روش ابتکاری کاشانی در محاسبه عدد «پی» و جایگاه آن در تاریخ ریاضیات

یان هوخندایک

دپارتمان ریاضیات دانشگاه اُتریخت هلند

ترجمهٔ رضاعلیزاده ممقانی*

کارشناس ارشد فلسفه علم از دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

کاشانی برای محاسبه پی روشی کاملاً ابتکاری کشف کرد و برای نخستین بار این عدد را با شانزده رقم اعشار محاسبه نمود. کاری که تا آن زمان بی‌سابقه بود:

برای این منظور او تصمیم گرفت محیط جهان را با چنان دقتی حساب کند که مقدار خطای حاصل در محاسبه، کمتر از قطر یک تار مو باشد. امّا اینکه کاشانی چگونه از محیط جهان آگاهی داشت بحثی است که به نظریات نجومی زمان او بر می‌گردد.

الگوی کیهان شناسی در این زمان همان الگوی بطلمیوسی بود در این الگوشناسی جهان مساوی ۲۶۳۲۸ برابر شعاع زمین در نظر گرفته شده بود.

کلید واژه‌ها غیاث‌الدین جمشید، کاشانی، عدد پی، شعاع جهان، بطلمیوس، ارشمیدس، ابوالوفای

---

*. مترجم از راهنمائیهای استاد ارجمند آقای دکتر جعفر آقایانی چاوشی سپاسگزاری می‌کند.

(ترجمهٔ آقای علیزاده ممقانی از متن هوخندایک در بعضی از موارد تحت اللفظی بود که ما برای فهم خوانندگان ناچار شدیم که در این موارد دخل و تصرف کنیم. تا آنها را از ابهام بیرون آوریم. جعفر آقایانی چاوشی)

کلید واژه‌ها غیاث‌الدین جمشید، کاشانی، عدد پی؛ شعاع جهان؛ بطلمیوس؛ ارشمیدس؛ ابوالوفای بوزجانی؛ ون کیولن

مقدمه

این مقاله به سه بخش تقسیم گردیده است. در نخستین بخش روش غیاث الدین جمشید کاشانی ریاضیدان نامی عصر تیموری، که یکی از کارهای برجسته در تاریخ ریاضیات دوره اسلامی است مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

در دومین بخش، جایگاه این روش در تاریخ جهانی عدد π مورد بحث واقع می‌شود. سرانجام در سومین بخش مقایسهٔ مختصری بین روش محاسباتی کاشانی با روش همتای هلندی‌اش لودلف ون کیولن دربارهٔ عدد π انجام می‌شود.

گرچه این ریاضیدان اروپایی صد و پنجاه سال بعد از کاشانی و در کشور هلند می‌زیسته است؛ با این حال روش وی برای تعیین عدد π بسیار به روش کاشانی در این باره نزدیک است.

از آنجائی که جزئیات زندگانی کاشانی برخوانندگان آشکار است ما از این مطلب چشم می‌پوشیم.[8]

غیاث الدین جمشید کاشانی، محاسباتش را برای تعیین عدد π در رساله‌ای تحت عنوان رسالة المحیطیة که آنرا به عربی نوشته است انجام داده است.

از این رساله هشت نسخه خطی تاکنون شناخته شده است که نسخهٔ خطی به شماره ۵۳۸۹ موجود در کتابخانهٔ آستان قدس در مشهد مقدس یکی از نفیس‌ترین آنهاست. زیرا این نسخه بوسیله خود کاشانی کتابت گردیده است. او در آخرین برگ این نسخه چنین نوشته است:

«این رساله‌ای است از غیاث، بنده ناچیز خداوندمتعال که امید به کَرَم الهی دارد.

بتاریخ نیمه ماه شعبان سال ۸۲۷ هـ. ق. کتابت یافته است.»

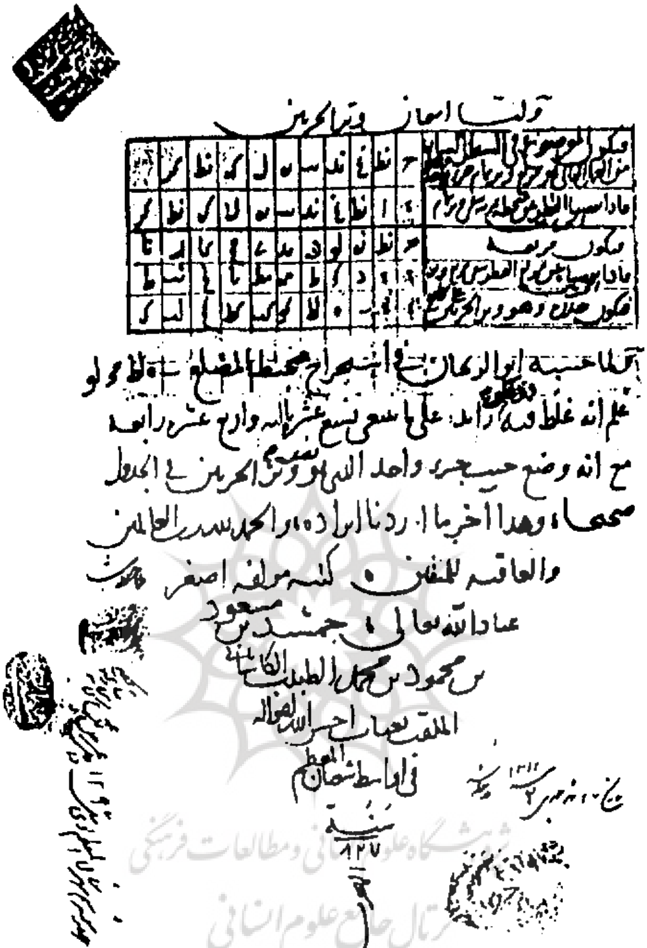
این تاریخ همانگونه که می‌دانیم برابر با اواخر جولای سال ۱۴۲۴ میلادی است.

بدین ترتیب کاشانی بایستی این رساله را هنگام اقامت خود در سمرقند در دربار الغ بیگ تدوین کرده باشد.

---

۸. برای آگاهی از زندگانی کاشانی رجوع شود به محمدباقری، از سمرقند به کاشان، تهران ۱۳۷۵

* A.P Youschkevitch, B. A. Rosenfeld, article: Al - Kashi, in: C.G. Gillispie,ed. *Dictionary of scientific Biography*, vol. 7: New York. Scribner ´ s Sons. 1973, pp. 255 - 262.


والعاقبة للمتقین کتبه مؤلفه اصغر
عباد الله تعالی جمشید بن مسعود
بن محمود بن محمد الطبیب الکاشانی
الملقب بغیاث احسن الله احواله
فی اواسط شعبان المعظم

برگ ۵۶ از نسخه خطی رسالهٔ محیطیه کاشانی موجود در کتابخانهٔ آستان قدس.

کار کاشانی در ایران حدود دو قرن بعد از وفات وی شناخته شد. نسخهٔ خطی مشهد ابتدا در اختیار ریاضیدان ایرانی بهاءالدین عاملی[۹] قرار گرفت. در سال ۱۹۲۵ میلادی کار کاشانی بر روی عدد π برای نخستین بار در جهان غرب توسط دی ای اسمیت معرفی گردید.

اسمیت پژوهش خود را بر مبنای اطلاعاتی قرار داد که از یک محقق ترک به نام صالح مراد،

---

۹. سال‌های ۹۵۳ تا بعد از هجرت / ۱۵۴۷ تا ۱۶۲۲ بعد از میلاد: رجوع کنید به:

ابوالقاسم قربانی، کاشانی نامه، تهران: انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۵۰ هجری شمسی (۱۹۷۱ م) ص ۶۰.

که نسخهٔ خطی رسالهٔ کاشانی را در استانبول مورد مطالعه قرار داده بود[10]، بـه دست آورده. مورخ آلمانی پاول لوکی ترجمه‌ای آلمانی با شرح و تفسیر به همراه متن عربی (بـر پـایه نسخهٔ استانبول)[11] تهیه نمود که به سال ۱۹۵۳ م پس از فوت او منتشر شد. ترجمه‌ای روسی هم توسط پرفسور روزنفلد سه سال بعد چاپ شد[12] و همچنین خلاصه‌ای دقیق از رسالهٔ کاشانی به زبان فارسی توسط استاد قربانی موجود است[13]. تاکنون ترجمهٔ کاملی از این نسخه به زبانهای فارسی و انگلیسی مشاهده نشده است.

بنابراین بسیار مسرت بخش است بدانیم که دکتر وحیدی اصل از تهران در حال کار به روی این ترجمه فارسی است و امید است که نسخهٔ عربی که یک قرن پیش به صورت لیتوگراف چاپ شده بود، به زودی مجدداً چاپ شود. من همچنین امیدوارم که امکان چاپ جـدید انـتقادی و منقح از متن عربی فراهم آید البته از روی نسخهٔ خطی مشهد. چرا که متون ریاضی دست نویس به قلم خود مؤلف بسیار کم یابند.

از آنجایی که هنوز ترجمه‌ای انگلیسی از کار کاشانی در دسترس نیست، غالباً سوء تفاهماتی در دنیای غرب پدید می‌آید. در سنجش جدید از تعیین عدد π[14]، چنین عنوان شده که کاشانی π را با دقت ۱۴ رقم اعشار تخمین زده است. در حالی که به راحتی می‌توان این اظهار نظر را با توجه به نسخه خطی رسالهٔ محیطیهٔ ـ به خط خود کاشانی ـ تکذیب نمود. کاشانی جدولی را تحت عنوان «جدول مضارب نسبت‌های محیط دایره به قطر آن» آورده (شکل ۲) که در آن، 2π های

---

10. D.E. Smith, *History of Mathematics*, 2 vols., 1923 - 105, Reprint ed.: New York: Dover, 1958, Vol. 2, pp. 240, 242.

11. Paul Luckey, *Der Lehrbrifüber den Kerisumfang (ar - risāla al-muḥîṭîya) von Ĝamŝîd b. Masûdal-Kasi, übersetzt und erläutert von P.Lucley, herausgegeben von A. Siggel* [The Treatise on the Circumference of the Circle by... al-Kasi, translation and commentary by P.Luckey, (Arabic text) edited by A.Siggel], Berlin 1953: Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Brelin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, Jahragang 1950 no. 6.

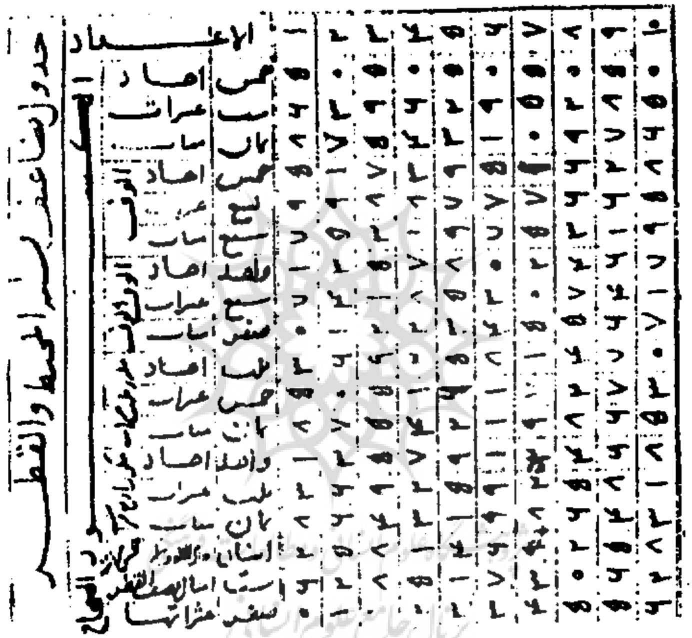
12. Dzhemshid Giyaseddin al-Kashi, *Klyuch Arifmetiki, Traktat ob Okruzhnosti* [Key toArithmetics, Treatise on the Circumference], Per B.A. Rozelfeld, comm. A.P. Yuschkevitch, B.A. Rozenfeld, Moskva: Gosudarstvennoe Izdatelstvo, 1956. 13. See Qorbānī 1350, op, cit.

14. David H.Bailey, Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein, Simon Plouffle, The Quest for Pi, *Mathematical Intelligencer* 19 (1997), no. 1,pp 50 - 57.

متعددی را به علائم دهدهی نمایانده شده‌اند. (نماد π در زمان کاشانی هنوز مورد استفاده نبود) کاشانی در سطر پنجم می‌نویسد:

۵×۲π = ۱۰π=۳۱/ ۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳۲۵

(آخرین عدد سمت راست مربوط به مضرب ۲π می‌باشد). در اینجا ما نخستین تقریب صحیح عدد π را تا ۱۶ رقم اعشار مشاهده می‌کنیم و همان طور که ذیلاً خواهیم دید، هرکسی قادر است با روش محاسبه کاشانی عدد π را حتی با ۱۷ رقم اعشار هم محاسبه کند.



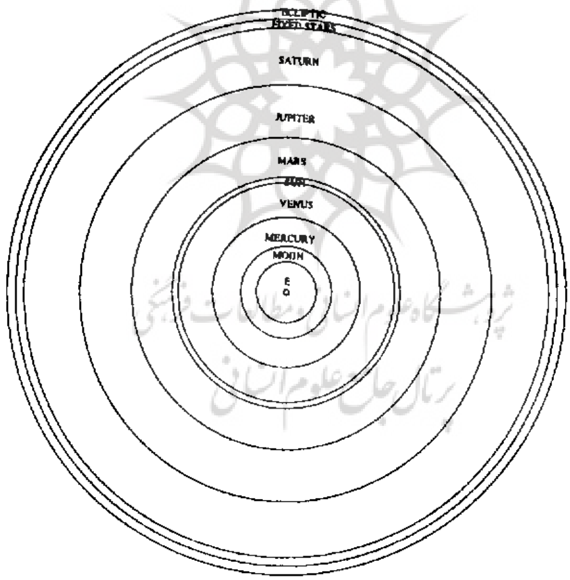
شکل ۲: جدول مضارب ۲π در سیستم دهگانی در صفحه ۴۶ از نسخه خطی مشهد از رسالهٔ کاشانی

سیستم دهدهی اعداد برای کسرها در زمان کاشانی چندان رایج نبود. همانند سایر اختر شناسان کاشانی محاسبهٔ خود را در سیستم شصتگانی انجام داد که توسط ریاضیدانان قدیم بابل، ابداع شده بود.

احتمالاً کاشانی معتقد به این امر بود که مقدار عددی π به طور دقیق قابل محاسبه نیست. این واقعیت که عدد π نامعین است (به طور کامل) به سال ۱۷۶۶ م توسط ریاضیدان سوئیسی

لامبرت[15] اثبات شد. از آنجایی که عدد π هنوز به طور دقیق محاسبه نشده است، بنابراین همواره خطایی جزئی در محاسبهٔ محیط دایره با فرمول $2\pi R$ با R معلوم وجود دارد. کاشانی در رسالهٔ محیطیه تصمیم گرفت تا عدد π را با چنان دقتی محاسبه کند که به هنگام محاسبهٔ محیط دایره‌ای به شعاع برابر شعاع جهان، بیشترین مقدار خطا کمتر از قطر یک تار مو باشد. کاشانی از طرفداران نظریهٔ اخترشناسی بطلیموس اسکندرانی (۱۵۰ پس از میلاد)[16] بود (شکل ۳).

بطلیموس بر این باور بود که زمین در مرکز جهان قرار دارد و توسط افلاک (دوایر) هم مرکز ماه، تیر، زهره، خورشید، مریخ، مشتری، کیوان و ستارگان ثابت احاطه شده است. مسافت زمین تا ماه و خورشید توسط اختلاف رؤیت قمری و مقادیر آشکار سایهٔ ماه، خورشید و زمین طی یک ماه‌گرفتگی قابل تعیین بود. این روش‌ها اصولاً درست ولی چندان دقیق نیستند. بدین صورت که یک خطای نسبتاً کوچک در اندازه‌گیری سایهٔ زمین، مسافت بین زمین و ماه را با دقتی تنها ۱/۲۰ مقدار واقعی نشان می‌داد.



[شکل ۳ ـ مدل بطلمیوسی جهان]

15.J. Lennart Berggren, J. Borwein, P. Borwein, Pi: *A Source Book*. New York: Springer Verlag, 1997, 2nd edition 2000. pp, 141 _ 6.

16. Olaf Pedersen, *A Suruey of the Almagest*. Odense: Odense University Press, 1974.

بسیاری از فلاسفهٔ یونانی پذیرفته بودند که فضای خالی (خلأ) وجود ندارد و بنابراین چنین نتیجه گرفتند که بیشترین مسافت بین زمین تا خورشید معادل با کمترین مسافت بین زمین تا مریخ است. مدل بطلیموسی حرکت سیارات، اصولاً قادر بود که با تقریب خوبی نسبت بین بیشترین و کمترین فواصل زمین تا هر سیاره‌ای را نشان دهد. (البته نه خود مقدار مسافت‌ها را) اگر چه با فرض کمترین مسافت مریخ و نسبت بین کمترین و بیشترین آن، بطلیموس قادر به یافتن بیشترین فاصلهٔ مریخ (که او فرض کرده بود معادل با کمترین فاصله تا مشتری است و الی آخر) شد. دست آخر این که بیشترین مسافت کیوان مفروض بود که معادل با کمترین مسافت ستارگان ثابت باشد. بطلیموس بر این باور بود که همهٔ ستارگان ثابت به فلکی ضمیمه شده‌اند که چندان ضخیم نیست و این «فلک ثوابت» با توجه به بیرونی‌ترین فلک نازک، حرکت بسیار کُندی داشت. این فلک بیرونی حاوی دایرة البروج بود و مدت حرکت وضعی آن حول مرکز جهان، یک روز بود. با تکیه بر این شبه برهان، بطلیموس نتیجه گرفت که شعاع جهان باید برابر مقدار تخمینی ۲۰۰۰۰ برابر شعاع زمین باشد.

بر پایه رصدهای بعدی، اخترشناسان قرون وسطای اسلامی تعدادی از عوامل مدل بطلیموسی را تغییر دادند ولی شعاع جهان را با همان مقداری که از نظریه بطلیموسی تعیین می‌شد، نگاهداشتند.

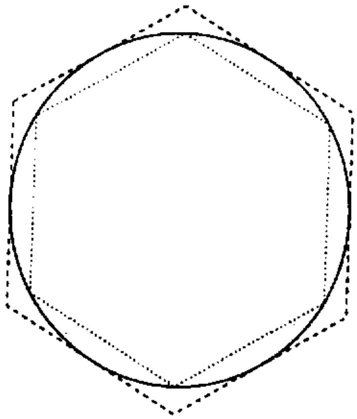
کاشانی در [کتاب] خود تحت عنوان سلم السماء (پلکانی به سوی آسمان) فرض کرد که شعاع جهان معادل با ۲۶۳۲۸ برابر شعاع زمین است[17]. البته مدل زمین مرکزی بطلیموسی و جانشینان اسلامی آن برای اخترشناسی امروزی، به نظر ابتدایی می‌رسند. هرچند همین مدل‌ها، سال‌ها اخترشناسان را قادر ساختند که پدیده‌های سماوی را با دقتی کافی برای چشم غیر مسلح پیش بینی کنند.

کاشانی می‌خواست که در محاسبهٔ مقدار π در موضع اطمینان باشد. بنابراین چنین مقرر کرد که در محاسبهٔ دایره‌ای به قطری برابر $R = ۶۰۰۰۰۰$ برابر قطر زمین، خطای محاسبهٔ $۲\pi R$ چیزی کمتر از قطر یک تار مو باشد.

کاشانی در محاسبه π روشی را به کاربرد که در ابتدا توسط ارشمیدس معرفی شده بود. دایره‌ای با ۶ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در نظر گرفت.

---

17. M. Bagheri, A Newly Found Letter of al-kāshī on Scientific Life in Samarkand, *Historia Mathematica* 24 (1997), 241 - 256.



شکل ۴ ـ دایره‌ای با ۶ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی

بنابراین محیط دایره بزرگتر از محیط شش ضلعی محاطی و کوچکتر از محیط شش ضلعی محیطی خواهد بود. اگر شعاع دایره ۱ باشد، طول هرضلع ۶ ضلعی محاطی ۱ خواهد بود و بنابراین محیط آن ۶ و محیط دایره 2π و می‌توان نشان داد که محیط شش ضلعی محیطی برابر ۴√۳ خواهد بود. بنابراین او نتیجه گرفت که:

$$3<\pi<2\sqrt{3} \qquad 6<2\pi<4\sqrt{3}$$

ارشمیدس همچنین نشان داد که اگر کسی طول ضلع یک n ضلعی منتظم محیطی و محاطی را محاسبه کند، قادر خواهد بود که طول ضلع یک 2n ضلعی منتظم محیطی و محاطی را نیز محاسبه نماید. این چنین او طول اضلاع محیطی و محاطی ۴۸، ۲۴، ۱۲ و ۹۶ ضلعی منتظم را محاسبه نمود و دست آخر با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم مقدار π را چنین تخمین زد:

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

بیان جبری چند ضلعی‌ها درگیر اعداد ناصحیح است. ارشمیدس از اعداد غیر صحیح با تخمین نسبتاً پیچیده‌ای همچون $1351/780>\sqrt{3}>256/153$ (مثل ریاضیات امروزی) اجتناب کرد. او از سیستم اعداد ده تایی یا ۶۰ تایی هم برای نسبت‌ها استفاده نکرد.[18]

کاشانی به تقریب ارشمیدس توجه کرد و اضافه نمود که نتیجهٔ ارشمیدس برای منظور او

---

18. برای آگاهی از روش ارشمیدس به کتاب زیر مراجعه شود:

T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge: University Press, 1897, reprint ed. New York: Dover, no date. pp. 93 - 94.

بسیار بی دقت می‌باشد. پس از ۹۶ ضلعی ($۳\times۲^{۵}=۹۶$)، کاشانی ۲۴ چند ضلعی با اضلاع بیشتر از ۹۶ ضلعی را هم در نظر گرفت مثل ۱۹۲ ضلعی، ۳۸۴ ضلعی و الی آخر تا ۳×۲^{۲۸} ضلعی. او با مثلثی به شعاع ۶۰ واحد، درست همان طور که در علم مثلثات زمان او معمول بود، کار نمود. پیش از آغاز کار اصلی، کاشانی امور زیر را نشان داد:

- محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی در یک دایره با شعاع ۶۰، کمتر از $۶۰^{-۸}$ تفاوت دارند.
- محیط ۳×۲^{۸} ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی در یک دایره شعاع ۶۰۰۰۰۰ برابر شعاع زمین، اختلافی کمتر از قطر یک تار مو دارند.
- چنانچه این چند ضلعی‌ها برای تخمین π استفاده شوند، نتیجه محاسبه ۱۹ رقم در سیستم شصتگانی به دست می‌دهد. (یک عدد صحیح و ۱۸ کسر)

کاشانی در محاسبه‌اش، روش ارشمیدس را به طور محسوسی ساده نمود. ایدهٔ اصلی او با در نظر گرفتن نمادهای امروزی ریاضی به طریق زیر است: در دایره‌ای با شعاع ۶۰، طول اضلاع n ضلعی‌های منتظم برای محیطی‌های:

$۱۲۰\tan ۱۸۰^{\circ}/n$، برای محاطی‌ها: $۱۲۰ \sin ۱۸۰/n$

کاشانی نشان داد که ساده‌تر است، در ابتدا برای $n = ۶،۳، ۱۲، ...، ۳\times۲^{۲۸}$ محاسبه کنیم:

$$C_n = ۱۲۰ \cos ۱۸۰/n$$

به دلیل آنکه این مقادیر با رابطه‌ی زیر به هم مربوط‌اند:

$$C_{۲n} = \sqrt{۶۰(۱۲۰+C_n)}$$

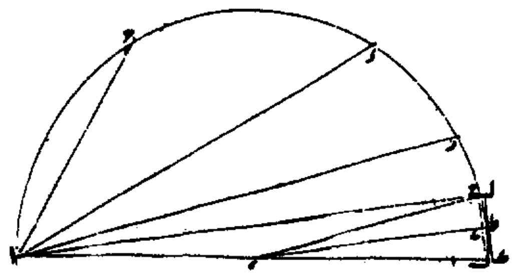
که با روابط امروزی هم ارزند با فرمول:

$$(۲\cos\alpha/۲)^{۲} = (۲+۲\cos\alpha)$$

بدین ترتیب کاشانی در دستگاه روابط امروزی، چنین محاسبه کرد

$$C_۳ = ۶۰\sqrt{۳}، C_۶ = ۶۰\sqrt{۲+\sqrt{۳}} \text{ و } C_{۱۲} = ۶۰\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}، ....$$

کاشانی سری $C_۳, C_۶, C_{۱۲}, ...$ را با دستخط خودش مطابق شکل ۵ معرفی نمود.



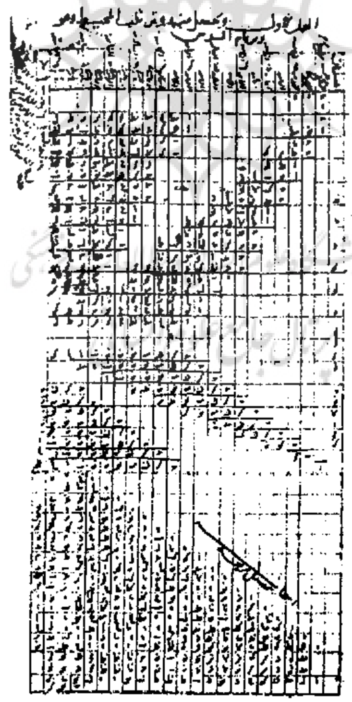
شکل ۵: شکل برگ پنجم از نسخهٔ خطی رسالهٔ کاشانی در مشهد.

شکل ۶ محاسبهٔ $\sqrt{(۳\times۶۰^{۲})}$ توسط کاشانی را (با دستخط خودش) نشان می‌دهد.

$\sqrt{(۳\times۶۰^{۲})} = ۱/۴۳؛ ۵۵ ،۲۲ ،۵۸ ،۲۷ ،۵۷، ۵۶ ،۰۴۴ ،۲۵ ،۳۱ ،۴۲$

$۵۶ ،۲۲ ،۴۲ ،۴۸ ،۵۸ ،۵۷ = ۱ \times ۶۰ + ۴۳ + ۵۵/۶۰ + ۲۲/۶۰_{۲} + ...$

به معنای: [در سیستم دهدهی]



شکل ۶: صفحه ۱۱ از نسخهٔ خطی رسالهٔ کاشانی در مشهد.

بـا انـجام ۲۷ نـوع مـحاسبات دیگـر بـا ایـن الگـو او $C۳×۲^{۲۸}$ را یـافت و پس از آن محیط $۳×۲^{۲۸}$ ضلعی محاطی را چنین تعیین نمود:

$$۳×۲^{۲۸} × \sqrt{۱۲۰^{۲} - C^{۲}_{۳×۲^{۲۸}}}$$

سپس او محیط چند ضلعی محیطی را به روش ساده‌ای استخراج کرد. در این روش او حـد اضافی و حد نقصانی دایره‌ای به شعاع ۶۰ را می‌یابد که با مقادیر زیر برای ۲π مطابقت می‌کنند:

$۲\pi <$ ۶ ؛۱۶ ،۵۹ ،۲۸ ،۱ ،۳۴ ،۵۱ ،۴۶،۱۴ ،۵۰ ،۱۵

$۲\pi >$ ۶ ؛۱۶ ،۵۹ ،۲۸ ،۱ ،۳۴ ،۵۱ ،۴۶ ،۱۴ ،۴۹ ،۴۵

۶ ؛۱۶ ،۵۹ ...= $۶ + ۱۶ / ۶۰ + ۵۹ / ۶۰^{۲} + ...$

در ابتدا کاشانی عدد ۴۶ را به عنوان آخرین حد پایین شصت گانی پیدا کـرد ولی او مکـان شصت گانی بعدی کاشانی برای عدد π ۲ مقدار میانگین

۵۰، ۱۴، ۴۶، ۵۱، ۳۴، ۱، ۲۸، ۵۹، ۱۶؛ ۶ را انتخاب کرد و سپس این مقدار را به سـیستم نسبت‌های دهدهی تبدیل کرد. همان طور که ما دیدیم او تنها ۱۶ رقم اعشار را به دست آورد ولی طبق محاسبات لوکی بیش از این می‌توان عمل کرد: اگر کسی ۲ رقم بیشتر استفاده کند، حدود اضافی و نقصانی ۲π طبق محاسبات کاشانی معادل خواهند بود با:

۳/۱۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳۲۳۰ $<\pi<$ ۳/۱۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳ ۲۵۴

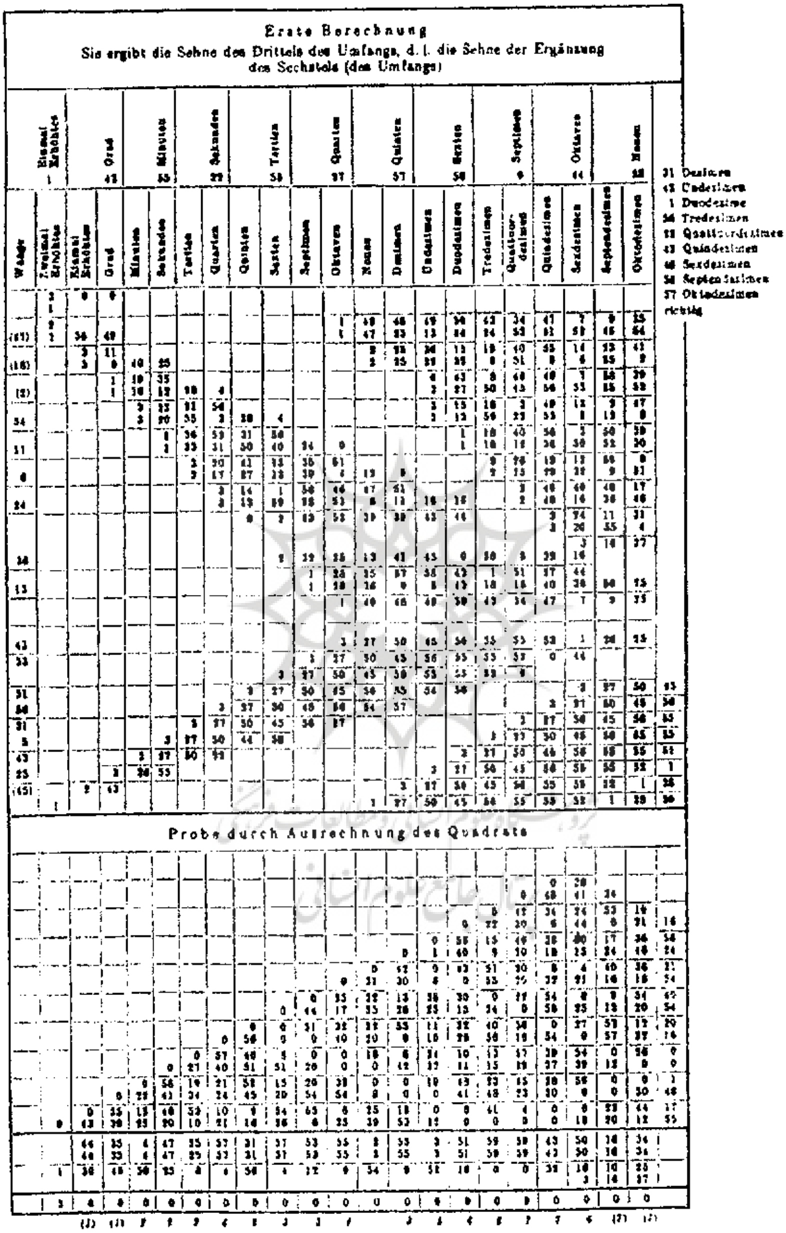
که مقدار میانگین گرد شدهٔ عدد π را با ۱۷ رقم اعشار به طور صحیح به دست می‌دهد.

$\pi =$ ۳/۱۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳ ۲۴

کـاشانی جـدولی از مـضارب ۲π را ارائـه داد و در مـورد خـطای تـقریب عـدد π تـوسط ریاضیدانان متقدم همچون بوزجانی و بیرونی بحث نمود. آن طور که از مطالعهٔ جداول مثلثاتی این ریاضیدانان بر می‌آید، آنان با تقریب نسبتاً کم دقتی عدد π را یافته بودند. با ایـن مـطالعهٔ تطبیقی، رسالهٔ محیطیه کاشانی پایان می‌یابد.

(جدول ۲ در پایین را ببینید).

به منظور تعیین کار کاشانی در شرایط تاریخ جهانی ریاضیات، مـن فـهرستی از رکـودهای جهانی در تقریب اعشارعدد π تنظیم کرده‌ام. (جدول ۱)



شکل ۷: رونوشت این محاسبات توسط لوکی

شکل ۸: صفحهٔ اول از کتاب *Van den Cirkel*، لودلف ون کیولن

تاریخ	مؤلف	مکان	تقریب	تعداد اعشار
			۱ ـ روش‌هایی ابتدایی	
۲۰۰۰ پیش از میلاد		مصر	$(۱۶/۹)^{۲} \approx ۳/۱۶۰۴$	۱
۲۰۰۰ پیش از میلاد		بابل	$۳\frac{۱}{۸}$	۱
			۲ ـ چند ضلعی‌های محیطی و محاطی	
۲۵۰ پیش از میلاد	ارشمیدس	ایتالیا	$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳۱/۱۷$	۲
۱۵۰پس‌ازمیلاد	بطلیموس	مصر	$۳۸'۳۰'' (=۳+۸/۶۰+۳۰/۳۶۰۰)$	۳
؟۴۵۰	؟	هند	$۲\pi = ۶۲۸۳۲/۲۰۰۰۰۰ \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۷$	۴
۴۸۰	زو چنگ زی	چین	$۳/۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳/۱۴۱۵۹۲۷$	۷
۱۴۲۴	کاشانی	ایران	۲π با ۹ رقم اعشار شصت گانی	۱۷ ـ ۱۶
۱۵۹۶	ون کیولن	هلند		۲۰
۱۶۱۵	ون کیولن	هلند		۳۵
۱۶۳۰	گریمبرگر	رم		۳۸
۱۷۲۲	تاکه به	ژاپن		۴۱
			۳ ـ سری تیلور (arctan x)	
۱۶۹۹	ای. شارپ	انگلستان		۷۱
۱۷۰۶	ماشین	انگلستان		۱۰۰
۱۷۱۹	فاتت دلانغی	فرانسه		۱۱۳
۱۷۹۴	وگا	اتریش		۱۳۶
۱۷۹۵	ناشناس	انگلستان		۱۵۲
۱۸۴۴	زاخاریاس داهسه	آلمان		۲۰۰
۱۸۴۷	کلایوسن	آلمان		۲۴۸
۱۸۵۳	راثر فورد	انگلستان		۴۴۰
۱۸۵۳	دابلیو.شانکس	انگلستان	(تا ۵۲۷ عدد درست)	۶۰۷
۱۸۷۳	دابلیو. شانکس	انگلستان	(تا ۵۲۷ عدد درست)	۷۰۷
۱۹۴۷	فرگوسن ورنچ*	انگلستان / ایالات متحده آمریکا		۸۰۸

* دستگاه ماشین حساب میزی مورد استفاده قرار گرفت.

۴ ـ کامپیوترهای اتوماتیک

۱۹۴۹	ای نیاک	ایالات متحده آمریکا	۲۰۳۵
۱۹۷۳	گایلویلد، بویر	پاریس	$۱۰^{۶}$
۱۹،۱۹	برادران چادنوسکی	نیویورک	$۱۰^{۹}$
۱۹۹۹	کانادا	ژاپن	۲×۱۰^{۱۱}

البته دارندگان این رکودهای جهانی نبایستی از کارهای اسلافشان مطلع بوده باشند. کاشانی از کار زوچنگ زی مطلع نبود همان طور که زوچنگ زی از نتایج بطلیموس و این دیگری از ارشمیدس و ون کیولن از کار کاشانی مطلع نبودند.

تاریخ تعیین عدد π را می‌توان به چهار دوره تقسیم نمود. در دورهٔ نخست ریاضیدانان بابلی و مصری، عدد π را با روش‌های شهودی و حسی تخمین زدند.[۱۹]

در دورهٔ دوم ریاضیدانان برای تعیین عدد π از چند ضلعی‌های محیطی و محاطی استفاده کردند. [ادوار بعدی مشتمل بر دورهٔ استفاده از سری تیلور و دست آخر به کارگیری ماشینهای حساب و کامپیوتر می‌باشند.]

تقریب π با چند ضلعی‌های منتظم.

تاریخ	مؤلف	مکان	تقریب	تعداد اعشار
۲۵۰ پیش از میلاد		ارشمیدس	۳ ۱۰/۷۱ <۳ ۱/۷	$۹۶ = ۳\times2^{5}$
۱۵۰ پس از میلاد		بطلیموس	″۳۸′۳۰ = ۳/۱۴۶۶	۳۶۰
۲۳۰		لی یوهای	۳/۱۴	۹۶، ۱۹۲
۴۵۰	هند		۳/۱۴۱۶	مفقود
۴۸۰	زوچنگ زی		$۳/۱۴۱۵۹۲۶<\pi<۱۴۱۵۹۲۷$	مفقود
۹۸۰	بوزجانی	مفقود	۷۲۰	
۱۰۳۵	بیرونی		‴۳۸′۳۰″۱۷ = ۳/۱۴۱۷۰۰۰	۱۸۰
۱۳۰۰	زائویوکین		$۳/۱۴۱۹۵۲۶<\pi<۳/۱۴۱۵۹۲۷$	$۱۶،۳۸۴=۲^{۱۴}$
۱۴۲۳	کاشانی		۲π با ۹ رقم اعشار شصت‌گانی	$۸۰۵،۳۰۶،۳۶۸=۳\times۲^{۲۸}$
۱۵۷۹	وی‌ات		۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶	$۳۹۳،۲۱۶ = ۳\times۲^{۱۷}$

---

۱۹. این ریاضیدانان چیزی معادل با این را می‌دانستند که محیط و مساحت دایره‌ای با شعاع R برابر است با مقادیر $۲\pi_۱R$ و $\pi_۲R^۲$ که در آنها $\pi_۱$ و $\pi_۲$ ثابت هستند ولی حتی نمی‌دانستند که مقادیر $\pi_۱$ و $\pi_۲$ برابرند. این امر نخستین بار توسط ارشمیدس اثبات شد وی همچنین مساحت سطح [دایره] و حجم کره را بر حسب π بیان کرد.

۱۵۹۳	ون‌رومن	۳/۱۴۱۹۵۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۱	۲۴۰،۶۵۸،۲۵۱ = ۱۵×۲^{۲۴}
۱۵۹۶	ون کیولن	۱۲ رقم اعشار	۷٦۰ ،٤۸۵ ،۱۰ = ۱۰×۲۰^{۲۰}
۱۵۹۶		۱۶	۸۲٤ ،۷٤۱ ،۰۷۳ ،۱ = $۲^{۳۰}$
۱۵۹۶	۱۸		۶ ،۹۴۴ ،۴۵۰ ،۴۴۲ = ۳×۲^{۳۱}
۱۵۹۶	۲۰		۴۴۰ ،۵۰۹ ،۴۲۴،۶۴ = ۱۵×۲^{۳۲}
۱۶۱۵	ون کیولن و شاگردانش	۳۵	مفقود
۱۶۲۱	اسنل	۳۴	$۲^{۳۰}$ خطا$\sim n^{-۴}$
۱۶۳۰	گریمبرگر	۳۸	خطا $\sim n^{-۴}$
۱۶۲۲	تاکه به	۴۱	خطا$\sim n^{-۴}$

جدول ۲

جدول ۲ یک فهرست از ریاضیدانانی است (البته نه همه رکورددارن جهانی) که عدد π را با روش مذکور تقریب زده‌اند. در ۱۵۹۳ م ریاضیدان دیگر هلندی به نام آدریان ون رومن عدد π را با ۱۵ رقم اعشار توسط یک ۲۵۱۶۵۸۲۴۰ = $۲^{۲۴}$ × ۱۵ ضلعی محاط بـه دست آورد، ولی قادر به شکستن رکورد کاشانی نشد. البته ون رومن از کار کاشانی آگاه نبود. ما تنها از نتیجهٔ محاسبه آگاهیم ولی نمی‌توانیم با صراحت بگوییم از چه نوع چند ضلعی استفاده شده است. خطای تقریب توسط چند ضلعی با استفاده از سری تیلور قابل ترمیم است[۲۰] و اگر عدد π با میانگین چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی تقریب زده شود، خطا متناسب با $n^{-۲}$ خواهد بود.

چنانچه تخمین عدد π برای حصول k رقم اعشار با این روش انجام‌پذیرد، می‌توان نشان داد

---

۲۰. P(n) و p(n) را محیط n ضلعی منتظم محیطی و محاطی در دایره‌ای به شعاع واحد (۱) فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$۲n \sin\pi/۲ = p(n) < ۲\pi < P(n) = ۲n \tan\pi/n$$

با استفاده از سری تیلور نتیجه می‌شود:

$$\sin x = x = ۱/۳!\, x^{۳} + ۱/۵!\, x^{۵}...$$

و همچنین:

$$\tan x = x-۱/۳x^{۳} + ۲/۱۵x^{۵}$$

در این صورت به رابطهٔ اخیر دست می‌یابیم:

$$n \sin \pi/n \approx \pi - \pi^{۳}/۶\pi^{۲} + ۵^{۵}/۱۲۰n^{۴}$$

و همچنین:

$$n \tan \pi/n \approx \pi + \pi^{۳}/۳n^{۲} + ۲\pi n^{۵}/۱۵n^{۴} \ (n \to \infty)$$

در صورتی که ۲π را به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}P(n) + \frac{۱}{۲}p(n)$ تقریب بزنیم، خطا تقریباً به مقدار $۱۰/n^{۸} \approx \pi^{۸}/۳n۲$ می‌رسد.

که محاسبات حداقل باید تا 2k اعشار انجام شوند. لودلف ون کیولن آخرین رکورددار جهانی بود که از این روش ساده استفاده کرد. برای استخراج ۳۵ رقم اعشار π او باید یک چند ضلعی منتظم با $۱۰^{۱۸}$ ضلع را استفاده کرده باشد و محاسباتش باید بیش از ۷۰ رقم اعشار عمل کرده باشد (محاسبات او مفقود شده‌اند). ما می‌دانیم که ون کیولن محاسبات را با کمک یک دانش‌آموز انجام داد. تقریب ۳۵ رقم اعشار برای عدد π دشوارتر از آن بوده است که محاسبه‌اش توسط یک فرد انجام پذیرفته باشد.

پیشرفت بیشتر زمانی حاصل شد که کشف شد چند ضلعی‌های محاطی و محیطی در راهی مؤثر قابل استفاده هستند. برای مثال اگر عدد π را نه با میانگین و بلکه با ۱/۳ محیط چند ضلعی محیطی به علاوهٔ ۲/۳ چند ضلعی محاطی، تخمین بزنیم[۲۱]، خطای نسبی $n^{-۴}$ است. در سال ۱۶۲۱ م، ریاضیدان آلمانی ویلیبرد اسنل روش بسیار پیشرفته‌ای به منظور تخمین با همین مشخصه یافت.

روش مشابهی هم توسط ریاضیدان اتریشی، گریمبر و همچنین ریاضیدان ژاپنی به نام تاکه به ـ که که از کارهای اسلاف یونانی، مسلمان و اروپایی آگاه نبود ـ استفاده شد.

دورهٔ سوم تقریب π با کشف سری تیلور و استفاده از آن برای arc tan x آغاز می‌شود. با استفاده از این سری، عدد π با روش سریعتری قابل تخمین بود. ریاضیدان انگلیسی شارپ، از سری زیر استفاده کرد:

$$\pi/۶ = \arctan ۱/\sqrt{۳} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\left(۱ - \frac{۱}{۳.۳} + \frac{۱}{۵.۳^{۲}} \ldots\right)$$

به زودی ماشین، رابطهٔ مؤثرترین را جایگزین کرد:

$$\pi/۴ = ۴\arctan ۱/۵ - \arctan ۱/۲۳۹$$

$$= ۴\left(\frac{۱}{۴}\ \frac{۱}{۴.۵^{۴}} + \frac{۱}{۵.۵^{۵}} + \ldots\right) - \left(\frac{۱}{۲۳۹} - \frac{۱}{۳.۲۳۹^{۳}} + \frac{۱}{۵.۲۳۹^{۵}} \ldots\right)$$

توسط این سری‌ها و روابط مشابه، اروپائیان قادر شدند عدد π را با ۵۰۰ رقم اعشار صحیح محاسبه کنند. پیشرفت بیشتر به توسط ماشین حساب‌ها و کامپیوترها پس از جنگ دوم جهانی حاصل شد. روشهای سریعتری نیز طی سالهای اخیر پیدا شده‌اند. تا این زمان بیش از ۲۰۰ میلیون اعشار عدد π شناخته شده است. این محاسبات جنبهٔ عملی کمتری دارند، اما نظریهٔ اصولی جالب است و تعدادی از ریاضیدانان علاقمند به جستجوی خواص عدد π در ارتباط با تقسیم ثابت اعشار آن می‌باشد.

---

۲۱. با استفاده از سری تیلور به شکل به کار رفته در پاورقی قبل:

$$۲/۳\, p(n) + ۱/۳P(n) - ۲\pi \approx \pi^{۵}/۱۰n^{۴} \approx ۳۰/n^{۴}$$

من در بخش سوم از این مقاله تمایل دارم که به طور خلاصه رسالهٔ محیطیهٔ کاشانی را با کار، لود ولف ون کیولن که عدد π را با ۲۰ رقم اعشار تعیین کرد، مقایسه کنم آن هم به دلیل مشابهت بین این دوکار. ون کیولن کار خود را به زبان هلندی نوشت و آن را«Van den Cirkel» نام نهاد به معنای «دربارهٔ دایره». کار او به سال ۱۹۵۶ م در دلفت هلند به چاپ رسید. صفحهٔ نخست کتاب (شکل ۸)[22] مشتمل بود بر پرترهای از ون کیولن و یک دایره به قطری معادل ۱ با ۲۰ صفر. داخل محیط دایره چنین تعیین شده بود که عدد ۲۳۸۴۶ ۸۹۷۹۳ ۲۶۵۳۵ ۳۱۴۱۵۹ کوچکتر از محیط دایره و عدد ۲۳۸۴۷ ۸۹۷۹۳ ۲۶۵۳۵ ۱۴۱۵۹ ۳ بزرگتر از محیط دایره است. متن زیر دایره راجع به مسألهای در ریاضیات بازرگانی بود که در حال حاضر مورد نظر ما نیست.

با تبدیل عدد $C^{\sim}{}_{n}$ ون کیولن به سیستم شصت گانی، ما عدد C_n محاسبهٔ کاشانی را به دست میآوریم. مضارب ۶۰ موجب یک انتقال در سیستم شصتگانی میشود. بدین ترتیب در خط ۲۸، عدد زیر از محاسبات ون کیولن:

۷۷۰۲ ۰۲۱۷۳ ۰۸۲۹۰ ۱۳۰۲۷ ۹۸۴۷۸ ۹۹۹۹۹ ۹۹۹۹۹ ۹۹۹۹۹ ۱ مطابق است با عدد زیر در سیستم شصتگانی:

... ۰۴۸۳۷۴۹۵۴۴۰ ۵۹:۵۹۵۹۵۹۵۹۵۹۵۹۵۰۴۷۵۲۱۲۳ ۱ که کاشانی در پایان بیست و هشتمین رقم محاسبه استخراج کرده است.

از آنجایی که ون کیولن، ۳ مرحله بیشتر از کاشانی حرکت کرد (تا یک ۳×۲^{۳۱} ضلعی) و باز چون او از ۳۹ اعشار استفاده کرد، عدد π را با ۱۸ اعشار به دست آورد. در آخرین مرحله محاسبهٔ π[23]، ون کیولن از یک $۱۵\times۲^{۳۲}=۶۴۴۲۴۵۰۹۴۴۰$ ضلعی استفاده کرد که π را با ۲۰ رقم اعشار به دست میداد.

تقریب عدد π توسط ون کیولن در ایران، یک قرن پس از مرگ او شناخته شده بود. ریاضیدان ایرانی محمدباقر یزدی به سال ۱۱۰۰ ه.ق. و ۱۷۰۰ م در عبارتی که مورد اشارهٔ استاد قربانی هم است میگوید که: «تعدادی از ریاضیدانان اروپایی نشان دادند که اگر قطر دایره را برابر با ۱ به همراه ۱۱ صفر در نظر بگیریم، آنگاه محیط آن عبارت است از ۳۱۴۱ ۵۹ ۲۶۵ ۴۸۱. من البته در تعیین هویت مؤلف این تقریب موفق نبودهام». سپس محمدباقر یزدی ادامه میدهد که: «شخصی دیگر با محاسباتی دقیقتر به این نتیجه رسیده است

22. Luodolph van Ceulen, *Vanden Cirkel* [دربارهٔ دایره], Delft: Jan Andriesz, 1596.

23. Van Ceulen 1596 op. Cit.14.

که: اگر قطر را برابر ۱ با ۲۰ صفر در نظر بگیریم، محیط دایره بین:

۳۲۳۸۴۷ ۹۷۹ ۳۵۸ ۲۶۵ ۱۵۹ ۳۱۴ ۳۱۴ و ۴۸۶... خواهد بود. این «کسی دیگر» احتمالاً همان ون کیولن است، چرا که تقریب π در صفحهٔ اول کتاب او به همین صورت بیان شده است. استاد قربانی[۲۴] این انتقال را از اروپا به جهان اسلام همچون رخدادی به نشانهٔ پایان دورهٔ ریاضیات قرون وسطائی اسلام قلمداد می‌کند.

این واقعیت که کار ون کیولن شبیه به کار کاشانی بود، مستلزم این معنا نیست که ون کیولن از کار کاشانی مطلع بوده است. ون کیولن در دوره‌ای می‌زیست که علاقهٔ فراوانتری نسبت به عدد π در اروپا وجود داشت. تعدادی از محققین ناآگاه اروپایی ادعا کرده بودند که مقدار دقیق ۱/۴ دایره را یافته‌اند و بنابراین مقدار دقیق π را محاسبه کرده‌اند. ون کیولن و دو همکارانش زمان زیادی را صرف رد این اظهارات نمودند و این چنین بود که آنها اعشار بیشتر و بیشتری از π یافتند. هرچند کاشانی در چنین موقعیت خوبی قرار نداشت؛ آنطور که ما می‌دانیم؛ هیچیک از همکاران او در مورد این موضوع کار نمی‌کردند. در سنت ریاضیات اسلامی قبل از کاشانی، توجه کمی صرف یافتن تقریب عدد π شده بود. تنها تلاش برای یافتن عدد π به دلیل محاسبهٔ تانژانت نیم یا یک چهارم یک زاویه، صورت پذیرفته بود. ولی در مجموع کاشانی در تعیین عدد π و ارائه یک ریاضیات محاسباتی یک پیشرو بود.

کار ون کیولن طولانی‌تر از کار کاشانی است چرا که او علاقمند به محدودهٔ بزرگتری برای موضوع بود. برخلاف کاشانی، ون کیولن با محاسبهٔ اضلاع چند ضلعی‌های منتظم به طور کلی به توسط حل معادلات جبری عمل نمود. کاشانی در این باره در رسالهٔ محیطیه بحثی نکرده است، هرچند به طور مشخص به این مطلب علاقمند بوده است. چرا که در کتاب دیگر خود به نام رسالة في الوتر والجيب او روش محاسبهٔ اضلاع یک ۳۶۰ ضلعی را طی حل عددی یک معادلهٔ مکعب بیان می‌کند.

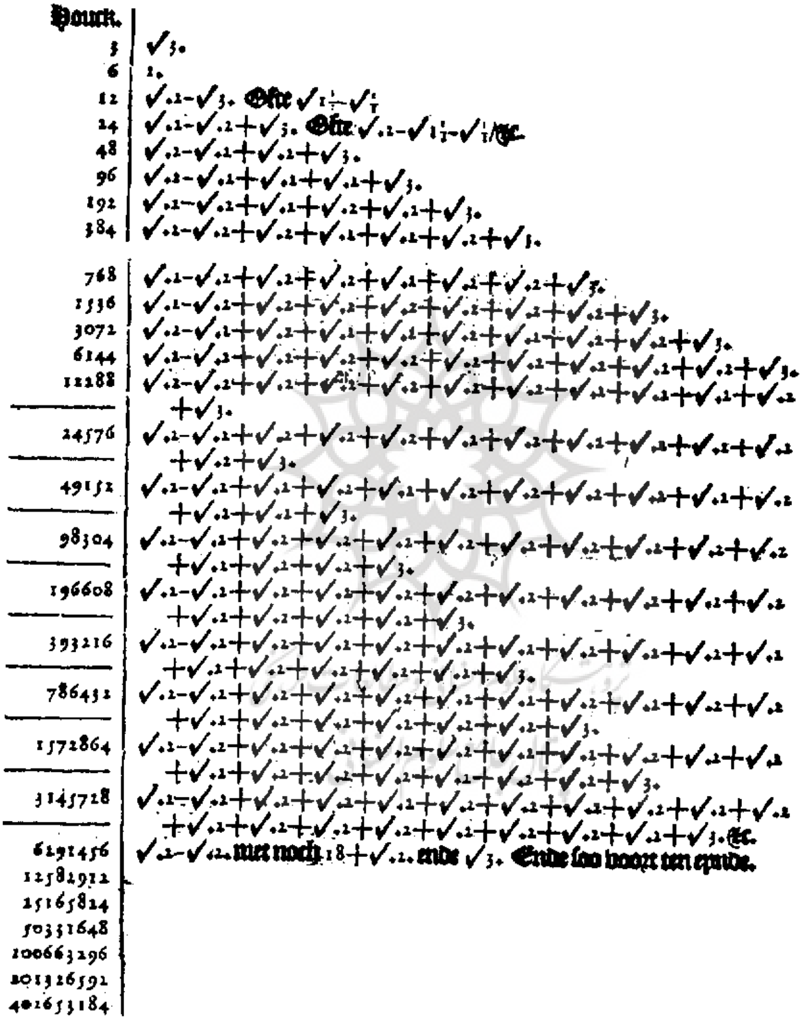
برخلاف کاشانی، ون کیولن تمام محاسباتش را در دستگاه دهدهی انجام داد و دایره‌ای به شعاع ۱ را انتخاب نمود. ون کیولن همچنین علائم جبری را مورد استفاده قرار داد که طی رنسانس در اروپا پیشرفت نموده بودند. شکل ۹ همچنین فهرستی از تعداد اضلاع n ضلعی‌های منتظم محاطی را در دایره‌ای به شعاع واحد که توسط ون کیولن به کار می‌رفت نمایش می‌دهد. چند ضلعی‌های مشابه همچنین توسط کاشانی مورد استفاده قرار گرفت. با دو برابر کردن آخرین

---

۲۴. ابوالقاسم قربانی، زندگینامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، تهران: ۱۳۷۴، ص ۵.

عدد ون کیولن یعنی ۱۸۴ ۶۵۳ ۴۰۲، تعداد اضلاع آخرین چند ضلعی کاشانی را به دست می‌آوریم یعنی:

$۳×۲^{۲۸}=۸۰۵۳۰۶۳۶۸$



شکل ۹. عبارات جبری برای اضلاع چند ضلعی‌ها.

1	7071067811865475244008443621048490.
2	111474487139158904909864203735294510.
3	98188897127476208122891150558571256.
4	19957178464771070134761395825455552.
5	1998919174952731288859672892485719.
6	19997322758191235657254942981101998.
7	19999330678348021069152076211582781.
8	19999832668887011298295172411376694.
9	19999958167178003620833274486537009.
10	19999989541791766552121964749280281.
11	19999997385447770740971503103434821.
12	19999999346361932004174777442981778.
13	19999999836590482333476932760602833.
14	19999999995914762054164631050491 7746.
15	19999999998978690511280389495707 0750.
16	1999999999974467216283037993572424630.
17	1999999999993616815707493121132678089.
18	1999999999998404203926866913918927 65.
19	199999999999960105098171633057893393.
20	19999999999999900162745429057775933 61.
21	199999999999997506568635726288968341.
22	199999999999999376642158931562527710.
23	199999999999999984416053973289001477919.
24	1999999999999999610401349331221468 14804.
25	199999999999999990160033733305614690336.
26	19999999999999999975650084333264035243543.
27	1999999999999999999391252108331600871 8242.
28	199999999999999999847813027082900217 37702.
29	1999999999999999999619531256777072505430806.
30	19999999999999999999048831419268126357451.
31	19999999999999999999976220785481703158 9348.
	1000000000000000000000000000000000000000
	2000000000000000000000000000000000000000

Sub 1999999999999999999990488314192681263574 51

Rest meerd als [illegible]

Dit rest is het Quadraet der syde eener Figuer/ in den Circkel ghescreven/ van 6442450944 **houcken.**

3 [illegible] / **ende minder als** 3 [illegible]

شکل ۱۰: محاسبهٔ ضلع یک ۳×۲^۳۰ ضلعی توسط ون کیولن

محاسبات ون کیولن نشان می‌دهد که از چهارمین تا بیست و هشتمین قدم با محاسبات کاشانی مشابه هستند.

کاشانی به ترتیب روبرو محاسباتش را انجام داد:

$$n = ۳، ۶، ۱۲، ۴۸، ...، ۳\times۲^{۲۸}$$

که مقدار C_n عبارت بود از:

$$\tilde{C_n} = ۱۲۰\cdot\cos ۱۸۰/n،\ C_{۲n} = \sqrt{۶۰\cdot(۱۲۰ + C_n)}$$

و در مورد ون کیولن به قرار زیر بود:

$$n = ۲۴، ۴۸، ...، ۳\times۲^{۳۱}$$

$$\tilde{C_n} = ۲\cos ۱۸۰/n،\quad \tilde{C}_{۲n} = \sqrt{۳۲ + \tilde{C}_n}$$

که البته $C_n = ۶۰\cdot\tilde{C_n}$

شکل ۱۱: نقش حک شده بر سنگ قبر لودلف ون کیولن در کتاب راهنمای مسافرتی مربوط به قرن هجدهم.[۲۵]

تخمین عدد π با ۳۵ رقم اعشار هرگز طی زمان زندگی ون کیولن انتشار نیافت ولی به هنگام

25. Reproduced from R.M. Th. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg, J. Top, Het grafschrift van Ludolph van Ceulen [The inscription on the Tomb of Ludolph van Ceulen], *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5e serie, 1 (2000), p. 159.

مرگش به سال ۱۶۱۵ م بر مقبره‌اش در کلیسای لیدن در هلند حکاکی شد. در قرن نوزده میلادی این سنگ قبر طی یک سری عملیات ساختمانی در محوطهٔ کلیسا ناپدید شد. خوشبختانه سنگ نبشته‌های مقبره در یک کتاب راهنمای مسافرتی انگلیسی مربوط به قرن ۱۸ م محفوظ بود (شکل ۱۱ را ببینید) و به سال ۲۰۰۰ م ـ سال جهانی ریاضیات ـ انجمن ریاضی هلند سنگ قبر را مجدداً بناکرد و در ۶ جولای ۲۰۰۰ طی مراسمی با حضور پادشاه هلند پس از سخنرانی تاریخی پرفسور هنک باس[۲۶] از اترخت در کلیسا نصب شد.

ضمیمه‌ها

ضمیمهٔ ۱:

محاسبهٔ محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی محاطی منتظم برحسب مقدار ارتفاع وارد بر ضلع محاطی و شعاع مربوطه:

برای اینکه ببینیم چگونه کاشانی موفق به محاسبهٔ محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی درون و برون دایره‌ای به شعاع R شد به محاسبات زیر توجه می‌کنیم:

فرض می‌کنیم:

طول چند ضلعی منتظم محاطی = a

طول چند ضلعی منتظم محیطی = b

شعاع دایره‌ای به مرکز o برابر باشد با R

ارتفاع وارد بر ضلع محاطی و محیطی برابر باشد با h

$\sin\alpha = a/۲R = a/۲R \rightarrow a = ۲R\sin ۱۸۰/n \xrightarrow{R=۶۰} = ۱۲۰\sin ۱۸۰/n$

$tg\,\alpha = b/۲R = b/۲R \rightarrow b = ۲R\,tag\, ۱۸۰/n \rightarrow b = ۱۲۰\, tg\, ۱۸۰/n$

$\cos\alpha = h/R \rightarrow h = R\cos ۱۸۰/n \rightarrow ۲h = ۱۲۰\cos ۱۸۰/n = C_n$ ۱

این مقدار C_n اخیر یعنی $C_n = ۲h = ۱۲۰\cos ۱۸۰/n$ مقداری است که کاشانی را قادر ساخت تا محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی را تا ۳×۲^{۲۸} ضلعی محاسبه کند. دلیل این امر در تساوی مثلثاتی زیر نهفته بود:

26. Henk J.M. Bos, De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wishunde [The Circle Divided, the Circumference Computed, and Pi Engraved: Ludolph van Ceulen and the Challenge of Mathematics], *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5. Series. 1 (Sept. 2000), pp. 259 - 262.

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \rightarrow$

$\cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha \rightarrow$

حال از روابط ۱ و ۲ داریم: $۲\cos\alpha = \sqrt{۶۰(۱۲۰ + C_n)}$

چرا که با توجه به رابطهٔ ۱ مقدار $\cos ۱۸۰/n$ را بر اساس C_n محاسبه و نتیجه را در رابطهٔ ۲ قرار دادیم و به رابطه‌ای بین C_n و $C_{۲n}$ رسیدیم. حالا چنانچه از یک سه ضلعی که کوچکترین چند ضلعی هاست، شروع کنیم می‌توان شش ضلعی را هم محاسبه و همین طور محاسبات را ادامه دهیم تا به C_n یک ۳×۲^{۲۸} ضلعی برسیم. از این به بعد محاسبهٔ محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی محاطی ساده است چرا که داریم:

محاطی $P_{۳\times۲}{}^{۲۸} = n\times a = ۲n\times\sqrt{R^{۲}-h^{۲}} = n \times \sqrt{4R^{۲} - 4h^{۲}}$

۳×۲^{۲۸} = محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاطی در دایره‌ای به شعاع ۶۰ به روش مشابهی کاشانی محیط ۳×۲^{۲۸} ضلعی محیطی را هم یافته پس از گرفتن میانگین، عدد π را با ۱۶ رقم اعشار محاسبه می‌کند.

ضمیمه ۲:

معرفی سری تیلور

سری تیلور مبحثی در ریاضیات سریهای توانی است که قضیهٔ مربوط به آن به شرح زیر است:

تابعی در فاصلهٔ $X_{\circ} - R < X < X_{\circ} + R$ و بی نهایت بار مشتق‌پذیر، قابل تبدیل به سری توانی زیر است: (سری تیلور)

$f(x) =_{\circ}) + f'(x_{\circ})/ ۱! (x-x_{\circ}) + f''(x_{\circ})/۲! (x-x_{\circ})^{۲} +\ldots + f^{(n)}(x_{\circ})/n!(x-x_{\circ})^{n} + \ldots$

f(x

به شرط آنکه: $\lim Rn(x) = \lim f^{(n+۱)}(c)/(n+۱)! (x-x_{\circ})^{n+۱} = 0$

که در آن:

$C= x_{\circ} + \theta(x-x_{\circ}) \circ<\theta<۱$

و باقیمانده فرمول تیلور: Rn(x

به ازای $x_{\circ}$ سری تیلور حالت خاصی دارد که موسوم به سری مک لورن می‌باشد یعنی:

$x_{\circ} = \circ \quad f(x)=f(\circ) +f'(\circ)/۱! x+f''(\circ)/۲! X^{۲} + \ldots$

نظر به سری مک لورن، توابع پایهٔ مثلثاتی از قبیل cos x,sin x,... قابل تبدیل به بسطهای

مختلفی هستند و بر همین اساس بسط مک لورن تابع $tg^{-1}x$ عبارت خواهد بود از:

$$\tan^{-1}x = x - x^{3}/3 + x^{3}/5 - x^{7}/7 + \dots \quad -1 < x < 1$$

که شارپ از رابطه اخیر برای تقریب عدد π استفاده کرده بود؛ بدین ترتیب که با جایگذاری عدد π به جای متغیر x به مقدار زیر دست یافت:

$$\pi/6 = tg^{-1}\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 - 1/3\times 3 + 1/5 \times 3 - \dots)$$

ضمیمهٔ ۳:

سیر تاریخی روش‌شناسی تقریب عدد π

به نظر می‌رسد می‌توان تقریب عدد π را به لحاظ روش‌شناسی در چهار بازه زمانی متفاوت به شرح جدول زیر تقسیم بندی نمود:

ادوار گوناگون تقریب عدد π لحاظ روش‌شناسی:

نام دوره	روش	بازهٔ زمانی	حد نهایی اعشارحاصل
۱. ریاضیات باستان	شهودی	۲۰۰۰ پ.م ـ ۲۵۰ پ.م	۱
۲. دورهٔ اول علمی	افناء	۲۵۰ پ.م ـ ۱۷۲۲ م	۴۱
۳. دورهٔ دوم علمی	سری تیلور	۱۶۹۹ م ـ ۱۹۴۸ م	۸۰۸
۴. دورهٔ علمی فنی	کامپیوتری	۱۹۴۹ م ـ زمان حاضر	2×10^{11}

می‌بینیم که ادوار تاریخی تقریب عدد π قدمتی چهارهزار ساله دارد و از دوران پیشا علمی (به معنای امروزی آن) تا عصر کامپیوترها در بر می‌گیرد. آنچه دورهٔ اول ریاضیات باستانی را از سایر ادوار متمایز می‌کند عدم وجود الگو و روش، و تکیه بر استنباط شهودی و جداول پایه می‌باشد. طی دوران علمی، روش‌ها شکل می‌گیرند. دوران اول علمی دورهٔ علوم هندسه و مثلثات است که ریشه در علوم باستانی دارند ولی دورهٔ دوم علمی که مقارن با عصر روشنگری و آغاز دورهٔ مدرنیسم در اروپا است، زمان ریاضیات بی نهایت کوچک هاست که میوه‌هایی چون سری تیلور و مک لورن را عرضه می‌دارند و بالاخره دورهٔ چهارم عصری است که از تک‌روی علوم نشانی به جا نمانده است. بدین معنا که ائتلافی از علم و فن در محاسبات شکل گرفته است و ظرف نیم قرن به رقم عظیم 2×10^{11} اعشار از عدد π رسیده‌ایم به طوری که محاسبات اخیر بسیار نهایی و کافی و یا حتی کمی هم بیشتر از کافی به نظر می‌رسند ولی فراموش نکنیم که بشر همواره باتکیه بر انگیزه‌ها و مقایسه ادوار گذشته چنین برداشتی راجع به خود داشته است. علوم آینده نیازها و انگیزه‌های جدیدتری می‌آفرینند و هیچ جای تعجبی ندارد اگر روزگاری دور،

دوران پنجمی هم حاصل شود؛ هرچند که این امر، فعلاً خیلی بعید به نظر برسد.

ضمیمهٔ ۴

ترجمه بخشی از مقدمه‌ی رسالهٔ محیطیه

بسم اللّه الرحمن الرحیم

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است. و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمان‌ها و قرار دهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و برخاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمود حذف طبیب کاشانی ملقب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند می‌گوید: «ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از ۷ / ۱ و بیشتر از ۷۱ / ۱۰ قطر، بزرگتر است. پس تفاوت بین این دو مقدار ۱/۴۹۷ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد و در فلک البروج (در محیط...) در حدود بسیار بیش از صدهزار فرسنگ مجهول است، و این مقادیر که در محیط‌ها (این اندازه) زیاد هستند در مساحت (ها) چه خواهند بود؟ این به علت آن است که وی (= ارشمیدس) محیط ۹۶ ضلعی محاط در دایره را استخراج کرده است و آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد زیرا هر ضلع آن از قوس روبروی آن کوچکتر است و مجموع اضلاع آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد و (ارشمیدس) محیط چند ضلعی دیگری را که مشابه با اولی و محیط بر (همان) دایره است استخراج کرده و به مدد قضیه اول نخستین مقالهٔ کتاب خود به ثبوت رسانیده است که آن از محیط دایره مذکور بزرگتر است و تفاوت بین آنها (= در محیط) همان است که گفته شد.