک دارند بدین معنی که اولاً از نهاد موضوع ناشی نشده‌اند و ثانیاً رفع آنها موجب تناقض نمی‌گردد. از یک جهت نیز با قضایای تحلیلی اشتراک دارند. بدین معنی که در صدق خود نیازمند دلیل نبوده و ذات موضوع برای نسبت دادن آنها به موضوع کفایت می‌کند و از این جهت ضرورت دارند. بر این اساس نه عیناً تحلیلی‌اند و نه عیناً ترکیبی بلکه خود دستهٔ سومی ازقضایا را تشکیل می‌دهند. (قضایای اخلاقی و فلسفی نیز اینگونه هستند).(۳۲)

نظریه سوم (محمد باقر صدر)

امکان و فرض تحلیلی بودن قضایای حساب وجود دارد ولی قضایای هندسه ترکیبی پیشین هستند.(۳۳)

نظریهٔ چهارم

برخی از فلاسفه معاصر مسلمان ـ مصباح یزدی ـ در حین بحث از برخی از گزاره‌های فلسفی و وجودشناختی، در عین حال که این دسته از گزاره‌ها را مربوط به واقعیت می‌دانند، آنها را تحلیلی قلمداد می‌کنند. نظر ایشان در باب اصل علیت از این قبیل است. تحلیل اصل علیت از این دیدگاه چنین است:

«اصل علیت عبارت است از قضیه‌ای که دلالت بر نیازمندی معلول به علت دارد و لازمه‌اش این است که معلول بدون علت، تحقق نیابد. این مطلب را می‌توان در قالب «قضیه حقیقیه» به این شکل بیان کرد: «هر معلولی محتاج به علت است» و مفاد آن این است که هرگاه معلولی در خارج تحقق یابد نیازمند به علت خواهد بود و هیچ موجودی نیست که وصف معلولیت را داشته باشد و بدون علت بوجود آمده باشد. پس وجود معلول، کاشف از این است که علتی آن را بوجود آورده است. این قضیه، از قضایای تحلیلی است و مفهوم محمول آن از مفهوم موضوعش بدست می‌آید زیرا مفهوم «معلول» عبارت است از موجودی که وجود آن متوقف بر موجود دیگر و نیازمند به آن باشد. پس مفهوم موضوع (معلول) مشتمل بر معنای احتیاج و توقف و نیاز به علت است که محمول قضیهٔ مزبور را تشکیل می‌دهد. و از اینروی از بدیهیات اولیه و بی‌نیاز از هرگونه دلیل و برهان است و صرف تصور موضوع و محمول، برای تصدیق آن، کفایت می‌کند.

اما این قضیه، دلالتی بر وجود معلول در خارج ندارد و به استناد آن نمی‌توان اثبات کرد که در جهان هستی، موجودِ نیازمند به علت، وجود دارد. زیرا قضیهٔ حقیقیه در حکم قضیهٔ شرطیه است و بخودی خود نمی‌تواند وجود موضوعش را در خارج، اثبات کند و بیش

از این دلالتی ندارد که اگر موجودی به وصف معلولیت، تحقق یافت ناچار علتی خواهد داشت.

ممکن است گفته شود که این اصل را می‌توان بصورت دیگری بیان کرد که دلالت بر وجود مصادیق موضوع در خارج داشته باشد مانند این قضیه که: «معلولهایی که در خارج وجود دارند نیازمند به علت می‌باشند». این قضیه را نیز می‌توان از قضایای بدیهی دانست زیرا منحل به دو قضیه می‌شود که یکی همان قضیهٔ سابق است و از بدیهیات است و دیگری قضیه‌ای که دلالت بر وجود معلولاتی در خارج دارد و آن هم با علم حضوری به معلولات درونی بدست می‌آید یعنی از قضایای وجدانی و بدیهی است.

ولی این قضیه هم نمی‌تواند مصادیق معلول را تعیین کند و همین اندازه دلالت دارد که موجوداتی در خارج هستند که دارای عنوان «معلول» بوده نیازمند به علت می‌باشند. اما کدامیک از موجودات خارجی هستند که دارای چنین عنوان و حکمی هستند، از خود این قضیه بدست نمی‌آید.

به هر حال، شناختن مصادیق علت و معلول جز آنچه با علم حضوری درک می‌شود بدیهی نیست و احتیاج به برهان دارد و نخست باید اوصاف علت و معلول را تعیین کرد و با تطبیق آنها بر موجودات خارجی، مصادیق علت و معلول را در میان آنها تشخیص داد.»(۳۲)

در عین حال که صاحب دیدگاه فوق ـ چنانکه پیشتر گذشت ـ قضایای ریاضی را جزو قضایای ترکیبی می‌دانند ولی بر مبنای تحلیلی که از اصل علیت بعمل آورده‌اند و تامل در جوانب آن می‌توان به نتایج دیگری در باب ماهیت قضایای ریاضی، از جهت تحلیلی یا ترکیبی بودن آنها، دست یافت.

نکتهٔ قابل تأمل این است که مفاهیم علت و معلول جزو مفاهیم ثانی فلسفی هستند و از طرف دیگر حاصل ترکیب این دو مفهوم فلسفی و قضیه‌ای که از پیوند این دو مفهوم حاصل می‌شود، تحلیلی می‌باشد. بعلاوه این قضیه بگونه‌ای است که به نحو شرطیه در مورد عالم واقع و موجودات و اشیا بکار می‌رود.

حال جای این پرسش است که اگر مفاهیم ریاضی نیز جزو مفاهیم فلسفی می‌باشند چه استبعادی وجود دارد که قضایای حاصل از این مفاهیم ریاضی نیز تحلیلی باشند و به نحو شرطیه در مورد موجودات و اشیای عالم بکار روند؟ آیا تحلیلی بودن مانع از کاربرد قضایای

ریاضی در مورد جهان خواهد بود؟ پاسخ این پرسش منفی است چرا که پیش از این گذشت که از اوصاف ریاضیات این است که در باب هستی اشیا است و هستی امر عینی و واقعی است. هر چند که این کاربرد در هستی و واقعیت به نحو شرطیه است و باید مصادیق مفاهیم ریاضی همانند مصادیق اصل علیت اثبات گردد تا قاعده در مورد آنها بکار رود. بر این اساس قضیهٔ «۴=۲+۲» و قضیهٔ «هر مثلثی دارای مجموع زوایای °۱۸۰ است»، به ترتیب بدین معنا خواهند بود که اگر در عالم خارج دو عدد ۲ باشد و با هم جمع کنیم آنگاه ۴ خواهند بود و اگر مثلثی در عالم واقع موجود باشد آنگاه دارای مجموع زوایای °۱۸۰ خواهد بود.(۳۵)

مفاد دقیق تحلیلی بودن قضایای ریاضی چیست؟ متفکرانی که معتقد به تحلیلی بودن قضایای ریاضی - از قبیل قضایای فوق - هستند در توضیح ادعای خود چنین می‌گویند که برای مثال در قضیهٔ ۴=۲+۲، ۴ جز ۲+۲ نیست ۲ جز ۱+۱ نیست، وقتی که می‌گوییم ۴=۲+۲ تنها حرفی که می‌زنیم این است که «۱+۱+۱+۱» مساوی است با «۱+۱+۱+۱» که قضیه‌ای تحلیلی است مانند این قضیه که «سیاه، سیاه است». البته لازم به ذکر است که از آنجا که قضایای تحلیلی ریاضی براساس معقولات ثانی ریاضی شکل می‌گیرند نمی‌توان آنها را قراردادی محض دانست. می‌توان قضایای تحلیلی از نوع قراردادی محض داشت ولی قضایای تحلیلی ریاضی از این سنخ نخواهند بود.

یقین ما به اینکه قضایای مذکور ضرورتاً صادقند و همیشه نیز صادق خواهند بود بر این پایه است که تحلیلی‌اند. در قضیهٔ «هر مثلثی دارای مجموع زوایای °۱۸۰ است» نیز باید گفت که داشتن مجموع زوایای °۱۸۰ در فضای مسطح مندرج در تعریف مثلث است و به نحو تحلیلی و شرطی بر آن حمل می‌شود. به بیان دیگر ما در هندسهٔ اقلیدسی مثلث را چنین تعریف کرده‌ایم که مثلث آن است که مجموع زوایای آن °۱۸۰ باشد.

مشکل دیگر بر سر راه پذیرش تحلیلی بودن قضایای ریاضی وجود پرسشها و موارد نقضی است که در این رابطه وجود دارد. در اینجا به برخی از پرسشهای مخالفان تحلیلی بودن قضایای ریاضی و پاسخ‌های قائلان به تحلیلی بودن آنها در ذیل اشاره می‌شود.(۳۶)

پرسشهایی در باب تحلیلی بودن قضایای ریاضی

بخش اول، حساب

الف ـ

ما می‌توانیم مفاهیم ۲ و ۲ را درک کنیم بدون آنکه مفهوم ۴ را به خاطر خطور دهیم. حداقل در دوران کودکی پیش از آنکه یاد بگیریم که ۲ بعلاوهٔ ۲ مساوی ۴ می‌شود، به چنین کاری قادر بودیم.

پاسخ این پرسش این است که قضیهٔ «۴=۲+۲» یک قانون روانشناسی نیست. این قضیه نمی‌گوید که ما وقتی به ۲+۲ فکر می‌کنیم به ۴ می‌اندیشیم. بلکه فقط یک رابطهٔ این همانی را بیان می‌کند، چه ما به طرفین رابطه بیاندیشیم و چه نیاندیشیم. ما می‌توانیم فکر کنیم که «X در تهران است» بدون آنکه بیاندیشیم که «X در پایتخت ایران است». ولی این دو قضیه دارای یک معنی هستند و قضیهٔ «X در تهران است ولی در پایتخت ایران نیست»، یک تناقض منطقی است هر چند که ما از این مطلب آگاه نباشیم. در مثال ریاضی فوق نیز ما از هم ارزی یک عدد با مجموعه‌ای از اعداد دیگر صحبت می‌کنیم و به پروسه‌های روانشناختی تأملات خود کاری نداریم.

ب ـ

اگر تحلیلی بودن ۴=۲+۲ را بتوان پذیرفت در مورد محاسبات پیچیده‌تری مانند: ۶۸۲۸۷=۲۷۵۹۳+۴۰۶۹۴ چه می‌توان گفت؟ پاسخ این است که بدون شک مبنای استدلال در هر دو مورد یکسان است و اگر قضیهٔ نخست تحلیلی باشد، قضیهٔ دوم نیز تحلیلی خواهد بود. فقط وقت بیشتری لازم است تا قضیهٔ دوم را بصورت سلسله‌ای از آحاد بنویسیم (...+۱+۱+۱+۱) ولی اگر چنین کاری بکنیم، می‌بینیم که داستان، همان داستان ۴=۲+۲ است

و فقط تعداد «۱»های آن زیاد شده است. و اگر این سؤال مطرح شود که برای اینکه بدانیم قضیهٔ دوم صادق است احتیاج به محاسبه داریم و شاید در این محاسبه اشتباهی رخ دهد در این صورت چگونه ممکن است چنین قضیه‌ای تحلیلی باشد؟ در پاسخ باید گفت که اگر در عمل جمع اشتباهی رخ دهد خبری که درباره عدم تساوی مجموع آن دو عدد با عدد سوم می‌دهیم یک تناقض است. زیرا در واقع می‌گوییم...+۱+۱+۱+۱ با...+۱+۱+۱+۱ مساوی نیست. باید توجه داشت که حاصل جمع دو عدد در حالت دوم به سادگی و وضوح حاصل جمع ۲+۲ نیست ولی ماهیت مساله فرق نمی‌کند.

شرط تحلیلی بودن یک قضیه وضوح و سادگی نیست. شاید آنچه برای کسی واضح است، برای دیگری واضح نباشد. وضوح یک ویژگی روانشناختی است و به هیچ وجه در مفهوم «تحلیلی» منطوی نیست.

قضایای حساب تحلیلی‌اند زیرا انکار آنها مستلزم تناقض است ولو اینکه این تناقض آشکار نباشد. برای موجودی که توان ریاضی خارق العاده‌ای دارد، جمع اعداد بزرگ به همان سهولت محاسبهٔ ۴=۲+۲ است.

ج -

در مورد اعدادی مانند ۴۰۶۹۴ و ۲۷۵۹۳ باید گفت که این دو عدد جزیی از معنی عدد ۶۸۲۸۷ نیست. به بیان دیگر در چنین حالتهایی معنی دو طرف تساوی یکسان نیست. اگر کسی از ما معنی عدد ۶۸۲۸۷ را بپرسد، ما در جواب آن دو عدد یا هر دو عدد دیگری را که حاصل جمعشان ۶۸۲۸۷ شود، مطرح نمی‌کنیم. پس وقتی تمام یا بخشی از معنی یک طرف تساوی در طرف دیگر نیامده است، چگونه ممکن است این قضیه را تحلیلی بخوانیم؟

در پاسخ باید گفت که ضرورتی ندارد که یک طرف تساوی، بخشی از معنیِ طرف دیگر باشد. A ممکن است همان B باشد، ولی معنی عباراتی که برای دلالت بر آنها بکار می‌بریم، متفاوت باشد. معنی ۶۸۲۸۷ با مجموع ۴۰۶۹۴ و ۲۷۵۹۳ یکسان نیست، ولی اگر این دو عدد را با هم جمع کنیم به همان عدد ۶۸۲۸۷ می‌رسیم. بهرحال این قضیه واجب‌الصدق و انکار آن مستلزم تناقض است.

د ـ

اگر ۴=۲+۲ حاصل موارد تجربی است آیا آموزش تجربی قضیه با تحلیلی بودن آن سازگار است؟

به فرض آنکه ۴=۲+۲ از راه تجربه آمده است و آنرا براساس موارد و مصادیق خاصی مانند جمع ۲ سیب با ۲ سیب آموخته‌ایم ولی در این فرایند ما چیزی درمورد سیب یاد نگرفته‌ایم بلکه فقط یادگرفته‌ایم که جمع ۲ و ۲ برابر ۴ می‌شود. ذکر سیب و... نمایشی بیش نیست و پس از حصول نتیجه فراموش می‌شود. آنچه یاد می‌گیریم این است که از نظر معنی، نماد ۴ با نماد ۲+۲ معادل است و ما می‌توانیم این دو عبارت را جایگزین یکدیگر کنیم. ما قضیهٔ ۴=۲+۲ را از تجربه آموخته‌ایم ـ منظور، تجربهٔ یادگیری زبان است. ولی قضیه‌ای که بیان می‌کنیم، یک حقیقت ضروری و تحلیلی است.

هـ ـ

اگر قضایای حساب تحلیلی باشند آنگاه همواره صادقند ولی این قضایا در بسیاری از موارد کاذبند. برای مثال همیشه مجموع ۲ و ۲ مساوی ۴ نمی‌شود. چراکه وقتی شما دو لیتر آب و دو لیتر الکل را روی هم می‌ریزید، حاصل جمع آنها ۴ لیتر نمی‌شود و به علت نفوذ متقابل ملکولها از ۴ لیتر کمتر می‌گردد.

پاسخ این است که اولاً حساب از فرایندهای طبیعی چیزی نمی‌گوید و نشان نمی‌دهد که چگونه دو شی که برروی هم ریخته شوند تقلیل پیدا می‌کنند. تنها چیزی که حساب می‌گوید این است که دو بعلاوهٔ دو مساوی چهار است و به دیگر سخن، واژهٔ «چهار» و عبارت «دو بعلاوهٔ دو» دارای یک معنی هستند. در حالیکه قضیه مورد نظر در ریختن آب و الکل برروی هم و تقلیل آن ناظر به یک فرایند طبیعی است. این فرایندها به هر صورتی باشند، یعنی مثلاً اگر در اثر این ترکیب هزار لیتر مادهٔ مایع نیز حاصل شود، دو بعلاوهٔ دو مساوی چهار است و به هیچ وجه نقض نمی‌شود. چراکه اساساً این نوع قضایا در مورد ماهیت اعیان و تحولات آنها

خبری نمی‌دهد تا آنکه براساس اوصاف اعیان نقض شوند. حساب حتی نمی‌گوید که عدد ۴ در عالم خارج کاربردی یا وجودی دارد، فقط می‌گوید اگر وجود داشت و کاربردی پیدا کرد در آن صورت «۲+۲» نیز همان کاربرد را خواهد داشت. زیرا معنی دو نماد «۴» و «۲+۲» یکی است.

ثانیاً به نظر می‌رسد نحوهٔ صورت بندی قضیه، گمراه کننده است. «جمع کردن» یکی از عملیات حساب است. عمل جمع روی اعداد انجام می‌گیرد نه روی اشیای فیزیکی. اگر دقت کنیم درخواهیم یافت که ما آب و الکل را با هم «جمع» نمی‌کنیم بلکه آب را روی الکل «می‌ریزیم». در اینجا «حاصل جمعی» در کار نیست. اگر بخواهیم این واژه را نیز بکار ببریم باید توجه داشته باشیم که معنی آن با آنچه در حساب متداول است، کاملاً فرق دارد. پس در این اشکال واژه‌ها در معنای دقیق خود بکار برده نشده‌اند. ما وقتی که چیزی را روی چیز دیگری می‌ریزیم، نتیجه کار با مشاهدهٔ واقعیت عینی و طبیعی ارزیابی و کشف می‌شود. ولی وقتی که عددی را با عددی جمع می‌کنیم نتیجهٔ کار از این طریق قابل ارزیابی و کشف نیست بلکه به نحو پیشینی باید حل و فصل شود.

و ـ

براساس اصول موضوع پئانو (ریاضی دان ایتالیایی (۱۸۵۸-۱۹۳۲) در باب تحلیلی یا ترکیبی بودن حساب چه می‌توان گفت؟ پئانو اصول موضوعه‌ای را در پنج بند مطرح کرد که عبارتند از:

۱- صفر یک عدد است.

۲- تالی هر عددی، یک عدد است.

۳- نمی‌توان دو عدد یافت که دارای یک تالی مشترک باشند.

۴- صفر تالی هیچ عددی نیست.

۵- فرض کنیم P خاصیتی است که اولاً صفر دارای این خاصیت است و ثانیاً اگر عددی این خاصیت را داشته باشد، تالی آن عدد نیز دارای همان خاصیت است. با فرض این مقدمات، هر عددی خاصیت P را خواهد داشت.

پئانو واژه‌های «صفر» «عدد» و «تالی» را حدود تعریف نشدهٔ اولیه قرار داد و بدین

ترتیب توانست سلسلهٔ بی‌نهایتی از اعداد را از اصول فوق استخراج کند. این اصول تمام دستگاه اعداد صحیح را ارائه می‌نماید. حال سخن سر این است که اگر حساب فرزند این اصول است و بنابر ادعا حساب مجموعه‌ای از قضایای تحلیلی است، آیا خود این اصول نیز تحلیلی‌اند؟ اگر چنین نیست ـ یعنی اصول تحلیلی نیستند ـ پس حساب نیز که از آن استنتاج شده است، تحلیلی نخواهد بود.

پاسخ این است که تمام اصول موضوعهٔ پئانو چیزی جز تعریف نیستند و در واقع بیان کنندهٔ مشخصات معرّف‌اند و بر این اساس تحلیلی می‌باشند و چون هر قضیه‌ای که از قضایای تحلیلی استنتاج می‌شود، خودش نیز تحلیلی است، پس قضایای حساب تحلیلی‌اند. اصول موضوعه پئانو از مضمون و محتوای ریاضی برخورداند. و فقط وقتی این مضمون را می‌یابند که تعبیر ما از واژه‌های صفر، عدد و تالی همان کاربرد متعارف آنها باشد. راسل (۱۸۷۲ـ۱۹۷۰) و وایتهد (۱۸۶۱ـ۱۹۴۷) در کتاب اصول ریاضی و فرگه (۱۸۴۸ـ۱۹۲۵) در مبادی حساب این تعبیر را اتخاذ نموده‌اند. با تعبیر مذکور اصول موضوعهٔ پئانو تحلیلی می‌شوند و در نتیجه تمام قضایای حساب که از این اصول استنتاج می‌شوند نیز تحلیلی‌اند.

(نکته‌ای که باید بدان توجه داشت اینکه این اصول می‌توانند تعبیرات دیگری نیز بخود بگیرند که در این صورت تحلیلی نخواهند بود. پئانو اصطلاحات صفر، تالی و عدد را تعبیر نشده باقی گذاشته است. بدین ترتیب می‌توان تعبیری کاملاً غیر ریاضی از این اصول داشت. مثلاً ممکن است «عدد» را به معنی انسان گرفت و «تالی» را به بچه تعبیر کرد. در این صورت اصل موضوع دوم بدین معنی می‌شود که «بچهٔ انسان، انسان است» که در اینصورت قضیه‌ای تالیفی بوده و دربارهٔ عالم عینی است. این قضیه صادق است ولی ضرورت منطقی ندارد.)

بخش دوم، هندسه

در مورد هندسه باید گفت که در تمام هندسه‌ها اعم از اقلیدسی و غیر اقلیدسی قضایای هندسه براساس چند اصلِ موضوعِ ثابت نشده و تعاریف بعضی اصطلاحات مهم اولیه شکل می‌گیرد. ریاضی‌دانان از این تعاریف و اصول اولیه شروع می‌کنند و قضایای مختلف را با استفاده از آنها ثابت می‌کنند. قضایای هندسه از بطن این مقدمات استنتاج می‌شوند. اولین قضیه را که ثابت کردیم می‌توانیم قضیهٔ دوم را با استفاده از آن و تعاریف و اصول اولیهٔ خود بدست آوریم. البته ما همیشه از تمام مقدمات استفاده نمی‌کنیم. مثلاً ممکن است قضیهٔ ۵۰ را از اصول موضوعهٔ اول و سوم به اضافهٔ قضایای ۳ و ۱۳ و ۴۲ استخراج کنیم. تعاریف و اصول هندسه، قضایایی تحلیلی هستند و از اینرو قضایایی که از آنها استنتاج می‌گردند، تحلیلی خواهند بود. ممکن است چنین به نظر آید که اصول هندسه اقلیدسی کاملاً مطابق با جهان طبیعی بوده و صادقند و اگر چنین است پس هندسه در باب عالم واقع سخن می‌گوید و چون پیشینی و ضروری الصدق هستند پس تالیفی پیشین می‌باشند.

ولی باید گفت که در اینجا وجه افتراق مهم ریاضیات محض و کاربردی را در نظر نگرفته‌ایم. در دستگاه هندسی اقلیدسی که حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد تاسیس شده است به این وجه افتراق توجه نشده است. ولی فی الواقع از کجا مسلّم است که اصول موضوعهٔ اقلیدس صادق‌اند؟ این اصول اگر در باب عالم واقع باشند امکان صدق و کذب پیدا می‌کنند و اساساً ممکن الصدق و ممکن الکذب هستند و هیچ راهی برای ضرورت صدق آنها وجود ندارد. تنها راه تجربه است و آنهم تامین کنندهٔ صدق ضروری برای این اصول نیست. هندسه دان محض اساساً به صدق اصول خود در واقع توجهی ندارد. برای او مساله مهم این است که استنتاجات پیچیده‌اش معتبر و برهان او درست باشد. مانند حسابداری که جمع صورتحسابها را کنترل می‌کند و به ماهیت اقلام خریداری شده کاری ندارد. برای هندسه دان نیز مانند منطقی فقط درستی برهان و صدق منطقی مطرح است نه انطباق قضایا با امور طبیعی، برای او حتی اهمیت ندارد که این اصول موضوعه دارای تعبیری دربارهٔ فضای بالفعل باشند. هندسه دان محض با هندسهٔ تعبیر نشده کار دارد نه هندسهٔ تعبیر شده یا کاربردی.

بهترین مؤید برای این دیدگاه ظهور هندسه‌های غیر اقلیدسی است. همهٔ این هندسه‌ها، دستگاههای هندسی بوده و تفاوت آنها در اصول موضوعهٔ آنهاست و تمام آنها مجموعهٔ قضایای تحلیلی هستند.

اینکه مثلث دارای مجموع زوایای ۱۸۰° است، در واقع یک قضیهٔ تحلیلی و محصول اصول دستگاه اقلیدسی است. اساساً تعریف مثلث در این دستگاه عبارت از شکلی که دارای مجموع زوایای ۱۸۰° است، می‌باشد. یا دایره به عنوان شکل منحنی مسدودی که جمیع نقاط واقع بر محیط آن از مرکز به یک فاصله باشد، یک قضیهٔ تحلیلی است. نیز خط مستقیم به معنای کوتاهترین فاصله میان دو نقطه، یک قضیهٔ تحلیلی است. تعریف نقطه به اینکه جزء ندارد و خط، طول بدون عرض و... همه جزو قضایای تحلیلی‌اند.

تمایز ریاضیات محض از ریاضیات کاربردی

حوزهٔ ریاضیات محض در حوزهٔ معقولات ثانی ریاضی محض است. مفاهیم ثانی ریاضی محض چنانکه گذشت از کلیت و عمومیت برخوردارند و بر دسته‌های متعددی از اشیا قابل اطلاق بوده و براساس واقعیات متعددی تعبیر پذیرند، تا وقتی که در حوزهٔ چنین ادراکات محض فعالیت ریاضی صورت می‌گیرد، ما در حوزهٔ ریاضیات محض هستیم ولی هنگامی که تصورات و قضایای محض را در قالب اشیا و براساس آنها بکار می‌بریم و تعبیر می‌کنیم در حوزهٔ ریاضیات کاربردی قرار داریم. خلاصه، مفاهیم و اصول ریاضی نسبت به اشیای معین بی‌تفاوت و لابشرط است. برای مثال عدد ۲ نسبت به سیب‌ها، درختان، انسانها و... خنثی است و یا خط نسبت به لبهٔ میز یا دیوار یا خطوط روی کاغذ و... لابشرط است. جان هاسپرس در مورد ملاک تمایز گزاره‌های ریاضی محض و ریاضی کاربردی معتقد است که برای تمایز و بازشناسی گزاره‌های حساب محض (گزاره‌های مربوط به اعداد نه اشیا) از گزاره‌های مربوط به آنچه مربوط به جهان و اشیا است مانند سیب‌ها، می‌توان پرسشی را بدین ترتیب در نظر گرفت که «هنگام که می‌گوییم «دو سیب» آیا تفاوتی دارد که داریم دربارهٔ سیبها سخن می‌گوییم یا فیلها یا دانه‌های شن یا اندیشه‌های راجع به روز پنجشنبه؟» اگر تفاوتی

دارد، آن گزاره گزاره‌ای مربوط به حساب نیست. اما اگر تفاوتی ندارد که دربارهٔ سیبها سخن بگوییم یا دربارهٔ چیزی دیگر، آن گزاره مربوط به حساب است، اگر گزاره تنها دربارهٔ اعداد باشد آنگاه گزاره‌ای در حساب است نه گزاره‌ای دربارهٔ فرآیندهای طبیعی».(۳۷)

خلاصه در حساب و هندسه محض از عدد و نقطه و خط و... که مفاهیم عام و کلی هستند سخن می‌رود، مفاهیمی که نسبت به جهان تعبیر ناشده است ولی هنگامی که در مورد اشیای ملموس و... بکار می‌روند دیگر از حوزهٔ ریاضیات محض خارج می‌شوند.

حمل اولی یا حمل شایع

پرسش دیگر در بررسی ماهیت قضایای ریاضی این است که آیا این قضایا بصورت حمل اولی‌اند یا شایع؟ برای پاسخ به این پرسش، نخست به توضیح دو تن از معاصران اشاره می‌شود و آنگاه براساس آن در صدد بررسی قضایای ریاضی از این جهت برخواهیم آمد.

۱ـ موضوع و محمول قضیه گاهی فقط اتحاد وجودی و مصداقی دارند ولی مفهوم آنها با یکدیگر فرق دارد، در اینصورت حمل محمول بر موضوع را حمل شایع می‌نامند مانند «انسان حقیقت جو است» و گاهی اتحاد مفهومی هم دارند یعنی مفهوم موضوع و محمول یکی است و اساساً همین اتحاد مفهومی مورد نظر می‌باشد و در اینصورت، حمل اولی می‌خوانند مانند «انسان حیوان ناطق است».(۳۸)

۲ـ حمل بر دو نوع است حمل اولی ذاتی و حمل شایع صناعی. حمل شایع صناعی نیز خود بر دو قسم تقسیم می‌گردد: شایع بالذات و شایع بالعرض یا عرضی. در حمل اولی ذاتی اتحاد مفهومی میان موضوع و محمول در نظر است و در دو مورد صدق می‌کند: حمل ذات بر ذات مانند «انسان انسان است» و حمل ذاتیات (جنس و فصل) بر ذات مانند «انسان ناطق است». در حمل شایع صناعی نظر به اتحاد موضوع و محمول در وجود است و موضوع، فرد و مصداقی از محمول محسوب می‌گردد. این حمل خود بر دو قسم است: یا محمول در عین اتحاد وجودی با موضوع، ذاتی موضوع نیز هست مانند حمل لوازم ماهیت بر ذات، برای مثال «چهار زوج است» و حمل ماهیت بر فرد بالذات برای مثال «زید انسان است»، که در این دو

حالت حمل شایع، بالذات یا ذاتی خوانده می‌شود. و یا آنکه محمول عرضی موضوع است مانند «انسان خندان است» که آن را حمل شایع بالعرض یا عرضی می‌نامند.(۳۹)

در باب حمل اولی یا شایع بودن قضایای ریاضی باید گفت:

الف ـ اگر قضایای ریاضی را از نوع قضایای تحلیلی بدانیم آنگاه می‌توان گفت که این قضایا از نوع حمل اولی نیز هستند چرا که در قضایای تحلیلی موضوع و محمول اتحاد مفهومی دارند و محمول چیزی جز ذات یا ذاتیات موضوع نیست و سلب محمول از موضوع سبب تناقض می‌گردد.

ب ـ اگر چنانکه قضایای ریاضی را ترکیبی بدانیم (نظر مصباح یزدی) این قضایا در گروه حمل شایع قرار خواهند گرفت. چرا که در قضایای ترکیبی اتحاد مفهومی وجود ندارد و محمول جزو ذات یا ذاتیات موضوع نیست. از اینرو موضوع و محمولِ قضایای ریاضی اتحاد در وجود و مصداق خواهند داشت.

ج ـ اگر قضایای ریاضی نه تحلیلی باشند و نه ترکیبی (نظر حایری یزدی) و محمول آنها از لوازم لاینفک موضوعات خودشان باشند نه از ذات و ذاتیات، در اینصورت حمل اولی نبوده و شایع است، آنهم حمل شایع بالذات.

بدیهی یا غیر بدیهی

۱ـ نظریهٔ اول (مصباح یزدی): بدیهی قضیه‌ای است که تصدیق بدان احتیاج به هیچ چیزی بجز تصور دقیق موضوع و محمول ندارد. در واقع بدیهیات به معنای واقعی کلمه از قسم قضایای تحلیلی هستند مانند اجتماع نقیضین محال است یا هر معلولی نیازمند علت است، هر کل از جزء خود بزرگتر است. ولی غیر بدیهی قضیه‌ای است که در تصدیق بدان، ذهن نیازمند رجوع به امری خارج از تصور صرفِ موضوع و محمول است. این قضایای غیر بدیهی یا «قریب به بدیهی»اند مانند حدسیات و فطریات و یا «نظری»اند مانند قضایای تجربی و حسی.(۴۰) از آنجا که از نظر این دیدگاه قضایای ریاضی جزو قضایای ترکیبی است پس نمی‌توان آنها را بدیهی انگاشت پس غیر بدیهی‌اند. بعلاوه به جهت اینکه قضایای ریاضی

(حداقل برخی از آنها) جزو نظریات بوده و قیاس و برهان آنها به همراه آنهاست پس جزو قضایای قریب به بدیهی خواهند بود. در توضیح نظریات باید گفت که قضیه‌ای را فطری می‌نامند که تصدیق به آن علاوه بر تصور موضوع و محمول به امر دیگری (حد واسط) نیازمند است اما این امر سوم به هنگام تصور طرفین از ذهن غایب نیست و محتاج بیان نیز نمی‌باشد. برای مثال در قضیه «شش زوج است» یا «عدد ۲۰ یک پنجم صد است» صرف تصور «شش» و «زوج» یا تصور «عدد ۲۰» و «یک پنجم صد» موجب تصدیق نمی‌شود بلکه محتاج امر سوم و اطلاعات فزونتری است که در قضیهٔ اول «قابلیت انقسام به دو قسم مساوی» و در قضیهٔ دوم «۱۰۰ عبارت از ۵ تا ۲۰ است» می‌باشد. اما این اطلاع سوم و حد واسط به هنگام تصور موضوع و محمول در ذهن حاضر است. از اینرو چنین قضایایی را «قضایایی که قیاس آنها با خودشان همراه است» (قضایا قیاساتهامعها) می‌نامند. در واقع این دو قضیه چنین هستند که «شش زوج است زیرا قابل انقسام به دو قسم مساوی است» و «عدد ۲۰ یک پنجم صد است زیرا ۱۰۰ عبارت از ۵ تا ۲۰ است».(۴۱)

۲ـ نظریهٔ دوم (حایری یزدی): در عین حال که بدیهی، قضیه‌ای است که صرف تصور موضوع و محمول و نسبت آندو برای اذعان بدانها کافی است و نیازی به علم و آگاهی به امر واسطه‌ای برای اذعان به این قضایا، جز اطلاعات درون قضیه، نیست، ولی اگر محمول قضیه‌ای از لوازم موضوع بوده و از عوارض ذاتی موضوع باشد، می‌توان آن قضیه را بدیهی انگاشت. در واقع بدیهیات الزاماً محدود در قضایای تحلیلی نیستند. از آنجا که قضایای ریاضی، تحلیلی نبوده ولی محمولات آنها از لوازم موضوعاتشان هستند، بنابراین (حداقل در حوزهٔ برخی از قضایا مانند ۴=۲+۲) بدیهی می‌باشند.(۴۲)

۳ـ نظریهٔ سوم (صدر): «با فرض» تحلیلی بودن حساب، این قضایا بدیهی خواهد بود ولی قضایای هندسه بدیهی نیستند.

۴ـ در حالت چهارم اگر چنانکه قضایای ریاضی تحلیلی باشند، بدیهی خواهند بود چرا که کافی است تا موضوع و محمول بدقت تصور شوند تا تصدیق صورت پذیرد.

مساله صدق و کذب

در نظر فلاسفه مساله صدق و کذب مربوط به مقام تصورات نیست بلکه در مقام تصدیقات بکار رفته و وصف تصدیقات و قضایا است. از اینرو بحث در صدق و کذب تصورات ریاضی موردی ندارد.

در مورد صدق و کذب در ریاضیات باید گفت که یک قضیهٔ ریاضی، یک قضیهٔ شرطی متصل لزومیّه محسوب می‌شود و صدق و کذب آن مربوط است به وجود یا عدم اتصال و ارتباط لزومی میان مقدم و تالی است. به بیان دیگر صادق یا کاذب بودن قضایای شرطیهٔ متصل به صدق و کذب دو جزء قضیه شرطی مربوط نیست بلکه مربوط است به اتصال و ارتباط یا عدم اتصال و ارتباط دو جزء قضیه شرطی. برای مثال قضیهٔ «مجموعهٔ زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است» در واقع یک قضیهٔ شرطیه است، بدین صورت که «اگر فضا مستوی باشد آنگاه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است» و میان مقدم و تالی رابطهٔ ضروری وجود دارد یعنی لازمهٔ مستوی بودن فضا این است که مثلث دارای مجموع زوایای ۱۸۰ درجه باشد.

یا این قضیه که «اگر عدد دو فرد باشد مجذور آن هم فرد است» یک قضیهٔ شرطیه متصله است و در عین حال که جزء‌های اول (مقدم) و دوم (تالی) آن کاذب‌اند ولی یک قضیهٔ صادق است و صادق بودن آن از آنجا ناشی می‌شود که در ریاضیات به اثبات رسیده است که مجذور هر عدد فردی، فرد خواهد بود و چون چنین است پس ارتباطی که میان دو جزء قضیه برقرار شده است، با نفس الامر و عالم واقع مطابقت دارد.(۴۳) در واقع، صدق در قضایای ریاضی همانا اثبات وجود ارتباط و اتصال میان مقدم و تالی است و به تعبیر دیگر مقدم منطقاً مستلزم تالی می‌باشد و بالعکس تالی، مستلزم مقدم باشد.

در دیگر قضایای حساب نیز همین قاعده حاکم است قضیه‌ای مانند ۴=۲+۲ بدین معنا است که اگر دو و دو داشته باشید آنگاه در آن زمان چهار خواهید داشت یا اگر ۲ و ۲ جمع شوند آنگاه چهار خواهند بود.(۴۴)

در باب صدق و کذب کل یک دستگاه ریاضی نیز باید از همین روش سود برد. بدین معنا که صدق یک دستگاه ریاضی ـ مانند هندسه اقلیدسی ـ مربوط است به وجود رابطهٔ

منطقی و استلزامی میان مبادی تصوری و تصدیقی یا تصورات پایه و اصول موضوعهٔ آن دستگاه با قضایایی که از آن نتیجه شده است. یک دستگاه ریاضی نیز در حکم یک قضیهٔ شرطیه متصله است که مقدم آن تصورات و قضایای پایهٔ آن است و تالی آن قضایایی است که از آن مقدم استنتاج شده‌اند و هرگاه میان ایندو ارتباط منطقی وجود داشته باشد، کل دستگاه صادق است و در غیر اینصورت کاذب می‌باشد.

ریاضیات مدلی برای فهم وجهی از واقعیت

مدل‌ها و دستگاههای ریاضی آنگاه که در مورد واقعیات کاربرد می‌پذیرند، حاصل این کاربرد نوعی تفسیر و توضیح واقعیت نیز بشمار می‌آید. گویی در این حالت واقعیات و روابط آن در سایهٔ یک دستگاه ریاضی و تحلیل‌های ریاضیِ خاص، لباس ویژه‌ای بر تن کرده و قالب خاصی یافته‌اند. ریاضیات در هنگام ربط بخارج ظرفی می‌شود که واقعیات شکل و اندازهٔ آنرا بخود می‌گیرند و در آن قالب فهم می‌شوند. برای مثال هنگامی که واقعیات با هندسهٔ اقلیدسی یا غیر اقلیدسی تعبیر می‌شود و لباس این دستگاهها را بر تن آنها می‌کنیم، به گونه‌ای ریاضی تفسیر و فهم می‌شوند.

بعلاوه هنگامی که ریاضیات با کاربرد خود فهم خاصی ببار می‌آورد و نگاهی ویژه به انسان می‌بخشد، این دانش و آگاهی هرگز تمام اضلاع و ابعاد واقعیت را در بر نمی‌گیرد. واقعیت بگونه‌ای است که همواره فراتر از مدل‌های ریاضی می‌رود و از لایه‌ها، اضلاع و جنبه‌هایی برخوردار است که نمی‌توان با زبان ریاضیات تمام آنها را در یک یا چند دستگاه ریاضی گنجاند.

از نظر فلاسفه مسلمان کاربرد ریاضیات در طبیعت امری مسلم است چرا که طبیعت، پذیرای عدد، واجد بعد و بطور خلاصه دارای ویژگیها و مختصات ریاضی است. اما در نزد این فیلسوفان، هستی غیر از مرتبهٔ طبیعت دارای سه مرتبهٔ دیگر نیز هست که عبارتند از: عالم مثال، عالم عقول و واجب الوجود. اگر چنانکه عالم مثال را دارای کمیت و وضع بدانیم چنانکه فلاسفه بر این عقیده‌اند(۴۵) در اینصورت این عالم نیز می‌تواند موضوع کاربرد ریاضیات باشد. نیز عالم عقول به سبب کثرت عددی نیز چنین حالتی خواهد داشت لکن از

آنجاکه بُعد و پیوستگی کمّی در آنجا راه ندارد و عالمی کاملاً غیر مادی است، تنها موضوع کاربرد حساب و شاخه‌های تابع آن خواهد بود. واجب الوجود نیز از آنجا که هیچ کمیّت و انقسامی در آن راه ندارد و هر نوع کثرتی از آن منتفی است، موضوعی برای کاربرد ریاضیات نخواهد بود.

۳ـ مباحث وجودشناختی

امور ریاضی از قبیل عدد، مجموعه و... اموری عدمی نیستند. بعلاوه ذهنیِ محض نیز نمی‌باشند، یعنی چنان نیستند که به خارج از ذهن راه نیابند و در آن به کار نروند. نیز ریاضیات امری خیالی و پنداری نیست بلکه به معنای عام کلمه دانشی عینی است اما عینی و واقعی بودن آن به این معنا نیست که اشیایی متعین در عالم خارج در ازای مفاهیم ریاضی، خواه بصورت طبیعی یا ماورای طبیعی، وجود داشته باشند. وجود مستقل و جداگانه‌ای، خارج از ذهن، برای مفاهیم ریاضی نمی‌توان یافت. همانگونه که پیشتر اشاره شد ریاضیات براساس مفاهیم ثانی فلسفی شکل گرفته است که در ازای آنها هیچ تصور حسی و خیالی وجود ندارد. ما اعداد را به طریق حسی درک نمی‌کنیم. بعلاوه در ذات خود این مفاهیم ریاضی از معدودها و متعلقات متعین آنها (از قبیل قلم، درخت، سنگ و سایر امور طبیعی یا ماورای طبیعی) خبری نیست(۴۶) در ذات عدد ۲ ما تنها دوگانگی را می‌یابیم نه آنکه دو تا وجود طبیعی مانند دو درخت، دو سنگ و... یا دو امر ماورای طبیعی را. بر این اساس امور ریاضی دارای وجود متعین طبیعی یا ماورای طبیعی نخواهند بود.

بعلاوه می‌توان در رد وجود متعین برای مقولات ریاضی، این دلیل را نیز آورد که فرض وجود متعین برای امور ریاضی مانند عدد، موجب فرض وجود سلسلهٔ بی‌نهایتی از واقعیات خواهد شد که امری محال است. توضیح اینکه به فرض آنکه عدد ۲ و ۴ دارای دو وجود متعین باشند، در اینصوت خودِ این وجودهای خاص، معروض و موضوع عدد خواهند بود و عدد در مورد آنها بکار خواهد رفت و گفته می‌شود که این وجودهای خاص «دو» واقعیت‌اند. حال این عدد «دو» را در نظر می‌گیریم و باید برای این عدد نیز وجودی خاص فرض کرد که این خود

دوباره موضوع عدد خواهد بود و این عدد اخیر نیز دارای وجود خاص و همینطور تا بی‌نهایت. پس فرض وجود متعین برای عدد نیاز به تحقق بی‌نهایت واقعیت خواهد داشت که امر ناشدنی و ناممکن است و نامعقول. اما می‌توان گفت که مفاهیم ریاضی دارای منشا انتزاع و زمینهٔ عینی و واقعی برای تحقق در ذهن هستند.(۲۷) واقعیت بگونه‌ای است که برای تشکیل مفاهیم و تصورات ریاضی بسترسازی می‌کند و از ویژگی‌ها و مختصاتی برخوردار است که زمینه انتزاع چنین اموری را فراهم می‌آورد.

حال براساس نفی وجود متعین برای امور ریاضی و پذیرش منشا انتزاع و زمینه و بستر عینی برای تشکیل امور ریاضی می‌توان افزود که این حقایق، موضوع و متعلق عناوینی مانند جوهر یا عرض بودن، ثابت و متغیر بودن یا مادی و غیر مادی بودن نخواهند بود چرا که این تقسیم‌بندی‌ها اساساً در مورد حقایقی است که از وجودهایی متعین و مستقل طبیعی (از قبیل وجود سنگ، درخت، انسان) و ماورای طبیعی برخوردار می‌باشند، در حالیکه امور ریاضی چنین نیستند.

البته می‌توان افزود که امور ریاضی نه از جهت هویت خاص خود که امور ریاضی محض هستند و نه از آن جهت که از وجود مستقل عینی برخوردارند، بلکه به جهت «متعلَّقات» و موارد عینی که در مورد آنها کاربرد پیدا می‌کنند (از قبیل قلم‌ها، سیب‌ها، انسانها و...) و نیز به جهت «وجود خاص ادراکی و ذهنی» که از آن به وجود ذهنیِ امور ریاضی تعبیر می‌شود، می‌توانند موضوعی برای این تقسیم‌بندی‌ها باشند.

در مورد تقسیم به ثبات و تغییر نیز باید گفت که ریاضیات نه به جهت اِخبار از اشیای خارجی بلکه به جهت اخبار از رابطهٔ ضروری میان «تعاریف و اصول بنیادی ریاضی» با «قضایای منتج» از آنها و رابطهٔ منطقی میان مقدم و تالیِ قضایای شرطی ریاضیات، می‌تواند موضوع این تقسیم‌بندی شود. به بیان دیگر می‌توان این پرسش را مطرح ساخت که آیا اِخبار قضایای ریاضی یا صدق آنها ثابت است یا متغیر؟ برای مثال آیا در قضیهٔ «هرگاه فضا مسطح باشد آنگاه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است»، رابطهٔ مقدم و تالی ثابت است یا متغیر؟

۴ـ مباحث روش شناختی

از نظر فلاسفه مسلمان «اسلوب و روش فکری خاص هر علمی عبارت است از یک نوع ارتباط فکری خاصی که بین انسان و موضوع آن علم باید برقرار شود و نوع ارتباط فکری میان انسان و شیءای از اشیا بستگی دارد به نحوهٔ وجود و واقعیت آن شی. مثلاً اگر شیءای از نوع اجسام است، ناچار باید ارتباط جسمانی و مادی بین انسان و آن شی برقرار شود و احساس و آزمایش عملی همان ارتباطات مادی است که دستگاه فکر با اشیا پیدا می‌کند. و اگر آن شی وجود نفسانی دارد باید به مشاهده حضوری و نفسانی که یگانه وسیلهٔ ارتباط ذهن با آن شی است پرداخته شود و اگر آن شی کیفیت عقلانی دارد، یعنی حقیقتی است که عقل با اِعمال قوه انتزاع آن را یافته است باید با سبک قیاس و برهان و تحلیل عقلانی مورد بررسی قرار گیرد.»(۴۸)

به عبارت دیگر می‌توان گفت که نحوهٔ وجود موضوع، نوع یا انواع ارتباط فکری انسان و نگاه او را به موضوع، معین می‌کند و نحوهٔ آن ارتباطات را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در این حالت الزاماً ما تنها یک نحوه ارتباط فکری و نگاه واحد نخواهیم داشت لیکن هر نوع نگاهی نیز نمی‌توان به موضوع خاصی انداخت. دو نگاه متفاوت بـه یک چیز دو روش و دو علم مستقل را بوجود تواند آورد. برای مثال فیزیک درباره جسم سخن می‌گوید و هندسه درباره تعین آن جسم وکمیت آن. در این حالت ما با دو نگاه، دو علم مستقل داریم که یکی با تجربه و دیگری با استنتاج سر وکار دارد. اما هر نگاهی را به هر چیز نمی‌توان کرد. همانطور که طعم را نمی‌شود دید و رنگ را نمی‌شود لمس کرد و درازا را نمی‌شود بویید و... هر موضوعی را از هر زاویه‌ای نمی‌شود اعتبار کرد. زوایای اعتبار نیز از نحوهٔ هستی شی مورد مطالعه، محدودیتهایی را می‌پذیرند و همین محدودیتهاست که روش خاصی را برای مطالعهٔ اشیا اقتضا می‌کند. به بیان دیگر «روش» تابع «موضوع» است. نگاه هندسی به امور کاملاً غیر مادی، ممکن نیست زیرا هر نگاهی از ناحیهٔ «هستی» شی مورد نگاه، تعین می‌پذیرد.(۴۹)

موضوع ریاضیات معقولات و مفاهیم ثانی ریاضی است و از آنجا کـه ایـن مـفاهیم اموری عقلانی و غیر تجربی هستند پس راه و روش تامل و پژوهش در آن عقلی محض است و

یکی از روشهای عقلی محض، قیاس است. «قیاس روشی است که در آن سیر فکر از کلی به جزیی است یعنی نخست محمولی برای یک موضوع کلی ثابت می‌شود و براساس آن، حکم جزئیات موضوع، معلوم می‌گردد.»(۵۰) به بیان دیگر اطلاعات و آگاهی‌های کلی را در قالب حدود و احکام پایه در نظر گرفته و آنگاه جزئیات و آگاهی‌های جزیی از بطن آن آگاهی‌های کلی استخراج می‌شود. این روش را که در تشکیل دستگاههای ریاضی بکار می‌رود، روش اصل موضوعی یا آکسیوماتیک نیز می‌نامند.

تأملی در روش اصل موضوعی(۵۱)

بطور کلی تمامی اطلاعات بشری در قالب قضایا و گزاره‌هایی قابل ارائه است. این گزاره‌ها و احکام، خود حاوی اصطلاحات و حدودی (terms) می‌باشند. باید توجه داشت که به مجموعه‌ای دلخواه از این گزاره‌ها و اخبار «علم» اطلاق نمی‌گردد، بلکه علم حاوی مجموعه گزاره‌ها و اخباری مرتبط و بهم پیوسته است که دارای سازمان و ارگانیزم خاصی باشند. در هر علمی و از جمله ریاضیات تعدادی از گزاره‌ها و احکام از احکام دیگر استخراج شده یا براساس آنها قابل اثبات و قابل تفسیر می‌باشند.

در ریاضیات اصطلاحات و حدودی که اجزای تشکیل دهندهٔ احکام و گزاره‌ها هستند، براساس اصطلاحات و حدود دیگری تعریف می‌گردند. تعریف بعضی حدود توسط حدود دیگر و اثبات و استنتاج حکمی از احکام دیگر، از مهمترین ویژگی‌های تفکر، ریاضی محسوب می‌گردد. کمال مطلوب آن است که تمامی حدود مورد استفاده در ریاضیات، تعریف و تمامی احکام آن اثبات گردد. ولی هیچکدام از این موارد ممکن نیست چرا که در تعریف هر حدّی، حدّی دیگر و در تعریف حدود اخیر نیز حدود دیگری لازم است و همینطور تا بی‌نهایت. و این امر یا به سلسله بی‌پایانی از تعاریف (یعنی تسلسل) و یا به تعاریف دوری می‌انجامد. همچنین برای اثبات هر حکمی، حکمی دیگر و برای اثبات احکام اخیر نیز احکام دیگری لازم است و همینطور تا بی‌نهایت. و این نیز به دور یا تسلسل می‌انجامد.

پس چاره‌ای جز این نخواهد بود که پاره‌ای حدود را بدون تعریف و پاره‌ای از احکام

را نیز بدون اثبات بپذیریم. این حدود و احکام اولیه به تعبیر فیلسوفان مسلمان به ترتیب بنام‌های «مبادی تصوری» و «مبادی تصدیقی» مشهورند. مبادی تصوری حاوی حدود اوّلیهٔ تعریف‌ناپذیر و مبادی تصدیقی شامل احکام اثبات‌ناپذیر می‌باشند. مبادی تصدیقی خود به اصول متعارفه (Axioms) و اصول موضوعه (Postulates) تقسیم می‌گردند:

مبادی ریاضیات
- تصوری
- تصدیقی
  - اصول متعارفه
  - اصول موضوعه

البته امروزه دانشمندان تفاوت چندانی میان اصول موضوعه و اصول متعارف قایل نبوده و هر دو را تقریباً مترادف دانسته و با لفظ واحد «اصل موضوع» (Axiom) از آنها یاد می‌کنند. در استفاده از شیوهٔ اصل موضوعی باید به این نکات مهم کمال توجه را داشت:

۱ـ هیچ حدی را نباید پذیرفت مگر اینکه معنی آن صریحاً توسط حدود اولیه و یا حدودی که قبلاً تعریف شده‌اند، تعریف گردد.

۲ـ هر گزاره و حکمی غیر از اصول موضوعه در صورتی صادق و پذیرفتنی است که براساس اصول موضوعه اولیه یا اصول اثبات شده قبلی اثبات گردد.

هر گزاره و حکمی از این طریق اثبات گردد یک قضیه (theorem) نامیده می‌شود.

ویژگی‌های نظام قیاسی

الف ـ سازگاری (Consistency)

یک نظام و دستگاه قیاسی وقتی ناسازگار است که اصول موضوعه و قواعد استنتاجی دستگاه به تناقض بیانجامد، یعنی دو نتیجهٔ کاملاً متناقض را در برداشته باشد و در صورت عدم وجود چنین تناقضی، دستگاه سازگار است. اهمیت سازگاری در نظام قیاسی از آن جهت است که اگر یک تناقض در دستگاه رخنه نماید، آن دستگاه کلاً از ارزش خواهد افتاد. به بیان دیگر حتی اگر تمامی صفات و جهات لازم دیگر برقرار بوده و در عین حال دستگاه متضمن تناقضی باشد، آن دستگاه از اعتبار می‌افتد.

ب ـ استقلال (independence)

از دیگر ویژگی‌های مهم یک نظام قیاسی مطلوب، استقلال حدود و اصول موضوعهٔ آنست یعنی اولاً هیچکدام از حدود اولیه را نتوان بر حسب سایر حدود تعریف نمود و ثانیاً هیچکدام از اصول موضوعه را نتوان از روی اصول موضوعه دیگر استنتاج کرد. استنتاج اصول موضوعه از روی یکدیگر باید منطقاً محال باشد و تأسیس یک دستگاه قیاسی بر مبنای اصول موضوعهٔ کمتر باید ممتنع باشد. البته اگر استنتاج هیچکدام از اصول موضوعه از بقیهٔ اصول تاکنون صورت نگرفته باشد، منطقاً نمی‌توان حکم به امتناع چنین استنتاجی و در نتیجه استقلال دستگاه نمود.

باید توجه داشت که ساخت و تشکیل یک دستگاه قیاسی برپایهٔ بنیادی‌ترین حدود، اصول و قواعد استنتاجی و حذف حدود و اصول زاید و اضافی، غالباً اثبات قضایا و احکام را در دستگاه مزبور بسیار دشوار می‌سازد. از اینرو استقلال اصول موضوعه، حدود اولیه و قواعد استنتاجی در مقام آموزش و تعلیم چندان مورد توجه نیست.

ج ـ تمامیّت (Completness)

خصوصیت مهم دیگر، تمامیت دستگاه قیاسی است. منظور از تمامیت آنست که بتوان هر گزاره‌ای از دستگاه مزبور را که براساس حدود و علائم دستگاه ساخته می‌شود، اثبات یا ابطال نموده و نسبت به آن داوری نمود. هر مقدار تعداد احکام قابل اثبات در یک دستگاه بیشتر باشد، ارزش دستگاه بیشتر است. برخلاف یک دستگاه ناسازگار که خالی از فایده بوده و کلاً بی ارزش است، دستگاههای ناتمام، بشرط سازگاری، مفید فایده‌اند. برای مثال دستگاه قیاسی هندسه اقلیدس بدون اصل موضوع پنجم (در باب خطوط متوازی) دستگاهی ناتمام است. لکن بدون این اصل موضوع نیز می‌توان برخی از خواص اشکال هندسی را که مستقل از اصل موضوع مزبورند، مورد تحقیق قرار داده و اثبات نمود.

کاربرد روش قیاسی (اصل موضوعی) در ریاضیات

هندسه اقلیدسی نخستین علمی بود که به شیوهٔ قیاسی بنا شد و پس از آن بیست و دو قرن طول کشید تا این شیوه در دیگر شاخه‌های ریاضیات نیز استفاده گردد. کتاب «اصول هندسه» اقلیدس (۳۳۰-۲۷۵ ق.م) بی‌شک یکی از مؤثرترین و الهام بخش‌ترین کتابها در طول تاریخ بوده است. هندسه اقلیدسی با چند تعریف و حدود اولیه (مبادی تصوری) و چند گزاره بنیادی (مبادی تصدیقی) آغاز می‌گردد. حدودی مانند «جزء»، «طول» و «عرض» بدون تعریف بوده و از مبادی تصوری دستگاه هندسی اقلیدس است. تعاریف مورد نیاز دیگر براساس حدود اولیه فوق، تعریف می‌گردند. مثلاً «نقطه آنست که جزء ندارد»، «خط، طول بدون عرض است»، «دو انتهای هر خط نقطه‌اند» هر کدام از تعاریف مزبور به نوبهٔ خود می‌توانند در تعریف حدود دیگر بکار گرفته شوند. اقلیدس مجموعاً ۲۳ تعریف را در مجموعهٔ دستگاه هندسی خویش بکار می‌گیرد.

گزاره‌ها و احکام بنیادی دستگاه هندسه اقلیدسی ده حکمند که به دو گروه اصول متعارفه و اصول موضوعه تقسیم می‌شوند. اصول متعارفهٔ هندسهٔ اقلیدسی مجموعهٔ اصولی‌اند که متعارف همهٔ اذهان بوده و همه مردم مفاد آنها را می‌پذیرند و عبارتند از:

اصل متعارف ۱: چیزهای مساوی با یک چیز، با یکدیگر مساویند.

اصل متعارف ۲: اگر به مقادیر مساوی، مقادیر مساوی بیافزاییم، دو مقدار مساوی بدست می‌آید.

اصل متعارف ۳: اگر از مقادیر مساوی، مقادیر مساوی بکاهیم، دو مقدار مساوی بدست می‌آید.

اصل متعارف ۴: چیزهایی که منطبق بر همند، با هم مساویند.

اصل متعارف ۵: یک کل بزرگتر از هر جزء خود می‌باشد.

اصول موضوعه هندسه اقلیدسی مجموعهٔ اصولی‌اند که بدون اینکه ضرورتاً متعارف همه اذهان باشند، بعنوان پایه اخذ شده‌اند و عبارتند از:

اصل موضوع ۱: فقط یک خط می‌توان رسم نمود که از دو نقطهٔ معین بگذرد.

اصل موضوع ۲: خط مستقیم را می‌توان تا نامتناهی امتداد داد.

اصل موضوع ۳: به هر مرکز و با هر فاصله می‌توان دایره‌ای رسم نمود.

اصل موضوع ۴: همهٔ زوایای قائمه با هم برابرند.

اصل موضوع ۵: اگر خط مستقیمی دو خط مستقیم دیگر را چنان قطع کند که مجموع دو زاویهٔ داخلی واقع در یک طرف خط قاطع کمتر از دو قائمه (۱۸۰ْ) باشد، در اینصورت اگر دو خط مستقیم را غیر متناهی امتداد دهیم، در نهایت در طرفی که دو زاویهٔ داخلی کمتر از دو قائمه وجود دارند، همدیگر را قطع می‌کنند. (یا به تعبیر دیگر که معادل این اصل است: «از نقطه‌ای خارج از یک خط، فقط یک خط می‌توان به موازات آن رسم نمود».)

اقلیدس توانست بر پایهٔ حدود و اصول فوق تعداد ۴۶۵ قضیه را منطقاً استنتاج نماید. در هندسه‌های نااقلیدسی نیز از همین روش اصل موضوعی استفاده می‌شود با این تفاوت که در آنها اصل موضوع پنجم تغییر می‌یابد. برای مثال «ریمان» اصل موضوع پنجم را به این صورت درآورد که «از نقطه‌ای خارج از یک خط هیچ خطی بموازات آن نمی‌توان رسم نمود» و لوباچفسکی این اصل پنجم را در جهتی کاملاً مخالف ریمان فرض نمود: «از نقطه‌ای خارج از یک خط بیش از یک خط (تا بی‌نهایت) می‌توان به موازات آن رسم نمود».

در هندسه به سبک هیلبرت نیز با استفاده از روش اصل موضوعی، با تعیین مفاهیم اساسی مانند نقطه و خط و... و اصول موضوعه، به تشکیل دستگاه هندسی پرداخته شده است. البته هیلبرت میان اصول متعارف و موضوعه تمایزی قائل نشده است.

استفاده از روش اصل موضوعی در دیگر شاخه‌های ریاضیات (غیر از هندسه) بسیار متأخر است. بیست و دو قرن طول کشید تا این روش در رشته‌های دیگر ریاضیات وارد گردد. پئانو، دانشمند ایتالیایی در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم موفق گردید تا علم حساب را اصل موضوعی نماید. چنانکه پیشتر گذشت پئانو با سه حدود اولیه و پنج اصل موضوع، علم حساب را با روش اصل موضوعی تأسیس کرد.

اشتراک روش علوم ریاضی و علوم طبیعی

در مورد علوم ریاضی و اشتراک آن با روش علوم طبیعی باید گفت که اولاً اگر چنانکه استقراء را در تشکیل علوم طبیعی دخیل بدانیم در خود استقراء یک قیاس ضمنی وجود دارد

بدین صورت که «ویژگی X برای افراد بسیاری از یک ماهیت ثابت است. هر حکمی برای افراد بسیار از ماهیتی ثابت باشد برای همهٔ افراد آن ثابت خواهد بود. پس ویژگی X برای تمام افراد ماهیت ثابت است.»(۵۲) از این جهت میان علوم ریاضی و طبیعی اشتراک خواهد بود چون هر دو از روش قیاسی سود می‌برند. ثانیاً حتی اگر استقراءگرایی سطحی را نیز بپذیریم و استقراء را کاملاً یک امر مستقل از قیاس بدانیم، یعنی قیاس ضمنی استقراء را قبول نداشته باشیم، باز در مرحله‌ای باید قیاس را پذیرفت و آن در مرحلهٔ پیش‌بینی و تبیین امور و پدیده‌ها است. در واقع نموداری که یک استقراءگرای سطحی می‌پذیرد و متضمن قیاس است، بدین ترتیب می‌باشد.

یافته‌های حاصل از مشاهده $\xrightarrow{\text{استقراء}}$ قوانین و نظریه‌ها $\xrightarrow{\text{قیاس}}$ پیش بینی و تبیین(۵۳)

فیلسین شاله در مورد کاربرد قیاس در علوم استقرایی معتقد است که «یکی از موارد استفاده از قیاس در این علوم آنست که بوسیلهٔ آن، فرضیه و نظریه را تحقیق و وارسی می‌کنیم بدین نحو که نتایج آنها را به وسیلهٔ قیاس بیرون می‌کشیم و ملاحظه می‌کنیم تا معلوم شود آیا این نتایج، موافق وقایع هست یا نه. وقتی می‌توان گفت که فرضیه‌ای محقق شده است که تمام نتایج آن با وقایع مطابقت کرده و فرضیه‌های مخالف را طرد کند. خلاصه آنکه چون از مطالعه در حال جزئیات حکم کلّی و قانون را بدست آوردیم، یعنی عمل استقراء را انجام دادیم، برای اینکه بدانیم این استقراء درست است، عمل قیاس را بجای می‌آوریم یعنی از آن حکم کلی که بوسیلهٔ استقراء بدست آمده است، حکم کلی جزئیات را بیرون می‌کشیم. اگر این حکم مطابق با امور و پدیدارها بود، می‌توانیم مطمئن شویم که استقراء صحیح است والانه».(۵۴)

کارل هِمپل نیز معتقد است که یکی از تبیین‌هایی که در علوم طبیعی مورد نظر است تبیین مبتنی بر قیاس است که تبیین‌های قیاسی ـ قانونی نامیده می‌شوند در این روش تبیین یک رویداد و پدیدهٔ معین عبارت از اندراج آن در تحت قوانین کلی است. در واقع با تحلیل رویدادها که در قالب قضایا گفته می‌شود آنها را در قالب استدلالهای قیاسی ریخته و قوانین پایه را که منجر به وقوع پدیده است، آشکار می‌کنیم.(۵۵)

جایگاه قیاس در تئوری ابطال پذیری

با رجوع به دیدگاههای فیلسوفان علم متأخر مانند کارل پوپر نیز می‌توان به تایید جایگاه قیاس در علوم طبیعی، دست یافت. پوپر مدافع نظریهٔ ابطال گرایی در علم است ولی در عین حال بر کاربرد قیاس در علوم طبیعی اذعان دارد وی در باب جایگاه کاربرد قیاس چنین می‌نویسد: «تئوریها همواره به نحو قیاسی مورد امتحان و نقد قرار می‌گیرند و بر حسب نتایج آزمون انتخاب می‌شوند. در ابتدا از نظری که به اقتراح پیش نهاده شده و هنوز به هیچ وجه به تصویب نرسیده است، به وسیلهٔ قیاسی منطقی، نتایجی اخذ می‌شود. این نظر از هر نوع باشد مهم نیست ـ خواه نوعی گمانه باشد، خواه فرضیه یا دستگاهی تئوریک. آنگاه این نتایج، هم با یکدیگر، هم با سایر گزاره‌های ذی ربط مقایسه می‌شود تا نسبتهای منطقی میانشان (نسبتهایی از قبیل هم ارزی، استنتاج پذیری، منافات یا عدم منافات) معلوم گردد. آزمون هر تئوری از نظر ما چهار مرحله دارد: نخست باید ببینیم که آیا دستگاه در دست آزمون، عاری از تناقض هست یا نه. برای این کار باید پیامدهای تئوری را منطقاً با یکدیگر مقایسه کنیم. دوم، باید در صورتِ منطقی تئوری دقت ورزیم تا دریابیم که خصلت علمی یا تجربی دارد، یا آنکه مثلاً همانگویانه است. در مرحلهٔ سوم، باید تئوری را به مصاف مقایسه با تئوریهای دیگر بفرستیم تا معلوم شود که به فرض قبولی در امتحانهای گوناگون، آیا اصولاً پذیرش تئوری، کمکی به پیشبرد دانش ما خواهد کرد یا نه. آخرالامر، نوبت به آزمودن تئوری با استفاده از کاربرد تجربی نتایج آن می‌رسد.

منظور از آزمون آخر، دریافت آن است که دستاوردهای تئوری (یعنی نکته‌های تازه‌ای که در تئوری آمده است)، تا چه حد توقّعات تجربه را برآورده می‌سازد، خواه این توقّعات از جانب علم تجربی باشد، خواه از ناحیهٔ صنعت و فن. شیوهٔ این امتحان نیز قیاسی است. به کمک گزاره‌هایی که سابقاً پذیرفته‌ایم، گزاره‌های شخصی دیگری از تئوری نتیجه می‌گیریم که آنها را «پیش‌بینی»های تئوری می‌نامیم. به خصوص گزاره‌هایی استنتاج می‌کنیم که به خوبی آزمون‌پذیر و به آسانی در عمل امتحان کردنی باشد. از آن میان گزاره‌هایی را انتخاب می‌کنیم که از تئوری رقیب بر نمی‌آید یا آنکه اصلاً تئوری رقیب، حکم به نفیشان می‌کند. سپس این

گزاره‌ها (و گزاره‌های نتیجه شدهٔ دیگر) را با نتایج کاربردهای تجربی و آزمایشها مقایسه می‌کنیم و دربارهٔ قبول یا رد آنها داوری می‌کنیم. اگر نتیجه موافق تئوری باشد... نتیجه می‌گیریم که تئوری موقتاً امتحانش را از سر گذرانده است و هنوز دلیلی برای کنار گذاشتنش نیافته‌ایم. اما اگر نتیجه به خلاف باشد،... باطل می‌گردد.»(۵۶)

در دیدگاه فوق علاوه بر تاکید بر کاربرد قیاس در پیدایش یک تئوری مورد قبول علمی، به یکی از شرایط و ضوابط یک دستگاه قیاسی که همانا «سازگاری» و عدم تناقض است نیز اشاره شده است که باید در تکوین تئوریهای علمی مورد توجه قرار گیرد.

کاربرد قیاس و روش اصل موضوعی در فیزیک

در میان علوم طبیعی فیزیک از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است و تأمل در این دانش، جنبه قیاسی و روش اصل موضوعی را در آن آشکار می‌کند. نیوتن در کتاب مهم و تاریخی خود یعنی کتاب «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی» شیوهٔ قیاسی را بکار گرفت و علم مکانیک را بر پایهٔ تعدادی اصول موضوعه استوار نمود. نیوتن در مقدمه‌ای که خود بر کتاب «اصول» نوشته است چنین می‌آورد: «بنظر می‌رسد که مساله عمدهٔ فلسفه [علم طبیعی] این است: عزیمت از حرکات ظاهره، رسیدن به نیروهای طبیعت و تحقیق در آنها، و در قدم بعد، راه افتادن از این نیروها، و استنتاجِ برهانیِ پدیدارهای دیگر».(۵۷)

بر همین اساس است که نیوتن بر مبنای حدودی چند از قبیل جرم، زمان، مکان، حرکت، نیرو و... و اصول خاصی از قبیل «هر جسمی بحالت سکون یا حرکت مستقیم الخط خود ادامه می‌دهد مگر اینکه نیرویی از خارج بر آن اثر کنند»، «نیروی وارد بر هر جسم متناسب با تغییرات اندازهٔ حرکت آن جسم در واحد زمان است»، «هر عملی را عکس العملی است مساوی و در جهت مخالف»، به تشکیل دستگاه فیزیکی خود اقدام کرد.

تفاوت روش علوم ریاضی و علوم طبیعی

ممکن است چنین به نظر برسد که از آنجا که در هر دو دسته از علوم ریاضی و طبیعی از روش قیاسی و اصل موضوعی استفاده می‌شود پس این دو حوزه از جهت روش کاملاً با هم اشتراک داشته و تفاوتی میان آندو نیست. اما مطلب غیر از این است. تفاوت نخست این دو دسته از علوم این است که در ریاضیات از استقراء تجربی استفاده نمی‌شود ولی در تکوین تئوری‌های علمی از استقراء سود می‌برند.

ممکن است این پرسش به ذهن برسد که آیا قضیهٔ ساده‌ای چون ۴=۲+۲ ناشی از استقراء تجربی و آنگاه تعمیم موارد تجربی نیست؟ ما ابتدا در تجربه، حاصل جمع ۲ خانه و ۲ خانهٔ دیگر را در نظر می‌گیریم، بعد جمع ۲ سیب و ۲ سیب دیگر را ملاحظه می‌کنیم و بدین ترتیب یاد می‌گیریم که ۴=۲+۲ است و این قضیهٔ کلی را از موارد استقراء شدهٔ تجربی بدست می‌آوریم.

در پاسخ باید گفت که ما در فرایند درک و علم به اعداد یا مقولات ریاضی، امور و رویدادهای تجربی را نمی‌آموزیم تا آنگاه پس از استقراء امور تجربی به تعمیم یافته‌های تجربی دست یازیم. به بیان دیگر مقولات ریاضی دارای منشأ انتزاع هستند و ذهن براساس آنها به درک آن مقولات واصل می‌شود ولی این مقولات چیزی در باب «ماهیت» منشأ انتزاع خود آشکار نمی‌سازند تا قابل تعمیم به افراد دیگری از همان ماهیت باشد، مانند آنچه که در استقراء تجربی رخ می‌دهد. چرا که قبلاً اشاره شد که مفاهیم ریاضی جزو مفاهیم فلسفی‌اند نه ماهوی.

فرض کنیم قضیهٔ ۴=۲+۲ از راه تجربه بدست آمده است و با ملاحظه سیب و درخت و... حاصل شده است ولی آیا ما در قضیهٔ ۴=۲+۲ چیزی دربارهٔ خانه و سیب می‌آموزیم؟ جواب منفی است. ما فقط می‌آموزیم که جمع ۲ و ۲ برابر ۴ می‌شود. ذکر خانه و سیب نمایشی بیش نیست و پس از حصول نتیجه فراموش می‌شود. ذهن در این مقام از روش استقرایی استفاده نمی‌کند. بلکه پس از درک منشأ انتزاعِ اعداد، به انتزاع مفاهیم ریاضی پرداخته و آنها را در قالب دو جزء یک قضیه می‌نگرد و آنگاه پس از نسبت سنجی این دو جزء به صدق کلی

آنها حکم می‌کند و آنرا تعمیم ریاضی می‌دهد بدون آنکه تعمیمی تجربی در میان باشد. برای مثال ذهن مثلث را درک و انتزاع نموده و آنگاه احکام آنرا بدست می‌آورد و احکام این مثلث ذهنی و نه مثلثهای تجربی را تعمیم می‌دهد. در واقع ذهن براساس مفاهیم شکل گرفته در خود، میان این مفاهیم و مقادیر، روابط ثابتی را برقرار می‌کند و آنرا تعمیم می‌دهد.

بعلاوه «پیشین» بودن صدق و کذب گزاره‌های ریاضی و منفک بودن تعیین صحت و خطای این نوع قضایا از تجربه، مانع از کاربرد استقراء تجربی در ریاضیات است. چرا که حکم و قضیه‌ای کلی که براساس استقرای تجربی شکل گرفته است در مقام داوری نیز محکوم استقرای تجربی خواهد بود ولی درمورد قضایای ریاضی چنین نیست و داوری این نوع قضایا کاملاً جدای از موارد و مصادیق تجربی است.(۵۸)

تفاوت دوم و مهمتر روش علوم ریاضی با روش علوم طبیعی در این است که در عین حال که ایندو از قیاس سود می‌برند ولی قیاس از دو جنبهٔ صوری و مادی تشکیل می‌شود. صورت قیاس به استفاده از صغری و کبری در استدلال مربوط می‌شود که در هر دو علم مشترک است ولی مادهٔ قیاس که مربوط به محتوای صغری و کبری و مقدمات است در این دو علم متفاوت است. مادهٔ قیاس ریاضی از مقدمات عقلی محض است (خواه قضایای ترکیبی پیشین یا تحلیلی) ولی محتوای مقدمات قیاس تجربی از تجربیات است.(۵۹)

۵ـ ریاضیات، علوم و حوزه‌های دیگر

الف ـ ریاضیات و منطق

مقدمه

منطق دانشی است که از معقولات ثانی منطقی از آن جهت که سبب پیدایش قواعدی برای انتقالات ذهنی از معلوم به مجهول و رسیدن به علمی از طریق دانش پیشین (مقدمات) است، بحث می‌کند.(۶۰) منطق قواعد صحیح فکر کردن و اندیشیدن را آموزش می‌دهد.

در منطق ارسطویی، منطق در عین حال که از قواعد صوری بهره‌مند است و در حوزهٔ تصورات و تصدیقات (و استدلال) به بیان قواعد صوری اندیشه می‌پردازد لیکن در باب

محتوای اندیشه و مادهٔ آن نیز بحث می‌کند. منطق ارسطویی در نهایت در سایهٔ افزایش و تحولات آتی خود در نُه بخش تدوین و مورد تأمل قرارگرفته است که عبارتند از: ۱ـ مباحث الفاظ و بحث از کلیات خمس (جنس، نوع، فصل، عرض خاص، عرض عام) ۲ـ تعریف ۳ـ قضایا ۴ـ اقسام استدلال (قیاس، استقراء تمثیل) ۵ـ برهان ۶ـ جدل ۷ـ خطابه ۸ـ شعر ۹ـ مغالطه.

در منطق ارسطویی اندیشه دارای دو جنبه است جنبه صوری و جنبهٔ مادی. منطق ارسطویی متکفل بحث در هر دو بخش است. مباحثی مانند برهان، جدل، خطابه، شعر و مغالطه متکفل بحث در ماده و محتوای فکر است (متدلوژی و...). مباحثی مانند تعریف، قضایا و اقسام استدلال مربوط به صورت اندیشه می‌باشد. دستگاه منطق ارسطویی در طی گذر زمان و تحولات علمی بعدی توسط منطق دانان و پژوهشگران مورد نقد قرارگرفت و بتدریج با ظهور عرصه‌های جدید پژوهشی، بویژه در ریاضیات، مباحث جدیدی در منطق مطرح گردید و دستگاههای جدیدی با عنوان منطق ریاضی یا جدید یا نمادین ظهورکردند. برخی از مشکلاتی که در باب منطق ارسطویی از طرف محققان مطرح شده است که اسباب ظهور منطق جدید گردیده، می‌توان چنین برشمرد:

۱ـ آمیختگی منطق با زبان طبیعی. منطق ارسطویی به دلیل اینکه از زبان طبیعی استفاده می‌کند اولاً با همهٔ مغالطات زبانی سر و کار خواهد داشت و لذا اکثر مغالطات سیزده گانهٔ فن مغالطهٔ منطق ارسطویی به مغالطات لفظی وکژتابی‌های زبان بر می‌گردد. مانند مغالطه اشتراک لفظ. ثانیاً هویت اصلی منطق که مبین روش صحیح اندیشه است در حجاب زبان پوشیده شده است.(۶۱)

۲ـ عدم برخورداری از نشانه‌ها و نمادها. این مشکل از یک سو آموختن و یادگیری منطق را دشوار می‌کند و از سوی دیگر در نبود آن باید از زبان طبیعی استفاده کرد و لازمهٔ آن برداشتهای گوناگون از یک عبارت منطقی خواهد بود.(۶۲)

حاصل آنکه نبود علامت و استفاده از زبان، منطق را ازگزند نارسائیهای زبان و ابهامات و سوء تفاهمهایی که رخ خواهد داد، مصون نگه نمی‌دارد. بعلاوه سبب سلب آشکارگی ساختمان منطقی عبارات و ارتباطات منطقی قضایا خواهد شد.(۶۳)

۳ـ جریان و فرآیند استدلال در منطق ارسطویی سریع نیست. علاوه بر این امکان ورود به حوزه‌هایی خاص مانند قضایای نسبیه و استدلالهای مبتنی بر «نِسَب»، در این منطق وجود ندارد.(۶۴)

۴ـ قایل شدن ارزش بیش از اندازه برای قیاس در حالیکه قیاس، تنها یکی از اقسام استدلال استنتاجی است و اشکال استنتاجی دیگری نیز وجود دارد که بویژه در ریاضیات بکار می‌آید.(۶۵)

۵ـ منطق ارسطویی کاملاً صوری نیست. اغلب مغالطات ناشی از عدم وجود ملاک صوری در برخی قواعد منطقی است و لذا چون منطق ارسطویی به معنای دقیق صوری نیست از اینرو اولاً مغالطه خیزی آن بیشتر است و ثانیاً کلیت و عمومیت آن آشکار نیست و کاربرد آن در همهٔ علوم و فنون ملحوظ نیست.(۶۶)

۶ـ عدم توجه لازم به قضایای شرطیه و ارزش و اهمیت و کاربرد آن.

۷ـ وجود مطالب و مباحث متعددی که ربطی به منطق ندارد و در حوزه‌هایی چون هستی‌شناسی و... می‌گنجد. مانند بحث مقولات، کلیات خمس، شعر و...(۶۷)

این مشکلات و کمبودها و نارسایی‌های دیگر سبب شد تا منطق وارد حوزه‌های جدیدی شود و به اصول موضوعهٔ جدید و قالبهای جدید استدلال روی آورد و از این طریق منطق جدید یا ریاضی متولد شد. اما تحول در منطق و گذر از منطق ارسطویی به منطق جدید به معنای سلب کامل و مطلق تصور و تعریف ارسطویی از منطق نبوده است. آنچه در منطق جدید رخ داد تعیین دقیق مباحث و حوزهٔ منطق بوده است و اساساً اختلاف ماهوی یا غاعی میان دو منطق موجود نیست. رجوع به تعاریفی که منطقیون جدید از منطق ارائه می‌دهند دقیقاً در راستای و در طول همان تصور و تعریف ارسطویی است. تعاریفی مانند: «منطق مطالعهٔ روشها و اصولی است که در تمییز استدلالهای صحیح (خوب) از استدلالهای نادرست (بد) بکار می‌رود»(۶۸) «یکی از هدفهای منطق این است که استدلال خوب را از استدلال بد مشخص و آشکار کند که چه چیزی بعضی استدلالات را خوب و بعضی را بد می‌کند»(۶۹)؛ «منطق علم استنتاج است. هدف از آن مهیا ساختن ابزار نظام یافته‌ای است که با کمک آن دریابیم که آیا نتایج مفروض، حاصل مقدمه‌های مفروض هستند یا نه، یعنی به ما می‌گوید آیا

استنتاجها درستند یا نادرست»(۷۰)، «منطق علم قوانین استنتاج است»(۷۱)، «منطق دانش بررسی آن دسته از ساختارهای صوری زبانی (ساخت منطقی نه دستوری) است که تمام نمونه‌های آنها استنتاجهای درست باشند».(۷۲) تعارضی ماهوی و بنیادی با مراد منطقدانان سنتی و کلاسیک از منطق ندارد حتی برخی از محققان، منطق صوری را به دو قسم صوریِ ارسطویی و صوریِ جدید تقسیم کرده‌اند.(۷۳) البته روشن است که تعریف منطقدانان کلاسیک و جدید از منطق از جهت سعه وضیق و نیز از حیث مباحث و مسایل مطرح شده در منطق و... دارای تفاوت است.

حال که تعریف و تصور واحدی از منطق، اعم از کلاسیک و جدید، حاصل شده است و حوزهٔ کار منطقدان اجمالاً روشن گردیده می‌توان در باب نسبت منطق و ریاضیات و ارتباط آن دو براساس تاکید بر صوری بودن دانش منطق، به تأمل پرداخت.

اشتراک و اختلاف منطق و ریاضیات

الف ـ اشتراک

برخی از وجوه اشتراک منطق و ریاضیات از نظر محققان معاصر عبارتند از:

۱ـ هر دو علم، دانشی مجرد و صوری هستند و ماده و محتوا برای آنها اهمیتی ندارد و با آن کاری ندارند.(۷۴)

۲ـ هر دو دانش از کلیت و عمومیت زیادی برخوردارند و از اینرو تفسیرها، تعبیرها و کاربردهای متعددی را بر می‌تابند. برای مثال یک منحنی در ریاضیات می‌تواند نمایندهٔ انواع پارامترها و متغیرها باشد که به همدیگر بستگی دارند و به همین دلیل یک عالم اقتصاد یا عالم مکانیک و یا شیمی‌دان یا ریاضی‌دان و... می‌تواند آن را به‌کار ببرد. البته آن منحنی در هر کدام از این کاربردها رابطهٔ خاصی را نشان خواهد داد. یا مثلاً ۴=۲+۲ تفسیرهای متعدد و گوناگونی بر می‌دارد و می‌توان در حیطه‌های مختلف، مصادیقی را برای آن نشان داد. در منطق نیز چنین است. مثلاً قیاس اقترانی شکل اول «الف ب است، هر ب ج است، بنابراین الف ج است»

تفسیرهای متعددی را بر می‌دارد و در هر حوزه از معرفت می‌تواند به کار رود. حاصل آنکه از آنجا که منطق و ریاضیات از سنخ معقولات ثانی بوده و علم صوری هستند، انواع ماده‌ها و محتواها را می‌توان در آنها ریخت.

۳ـ یک خصلت مشترک دیگر میان منطق و ریاضیات حیثیت استنتاجی بودن ایندو است. استنتاجهای ریاضی، هندسی و منطقی از جهت استنتاج (از مقدماتی به نتیجه‌ای رسیدن) تفاوتی ندارند. استنتاجهای زیر تفاوت ماهوی باهم ندارند:

الف ـ ۵=۳+۲ پس ۲=۳-۵

ب ـ دو پاره خطی که با یک پاره خط دیگر مساوی باشند، حتماً خودشان با هم مساوی‌اند.

ج ـ اگر چیزی الف باشد، آنگاه ب می‌باشد و لکن این چیز ب نیست، بنابراین الف نیست.

$$P \longrightarrow Q\ ,\ \sim Q \vdash \sim P$$

خلاصه ایندو علم، دانشهایی با خصلت استنتاجی‌اند یعنی نحوهٔ رسیدن به نتیجهٔ خاص را از مقدمات خاص نیز بیان می‌کنند.

۴ـ هر دو در واقع بیش از آنکه علم به معنای کاشف از عالم خارج باشند، دستگاه تنظیم معرفت ما می‌باشند. منطق و ریاضیات سیستم‌ها و دستگاههایی هستند که شناخت ما را به قالب‌های منظم می‌اندازند.

۵ـ براساس تحلیلی بودن قضایای ریاضی و منطق، خصلت مشترک دیگر این است که هر دو چون علم به توتولوژیک‌ها هستند و جملات دائماً صادق را بررسی می‌کنند، علم ضرورتها می‌باشند. اصل‌ها، قواعد، قوانین و گزاره‌هایی که در منطق و ریاضی وجود دارند همه از جهت ضروری بودن و داشتن صدق منطقی ـ ریاضی یکسان‌اند مانند اتحاد نوع اول و صورت برهان زیر:

۱ ـ $(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$

۲ ـ $(P \,\&\, Q) \longrightarrow R \dashv \vdash P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$(۷۵)

۶ـ در ریاضیات از روش اصل موضوعی برای تشکیل دستگاههای حساب و هندسه سود می‌برند. در تبیین منطق نیز یکی از روش‌هایی که بکار می‌رود روش اصلی موضوعی است. (دو روش دیگر عبارتند از: «روش استنتاج طبیعی» و «روش نموداری»). در این روش

یک علم برپایه تعداد محدودی اصول موضوعه و قواعد استنتاج پی‌ریزی می‌شود. منطق ارسطویی، خود مرکب از یک سلسله قضایای ضرورتاً صادق (بدیهی) است مانندشکل اول قیاس اقترانی و بخش‌های دیگر براساس این مبنا بدست می‌آیند و استنتاج می‌شوند. همانگونه که در هندسه چنین فرایندی را شاهد هستیم.(۷۶)

در حوزهٔ منطق جدید نیز نخستین سیستم اصل موضوعی در سال ۱۸۷۹ در کتاب «مفهوم نگاری» فرگه معرفی و ارائه شد و پس از آن با طراحی مجدد در آثار دیگر منطقدانان ظاهر گردید.(۷۷)

۷ـ منطق و ریاضیات از مبنای واحدی سیراب می‌شوند و آن اصل هوهویت («هیچ چیز نمی‌تواند جز آنچه هست باشد» یا «حمل شی بر خودش ضروری است») و اصل محال بودن تناقض است.

۸ـ هر دو دانش از گزاره‌هایی تشکیل شده‌اند که از ضرورت صدق برخوردارند. (که یا ناشی از تحلیلی بودن آنها است و یا بنابه نظر دیگر ناشی از ترکیبی پیشین بودن آنهاست).

۹ـ ریاضیات و منطق هر دو مبتنی بر نمادها و علایم بوده و زبانهایی بین المللی و مشترک میان انسانها می‌باشند.(۷۸)

۱۰ـ اثبات به معنای دقیق کلمه ـ نه تایید مدعا ـ فقط در علوم منطقی و ریاضی معنا دارد و نه در علوم تجربی و تاریخی و... .

ب ـ اختلاف

۱ـ موضوع منطق و ریاضیات و نیز سنخ مفاهیم آنها با هم دارای تفاوت است. موضوع منطق معقولات ثانی منطقی از جهت هدایت فکر در قالب استنتاج‌ها و استدلالهای صحیح و... است تا به مطلوب و مجهول علمی واصل گردد و با معقولاتی مانند گزاره، اقسام گزاره، استنتاج، اقسام استنتاج، شرایط اعتبار استنتاج و... سر و کار دارد. ولی ریاضیات در مورد معقولات ثانی ریاضی بحث می‌کند و به روابط کمّی و ریاضی میان امور و اشیا می‌پردازد.

۲ـ دایرهٔ کلیت و کاربرد «مفاهیم» ریاضی بیشتر از مفاهیم منطق است. عدد ۲ هم بر

امور ذهنی و هم عینی قابل اطلاق و کاربرد است ولی مفاهیمی مانند گزاره، استنتاج و... در خارج از ذهن و اشیای عینی کاربردی ندارند. چرا که این امور تنها در ذهن موجودند.

۳ـ دایرهٔ کلیت «قواعد» منطقی در علوم و معارف بیش از قواعد ریاضی است. هر علمی که ریاضیات و قواعد ریاضی در آن کاربرد دارد، مشمول قواعد منطقی نیز هست و نه بالعکس. برای مثال منطق در متافیزیک کاربرد دارد ولی ریاضیات چنین نیست.

۴ـ به نظر می‌رسد ما بازای مفاهیم منطقی مانند گزاره، قیاس، استنتاج و... از تعین ویژه‌ای در ذهن برخورداند. ما بازای «گزاره» یک وضعیت خاص ذهنی است در قالب «الف ب است» یا «اگر الف ب است آنگاه ج د است». ولی در ازای مفاهیم ریاضی چنین تعین خاصی وجود ندارد. برای مثال ما بازای عدد ۲ نامعین‌تر از مفهوم منطقی «گزاره» یا «قیاس شکل اول» است.

۵ـ اساساً هدف ریاضیات تعیین اعتبار یا عدم اعتبار و صحت و سقم استنتاجهای اقامه شده در علوم و معارف نیست ولی منطق چنین هدفی دارد.

مساله تحویل پذیری ریاضیات به منطق و بالعکس

اگر منطق را به عنوان دانش و قواعد تعیین اعتبار استنتاجات و استلزامات میان گزاره‌ها و ارائه طریق برای مصونیت ذهن از خطا در تفکر در انتقالات ذهنی از معلوم به مجهول بدانیم، نمی‌توان از تحویل و ارجاع آن به ریاضیات سخن راند. چرا که ریاضیات عهده‌دار چنین مسئولیتی نمی‌باشد. منطق در عین حال که قرابت زیادی با ریاضیات یافته است و حتی متصف به وصف ریاضی شده است (در اصطلاح «منطق ریاضی»)، ولی این به معنای آن نیست که منطق همان ریاضیات است و میان ایندو حوزهٔ معرفتی، هوهویت حاکم است (یعنی منطق ریاضیات است). منطق در بستر و دامن ریاضیات تحول بسیاری یافته است و از امتیازات و تحولات آن سود برده است ولی تحت تاثیر قرار گرفتن منطق به معنای عینیت و تطابق کامل منطق و ریاضیات نیست. «نه می‌توان گمان کرد که منطق تماماً قابل تأویل به ریاضیات است و نه باید توهم کرد که ریاضی کلاً قابل تحویل به منطق می‌باشد و لذا در بیان جایگاه منطق نمی‌گوییم منطق از علوم ریاضی است بلکه باید گفت منطق در قرابت با

ریاضیات می‌باشد». حاصل آنکه «با بکار بردن برخی علایم و قواعد ریاضی، منطق در قلمرو ریاضیات قرار نمی‌گیرد».(۷۷)

برخی تصور می‌کنند که منطق مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها است ولی منطقدانان معتقدند که منطق می‌تواند روی پای خود بایستد و مبانی آن هم خیلی استوارتر از مبانی نظریه مجموعه‌هاست. ایندو علم به هم قابل تأویل نبوده و نتیجه‌ای که از این عدم تاویل می‌توان گرفت این است که منطق و ریاضی هر کدام علم مستقلی هستند و روی پای خود ایستاده‌اند.(۷۸)

محمد جواد لاریجانی در مورد تمایز منطق از ریاضیات معتقد است که نام «منطق ریاضی» امروزه به دو مبحث یا دو رشتهٔ تحقیقات کاملاً متفاوت اطلاق می‌شود: یکی همان علم «منطق ریاضی» است که موضوع آن «فکر انسان» است از لحاظ هدایت و حرکت آن به سوی حقیقت که یکی از انواع این حرکت هنگام کشف مجهول از مقدماتِ معلوم، ظاهر می‌شود. و دیگری مباحثی در ریاضیات است که «اصول ریاضیات» یا به اختصار «اصول» خوانده می‌شود. علم منطق ریاضی مانند علم مکانیک نظری (علم حرکت اجسام با روش ریاضی براساس مفاهیم جرم، شتاب، نیرو و...) است، در حالی که علم اصول، بخشی عظیم از ریاضیات معاصر است. از علم مکانیک نظری شعب فراوانی در ریاضیات پدید آمده است (مانند آنالیز، معادلات دیفرانسیل، آنالیز تابعی و...)، یعنی این شعب از علوم ریاضی در پی حل مسایل مکانیک نظری مطرح شدند، لیکن بعداً از طرف ریاضیدانان به شکل مستقل مورد مطالعه قرار گرفتند و امروز ریاضیدانی که مثلاً روی معادلات دیفرانسیل تحقیق می‌کند خیلی در بند این امر نیست که این نوع معادلات کجا بیشتر یافت می‌شوند. بلکه مساله به طور مستقل برای او جالب است. به همین ترتیب درکنار علم منطق ریاضی شعبی از ریاضیات به وجود آمده‌اند و اکنون هم به طور مستقل تعقیب می‌شوند و در حقیقت همین شعب ریاضی است که به اسم «علم اصول» خوانده می‌شوند. مباحثی که غالباً تحت این عنوان بررسی می‌شوند عبارتند از: نظریه‌های مدلها، مجموعه‌ها، مجموعه‌های توصیف‌پذیر، بازگشت و برهان. هر یک از این مباحث خود یک رشتهٔ تخصصی از ریاضیات است و نکتهٔ مهم این است که علی‌رغم ارتباط بسیار نزدیک، نباید این دو رشتهٔ تحقیقات (علم منطق ریاضی و علم اصول) را خلط نماییم. گرچه این دو غالباً به نام یکدیگر خوانده می‌شوند. البته تعداد محققین و میزان

تحقیقات در علم اصول به مراتب بیشتر از علم منطق ریاضی است و پیشرفتهای علم منطق همه از برکت این تحقیقات است. از سوی دیگر علم منطق ریاضی را گاهی به اسم منطق فلسفی نیز می‌خوانند. برخی از علمای بزرگ معاصر در «علم اصول» (که البته همگی در علم منطق هم سرآمد بوده‌اند) عبارت‌اند از: آلفرد تارسکی، گئورک کرایزل، هربرت جروم کیسلِر، رابرت واؤت، رابرت سالووِی و...، و در علم منطق نیز در عصر حاضر بزرگانی هستند از جمله: دانلد دیویدسن، سول کریپکی، هیلری پاتنام، ویلاردکواین، ایمره لاکاتوش و...

این نکته هم قابل ذکر است که علم اصول نه تنها به درد علم منطق ریاضی می‌خورد، بلکه در شعب دیگر از علوم و فنون نیز موارد استعمال فراوان و جالب دارد، از جمله در علوم نظری کامپیوتر، حساب احتمالات، آنالیز تابعی، توپولوژی و... (۸۲)

بعلاوه متفکران دیگری نیز بر تمایز ایندو علم تاکید کرده‌اند برای مثال در مورد مساله تمایز ریاضیات از منطق، نوربرت وینر نیز براین نظر است که منطق صرفاً معیار تعیین اعتبار فرایندهای ریاضی است. حتی منطق را نمی‌توان به عنوان منبعی که به خلق فرایندهای ریاضی بیانجامد، در نظر گرفت. فردی که مجهز به منطق است مسلماً هرگز کار ریاضی بدی انجام نخواهد داد ولی مسلماً هرگز کار ریاضی خوبی هم ارائه نخواهد داد. حاصل آنکه منطق ناقد است نه خالق.(۸۳)

ب ـ ریاضیات و فلسفه

در مورد رابطه و تعامل ریاضیات با فلسفه به معنای عام که شامل تاملات و تحلیل‌های غیر تجربی در مورد هستی، شناخت، اخلاق و... می‌گردد، می‌توان به مواردی اشاره داشت:

کمک فلسفه به ریاضیات و تأثیر در آن

۱ـ اثبات موضوع ریاضیات: از آنجا که محور مسایل هر علمی را موضوع جامع بین موضوعات مسایل آن علم، تشکیل می‌دهد، هنگامی که وجود چنین موضوعی بدیهی نباشد، احتیاج به اثبات خواهد داشت و اثبات آن در قلمرو مسایل همان علم نیست زیرا مسایل هر

علم، منحصر در قضایایی است که نمایانگر احوال و اوصاف موضوع است نه وجود آن.(۸۴) از نظر فلاسفه وجود و عدم موضوع ریاضیات (معقولات ثانی ریاضی)، یا نحوهٔ هستی آن، محل بحث و تأمل است و از بداهت کافی برخوردار نیست و از اینرو نیازمند آن است تا در مباحث فلسفی مورد تحقیق و تحلیل قرار گرفته و در باب وجود و عدم و یا نحوهٔ وجود و واقعیت آن بررسی فلسفی صورت گیرد.

۲ـ سود بردن ریاضیات از مبادی فلسفی مانند عدم تناقض، امکان معرفت و شناخت، مساله وحدت و کثرت (که ریشه عدد و مجموعه است).

۳ـ برخی بر این نظرند که تحول اساسی در تاریخ ریاضیات یعنی دگرگونی معرفت تجربی ـ عملی به قیاسی ـ نظری و یا به بیان دیگر جانشینی یک علم قیاسی که دارای ساختمانی منظم است، با «مجموعه‌ای از دستورالعملها» (که مشخصهٔ ریاضیات بابلی است)، در ریاضیات، در سایهٔ فلسفه رخ داده است. بر این اساس گمان بر این است که ریاضیدانان یونان تحت تاثیر فلسفهٔ ایلیایی که اولاً قابل اطمینان بودن حواس و تجربه حسی را مورد سؤال قرار داده بودند و ثانیاً فقدان تناقض و سازگاری را تنها معیار حکم صادق می‌دانستند، علم خود را به نظامی قیاسی تبدیل کردند. بر این اساس ریاضیدانان برای آنکه این نظام را صورتی سازگار بخشند، یعنی به صورتی درآورند که دارای تناقض نباشد، از اصول معینی آغاز می‌کردند که آنها را از پیش و بدون هیچ برهانی می‌پذیرفتند. آنگاه، احکام (یا قضایا) می‌بایست خود را با اصول اثبات نشده هماهنگ سازند، یعنی آنکه خود را بدون تناقض با آنها تطبیق دهند.(۸۵)

وایستکر نیز در کتاب «شأن علم» خود در مورد تاثر ریاضیات از فلسفه معتقد است که دقت تفکر فلسفی یونانیان، در پربارترین دوره‌اش، توسعهٔ ریاضیات یونانی را، که به همان اندازه دقیق بود، تسریع کرده است.(۸۶)

کمک ریاضیات به فلسفه و تأثیر در آن

۱ـ سود بردن از نظریه‌های ریاضی برای حل برخی مسایل فلسفی:

۱ـ۱ـ استفاده از ریاضیات در مبحث الهیات و خداشناسی: برخی از متفکران از بحث

احتمالات در مبحث الهیات سود برده‌اند و بنوعی تکیه‌گاه دلیل خود را مساله احتمالات قرار داده‌اند. به نظر می‌رسد بلزپاسکال (۱۶۲۳-۱۶۶۲) نخستین فیلسوفی است که از این روش سود برده است. وی با استدلال قیاسی در مورد اثبات وجود خداوند موافق نبوده است و معتقد بود که با تکیه بر داده‌های تجربی و نشان دادن همگرایی احتمالات در جهت تایید وجود الهی، می‌توان به مقصود خود که پذیرش وجود الهی است دست یافت، هر چند که این امر در نهایت برای «دل» مکشوف می‌شود.(۸۷)

پاسکال معتقد بود که در حالت تعلیق در مورد وجود یا عدم خداوند یا واقعیت و عدم واقعیت دین، احتمال آنکه ما با قبول وجود خدا و واقعی بودن دین سعادتمند شویم ـ بنابه دلایل متعدد ـ بیشتر است. از اینرو پذیرش طرف راجح عاقلانه‌تر است. یک محاسبهٔ ریاضی می‌تواند نتیجه را تعیین بکند پس به نفع وجود خداوند باید رأی داد.(۸۸)

در دورهٔ معاصر نیز برخی، با تاکید بیشتر، از احتمالات بهره جسته‌اند مانند محمد باقر صدر. ایشان بر این نظر است که با نظریهٔ احتمالات در ریاضیات و با تکیه بر آن می‌توان در مورد بهترین تفسیر از پدیده‌های هستی داوری نمود. بررسی نظریاتی که نسبت به تفسیر مجموعهٔ پدیده‌های جهان ارائه شده است، نشان از این دارد که بطور کلی باید از میان دو نظریه به انتخاب یکی دست زد این دو نظریه چنین است: نخست اینکه این پدیده‌ها در پیدایش خود ناشی از تصادف مطلق و بدون دخالت مبدا با شعور و حکیم هستند و دوم آنکه پیدایش و شکل‌گیری آنها به سبب دخالت یک مبدا حکیم می‌باشد. براساس حساب احتمالات امکان شکل‌گیری جهان براساس تصادف مطلق قریب به صفر است. احتمال پیدایش مجموعهٔ پدیده‌ها به طریق تصادف آنقدر ضعیف است که از لحاظ تفکر ریاضی و عقل سلیم، کاملاً صرف نظر کردنی است. پس برترین و بهترین تفسیر برای پیدایش پدیده‌های جهان تفسیر دوم است که احتمال وقوع آن بسیار زیاد است.(۸۹)

۱-۲ـ حساب احتمالات و حل مشکل استقراء: یکی از مسایل مهم فلسفهٔ علم، مساله استقراء و اعتبار یا عدم اعتبار آن است. متفکران بسیاری در صدد آن بودند تا از طریق حساب احتمالات راهی برای اعتبار استقراء بیابند. افرادی مانند لاپلاس و کینز از این قبیل‌اند. ولی فلاسفهٔ بعدی مانند برتراند راسل با نقد این دیدگاهها بر این نظرند که «در تئوری

ریاضی احتمالات، هیچ دلیلی نیست که ما را مجاز دارد تا استقرایی خاص یا عام را محتمل بدانیم، هر چقدر هم شمارهٔ نمونه‌های مؤید زیاد باشد». محمد باقر صدر از فلاسفه معاصر مسلمان نیز ضمن تایید سخن راسل تلاش دیگری را برای حل معضل استقراء، بدون آنکه مشکلات نظرات سابق را داشته باشد، آغاز کرده است. به اشاره باید گفت ایشان با دخالت دادن اصل علیت و ارتباط دادن احتمالات با رابطهٔ علّی میان پدیده‌ها بر این نظر است که هر استقراء، تقارنی میان الف و ب را کشف می‌کند و نظریهٔ احتمال وجود رابطه میان این دو را تا حد زیادی بالا می‌برد. البته حصول این درجهٔ بالای از احتمال تحت شرایطی خاص می‌باشد. در نهایت انسان به یقین «موضوعی» که غیر از یقین منطقی و روانشناختی است، می‌رسد و همین، اعتبار استقراء را تضمین می‌کند. یقین موضوعی براساس شرایط عینی حاصل می‌شود که در آن «نفس» به ناچار از احتمال فزاینده به جزم و یقین منتقل می‌شود. صدر در مساله اعتبار استقراء بر اصلی تکیه دارد که به وضعیت معرفت و دانش بشری مربوط می‌شود و در این اصل، عنایت به مساله احتمال آشکار است. این اصل می‌گوید: «هرگاه عدد بزرگی از ارزشهای احتمالی به دور محوری متراکم شوند، بگونه‌ای که این محور ارزش احتمالی بسیار زیادی کسب کند، این ارزش احتمالی زیاد، طی شرایط خاصی به یقین تبدیل می‌شود. گویی معرفت بشری ناگزیر است ارزشهای احتمالی بسیار کوچک را از کف دهد، از اینرو ارزشهای احتمالی کوچک فدای ارزشهای احتمالی بزرگ می‌شوند، یعنی ارزشهای احتمالی بزرگ بدل به یقین می‌گردد. فنای ارزشهای کوچک و تحول ارزش احتمالی بزرگ به یقین، لازمه حرکت طبیعی معرفت بشری است».(۹۰)

۲ـ کاربست هر چه بهتر و دقیقتر روش ریاضی و مختصات آن مانند استفاده از تعاریف دقیق، سازگاری و عدم تناقض، استقلال، و... در نظام‌های فلسفی برای هر چه دقیقتر ساختن آنها. در این حالت ریاضیات می‌تواند، از این جهت، نقش یک الگوی مناسب را برای فلاسفه بازی کند.

۳ـ تمرین در ریاضیات سبب آشنایی هر چه بیشتر با روش فلسفه (روش قیاسی) و نیز عامل تقویت ذوق فلسفی و فلسفه‌ورزی است. در این رابطه سخن علامه طباطبایی شنیدنی است. ایشان در زندگی خودنوشت خویش می‌نویسند:

«مرحوم بادکوبی [حکیم و فیلسوف معروف که علامه شش سال نزد ایشان تعلیم دیده‌اند] از فرط عنایتی که به تعلیم و تربیت نویسنده داشت برای اینکه مرا به طرز تفکر برهانی آشنا ساخته به ذوق فلسفی تقویت بخشد امر فرمود که به تعلیم ریاضیات پردازم. در امتثال امر معظم له بدرس مرحوم آقا سید ابوالقاسم خوانساری که ریاضیدان زبردستی بود حاضر شدم و یکدوره حساب استدلالی و یکدوره هندسه مسطحه و فضایی و جبر استدلالی را از معظم له فرا گرفتم.»(۹۱)

۴ـ امروزه فهم و تسلط بر برخی دیدگاههای فلسفیِ فلاسفه تحلیلی معاصر نیازمند آگاهی از ریاضیات است. حداقل، آگاهی‌های خاصی در ریاضیات سبب تعمیق و افزایش اطلاعات در مورد آرای فلسفی برخی معاصران خواهد بود.

برتراند راسل معتقد است «فقط کسی می‌تواند مسایل فلسفی را درک کند که پایهٔ محکمی در ریاضیات و فیزیک نظری داشته باشد.»(۹۲)

۵ـ مساله سازی ریاضیات برای فلسفه. ریاضیات در طی تحولات چند قرن گذشته، مسایل جدیدی را برای تفکر فلسفی فراهم آورده و سبب ظهور تأملات و تحلیلات جدیدی نزد فیلسوفان شده است. اینشتین ضمن اذعان به مساله سازی معرفت ریاضی برای فلسفه، پاسخ به این دسته از مسایل را بعهده فلاسفه می‌گذارد. وی می‌نویسد: «ریاضی دان کاری به این ندارد که آیا این معرفت (ریاضی) نتیجهٔ مواهب و قریحه و هوش بشر است یا حاصل تجربه یا از جمع این دو به دست آمده و یا بالاخره از منابعی دیگر نشات یافته است. وی تحقیق در این مطلب را به عهدهٔ فلاسفه می‌گذارد.»(۹۳) برخی از این مسایل را می‌توان چنین بیان داشت:

۵ـ۱ـ یکی از اصولی که در هندسهٔ اقلیدس و حتی در آرای فلاسفه و فلسفی اندیشان مورد قبول و پذیرش بوده و یک اصل بدیهی و غیرقابل تردید شمرده می‌شود، این است که «هر کل بزرگتر از هر یک از اجزاء آن است». ولی چنین به نظر می‌رسد که این قضیه و مدعا در نظریهٔ مجموعه‌ها صدق نمی‌کند. چرا که در این نظریه یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ نامتناهی دیگر (به عنوان کل)، با کل مجموعه معادل و مساوی است. به بیان دیگر اگر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی یا صحیح را به عنوان یک کل در نظر بگیریم و برای مثال مجموعه عددهای فرد طبیعی را به عنوان جزء آن کل، آنگاه از آنجا که هر یک از ایندو مجموعه،

نامتناهی است پس تعداد اعضای هر یک با همدیگر مساوی خواهند بود و این با اصل «هر کل از هر یک از اجزاء خود بزرگتر است» در تعارض می‌باشد.(۹۴)

۵ـ۲ـ مساله بینهایت یا نامتناهی از دیگر مباحثی است که از بار فلسفی برخوردار است و در ریاضیات نیز مطرح شده است. ریاضیدانان بزرگی مانند هیلبرت براین نظرند که تحلیل و تأمل در مساله نامتناهی باید با در نظر گرفتن نکات فلسفی صورت بگیرد.(۹۵)

۵ـ۳ـ از نظر کورت گودل (ریاضیدان معروف معاصر) روش قیاسی که از اصولی خاص تغذیه کرده و قضایایی از آن استنتاج می‌شود دارای محدودیت ذاتی معینی است و در توان روش قیاسی، محدودیتی بنیادی وجود دارد. گودل نشان داد که اثر «اصول ریاضیات» راسل ـ وایتهد یا هر دستگاه دیگری که بتوان حساب را در آن توسعه داد، ذاتاً ناکامل است. بعبارت دیگر با فرض هر مجموعه سازگار از اصول حساب، احکام راست و قضایایی درست از حساب وجود خواهند داشت که از مجموعه مورد نظر در دستگاه، قابل استنتاج نیست. هر دستگاه قیاسی برای حساب تدوین شود بگونه‌ای خواهد بود که حقایقی در حساب وجود خواهد داشت که بطور صوری اثبات‌ناپذیر باشند. برای روشن‌تر شدن مطلب، حساب اعداد طبیعی را می‌توان در نظر گرفت. ریاضیدانان عادت کرده بودند چنین بیاندیشند که با نردبان اصول موضوعهٔ خاص حساب می‌توان به هر حقیقتی در مورد اعداد رسید و آن را با برهان بدست آورد. گودل در سال ۱۹۳۰ ثابت کرد که حکمی مانند X در مورد اعداد طبیعی وجود دارد که اولاً درست است و ثانیاً در حساب پئانو ـ که همان حساب اعداد طبیعی است ـ اثبات‌پذیر نیست و حتی فراتر از آن، اصلاحات معمولی نیز کارگر نخواهد بود. این تلقی نه تنها در ریاضیات تأثیر زیادی نهاد، از لحاظ فلسفی نیز این نظریه افق جدیدی را برای تامل بازگشود. در فلسفه شناخت یا معرفت‌شناسی «مساله حدود فکر» یکی از مسایل قدیمی و اساسی است. این مساله از دو جهت مورد علاقه معرفت شناسان است: یکی از جهت تعیین حدود فکر برای رد و انکار آنچه بیرون آن قرار می‌گیرد و دیگر برای فهم این نکته که با اندیشهٔ بشری تا کجا می‌توان رفت. کانت، فیلسوف آلمانی، این بحث را بیشتر از جهت اول مورد بررسی قرار داد. این بحث پس از وی به عنوان یک بحث محوری در فلسفه باقی ماند. در اوایل قرن بیستم ویتگنشتاین (در دورهٔ نخست فکری خود) بحث حدود فکر را به نحو

دیگری مورد بررسی قرار داد و این مسلک را ترویج نمود که محدودیتهای فکر از ساختار اصلی زبان ناشی است و لذا ما در تفکر به «بن بست» می‌رسیم و آنجا مقامی است که دیگر باید «ساکت شویم» و لب به سخن نگشاییم. آلفرد تارسکی محدودیت فکر را ناشی از مشکلات در مفهوم حقیقت می‌داند نه در ساختار زبان و نیز براساس نظریهٔ گودل معتقد می‌شود که ما هرگز در عالم اندیشه «بن بست» نداریم بلکه «تنگنا» داریم.

در واقع نظریهٔ گودل یأس‌آور نبود. کشف اینکه حقایقی در حساب وجود دارند که بطور صوری «قابل اثبات» نیستند، بدین معنی نیست که حقایقی موجودند که هرگز «قابل شناخت» نیستند، یا کشف عرفانی باید جایگزین اثبات متقاعد کننده‌ای شود. کشف گودل دلالت نمی‌کند که «حدود اجتناب ناپذیری برای عقل انسانی» وجود دارد ولی دلالت می‌کند که منابع عقل انسانی نمی‌تواند کاملاً قالبریزی و دستگاهمند شود و تابحال نیز چنین نشده‌اند. ولی قواعد جدیدی از اثبات برای کشف در انتظار است.(۹۶)

حاصل آنکه نظریه گودل که در حوزهٔ ریاضیات قرار می‌گیرد، مباحثی را در معرفت‌شناسی و فلسفه شناخت برانگیخته است.

۵ـ۴ـ یکی از مباحثی که در فلسفه هستی یا وجودشناسی (متافیزیک) مورد توجه بوده و اصل مسلّم و مقبول فلاسفهٔ وجودشناس است اصل بطلان تسلسل علل و معلولات یا به تعبیر مختصر باطل بودن تسلسل است. اما ممکن است این پرسش با تکیه بر ریاضیات مطرح گردد که آیا ما در سلسلهٔ اعداد که تا بی‌نهایت ادامه دارد با یک مورد نقض برای اصل بطلان تسلسل مواجه نیستیم؟

۵ـ۵ـ هستی‌شناسی ریاضی: برخی برای تفسیر و تبیین طبیعت و اشیای مادی چاره‌ای جز تفسیر ریاضی آن نیافته‌اند و اساساً تصور عادی و متعارف از ماده را منکر شده و متوسل به تصور ریاضی از اشیا شده‌اند. از نظر ایشان ـ که معتقد به جهان کوانتمی هستند ـ جهان کوانتمی جهانی نیست که کسی بتواند آن را تصور کند یا بتواند طرح جامعی از آن ارائه دهد. اصلاً جهان را نمی‌توان براساس اشیای مادی تصور کرد. جهان را فقط بوسیلهٔ یک فکر ریاضی می‌توان فهمید. اجزای بنیادی جهان را ذوات ریاضی تشکیل می‌دهد و حتی آفریدگار جهان نیز خود یک ریاضی‌دان جهانی است.

هایزنبرگ معتقد بود که اجزای نهایی ماده، صورتها و ذوات ریاضی کامل هستند. این صور ریاضی فضایی اشغال نمی‌کنند و اساساً چیزی مادی نیستند. اینها امتدادی در فضا ندارند و تمام پدیده‌ها در واقع نمایشهای چنین ساختارهایی هستند. به تعبیر جینز «جهان بیشتر شبیه به یک اندیشه بزرگ به نظر می‌رسد تا یک ماشین بزرگ. پس آفریدگار، یک ریاضی‌دان بزرگ و آفرینش نوعی فعالیت ریاضی است.»(۹۷)

پی نوشتهای بخش اول

۱ـ علامه طباطبایی، محمدحسین، اصول فلسفه و روش رئالیسم، با پاورقی مرتضی مطهری، دفتر انتشارات اسلامی، سال ؟، ص ۳۶۶ ـ مصباح یزدی، محمد تقی، آموزش فلسفه، ج ۱، سازمان تبلیغات اسلامی، سال ۶۸، ص ۷۲، ۷۴

۲ـ هال، هلزی ـ لویس، ویلیام، تاریخ و فلسفه علم، ترجمه عبدالحسین آذرنگ، سروش، سال ۶۳، ص ۴۰

۳ـ شهریاری، پرویز، هندسه در گذشته و حال، امیرکبیر، سال ۶۵، ص ۱۷۶ و...

بار، استیفن، سرگرمی‌های توپولوژی، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، سال ۶۵

۴ـ تاتون، رنه، تاریخ حساب، ترجمه پرویز شهریاری، امیرکبیر، سال ۶۴

ـ ریاضیات جدید، سال اول متوسطه

ـ بروجردیان، ناصر، منطق ریاضی به زبان ساده، نشر جهاد دانشگاهی، سال ۶۳

۵ـ ابراهیمی دینانی، غلامحسین، وجود رابط و مستقل در فلسفه اسلامی، شرکت سهامی انتشار، سال ۶۲، ص ۱۷۷

۶ـ هاوارد و ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۲، ترجمه وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ص ۳۲۴

۷ـ مجله فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۲، سال ۶۱، ص ۵۹

۸ـ مجله رشد ریاضی، شماره ۲۱، ص ۱۰

۹ـ مجله رشد ریاضی، شماره ۳۱، ص ۸

۱۰ـ مجموعه نویسندگان، فلسفه ریاضی، حسین ضیایی، مرکز ایرانی مطالعهٔ فرهنگها، سال ۵۹، ص ۱۵، ۳۰

۱۱ـ تال و استیوارت، مبانی ریاضیات، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی، مرکز نشر دانشگاهی، سال ۶۹، ص ۱۶۲

۱۲ـ اعوانی، غلامرضا، تعارضات نظریهٔ مجموعه‌ها، مندرج در دومین یادنامه علامه طباطبایی، مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی، سال ۶۳، ص ۴۸

۱۳ـ مبانی ریاضیات، ص ۴۸

۱۴ـ طباطبایی، محمد حسین، نهایةالحکمه، موسسة النشر الاسلامی، سال ۱۳۶۲، ص ۱۳۸

۱۵ـ کریمی، عطاءا...، شناخت، ج ۱، حکمت، سال ۶۱، ص ۳۵

۱۶ـ نهایةالحکمة، المرحلةالسابعه، الفصل الاول و ص ۲۵۶

۱۷ـ نهایةالحکمة، المرحلةالاولی، الفصل الرابع: فی شطر من احکام العدم

۱۸ـ خوانساری، محمد، منطق صوری، ج ۱، آگاه، سال ۶۶، ص ۱۳۵

ـ نهایةالحکمة، المرحله السادسه، ص ۱۱۰

۱۹ـ اصول فلسفه و روش رئالیسم، ص ۲۰۰ـ۲۱۵

۲۰ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۲۷۵

۲۱ـ همان، ص ۳۲۸

۲۲ـ همان، ص ۳۲۰

۲۳ـ همان، ج ۲، ص ۱۸۳

۲۴ـ مصباح یزدی، محمد تقی، دروس فلسفه، موسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی، سال ۶۳، ص ۲۲۸ـ۲۲۹ نیز دیدگاه دیگر ر.ک: شهابی، محمد، رهبر خرد، خیام، سال ۶۴، ص ۶۳

۲۵ـ حایری یزدی، مهدی، آگاهی و گواهی، ترجمه و شرح رسالهٔ تصور و تصدیق صدرالمتالهین شیرازی، موسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، سال ۶۷، ص پانزده

۲۶ـ اصول فلسفه و روش رئالیسم، ص ۲۳۶ـ۲۳۷

۲۷ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۱۷۶، ۱۷۷

ـ مطهری، مرتضی، شرح مبسوط منظومه، ج ۳، حکمت، سال ۶۶، ۲۹۱ـ۳۰۱

۲۸ـ مطهری، مرتضی، نقدی بر مارکسیسم، صدرا، سال ۷۷، ص ۱۹۸

۲۹ـ مارشل، پی یر، تاریخ هندسه، ترجمه حسن صفاری، امیرکبیر، سال؟، ص ۱۲۲

۳۰ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۲۱۰

ـ مصباح یزدی، محمد تقی، ایدئولوژی تطبیقی، ج ۲، در راه حق، سال؟، ص ۱۴۰، ۱۴۲

ـ مصباح یزدی، محمد تقی، ترجمه و شرح برهان شفا، ج ۱، امیرکبیر، سال ۷۳، ص ۱۲۷ـ۱۲۸

۳۱ـ ایدئولوژی تطبیقی، ج ۲، ص ۱۳۱ـ۱۳۲ نیز در مورد نفی تحلیلی بودن قضایای ریاضی ر.ک: شریعتمداری، علی، شناخت، نهضت زنان مسلمان، سال؟، ص ۶۵ـ۶۶ و: شریعتمداری، فلسفه، جهاد دانشگاهی، سال ۶۴، ص ۴۰۸

۳۲ـ حایری یزدی، مهدی، کاوشهای عقل عملی، موسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی، سال ۶۱، ص ۱۲۵ـ۱۲۸، ۱۷۸

ـ حایری یزدی، مهدی، هرم هستی، موسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، سال ۶۱، ص ۱۶۶ـ۱۶۸

ـ امید، مسعود، تأملی در کاوشهای عقل عملی از منظر استاد حایری یزدی، فصلنامه «نامه فلسفه»، شماره ۱۰، سال سوم ۱۳۷۹، ص ۱۱۳ـ۱۱۴

۳۳ـ صدر، محمد باقر، مبانی منطقی استقراء، ترجمه احمد فهری، پیام آزادی، سال؟، ج ۲، ص ۲۶۸، ۲۷۱

۳۴ـ آموزش فلسفه، ج ۲، ص ۲۷ـ۲۸

۳۵ـ برخی از معاصران به تحلیلی بودن قضایای ریاضی اذعان دارند از جمله ز.ک

معلمی، حسن، نگاهی به معرفت‌شناسی در فلسفه اسلامی، پژوهشگاه فرهنگ و اندیشه اسلامی، سال ۷۸، ص ۳۰۸

۳۶ـ هاسپرس، جان، درآمدی بر تحلیل فلسفی، ترجمه سهراب علوی نیا، مرکز ترجمه و نشر کتاب، سال ۷۰، ص ۴۱۴ـ۴۳۶

۳۷ـ هاسپرس، جان، درآمدی بر تحلیل فلسفی، ترجمه موسی اکرمی، طرح نو، سال ۷۹، ص ۳۲۷ـ۳۲۸ (چاپ جدید)

۳۸ـ ایدئولوژی تطبیقی، ج ۲، ص ۱۳۹

ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۱۶۵

۳۹ـ حایری یزدی، مهدی، کاوشهای عقل نظری، امیرکبیر، سال ۶۱، ص ۱۲۸ـ۱۲۹، ۲۰۱

۴۰ـ آموزش فلسفه ج ۱، ص ۲۱۰، ۲۲۱ـ۲۲۲

۴۱ـ غرویان، محسن، آموزش منطق، دارالعلم، سال ۶۸، ص ۱۵۱

ـ قراملکی، فرامرز، منطق (۲)، پیام نور، سال ۶۷، ص ۱۲۳ـ۱۲۴

۴۲ـ کاوشهای عقل عملی، ص ۱۲۸، ۲۰۵، ۲۱۰، ۲۱۳، ۲۲۶

۴۳ـ مصباح یزدی، محمد تقی، نقدی فشرده بر اصول مارکسیسم، در راه حق، سال ۶۵، ص ۹۱ـ۹۲

ـ مبانی منطقی استقراء، ص ۲۷۰

۴۴ـ درآمدی بر تحلیل فلسفی، ترجمه موسی اکرمی، ص ۳۲۶

۴۵ـ نهایة‌الحکمة، ص ۳۲۲

۴۶ـ جعفری، محمد تقی، بررسی و نقد نظریات هیوم در چهار مساله فلسفی، دانشگاه تبریز، سال ۷۸، ص ۱۴

۴۷ـ جعفری، محمد تقی، مقاله «قانون علیت»، یادنامهٔ علامه طباطبایی، ج ۲، دانشگاه تبریز، سال ۷۰، ص ۳۰

۴۸ـ اصول فلسفه و روش رئالیسم، ص ۳۶۵

۴۹ـ کریمی، عطاءالله، فقر تاریخینگری، نشر علامه طباطبایی، سال ۶۹، ص ۲۶۱

۵۰ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۱۰۰

۵۱ـ نبوی، لطف الله، روش‌شناسی علوم قیاسی، نشریهٔ مدرس: شماره ۲، سال ۶۹

ـ عالم زاده، علی اکبر، مبانی هندسه، ج ۱، علمی و فنی، سال ۷۸، فصل دو و سه

۵۲ـ آموزش فلسفه، ج ۲، ص ۱۰۱

۵۳ـ چالمرز، آلن، چیستی علم، ترجمه سعید زیبا کلام، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، سال ۷۴، ص ۱۲

۵۴ـ شاله، فیلیسن، فلسفهٔ علمی، ترجمه یحیی مهدوی، دانشگاه تهران، سال ۴۶، ص ۱۴۲

۵۵ـ همپل، کارل، فلسفهٔ علوم طبیعی، ترجمه حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، سال ۶۹، ص ۶۳ـ۶۷

۵۶ـ پوپر، کارل، منطق اکتشاف علمی، ج ۱، ترجمه سید حسین کمالی، علمی و فرهنگی، سال ۷۰، ص ۴۵ـ۴۷

۵۷ـ برت، ادوین آرتور، مبادی ما بعدالطبیعی علوم نوین، ترجمه عبدالکریم سروش، علمی و فرهنگی، سال ۶۹، ص ۲۰۵

۵۸ـ درآمدی بر تحلیل فلسفی، ص ۲۱۷

ـ فلسفه علمی، ص ۸۲، ۸۶

۵۹ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۱۰۱ـ۱۰۲

۶۰ـ هادوی تهرانی، مهدی، گنجینه خرد، ج ۱، الزهراء، سال ۶۹، ص ۷۶

۶۱ـ قراملکی، احد فرامرز، جایگاه منطق در معرفت بشری، فصلنامه فرهنگ، شماره چهارم و پنجم، سال ۶۸، ص ۳۷۸

۶۲ـ مصحفی، عبدالحسین، منطق و استدلال ریاضی، نشر فاطمی، سال ۶۸، ص ۹

۶۳ـ مصاحب، غلامحسین، مدخل منطق صورت، حکمت، سال ۶۶، ص ۹

۶۴ـ نبوی، لطف ا...، مبانی منطق جدید، سمت، سال ۷۷، ص ۳ـ۴

ـ صانعی، منوچهر، برشد منطق قدیم در منطق جدید، نشریهٔ دانشکده ادبیات دانشگاه شهید بهشتی، سال ۷۰، شماره ۳ـ۴، ص ۱۸۸ـ۱۸۹

۶۵ـ راسل، برتراند، تاریخ فلسفه غرب، ج ۱، ترجمه نجف دریابندری، نشر پرواز، سال ۶۵، ص ۲۹۳

ـ جایگاه منطق در معرفت بشری، ص ۳۷۹

۶۶ـ جایگاه منطق در معرفت بشری، ص ۳۷۸ـ۳۷۹

۶۷ـ افراسیاب پور، علی اکبر، منطق به زبان ساده، نشر فقه، سال ۷۶، ص ۸۲ـ۸۳

68- Copi, I, Introduction on Logic: New York: Macmillan Publishing, 1982, P1

۶۹ـ هاکینگ، یان، خودآموز منطق ریاضی، ترجمه غلامرضا یاسی پور، نشر بینش، سال ۷۰، ص ۱۷

۷۰ـ جفری، ریچارد، قلمرو و مرزهای منطق صوری، ترجمه پرویز پیر، علمی و فرهنگی، سال ۶۶، ص ۸

۷۱ـ مداخل منطق صورت، ص ۲

۷۲ـ موحد، ضیاء، درآمدی به منطق جدید، سازمان انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی، سال ۶۸، ص ۹

۷۳ـ بدوی، عبدالرحمن، المنطق الصوری و الریاضی، وکالة المطبوعات، الکویت، سال ۱۹۸۱، ص ۱۷

ـ کاوشهای عقل نظری، ص ۱۲

۷۴ـ المنطق الصوری و الریاضی، ص ۲۵۰

۷۵ـ جایگاه منطق در معرفت بشری، ص ۳۸۲ـ۳۸۳

۷۶ـ گنجینهٔ خرد، ج ۱، ص ۳۰۲ـ۳۰۴

۷۷ـ مبانی منطق جدید، ص ۵ـ۷

۷۸ـ رشد منطق قدیم در منطق جدید، ص ۱۸۳

۷۹ـ ملکیان، مصطفی، سکولاریسم و حکومت دینی، مندرج در کتاب سنت و سکولاریسم، صراط، سال ۸۱ ص ۲۵۵

۸۰ـ جایگاه منطق در معرفت بشری، ص ۳۸۴ و: کاوشهای عقل نظری، ص ۱۳

۸۱ـ موحد، ضیاء، تمایزات مبنایی منطق قدیم و جدید، فصلنامه نامهٔ مفید، سال ۷۶، شماره ۲، ص ۷۵، ۷۹

۸۲ـ لاریجانی، محمد جواد، دو رساله: سقراط حکیم و اندیشه انسان، آشنایی اجمالی با منطق ریاضی، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، سال ۷۴، ص ۲۳ـ۲۴

۸۳ـ اعتماد، شاپور، دیدگاهها و برهانها، نشر مرکز، سال ۷۵، ص ۲۲۷ـ۲۲۸

۸۴ـ آموزش فلسفه، ج ۱، ص ۱۰۹

۸۵ـ دیدگاهها و برهانها، ص ۱۷۲، ۱۸۳ـ۱۸۴

۸۶ـ وایتسکر، کارل فرد ریش فن، شأن علم، ترجمه حسین معصومی همدانی، کتاب پرواز، سال ۷۹، ص ۷۱

۸۷ـ کاپلستون، فردریک، تاریخ فلسفه، ج ۴ (از دکارت تالایب نیتس)، ترجمه غلامرضا اعوانی، سروش، سال ۸۰، ص ۲۱۱

۸۸ـ کرسون، آندره، فلاسفه بزرگ، ج ۲، ترجمه کاظم عمادی، صفی علیشاه، سال ۶۳، ص ۲۳۷ـ۲۳۸

۸۹ـ مبانی منطقی استقراء، ص ۲۱۳ـ۲۲۴

ـ صدر، محمد باقر، روش نوین در فلسفهٔ اصول دین، ترجمه عباس مخبر دزفولی، صدر، سال ۱۴۰۰، ص ۲۲، ۲۹ـ۳۸

۹۰ـ ر.ک: کتاب مبانی منطقی استقراء

ـ سروش عبدالکریم، تفرج صنع، سروش، سال ۶۶، مقالهٔ «مبانی منطقی استقراء از نظر شهید آیت الله محمد باقر صدر».

ـ هادوی تهرانی، مهدی، معضل استقراء از نگاه شهید صدر، کیهان اندیشه، شماره ۳۶، خرداد و تیر ۱۳۷۰

ـ منطق اکتشاف علمی، فصل هفت و هشت

۹۱ـ علامه طباطبایی، محمد حسین، بررسیهای اسلامی، دفتر تبلیغات اسلامی، سال؟، ص ۹

ـ و ر.ک: حسن زاده آملی، حسن، هزار و یک کلمه، دفتر تبلیغات اسلامی، سال ۷۳، ص ۲۹۹

۹۲ـ کتاب ماه ویژه ادبیات و فلسفه، شماره ۵۸، مرداد ماه سال ۸۱، ص ۲۱

۹۳ـ اینشتین، آلبرت، مقالات علمی، ترجمه محمود مصاحب، نشر پیروز، سال ۶۳، ص ۴۲ـ۴۳

۹۴ـ بارکر، استیفن، فلسفه ریاضی، ترجمه احمد بیرشک، خوارزمی، سال ۴۹، ص ۱۳۱

ـ دیدگاهها و برهانها، ص ۱۸۶

۹۵ـ فلسفه ریاضی، (حسین ضیایی)، ص ۱۶۳

۹۶ـ ناگل، نیوتن، تارسکی، مباحثی در فلسفه ریاضی، محمد اردشیر، مولی، سال ۶۴، ص ۱۹، ۵۹، ۹۳ـ۹۴

ـ دو رساله: سقراط حکیم و اندیشهٔ انسان و آشنایی اجمالی با منطق ریاضی، ص ۳۳ـ۳۴

۹۷ـ گلشنی، مهدی، تحلیلی از دیدگاههای فلسفی فیزیکدانان معاصر، امیرکبیر، سال ۶۹، ص ۴۷، ۱۹۶ـ۱۹۸