دکتر حامدرضا طارقیان*

مقایسه عملکرد چند روش در جایابی انبار

چکیده

روشهای مرکز ثقل ، میانه و تحلیلی عددی از جمله روشهای شناخته شده‌ای هستند که در تعیین مکان مناسب انبار در مسائل مربوط به شبکه‌های توزیع مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله نتایج چند آزمون را که برای به نمایش گذاشتن خصوصیات عملکردی این روشها طراحی و اجرا کرده‌ایم، گزارش می‌کنیم. نتایج این آزمونها نیز بخوبی نشان می‌دهند که تحت شرایط خاصی عملکرد دو روش مرکز ثقل و میانه در مقایسه با روش بهینهٔ تحلیلی عددی، دارای خطای شایان توجهی است.

کلمات کلیدی

مکان یابی ، مدیریت تولید، طرحهای استقرار

مقدمه

بسادگی می توان نشان داد که **روش مرکز ثقل** (۱) الزاماً جواب بهینه را در . در مسألهٔ جایابی انبار به دست نمی‌دهد. [۱] در این مقاله این پدیده را مورد بررسی بیشتر

---

* - استاد یار دانشکده علوم دانشگاه فردوسی

1- Centre of Gravity Method - CG

قرار داده و سعی می‌کنیم تا عملکرد روش مرکز ثقل را روشنتر نماییم.

انباری را در نظر می‌گیریم که در نقطهٔ (x_o , y_o) از یک صفحهٔ مفروض قرار دارد. کالای مورد نیاز n متقاضی که مختصات مکانی هر یک از آنها نیز در صفحه مشخص است (x_1 , y_1) ($i = 1 , 2 ,..., n$) باید از این انبار به محل هر یک از آنها حمل گردد. چنانچه هزینهٔ حمل کالای مورد نیاز هر متقاضی را به صورت خطی متناسب با میزان نیاز هر یک از آنها در نظر بگیریم، و چنانچه مسافت بین هر متقاضی و انبار را نیز مسافت هندسی[1] منظور کنیم، آنگاه هزینهٔ حمل کالای مورد نیاز متقاضیان را می‌توانیم از رابطهٔ زیر به دست آوریم :

$$H = \Sigma \alpha_1 w_1 d_{o1} \qquad (۱)$$

که در آن :

$w_1 =$ وزن (مقدار) کالای مورد نیاز متقاضی i

$d_{o1} = \sqrt{[(x_o - x_1)^2] + (y_o - y_1)^2]}$ مسافت بین انبار و متقاضی i

$\alpha_1 =$ هزینهٔ حمل یک واحد بار به متقاضی i در ازای یک واحد مسافت

چون تابع (۱) محدب است [۱] ، لذا می‌توانیم این مسأله را به کمک یک روش تکراری که در هر نوبت تکرار آن، مکان استقرار انبار نسبت به مکان محاسبه شدهٔ قبلی بهسازی می‌گردد، حل کنیم. بدیهی است که این فرایند را تا تعیین مکان بهینهٔ انبار ادامه می‌دهیم (**روش تحلیلی عددی**[2]). برای آن که مکان بهسازی شدهٔ انبار را به دست آوریم، ابتدا از تابع (۱) نسبت به x_o و y_o مشتق جزیی می‌گیریم. ضمناً فرض می‌کنیم $(x_o , y_o) \neq (x_1 , y_1)$ برای $i = 1,2 ,..., n$ لذا داریم :

$$\frac{aH}{ax_o} = \Sigma \alpha_1 w_1 (x_o - x_1) / d_1 \qquad (۲)$$

1- Eucledian Distance 2- Numerical - Analytical Method

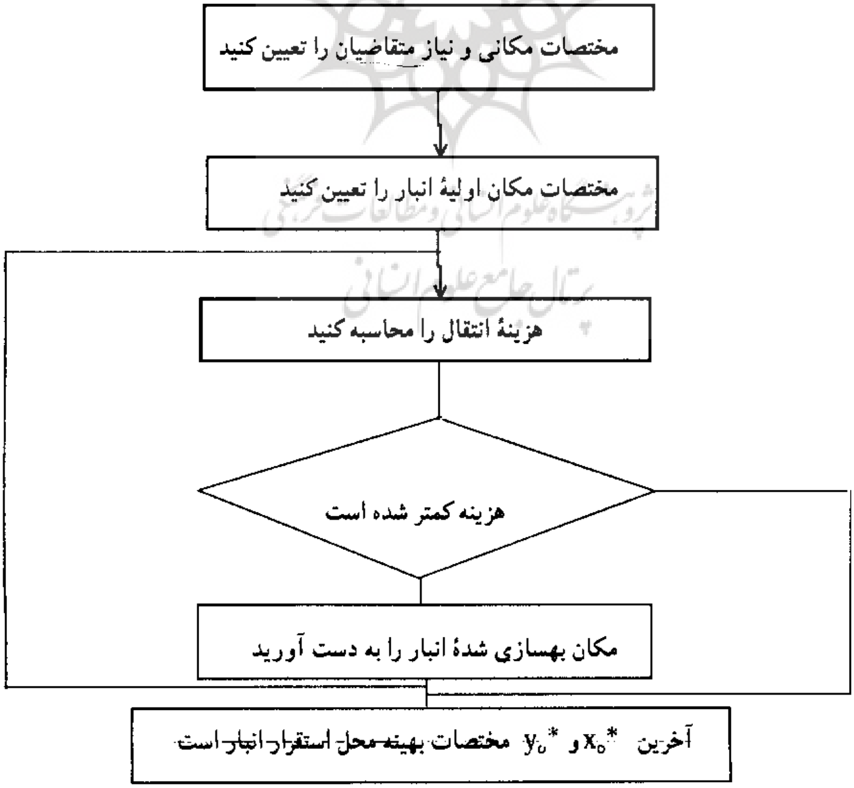
$$\frac{aH}{ay_o} = \sum \alpha_1 \ w_1 \ (y_o - y_1) \ / \ d_1 \qquad (۳)$$

سپس با استفاده از مکان اختیاری اولیهٔ انبار (x_o , y_o)، معادلات (۲) و (۳) را حل و جوابهای بهینه ساز زیر را به دست می آوریم.

$$x_o^* = \frac{\sum \alpha_1 \ w_1 \ X_1 \ / \ d_1}{\sum \alpha_1 \ w_1 \ / \ d_1} \qquad y_o^* = \frac{\sum \alpha_1 \ w_1 \ y_1 \ / \ d_1}{\sum \alpha_1 \ w_1 \ / \ d_1}$$

حال مختصات به دست آمده برای انبار را در (۱) جایگزین نموده و هزینهٔ حمل کالا از مکان جدید انبار (x_o^* , y_o^*) به متقاضیان را محاسبه می‌کنیم. اگر هزینهٔ حمل از مکان جدید نسبت به هزینهٔ حمل از مکان قبلی به میزان شایان توجهی کمتر باشد، آنگاه مجدداً از (۱) نسبت به x_o و y_o مشتق جزیی گرفته و مراحل فوق ار تکرار می‌کنیم. در غیر این صورت تکرار را متوقف و آخرین مختصات به دست آمده را به عنوان مختصات بهینه برای استقرار انبار در نظر می‌گیریم. چگونگی عملکرد این روش تکراری را در شکل (۱) نشان داده‌ایم.

شکل ۱- نمودار گردشی روش تکراری



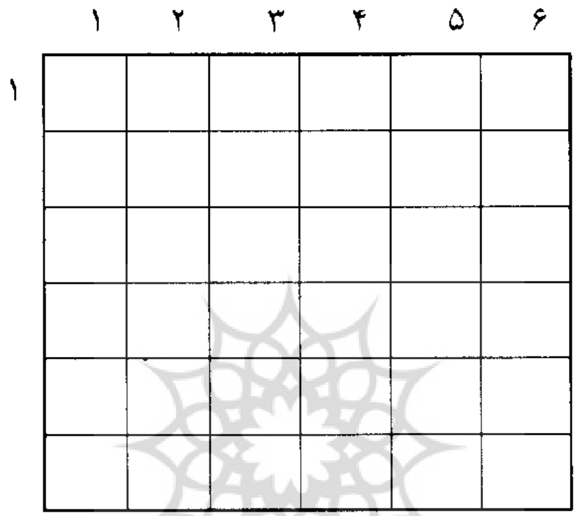
روش دیگری که غالباً برای حل این مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش مرکز ثقل است. در مقایسه با روش تکراری فوق، روش مرکز ثقل از سادگی و سهولت محاسبات برخوردار است. البته ممکن است در شرایط خاصی جواب حاصله از بکارگیری روش مرکز ثقل نسبت به جواب بهینه حاصل از روش تکراری تفاوت شایان توجهی داشته باشد. **ورجین و راجرز** بیان می‌دارند که: «به طور کلی، هنگامی که بین کالای مورد نیاز متقاضیان از نظر وزنی پراکندگی قابل توجهی وجود ندارد، روش مرکز ثقل جوابهایی را به دست می‌دهد که کاملاً نزدیک به جواب بهینه‌اند. بر عکس هنگامی که اختلاف میزان کالای مورد نیاز متقاضیان از نظر وزنی قابل توجه است میزان خطا در روش مرکز ثقل بسرعت افزایش می‌یابد [۱].» البته باید اذعان داشت که در این رابطه نه تنها پراکندگی میزان بار مورد نیاز هر متقاضی مهم است، بلکه چگونگی قرار گرفتن متقاضیان نسبت به یکدیگر نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در بخش بعدی چگونگی تأثیر این دو عامل بر عملکرد روش مرکز ثقل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

چگونگی قرارگرفتن مکان متقاضیان

به زعم ورجین و راجرز، وقتی میزان کالای مورد نیاز هر متقاضی یکسان است روش مرکز ثقل به شرطی جواب بهینه را به دست می‌دهد که پراکندگی مکانی کمتری بیه متقاضیان وجود داشته باشد. برای بررسی بیشتر تأثیر این شرط آزمون زیر را طراحی و اجرا می‌کنیم.

فرض کنید هدف تعیین مکانی برای یک انبار در یک منطقهٔ چهارگوش به قسمی است که بتوان کالای مورد نیاز n متقاضی را از آن مکان با حداقل هزینه حمل نمود. ابتدا این منطقه را به $n \times n$ مربع مساوی تقسیم کرده و هر یک از مربعها را یک ناحیه می‌نامیم. سپس مختصات مکانی n متقاضی را در ناحیه ۱.۱ به طور

تصادفی تعیین می‌کنیم. (شکل ۲ را ببینید).



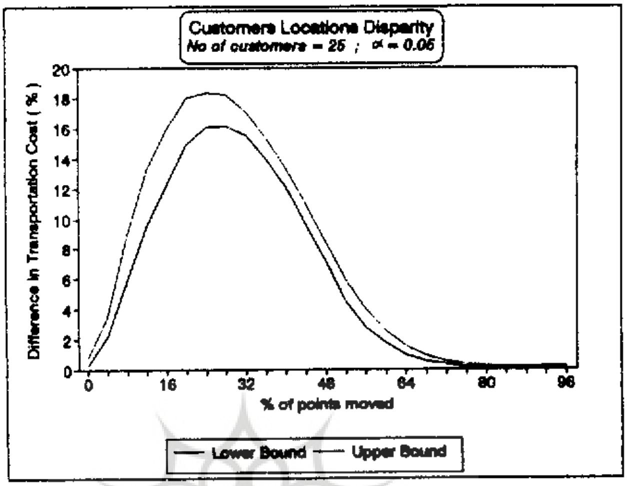
شکل ۲ - منطقهٔ تحت بررسی

از n نقطهٔ مستقر در ناحیهٔ ۱.۱ (توجه داریم که هر نقطه بیانگر مکان یک متقاضی در منطقه می‌باشد)، یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب کرده و در مکان مشابهی از یکی از نواحی خالی منطقه (ناحیه‌ای که هنوز نقطه‌ای به آن منتقل نشده‌است) که آن هم به تصادف انتخاب گردیده، قرار می‌دهیم. انتقال نقاط را از ناحیهٔ ۱.۱ به سایر نواحی خالی منتقه تا زمانی که هر یک از نواحی دارای حداکثر یک نقطه باشد، ادامه می‌دهیم. در هر مرحله جواب بهینه و جواب حاصل از روش مرکز ثقل را تعیین و هزینهٔ حمل کالای مورد نیاز متقاضیان را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای این منظور یک برنامهٔ کامپیوتری طراحی می‌کنیم تا علاوه بر انجام محاسبات لازم برای تعیین محل مناسب انبار، مکان متقاضیان و محل استقرار انبار را نیز به صورت گرافیکی نشان دهد. از آنجایی که هدف ما به نمایش

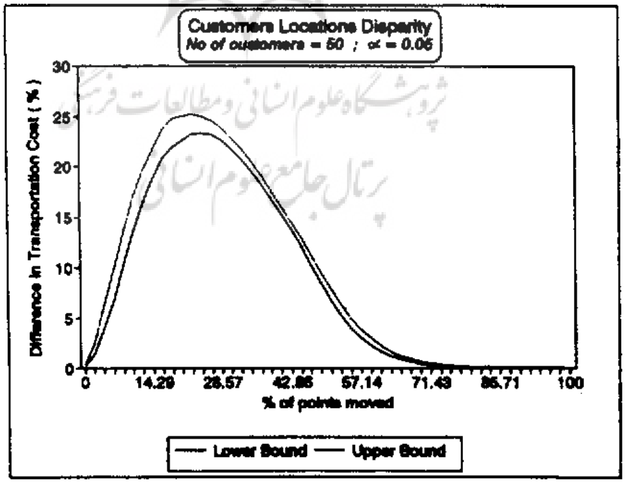
گذاشتن خصوصیات عملکردی روشهای مرکز ثقل، میانه و تحلیلی عددی است، نشان دادن مکان متقاضیان و محل محاسبه شده برای انبار در هر نوبت که نقطه‌ای را به ناحیهٔ جدید منتقل می‌کنیم، می‌تواند به درک بیشتر عملکرد این روشها کمک نماید.

آزمون تأثیر مکان متقاضیان بر روش مرکز ثقل را در ازای مقادیر مختلف n (تعداد متقاضی) برای دفعات متعددی تکرار می‌کنیم. به کمک روشهای معمول آماری تعداد دفعات تکرار را محاسبه می‌کنیم [۳]. محاسبات نشان می‌دهند که برای ۱ درصد خطای بر آورد در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ نیاز به ۳۰ اجرای مستقل می‌باشد. در شکلهای ۳ تا ۷ و همچنین ۹ و ۱۰، بازده اطمینان آماری ($\alpha = ۰/۰۵$) منحنی تغییرات هزینهٔ روشهای غیر بهینه نسبت به روش بهینه نشان داده شده‌است.

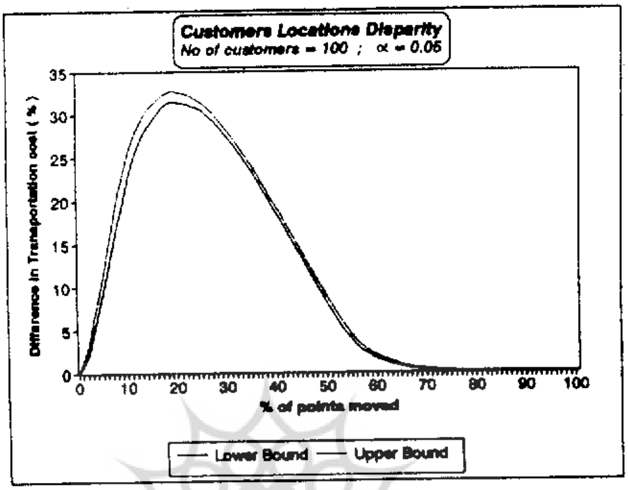
نتایج حاصل از ۳۰ اجرای مستقل در ازای ۲۵، ۴۹ و ۱۰۰ متقاضی بترتیب در شکلهای ۳، ۴ و ۵ آمده است. تشابه نتایج حاصل از این اجراها شایان توجه است. همزمان با انتقال نقاط از ناحیه 1.1 به سایر نواحی، مشاهده می‌کنیم که اختلاف هزینهٔ حمل کالای مورد نیاز متقاضیان در دو روش تقریباً از صفر شروع شده و به بیشترین مقدار خود می‌رسد و پس از آن اختلاف هزینه سیر نزولی به خود می‌گیرد. دلیل این پدیده آن است که هر چه تعداد نقاط منتقل شده بیشتر می‌شوند، چگونگی قرار گرفتن آنها نسبت به یکدیگر حالت اولیه را ، هر چند در مقیاس بزرگتر، به خود می‌گیرد. بیشترین اختلاف هزینهٔ مشاهده شده هنگامی است که به طور متوسط یک پنجم از نقاط به نواحی منتقل شده‌اند. شایان ذکر است که دامنهٔ این اختلاف هزینهٔ بین ۱۶ تا ۳۰ درصد نقاط منتقل شده، متغیر است. بزرگترین اختلاف هزینه مشاهده شده در این اجراها مربوط به مسأله‌ای است که در آن n=۱۰۰، و هزینهٔ انتقال حاصل از روش مرکز ثقل ۳۳ درصد بیشتر از هزینهٔ انتقال در روش بهینه است. به طور کلی نتایج نشان می‌دهند که تفاوت هزینه‌ها در مسائلی که دارای نقاط بیشتری هستند، فاحشتر است.



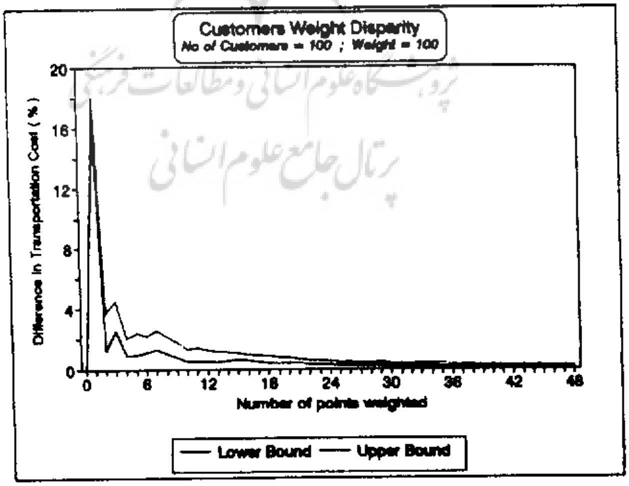
شکل ۳ - پراکندگی مکانی متقاضیان (۲۵ = n).



شکل ۴ - پراکندگی مکانی متقاضیان (۴۹ = n).



شکل ۵ - پراکندگی مکانی متقاضیان (n = ۱۰۰).



شکل ۶ - پراکندگی وزنی بین نقاط، انتخاب نقاط تصادفی است (n = ۱۰۰).

نیاز نسبی هر متقاضی

برای بررسی بیشتر تأثیر یکنواختی وزن کالای مورد نیاز متقاضیان دو آزمون را به شرح زیر طراحی و باکمک برنامه‌های کامپیوتری که برای همین منظور طراحی کرده‌ایم، به اجرا می‌گذاریم. در آزمون اول نقاط را به طور یکنواخت در منطقه مستقر می‌کنیم.

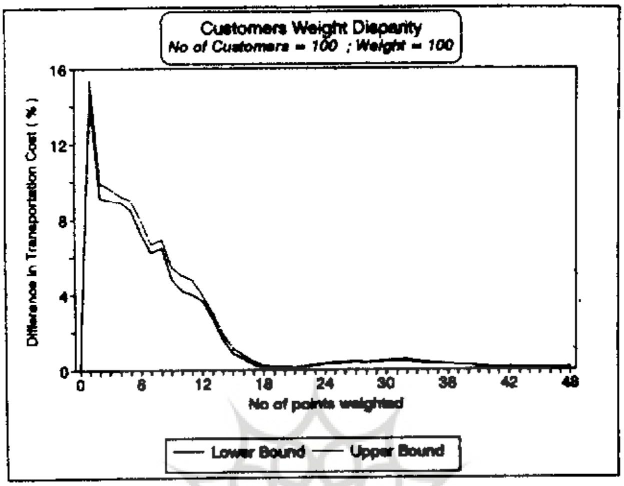
برای این منظور وضعیت نقاط پس از انتقال کامل در آزمون ۱ را در نظر می‌گیریم. میزان کالای مورد نیاز متقاضیان را نیز در ابتدا یکسان در نظر می‌گیریم ($w_i = W = ۱/۰ ,\forall i$). از بین نقاط، نقطه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و فرض می‌کنیم که کالای مورد نیاز آن مثلاً n واحد باشد. این فرایند را تا زمانی که یک بار دیگر کلیهٔ نقاط دارای کالای مورد نیاز مساوی شوند ($w_i = n \ , \forall i$)، ادامه می‌دهیم. مشابه آزمون قبلی، در هر مرحله، جواب بهینه و جواب مرکز ثقل را تعیین و هزینه‌های حمل کالا در هر روش را محاسبه و مقایسه می‌نماییم. نتایج این آزمون نشان می‌دهند که بیشترین اختلاف هزینهٔ حمل هنگامی صورت می‌گیرد که نیاز اولین نقطه را به n واحد تغییر می‌دهیم. متعاقباً این اختلاف هزینه سیر نزولی به خود می‌گیرد (شکل ۶ را ببینید).

در آزمون دوم برای تخصیص کالای مورد نیاز هر نقطه، این نقاط را براساس یک نظم خاص در نظر می‌گیریم. مثلاً ابتدا دورترین نقطه (نسبت به مرکز صفحه) را انتخاب و نقاط بعدی را با توجه به مسافت بین آخرین نقطه‌ای که کالای مورد نیاز آن n واحد در نظرگرفته شده با سایر نقاط، انتخاب می‌کنیم. به عبارت دیگر، نقطهٔ بعدی نزدیکترین نقطه به نقطه‌ای است که اخیراً کالای مورد نیازش n واحد در نظر گرفته شده است. نتایج مشابهی در مورد مسائل کوچک و بزرگ حاصل می‌آید. به‌طور کلی هر چه میزان نیاز متقاضی رابزرگتر در نظر می‌گیریم اختلاف بین

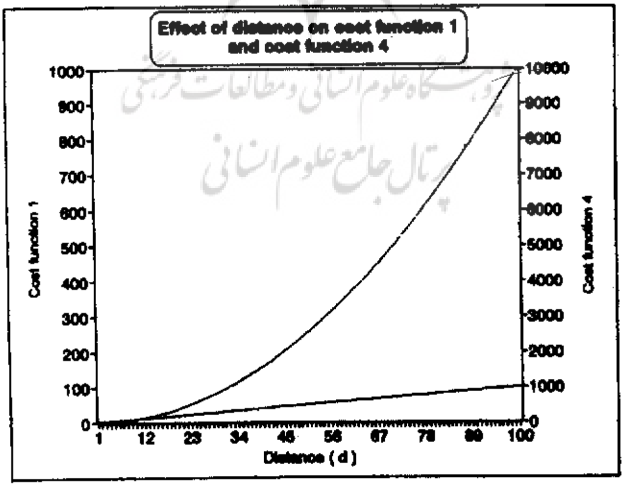
هزینه‌های حمل کالا نیز فاحشتر است. نتایج حاصل از این آزمون اظهارات ورجین و راجرز را تأیید می‌کنند (شکل ۷ را ببینید).

نتایج حاصل از آزمونهای فوق نشان می‌دهند که استفاده از روش مرکز ثقل برای حل مسألهٔ جایابی انبار و در شرایطی که متقاضیان دارای میزان کالای مورد نیاز غیر یکنواخت بوده و یا از نظر مکان استقرار در منطقه دارای گروه بندی نا متقارن باشند، خطای قابل توجهی را ایجاد می‌نماید. ضمناً مشاهدات ما نشان می‌دهند که میزان خطا نسبت به آنچه ورجین و راجرز اظهار کرده‌اند بیشتر است .

دلیل اختلاف هزینهٔ حمل کالا در روشهای بهینه و مرکز ثقل، آن است که عملاً در روش مرکز ثقل فرضی مبنی بر متناسب بودن هزینهٔ حمل کالای مورد نیاز متقاضی با مجذور مسافت بین انبار و متقاضی مستتر است. این واقعیت را براحتی می‌توان با کمینه سازی چنین تابعی نشان داد. تابع هزینهٔ زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۷ -پراکندگی وزنی بین نقاط، انتخاب بر مبنای فاصله است (n = ۱۰۰).



شکل ۸ - تأثیر فاصله بر روی توابع هزینه ۱ و ۴

$$H = \sum \alpha_1 w_1 d^{2}_{01} \quad (۴)$$

چنانچه قرار دهیم : $\frac{aH}{ax_o} = ۰$ ، $\frac{aH}{ay_o} = ۰$ ، و مقادیر x_o و y_o را به دست آوریم، آنگاه داریم :

$$x_o = \frac{\sum w_1 X_1 \alpha_1}{\sum w_1 \alpha_1} \quad (۵)$$

$$y_o = \frac{\sum w_1 y_1 \alpha_1}{\sum w_1 \alpha_1} \quad (۶)$$

در حقیقت معادلات (۵) و (۶) ، همان جوابهای حاصل از بکارگیری روش مرکز ثقل هستند. شکل (۸) منحنی معادلات (۱) و (۴) را نشان می‌دهد. روشن است که روش مرکز ثقل تأکید بیشتر را بر روی متقاضی دورتر از انبار می‌گذارد و نه بر روی متقاضی که به میزان کالای بیشتری از انبار، نیازمند است. این امر تأیید دیگری بر اظهارات ورجین و راجوز است که اظهار نموده‌اند: «نقش میزان پراکندگی کالای مورد نیاز متقاضیان در بهینه سازی تابع هزینه (۱) در مقایسه با بهینه سازی تابع هزینه (۴) بمراتب بیشتر است»

روش میانه(۱) روش دیگری در تعیین محل انبار است [۴]. این روش مکان بهینهٔ انبار را در مسائل مسافت مستقیم(۲) به دست می‌دهد. شایان ذکر است که در روش میانه بر خلاف روش مرکز ثقل، مکان بهینه انبار الزاماً منحصر به فرد نیست. روش میانه را نیز مثل روش مرکز ثقل تحت آزمونهای قبل مورد بررسی بیشتر قرار می‌دهیم. پس از اجرای آزمون اول در ازای ۴۰۰، ۲۲۵، ۱۰۰، ۴۹، ۲۵، ۱۶ = n ،

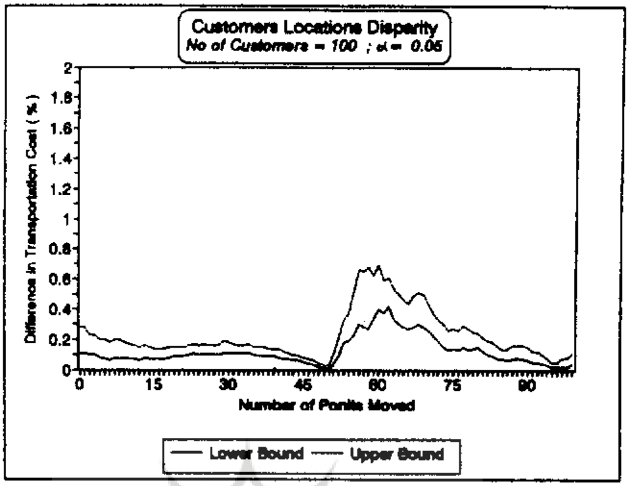
1- Median Method 2- Rectilinear

مشاهده می‌شود که بیشترین اختلاف هزینهٔ حمل کالا بین روش میانه و روش بهینه هیچگاه از ۲/۱۳ درصد تجاوز نمی‌کند. اختلاف بزرگتر مربوط به n کوچکتر است. البته روش میانه در بیش از ۸۵ درصد از موارد جواب بهینه را به دست می‌دهد (شکل ۹). در آزمون دوم روش میانه وقتی تنها کالای مورد نیاز یک نقطه را تعیین می‌کنیم (یعنی هنگامی که روش مرکز ثقل بدترین جواب را ارائه می‌کند) همیشه جواب بهینه را به دست می‌دهد (شکل ۱۰ را ببینید). در این بررسی به این نتیجه می‌رسیم که در بعضی وضعیتهای خاص در رابطه با میزان کالای مورد نیاز متقاضیان و همچنین پراکندگی مکانی آنها، روش میانه نیز جوابهای نادرستی (تا ۱۰ درصد متفاوت از جواب بهینه) به دست می‌دهد. مثال ساده‌ای از این وضعیت را در جدول (۱) آورده‌ایم.

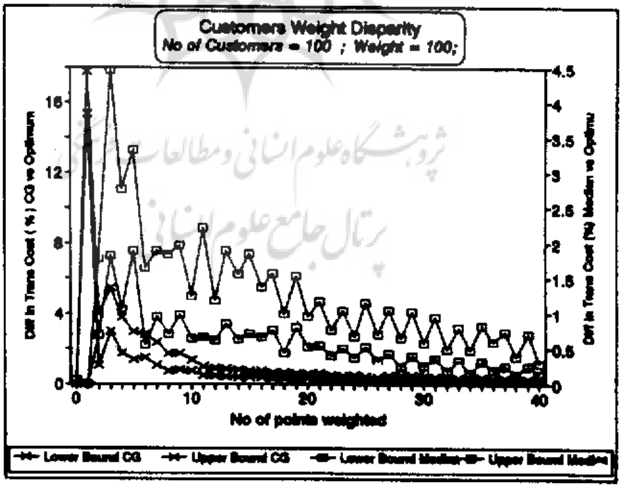
۵ نقطهٔ زیر با کالای مورد نیاز W_1 ، W_2 ، W_3 را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که وزن میانه در هر سه حالت ۱۳ می‌باشد. نقطهٔ استقرار انبار در هر سه حالت فوق طبق روش میانه ، نقطه (۷/۰، ۳/۰) است . و این در حالی است که محل بهینه برای استقرار انبار در سه حالت فوق بترتیب در نقاط (۷/۰، ۳/۰ و ۴/۱۰، ۵/۹۷ و ۴/۵، ۶/۲۶) می‌باشد.

جدول ۱

شماره	X	Y	W_1	W_2	W_3
۱	۱/۰	۱/۰	۷/۰	۹/۰	۹/۰
۲	۳۰/۰	۴/۰	۱/۰	۳/۰	۱/۰
۳	۱۰/۰	۲۵/۰	۴/۰	۷/۰	۳/۰
۴	۷/۰	۳/۰	۹/۰	۴/۰	۴/۰
۵	۱۸/۰	۱۷/۰	۳/۰	۱/۰	۷/۰



شکل ۹ - پراکندگی مکانی متقاضیان (n = ۱۰۰).



شکل ۱۰ - پراکندگی وزنی بین نقاط (n = ۱۰۰).

نتیجه‌گیری

در این مقاله برای مقایسهٔ خصوصیات عملکردی روشهای مرکز ثقل و میانه با روش تحلیلی عددی، چند آزمون مختلف طراحی و آنها را به کمک برنامه‌های کامپیوتری اجرا کردیم. نتایج حاصل از این اجراها نشان دادند که استفاده از روشهای مرکز ثقل و میانه برای تعیین مکان بهینهٔ انبار - البته در شرایط خاصی - می‌تواند خطای شایان توجهی را ایجاد نمود.

منابع

1- Vergin,R.Cand Rogers, J.D., "An Algorithm and Computational procedure for locating Economic Facilities," Management Science, Vol 13,No.'p B-240.

2- Eilon, S. et al, "Distribution Management; Mathematical Modeiiing and practical Analysis", C. Griffin, London, 1984.

3- Mendenhall, W., et al," Statistics for Management and Economics" PWS - kent, 1989.

4- Adam, E and Ebert, R.J.,"production and Operations Management", prertice - Hall Intemational, Inc,1989.