

مقایسه‌ای بین سریهای زمانی دو خطی و خطی

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی یک الگوی دو خطی، با مطالعه شبیه سازی نشان می‌دهیم که الگوهای دو خطی ماناوارون پذیر نسبت به الگوهای خطی ماناوارون پذیری که دارای میانگین و واریانس و خود همبستگی یکسانی هستند بهتر عمل می‌کنند. الگوهای خطی $MA(1)$ و $AR(2)$ که توسط باکس و جینکینس به دو سری داده واقعی برازش شده است را با الگوی دو خطی که دارای میانگین و واریانس و ساختمان اتوکوواریانس یکسانی می‌باشد و به این داده‌ها برازش می‌کنیم، مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مانا، وارون‌پذیر، دو خطی، خطی، شبیه سازی

مقدمه

استفاده از الگوی خطی $BOX \& JENKINS$ ۱۹۷۰ تحت عنوان الگوهای $ARIMA$ در بسیاری از زمینه‌ها، مهندسی، فیزیک و اقتصاد به دلیل وجود یک رفتار غیر خطی، مناسب به نظر نمی‌رسد. مثلاً در اقتصاد نرخ واقعی برگشت سرمایه برای

یک سری $\{X_t\}$ با یک الگوی $MA(1)$ تولید می شود که

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$$

که این را می توان به صورت

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon X_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-1} X_{t-1}$$

نوشت که یک الگوی دو خطی است .

WIENER برای اولین بار الگوهای غیر خطی را ارائه می نماید که مشکل عمده این الگوها این است که بسیار عمومی بوده و دارای پارامترهای زیادی است که در عمل با توجه به اینکه تعدادی متناهی مشاهده در دسترس است ، برآورد پارامترها را بی نهایت مشکل می کند .

رده ای از الگوهای غیر خطی که موسوم به الگوهای دو خطی می باشد ابتدا بوسیله BROCKETT و MOHLER در زمینه نظریه کنترل معرفی شد که کاربرد آنها در الگوسازی سریهای زمانی به وسیله SUBBA RAO , PRIESTLEY مورد مطالعه قرار گرفته است .

یک الگوی دو خطی $BL(K,L,Q,P)$ که الگوهای خطی ARMA را نیز شامل می

شود به صورت زیر معرفی می شود :

$$X_t = \sum_{j=1}^j a_j X_{t-j} + \sum_{i=0}^i b_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{K=0}^K \sum_{L=1}^L \beta_{kl} X_{t-k}$$

که در آن ε_t دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل است . چون تعداد پارامترهای این الگوها متناهی است لذا می توانیم آن را به داده ها برازش نمائیم . این الگوها بایستی دو شرط مهم و اساسی مانایی و وارون پذیری را دارا باشند تا بتوان از آن برای پیش بینی استفاده کرد . الگوهای دو خطی

$$X_t = \beta\varepsilon_{t-k} X_{t-j} + \varepsilon_t$$

حائز این شرایط بوده و در مطالعه ای که به عمل خواهد آمد، از این الگو استفاده می کنیم .

برآورد

برای برآورد پارامترهای الگوی فوق با توجه به مانایی و وارون پذیری آن از الگوریتم کمترین مربعات غیر خطی استاندارد استفاده کرده و با در نظر گرفتن امید ریاضی غیر شرطی صفر برای ε_0 و تخمینهای اولیه برای پارامترها با یک روش تکرار عددی از می نیم کردن مجموع مربعات باقیمانده $f(p) = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$ پارامتر β را برآورد می کنیم.

یک مطالعه شبیه سازی

الف - با فرض $\sigma^2 = 1$ و نرمال بودن ε_t و در نظر گرفتن دو مقدار $\beta = 0/6$ و $\beta = 0/5$ ده سری چهار صد مشاهده ای را با استفاده از الگوی دو خطی $X_t = \beta X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ تولید نموده و با توجه به روش برآورد فوق پارامترها را برآورد نموده که نتایج آن مطابق جدولهای (۱) و (۲) است.

جدول (۱)

نتایج برآورد شبیه سازی، $\beta = 0/5$

واریانس باقیمانده	$\hat{\beta}$
0/937	0/498
1/074	0/501
1/030	0/521
1/031	0/495
1/130	0/493
0/881	0/486
1/08	0/509
0/983	0/486
0/854	0/440
1/087	0/510

جدول (۲)
نتایج برآورد شبیه سازی، $\beta = 0/6$

$\hat{\beta}$	واریانس باقیمانده
0/600	1/115
0/601	0/976
0/66	1/022
0/599	0/965
0/600	1/087
0/600	1/100
0/599	0/924
0/599	0/975
0/603	0/920
0/598	0/955

ب - حال الگوی خطی میانگین متحرک مرتبه اول

$$X_t = e_t + ae_{t-1} + m$$

را، که در آن e_t دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل بوده و m میانگین است، در نظر می گیریم که میانگین و واریانس و خود همستگی آن مانند الگوی دو خطی فوق است و شبیه سازی را مانند (الف) از این الگو انجام می دهیم که نتایج مربوطه در جدولهای (۳) و (۴) می باشد.

جدول (۳)

نتایج برآورد شبیه سازی، $\beta = ۰/۶$

$\hat{\alpha}$	\hat{m}	واریانس باقیمانده
۰/۱۴	۰/۷۰۰	۲/۶۳
۰/۱۴	۰/۵۵۹	۲/۰۸
۰/۱۲	۰/۶۲۳	۲/۷۳
۰/۱۶	۰/۶۵۹	۲/۵۱
۰/۰۸	۰/۸۴۱	۲/۹۵
۰/۰۳	۰/۵۹۹	۲/۳۶
۰/۱۶	۰/۵۶۶	۱/۸۴
۰/۲۰	۰/۶۴۰	۲/۰۰
۰/۰۱	۰/۵۴۹	۲/۰۶
۰/۱۹	۰/۶۳۲	۲/۱۵

جدول (۴)

نتایج برآورد شبیه سازی، $\beta = ۰/۵$

\hat{a}	\hat{m}	واریانس باقیمانده
۰/۰۷۱	۰/۴۶۷	۱/۴۴
۰/۱۴۳	۰/۰۴۸۹	۱/۸۱
۰/۰۵۹	۰۵۲۵	۱/۷۵
۰/۰۷۶	۰/۴۱۰	۱/۵۴
۰/۱۴۷	۰/۵۷۱	۱/۸۲
۰/۱۲۳	۰/۴۴۰	۱/۳۲
۰/۱۴۷	۰/۶۵۵	۲/۱۶
۰/۲۶۴	۰/۴۹۹	۱/۴۸
۰/۲۶۴	۰/۴۹۹	۱/۱۲
۰/۱۳۵	۰/۰۵۶۷	۱/۸۱

یک مورد مطالعه و مقایسه

برای بررسی و مقایسه نتایج برازش الگوهای دو خطی و خطی داده های واقعی

WOLFER SUNSPOT SERIES (الف)

IBM DAILY COMMON STOCK CLOSING PRICE SERIES (ب)

را که دارای رفتار خاصی هستند در نظر می گیریم.

نمودار زمانی داده های (الف) که در شکل (۱) آمده است عدم تقارن شدیدی را نشان می دهد. با بررسیهای مقدماتی معلوم می شود که این سری تقریباً ناماناست و برای حصول مانایی یک تبدیل ریشه دوم مناسب است. همبستگی نگار این داده ها که در شکل (۲) ملاحظه می شود، رفتار چرخه ای را نشان میدهد. شکل های (۳) و (۴) به ترتیب دوره نگار و برآورد طیف را بر مبنای " PAR ZEN WINDOW " و نقطه قطع $M = 60$ نشان می دهد که قله بزرگ در فرکانس $\omega = \frac{51\pi}{N}$ به چرخه تقریباً ۱۱ سال مربوط می شود.

نمودار زمانی داده های (ب) را در شکل (۵) و همبستگی نگار آن را در شکل (۶) می بینیم که نمودار زمانی این داده ها عدم تقارن را نشان می دهد و کاهش تدریجی ضرایب خود همبستگی برآورد شده دال بر نامانایی این داده ها است که با کس و جنکنیس به تفاضلهای مرتبه اول این داده ها یعنی سری (ب) الگوی

$$\nabla X_t = \varepsilon_t + 0.09 \varepsilon_{t-1} \quad (1)$$

که در آن $\{\varepsilon_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 است را برازش نموده و واریانس باقیمانده $\text{Var}(\varepsilon_t) = 52/2$ را بدست می آورد.

حال اگر به این داده ها الگوی دو خطی

$$X_t = 0.02 X_{t-1} e_{t-1} + e_t \quad (2)$$

که در آن $\{e_t\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس

σ_{ε}^2 است را برازش نمائیم واریانس باقیمانده $23/5 = \text{Var}(e_t) = \sigma_{\varepsilon}^2$ به دست می‌آید که در این صورت واریانس باقیمانده کاهش قابل ملاحظه را نشان می‌دهد.

باکس و جینکس به داده‌های (الف) الگوی اتورگرسیو مرتبه دوم

$$X_t = 14.70 + 1.42 X_{t-1} - 0.73 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (3)$$

را برازش نموده است و واریانس باقیمانده $\text{Var}(\varepsilon_t) = 228$ را به دست می‌آورد،

در حالی که ما الگوی دو خطی را به این داده‌ها برازش نموده و واریانس باقیمانده

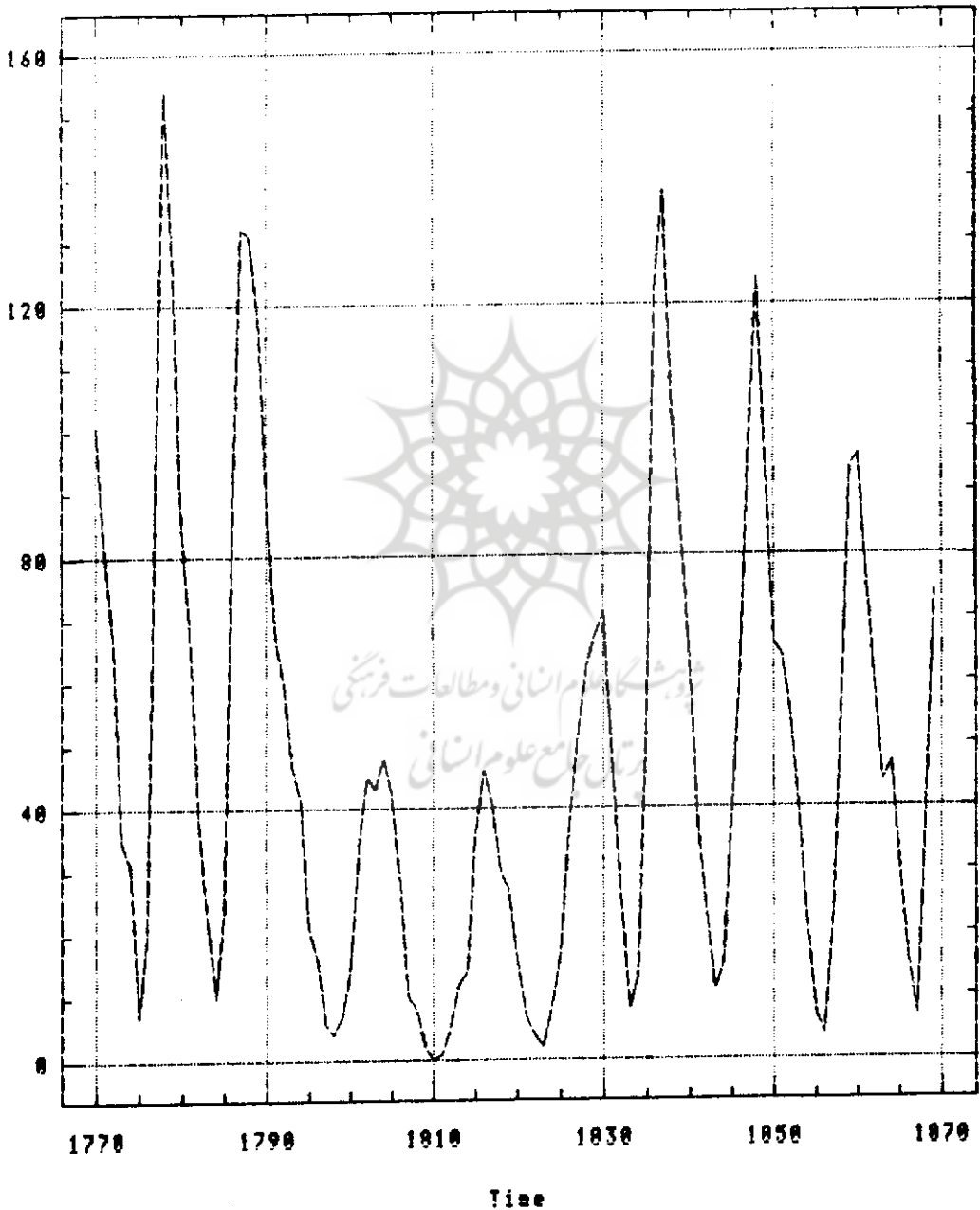
$$X_t = -0.0222 X_{t-2} + 0.202 X_{t-1} + e_t \quad (4)$$

۱۹۷ به دست می‌آید که در اینجا نیز $\text{Var}(e_t)$ نسبت به $\text{Var}(\varepsilon_t)$ کاهش را نشان می‌دهد. برای پیش بینی یک مرحله بعد برای الگوی خطی (۳)، $632/4$ و برای الگوی دو خطی (۴)، $471/9$ به دست آمده است که میانگین مربع خطای پیش بینی با استفاده از الگوی دو خطی کاهش قابل ملاحظه را نسبت به الگوی خطی باکس و جینکس نشان می‌دهد. به همین ترتیب برای پیش بینی ۱۵ روز دیگر داده‌های (ب) از الگوهای (۱) و (۲) استفاده کردیم و میانگین مربع خطای پیش بینی یک مرحله بعد برای الگوی (۱)، $44/68 = \text{MSE}(e_t)$ و برای الگوی (۲) $40/10 = \text{MSE}(e_t)$ به دست آمد که در اینجا نیز الگوی دو خطی، MSE را کاهش می‌دهد.

نتیجه‌گیری

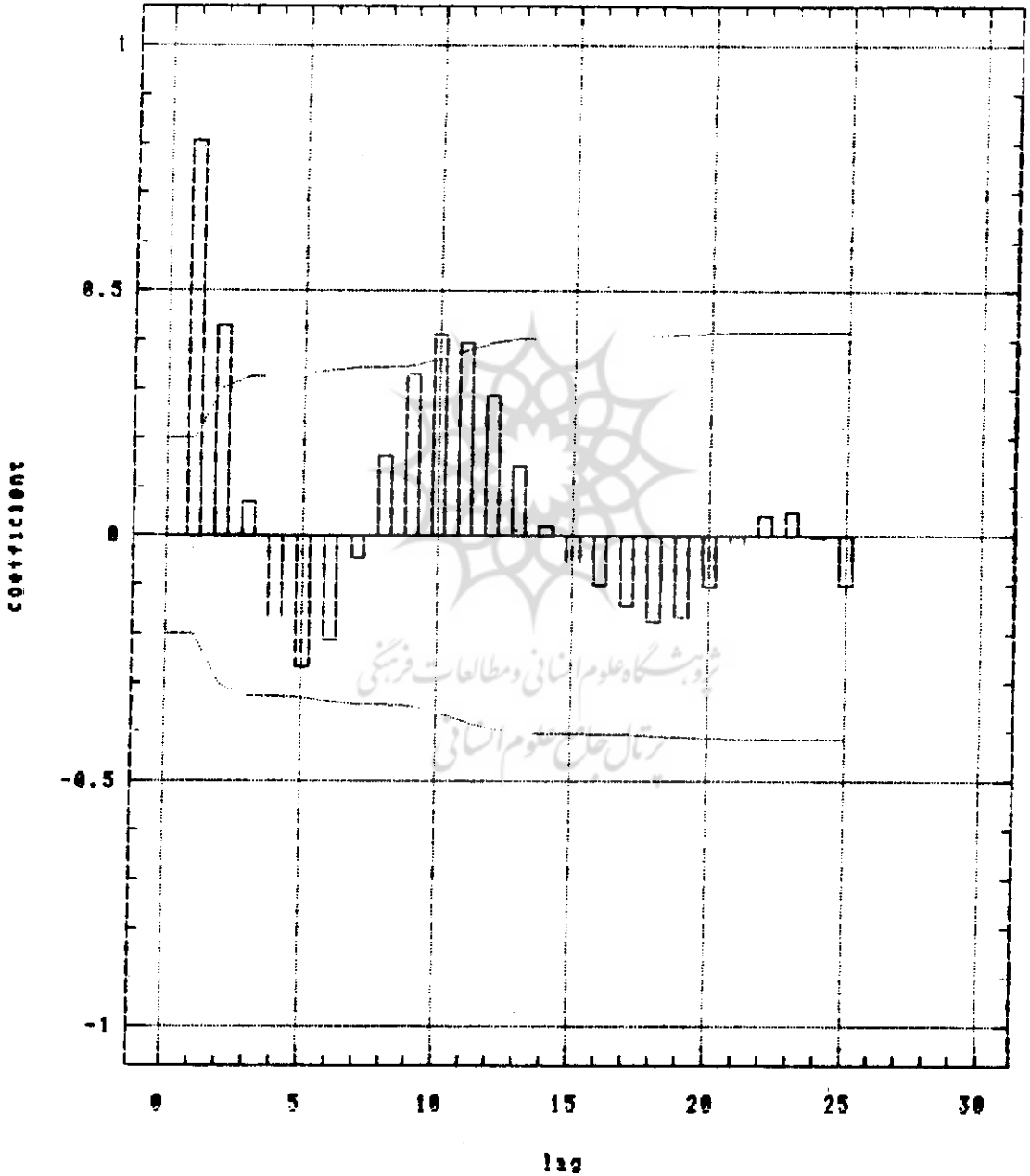
از مطالعه شبیه سازی که به عمل آمد معلوم می‌شود که الگوهای دو خطی مانا و وارون پذیر به ویژه در مواردی که داده‌ها عدم تقارن و رفتاری غیر خطی را نشان می‌دهند نسبت به الگوهای خطی مانا و وارون پذیر با میانگین و واریانس و تابع خود همستگی یکسان برازش بهتری را می‌دهند.

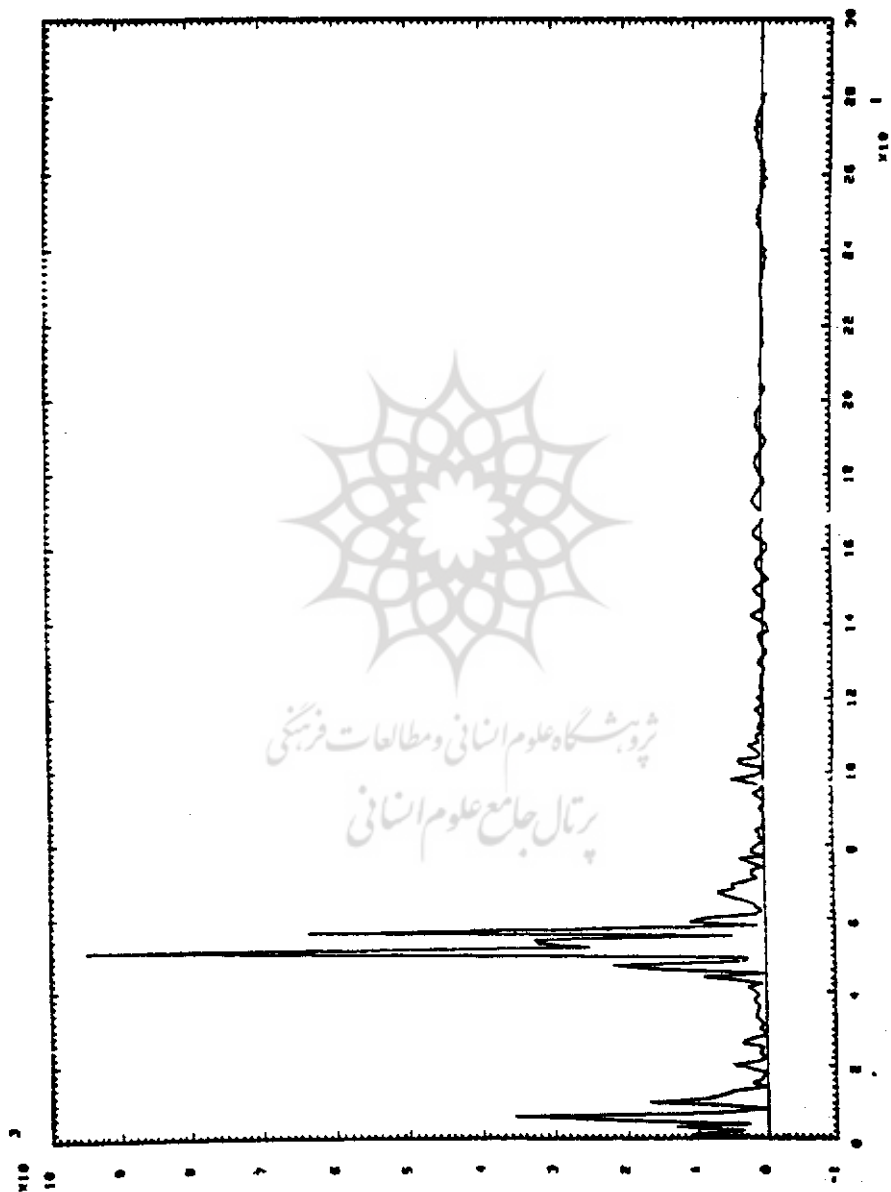
Time Sequence Plot



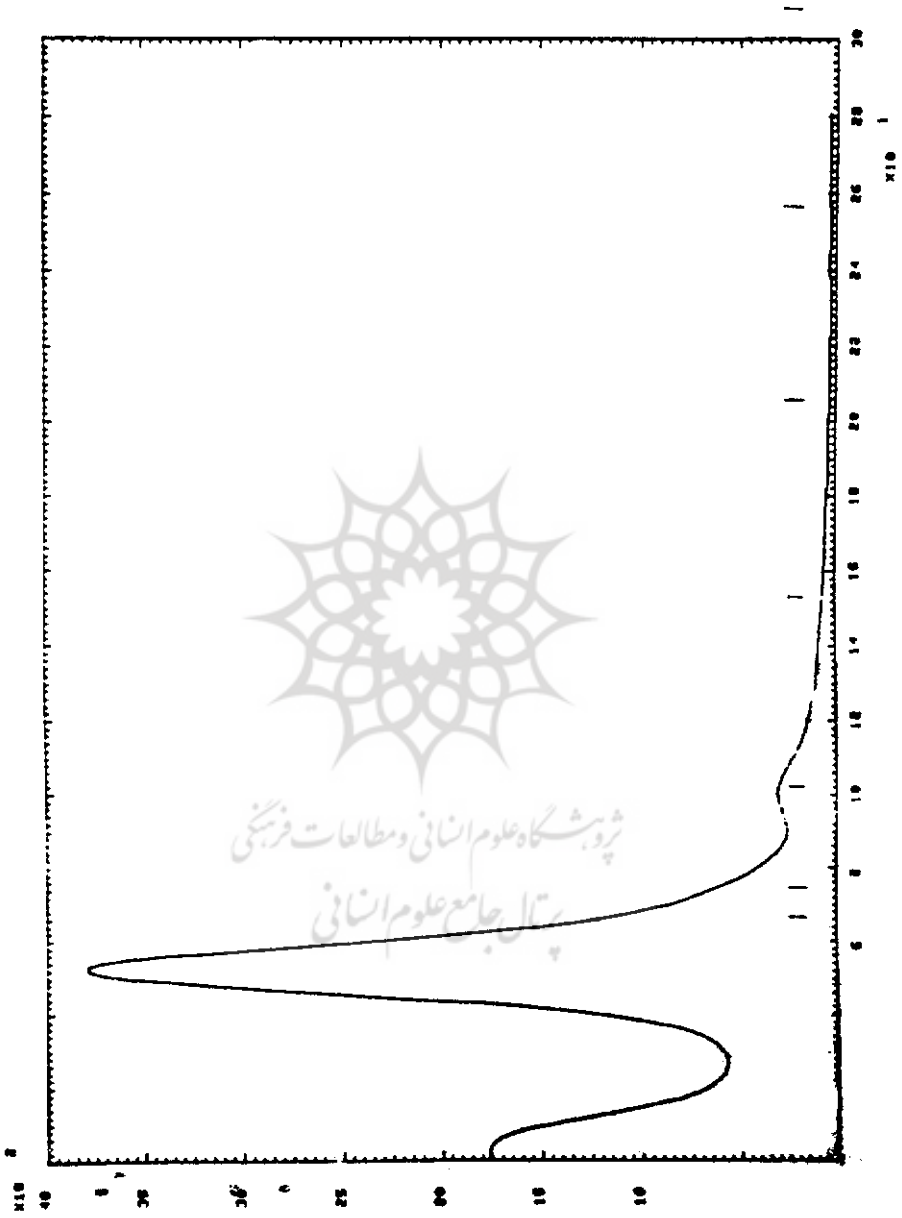
نمودار (۱)

Estimated Autocorrelations



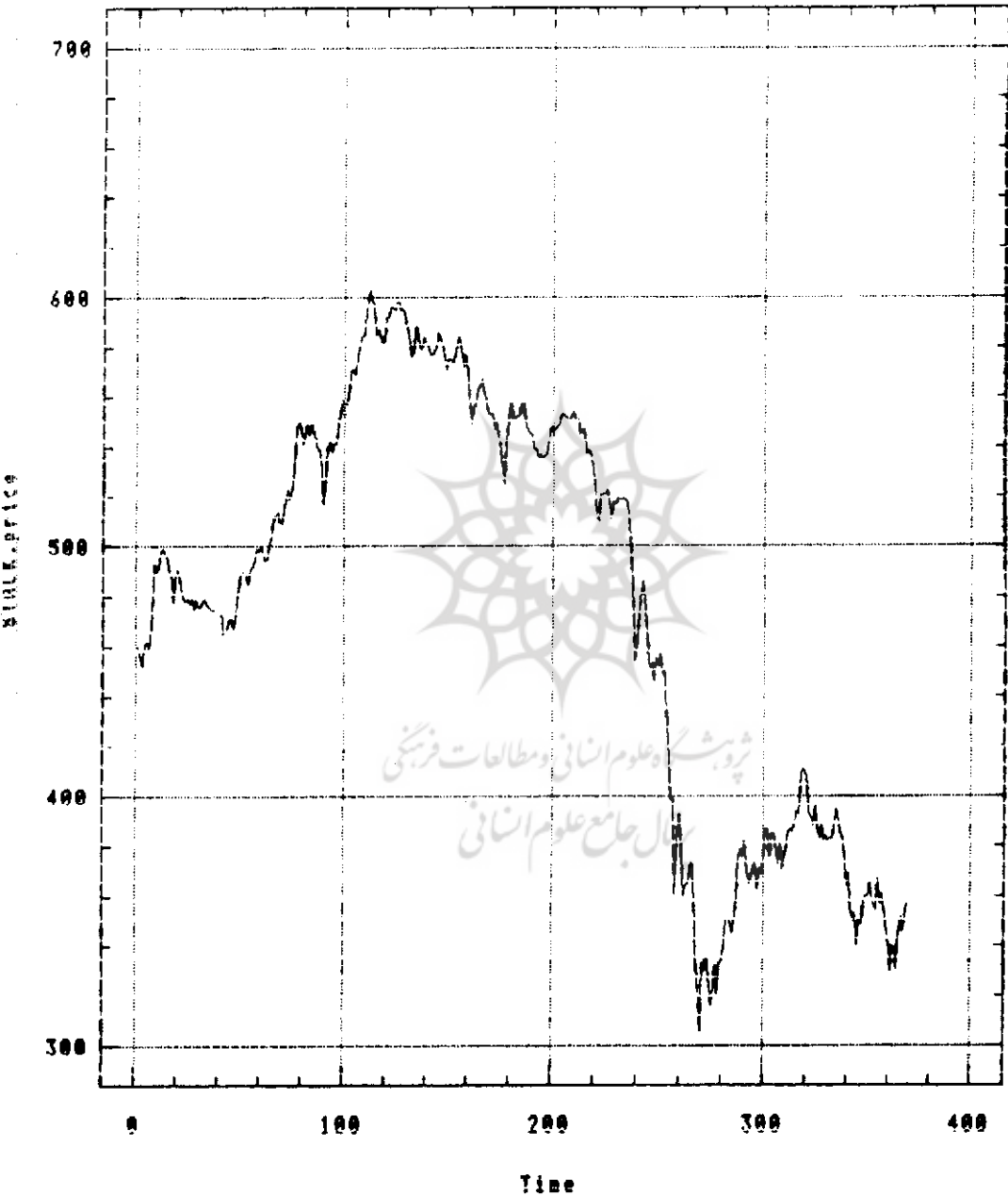


نمودار (۳)



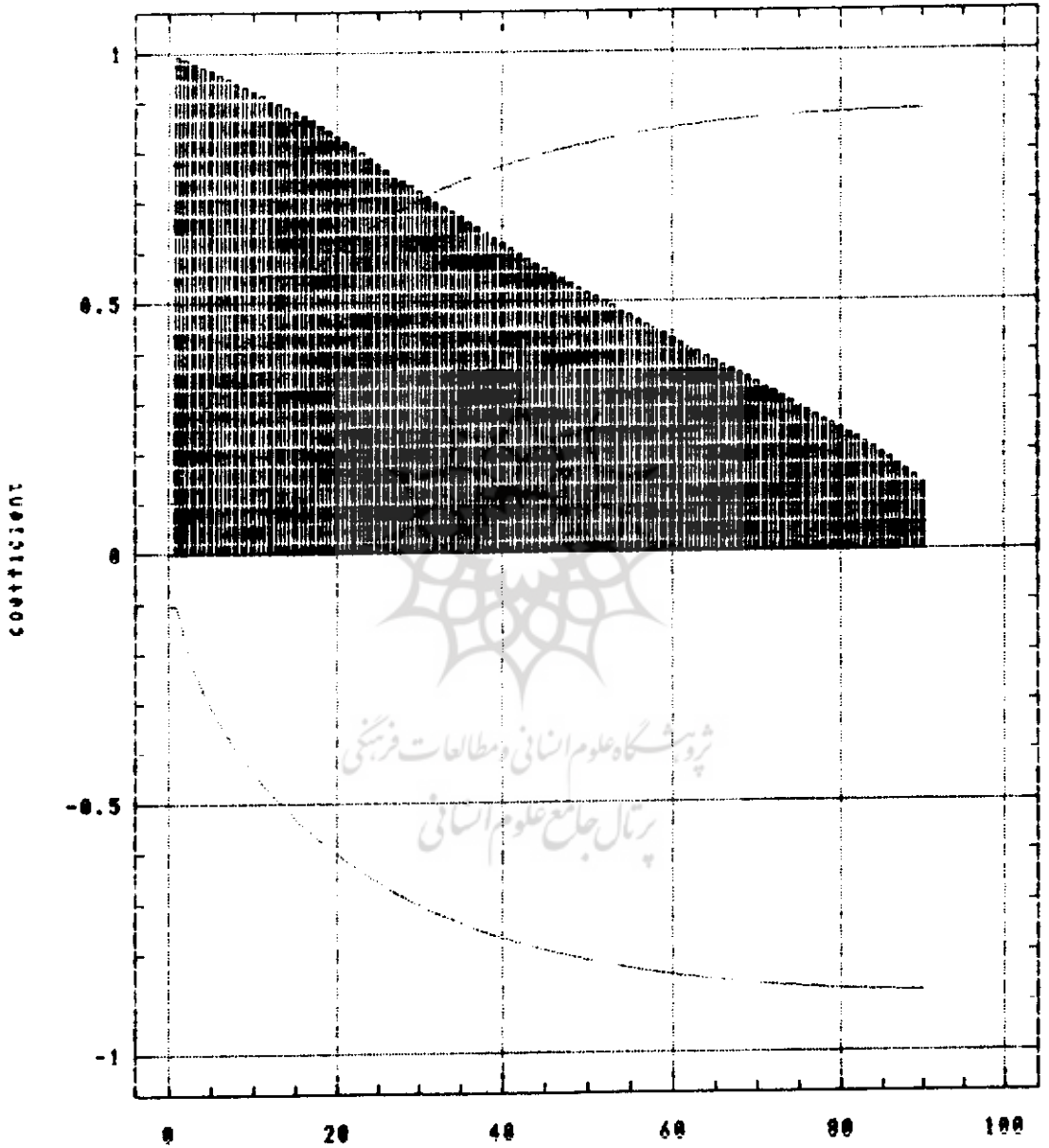
نمودار (۴)

Time Sequence Plot



نمودار (۵)

Estimated Autocorrelations



lag

نمودار (۶)

فهرست منابع

- 1 - Box , G.E.P. and G.M.yenkins (1970) , Time series analysis forecasting and control , Holden day , san francisco .
- 2 - Brockett , R.W.(1976) . Volterra series Geometric Theory , Automatica 12 , 167-126 .
- 3 - Mohler, R . R (1973) Bilinear control processes , Academic press: New York and London .
- 4 - Priestley , M.B. (1978) , Non-Linear Model in Time series Analysis The statistician , 27 , 159-176 .
- 5 - Subba Rao T(1977), on The Estimation of Bilinear Time series , Models , Bull , Inst . Internal statist , 41 .
- 6 - Wiener , N . (1958) , NoN - Linear Problems in Random Theory , M.I.T . Press .