

مقایسه روشهای ابوالوفای بوزجانی، لئوناردو داوینچی و آلبرش دورر در ترسیم پنج ضلعی منتظم*

جعفر آقایانی چارشی

پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات

و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله پس از ذکر مطالبی درباره خواص پنج ضلعی منتظم و روش ترسیم آن با خطکش و پرگار روشهای ابوالوفای بوزجانی و لئوناردو داوینچی و آلبرش دورر را برای رسم این شکل مورد تحلیل قرار داده و پس از بیان نقاط ضعف و قوت هر یک از آنها، زیباترین آنها را معرفی می‌نمائیم.

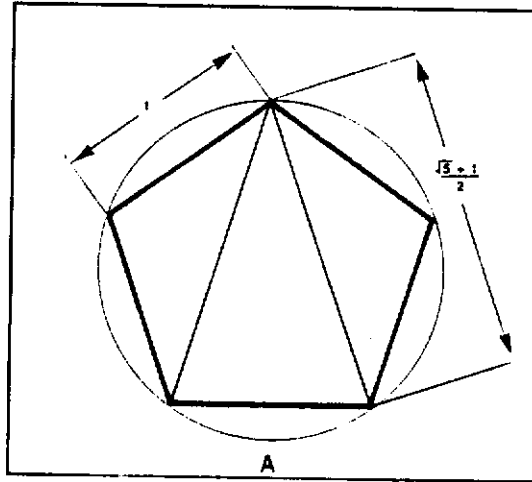
کلید واژه‌ها

پنج ضلعی منتظم؛ عدد طلایی؛ ابوالوفای بوزجانی؛ لئوناردو داوینچی؛ آلبرش دورر؛ ترسیم زیبا

مقدمه

آشنایان با هندسه می‌دانند که نسبت قطر پنج ضلعی منتظم به ضلع آن برابر با عدد ϕ یا «عدد طلایی» است. عددی که گویی با شهود زیباشناسی آدمی آمیخته است و هرگاه در آثار هنری و یا معماری بکار رود زیبایی را در آن آثار به ارمغان می‌آورد. همین رابطه با عدد زیبایی است که پنج ضلعی منتظم را در هاله‌ای از تقدس و اسرار فرو برده است.

* این مقاله متن سخنرانی نویسنده است که در دومین همایش ملی ایرانشناسی در اول دی‌ماه ۱۳۸۳ در تهران ایراد کرده است.



شکل ۱

بی‌جهت نیست که این شکل هندسی را پیروان مکتب فیثاغورس در دوهزار و پانصد سال پیش نماد مذهبی خود قرار داده و آن را مقدّس می‌شمرده‌اند.

ملل دیگر نیز از چشم‌اندازهای دیگری به این شکل پرراز و رمز نگریسته و بفراخور حال خود از آن بهره گرفته‌اند. از همین روست که هندسه‌دانان و یا هنرمندان این ملتها برای ترسیم این شکل روشهایی ارائه داده‌اند— روشهایی با خط‌کش و پرگار تا بتوان به‌آسانی آن را رسم کرد. ما در این مقاله سه روش مختلف رسم پنج‌ضلعی منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از این روشها متعلق به ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان ایرانی است و دو روش دیگر به دو هنرمند اروپایی یعنی داوینچی و دورر تعلق دارند.

غرض اصلی از ارائه این سه روش مقایسه فنی این روشهاست تا نقاط ضعف و قوت هر یک شناخته شده و در نتیجه زیباترین ترسیم آشکار گردد.

لازم به یادآوری است که در هندسه، ترسیمی را زیبا می‌نامیم که دارای حداکثر دقت و حداقل عملیات ترسیمی باشد. در این مقاله پس از اشاره‌ای به خواص پنج‌ضلعی منتظم به مطلب اصلی یعنی مقایسه سه روش ترسیم آن، خواهیم پرداخت.

۱- خواص پنج‌ضلعی منتظم

۱-۱ امکان ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار

پنج‌ضلعی منتظم، همانطوری که بعداً به اثبات آن خواهیم پرداخت، با خط‌کش و پرگار قابل

ترسیم است. به همین جهت است که اقلیدس نیز روشی با استفاده از همین آلات، برای ترسیم آن ارائه داده که در کتاب اصول او مندرج است.

۲-۱ وجود در طبیعت

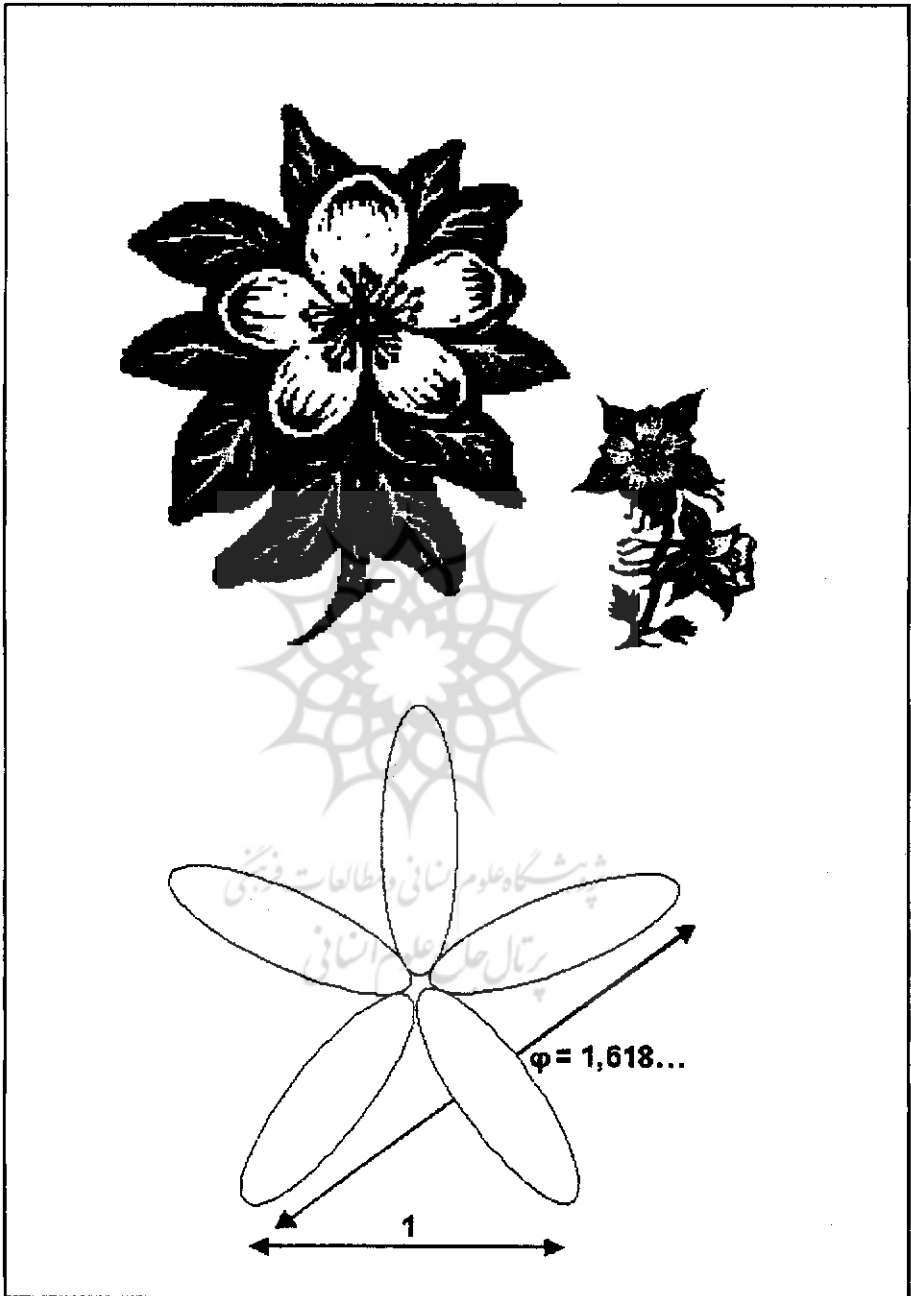
پنج ضلعی منتظم جزو محدود اشکال هندسی است که به وفور در طبیعت یافت می‌شود. این شکل را مخصوصاً می‌توان در میان بسیاری از ستارگان دریایی و گلها مشاهده کرد. علت این امر بر ما پوشیده است، با این حال ابوریحان بیرونی ریاضیدان بزرگ ایرانی نظریه زیر را بویژه درباره شکل هندسی گلها بیان داشته است به نظر او وجود گلهایی به شکل پنج ضلعی از ترسیم پذیری این شکل با خط‌کش و پرگار سرچشمه می‌گیرد. مگر نه آنست که طبیعت ساده‌ترین راه را برمی‌گزیند. او می‌نویسد:

«در میان گلها بعضی ویژگیها موجود است که واقعاً شگفت‌انگیز است. به عنوان مثال تعداد گلبرگهایی که رئوس آنها هنگام شکوفایی دایره می‌سازند، اغلب از قوانین هندسی متابعت می‌کنند. معمولاً گلبرگها از نظر هندسی نه با مقاطع مخروطی بلکه با وترهای یک دایره مطابقت دارند.

انسان به سختی می‌تواند گلی بیابد که دارای هفت و یا نه گلبرگ باشد. علت این امر آن است که نمی‌توان با اصول هندسی (یعنی خط‌کش و پرگار) درون دایره چنین اشکالی ساخت. شماره گلبرگها، همواره سه، چهار، پنج، شش یا هجده است و در طبیعت ما اغلب به گلهایی با چنین ویژگی برخورد می‌کنیم. شاید روزی بتوان گلی با تعداد هفت و یا نه گلبرگ پیدا کرد. یا در میان انواع گلهایی که تاکنون شناخته شده‌اند گلی با همین تعداد گلبرگ یافت. اما باید اذعان کرد که طبیعت جنس‌ها و گونه‌ها را به همان گونه که هستند نگه می‌دارد.»^۱ از میان گلهایی که شکل پنج ضلعی منتظم دارند، گلهایی از خانواده گل سرخ ساده می‌باشند که در زیر شکل یکی از آنها را مشاهده می‌کنیم

۱. عین نوشته بیرونی چنین است: «بلی فی خاصیات الزهر شیء، هو موضع التعجب: و هو أن عدد أوراقها، ألتی تحوز أطرافها دائرة عند انفتاحها، جار فی اغلب الامر علی قضا بالهندسة، و موافق فی اکثر الاحوال للاوتار، التی وجدت بالاصول الهندسیة، دون القطوع المحروطیه؛ فلا تکاد تحرز هذه من الزهر یكون عدد أوراقها سبعة أو تسعة، لامتناع عملها بالاصول الهندسیة الدائرة بل یكون ثلاثة و اربعة و خمسة و ستة فی و ثمانية و عشرة؛ و هذا امره اکثر الوجود، و ممکن ان یوجد فی الاحابین. جنس للسبعة و التسعة، او یوجد فی خلال الاتواع المذكورة. عدد کذا لک؛ و ان کانت الطبیعة، تحفظ الاجناسی والاتواع ...»

(ابوریحان بیرونی، الآثار الباقیه، تحقیق و تعلیق پرویز اذکانی، تهران، میراث مکتوب ۱۳۸۰ ه. ش. ص ۳۷۰)

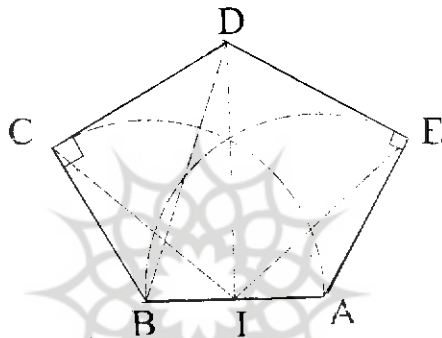


شکل ۲ گلی از خانواده گل سرخ ساده

۲- پنج ضلعی منتظم در هنرهای تزئینی و معماری اسلامی

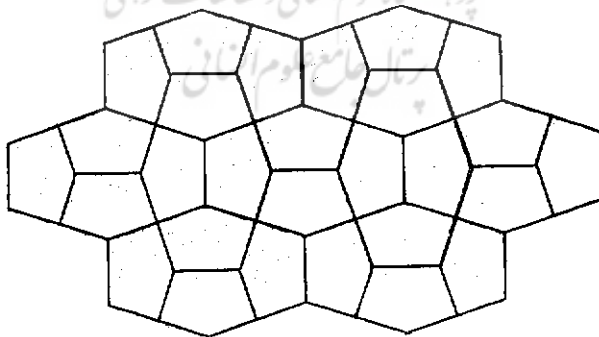
از پنج ضلعی‌های منتظم یکنواخت، نمی‌توان در یک کاشیکاری استفاده کرد. شایان ذکر است که: «یک کاشیکاری صفحه، خانواده‌ای از عناصری به نام «کاشی» است که صفحه را بدون شکاف یا بدون اصطکاک می‌پوشانند.»^۲

برای کاشیکاری با کاشیهای یکنواخت، پنج ضلعی، تنها باید از کاشیهای پنج ضلعی شبه منتظم بهره برد، که یکی از آنها پنج ضلعی متساوی‌الاضلاعی است که دو زاویه آن قائمه باشد. در شکل زیر این نمونه از کاشیها را مشاهده می‌کنیم. کاشیکاری با این پنج ضلعی‌ها را «کاشیکاری



شکل ۳

قاهره» می‌نامند، زیرا از این نوع کاشیکاری در قاهره و بعضی از بلاد اسلامی استفاده می‌شود.

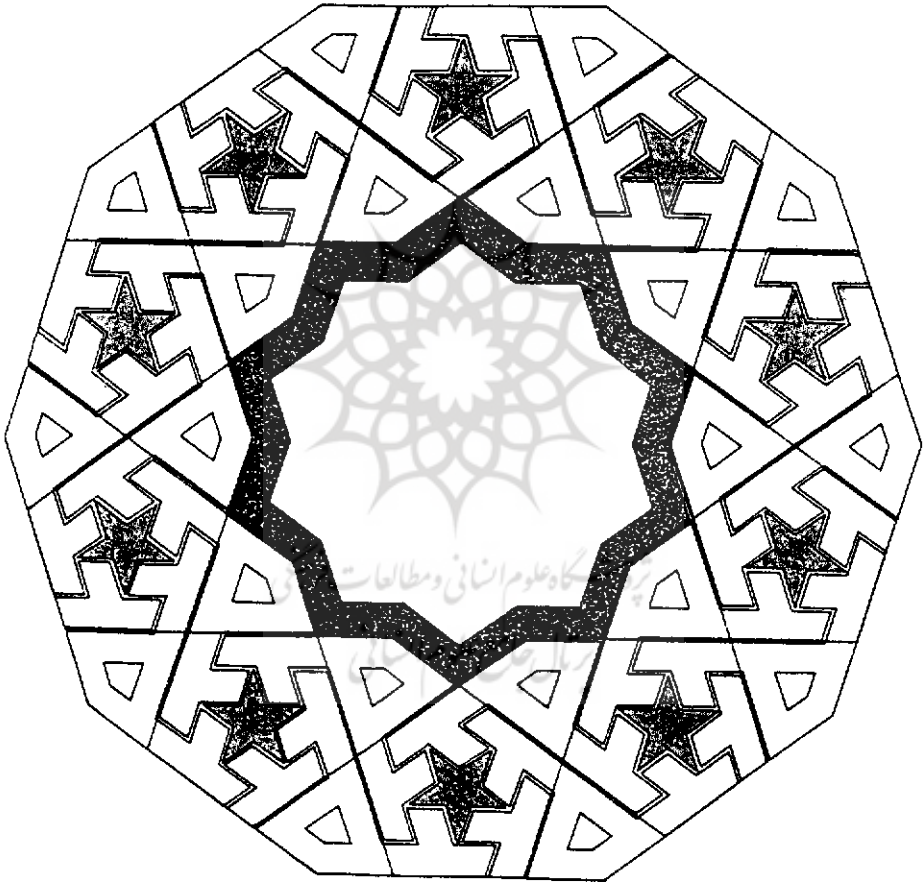


شکل ۴ کاشیکاری قاهره

۲. برانکو گرانام جفری، س. شیفارد «کاشیکاری با چندضلعی‌های منتظم» پیک ریاضی، ترجمه فرهاد خلت ج ۳

۱-۲ هنرهای تزئینی اسلامی

گرچه از پنج ضلعی منتظم در کاشیکاری استفاده نمی‌شود، ولی این شکل در طرحهای روی جلد کتابها و در گچ بریهای اسلامی استفاده فراوان دارد. شکل زیر یک طرح تزئینی اسلامی را نشان می‌دهد که از قرار گرفتن ده پنج ضلعی منتظم پیرامون یک ده ضلعی منتظم ستاره‌ای تشکیل گردیده است.^۲

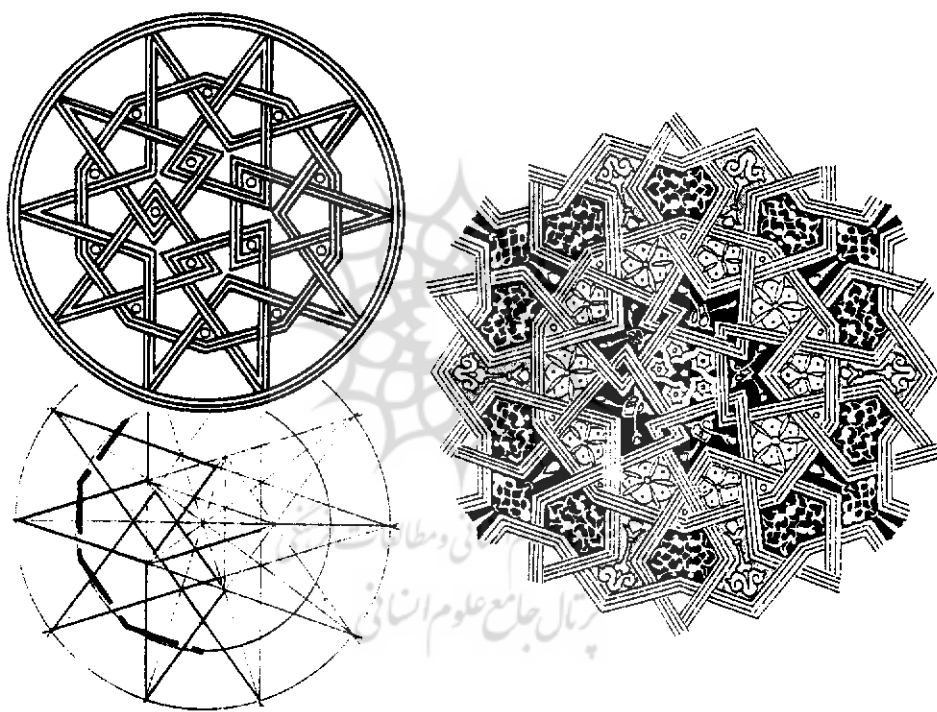


شکل ۵

۳. این شکل از کتاب زیر اقتباس گردیده است:

مقایسهٔ روشهای ابوالوفای بوزجانی، لئوناردو داوینچی و ... ۷

نمونه دیگری از این طرحها که با استفاده از پنج ضلعی منتظم صورت گرفته، در زیر نشان داده شده است.^۴ از این طرح بیشتر برای تزئین جلد قرآن استفاده می‌شود.



شکل ۶

۴. این طرح از کتاب زیر اقتباس گردیده است:

۲-۲ معماری اسلامی

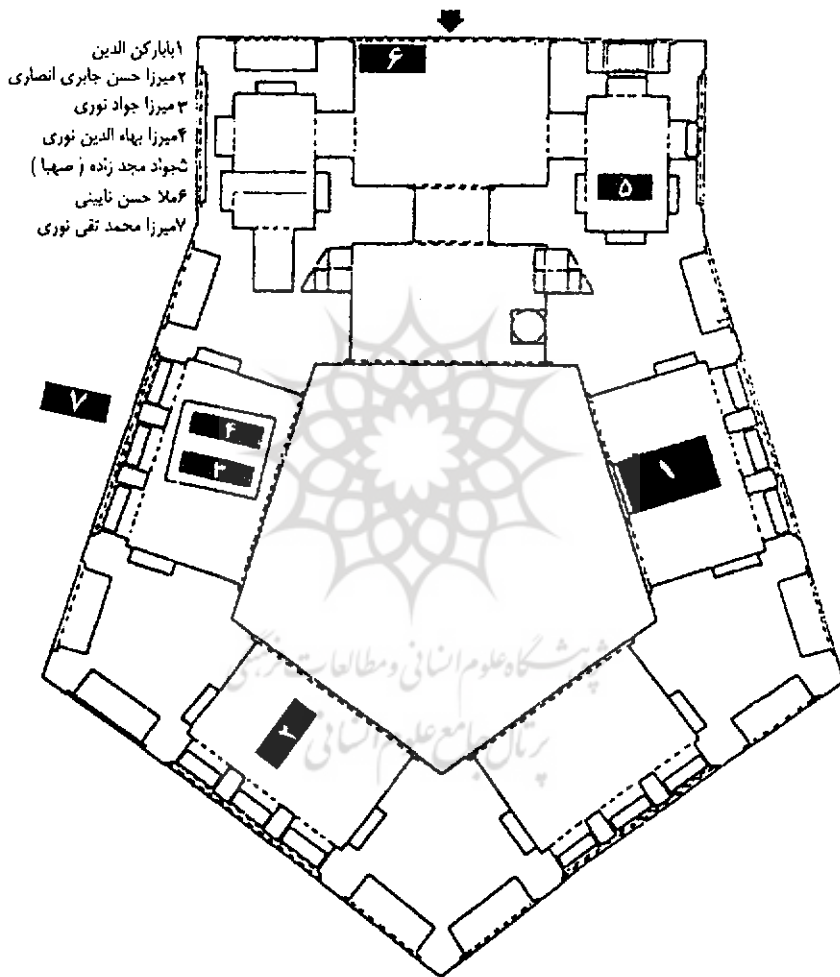
هنوز پژوهشی درباره استفاده از پنج ضلعی منتظم در معماری اسلامی صورت نگرفته است؛ با اینحال می‌توان حدس زد که این شکل از دیرباز مورد توجه معماران مسلمان در کشورهای اسلامی بوده است. در ایران «تکیه بابا رکن‌الدین» در اصفهان به شکل پنج ضلعی منتظم می‌باشد. البته همانطوری که در شکل ۷ در پلان این تکیه مشاهده می‌کنیم قبر بابا رکن‌الدین که از عرفای قرن هشتم هجری است در یک ضلع این پنج ضلعی قرار دارد.



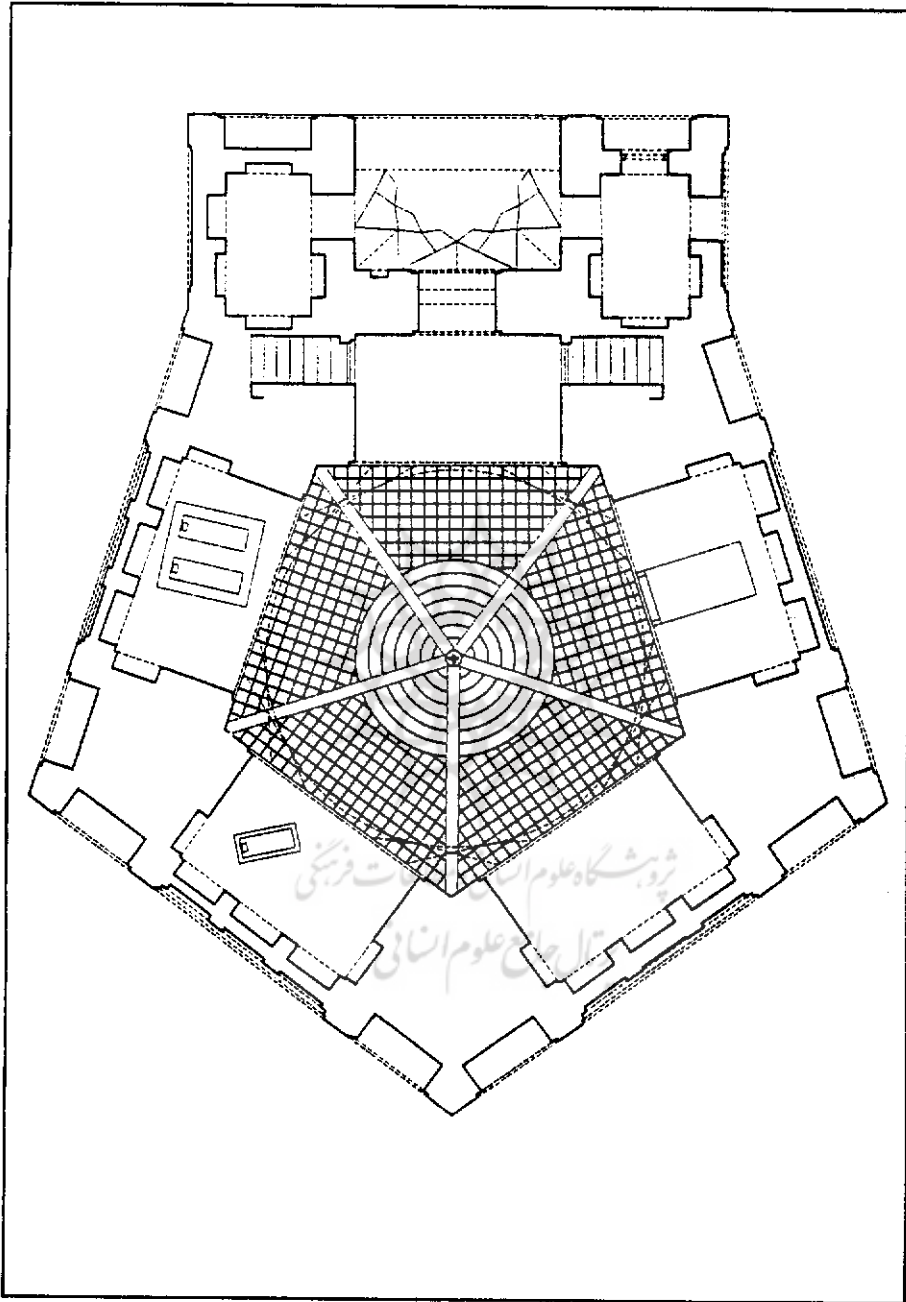
شکل ۷ مقبره بابا رکن‌الدین در اصفهان

مقایسه روشهای ابوالوفای بوزجانی، لئوناردو داوینچی و ... ۹

شکل ۸ پلان تکیه بابا رکن‌الدین را نشان می‌دهد.
در شکل ۹ تصویر دیگری از این پلان را مشاهده می‌کنیم.



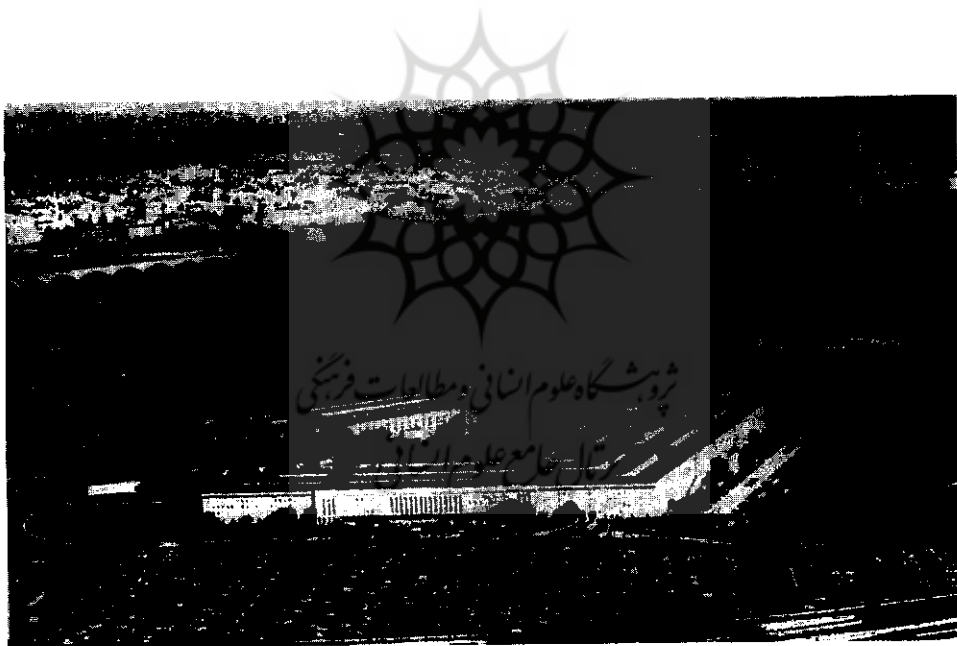
شکل ۸



شکل ۹ تصویر دیگری از پلان تکیه بابا رکن‌الدین

۲-۳ پنج ضلعی منتظم در معماری غیراسلامی

در ممالک غیر اسلامی، پنج ضلعی منتظم بیشتر در معماری بکار رفته است. گویی ساکنان این سرزمینها می خواسته اند تا در میان خانه های راست گوشه و کنار هم قرار گرفته یکنواخت، ساختمانی بنا کنند که از این یکنواختی خارج گردیده و چشمان را مجذوب خود کند. این است که قصرهای قدیمی و یا مراکز نظامی در غرب بیشتر به شکل پنج ضلعی منتظم بوده است. امروزه نیز بزرگترین مرکز سیاسی آمریکا یعنی پنتاگون، از همین ویژگی برخوردار است که ما تصویری از آن را در زیر مشاهده می کنیم.^۵



شکل ۱۰

۵. این عکس از کتب زیر گرفته شده است:

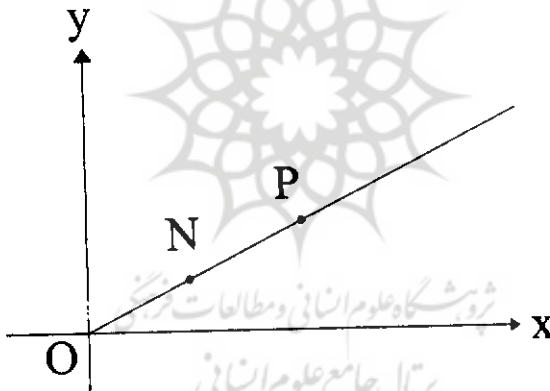
۳- امکان ترسیم پنج ضلعی منتظم با خطکش و پرگار

در این بخش امکانپذیری ترسیم پنج ضلعی منتظم را با خطکش و پرگار ثابت خواهیم کرد.^۶ پیش از این کار به چند تذکر مهم به شرح زیر نیازمندیم:

۱-۳ معادله پارامتری یک خط راست

در اینجا تنها به معادله پارامتری خطوطی که از مرکز مختصات عبور می‌کنند می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\vec{ON} = (a, b)$ بردار واحدی روی پاره خط OP باشد (شکل ۱۱). معادله پارامتری خط OP چنین خواهد بود:

$$OP : \begin{cases} x = at \\ y = bt, a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$



شکل ۱۱

طول OP نیز برابر خواهد بود با:

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = \sqrt{a^2 + b^2} |t| = |t|$$

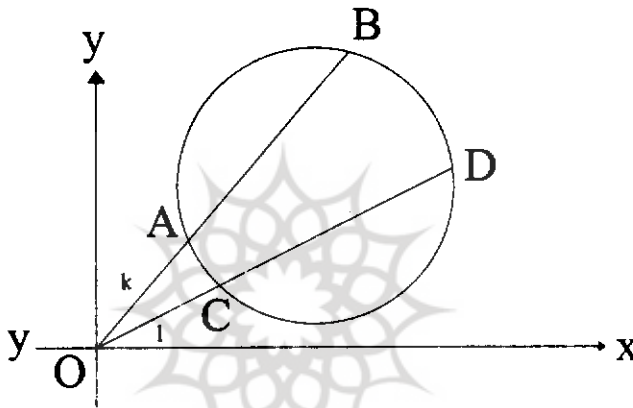
۶. در این بخش از مقاله زیر استفاده کرده‌ایم:

۲-۳ قضیه:

هرگاه k و l دو خط متاثر بر مرکز مختصات باشند و نقاط A و B روی k و D و C روی l طوری قرار گیرند که داشته باشیم:

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

در این صورت چهار نقطه مذکور روی یک دایره اند.



شکل ۱۲

اثبات: فرض می‌کنیم که معادلات پارامتری خطوط k و l به ترتیب از قرار زیر باشند:

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt, a^2 + b^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = ds \\ y = es, d^2 + e^2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین مختصات هر یک از این نقاط از این قرار است:

$$A = (at_1, bt_1), B = (at_2, bt_2), C = (ds_1, es_1) \text{ و } D = (ds_2, es_2)$$

در این صورت رابطه $(OA) \cdot (OB) = (OC) \cdot (OD)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$t_1 t_2 = s_1 s_2$$

حال مختصات این چهار نقطه را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$(x_1, y_1) = (at_1, bt_1), (x_2, y_2) = (at_2, bt_2), (x_3, y_3) = (ds_1, es_1)$$

$$(x_4, y_4) = (ds_2, es_2)$$

شرط اینکه این چهار نقطه روی یک دایره باشند، این است که داشته باشیم:

$$\text{de}'t \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} = \text{de}'t \mathcal{R} = 0$$

یعنی دترمینان ماتریس \mathcal{R} باید برابر با صفر باشد.

در ماتریس \mathcal{R} به جای x_i و y_i ($i = 1, \dots, 4$) مقادیر آنها را جایگزین می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\text{de}'t \mathcal{R} = \text{de}'t \begin{pmatrix} t_1^2 & at_1 & bt_1 & 1 \\ t_2^2 & at_2 & bt_2 & 1 \\ s_1^2 & ds_1 & es_1 & 1 \\ s_2^2 & ds_2 & es_2 & 1 \end{pmatrix}$$

حال سطر اول این ماتریس را در t_2 و سطر دوم را در t_1 و سطر سوم را در s_2 و سطر چهارم را در s_1 ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\text{de}'t \mathcal{R} = t_1 t_2 \begin{vmatrix} t_1 & a & b & t_2 \\ t_2 & a & b & t_1 \\ s_1 & d & e & s_2 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix}$$

این دترمینان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} t_1 & a & b & t_2 \\ t_2 & a & b & t_1 \\ s_1 & d & e & s_2 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & 0 & t_2 - t_1 \\ s_1 - s_2 & 0 & 0 & s_2 - s_1 \\ t_1 & a & b & t_1 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix} = (t_1 - t_2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & s_2 - s_1 \\ a & b & t_1 \\ d & e & s_1 \end{vmatrix} - (t_1 - t_2) \begin{vmatrix} s_1 - s_2 & 0 & 0 \\ t_2 & a & b \\ t_2 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (t_1 - t_2) [(s_2 - s_1)(ae - db) - (s_2 - s_1)(ae - db)] = 0$$

بنابراین چهار نقطه A, B, C, D روی یک دایره‌اند.

۳-۳ حل هندسی معادله درجه دوم

معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

که در آن a, b و c اعداد حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، واضح است که:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

روی محور y‌های دستگاه مختصات نقاط زیر را در نظر می‌گیریم

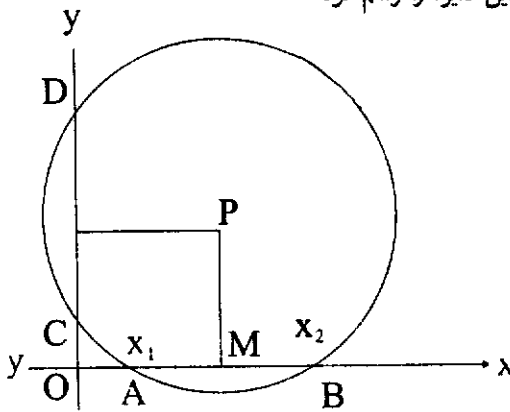
$$C = (0, 1) \text{ و } D = \left(0, \frac{c}{a}\right).$$

همچنین فرض می‌کنیم $B = (x_2, 0)$ و $A = (x_1, 0)$ بوده و M وسط قطعه خط AB باشد. در این صورت داریم: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$ (شکل ۱) از آنجایی که:

$$(OA)(OB) = x_1 x_2 = (OC)(OD),$$

پس بنا به قضیهٔ پیشین چهار نقطه A, B, C, D روی یک دایره قرار گرفته‌اند. برای یافتن

ریشه‌های x_1 و x_2 باید این دایره را رسم کرد.



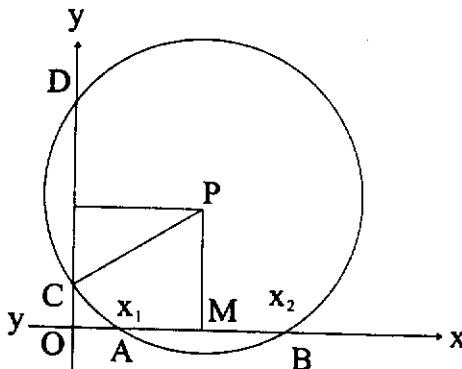
شکل ۱۳

برای این منظور کافی است عمودی از نقطه M بر محور OX رسم کنیم و عمود دیگری از وسط CD روی OY رسم نماییم. محل تلاقی این دو عمود یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. حال اگر به مرکز P و به شعاع PC دایره‌ای رسم کنیم، این دایره محور OX را در نقاط x_1 و x_2 قطع خواهند کرد.

بحث

برای اینکه تعیین ریشه‌ها امکانپذیر باشد، باید دایره مطلوب محورهای OX و OY را قطع نماید. به تعبیر دیگر باید داشته باشیم: $PC > PM$. اما مختصات نقطه P چنین است.

$$P = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{a} \right] \right)$$



شکل ۱۴

از نامساوی $PC > PM$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \left(1 - \frac{a+c}{2a}\right)^2} > \left(\frac{a+c}{2a}\right)$$

این نامعادله پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آید:

$$b^2 - 4ac > 0$$

هرگاه دایره بر OX مماس باشد. در این حالت $PC = PM$ خواهد بود. در این صورت معادله دارای ریشه مضاعف است:

$$b^2 - 4ac = 0$$

هنگامی که دایره محور OX را قطع نکند در این صورت:

$$b^2 - 4ac < 0$$

و ریشه‌های معادله موهومی خواهند بود.

امکان ترسیم پنج ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار

هرگاه در دایره به شعاع واحد پنج ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_5$ را در نظر بگیریم و محور OX را منطبق بر OA_1 انتخاب نمائیم آفیکس‌های (affixe) رئوس این پنج ضلعی ریشه‌های معادله زیر می‌باشند:

$$Z^5 - 1 = 0$$

به این معنی که مختصات x و y هر رأس را می‌توان جزء حقیقی و موهومی عدد مختلط Z دانست. یعنی: $Z = x + iy$.

یکی از ریشه‌های این معادله $Z_0 = 1$. آفیکس نقطه A_1 می‌باشد. بنابراین پنج ریشه این معادله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Z^5 - 1 = (Z - 1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$$

بنابراین پنج ریشه این معادله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z = \cos \theta + i \sin \theta = x_1 + iy_1 \\ Z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = x_2 + iy_2 \\ Z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = x_3 + iy_3 \\ Z^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta = x_4 + iy_4 \\ Z^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta = x_5 + iy_5 \end{cases}$$

همانطوری که ملاحظه می‌شود Z^2 مزدوج Z می‌باشد، به همین ترتیب Z^3 مزدوج Z^4 است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}(Z + Z^5) = x_1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}(Z^2 + Z^4) = x_2$$

از طرف دیگر داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(Z + Z^2 + Z^3 + Z^4) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و} \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4}(Z + Z^5)(Z^2 + Z^4) = \frac{1}{4}[Z^3 + Z^6 + Z^7 + Z^9]$$

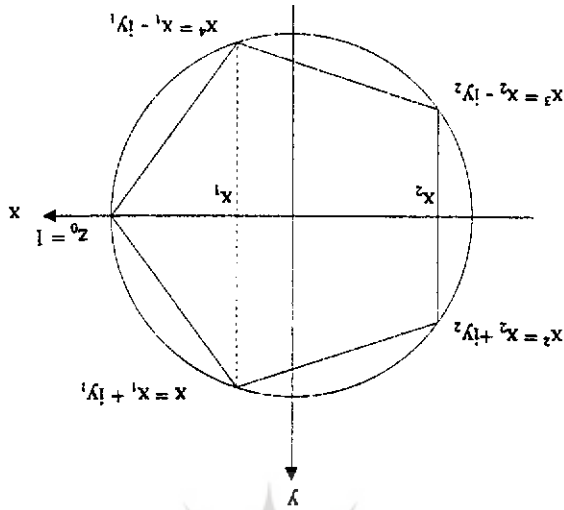
$$= \frac{1}{4}[Z^3 + Z^2 + Z + Z^4] = -\frac{1}{4}$$

پس x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم زیر می‌باشند:

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

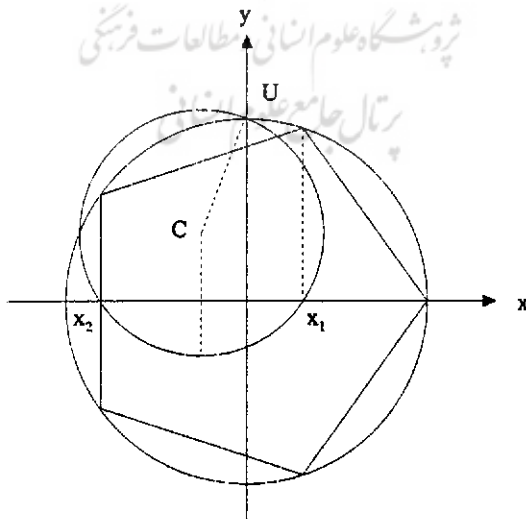
حال برای تعیین x_1 و x_2 به شکل ترسیمی عملیات زیر را انجام می‌دهیم:
فرض می‌کنیم، $U = (0, 1)$ بنا براین دایره به مرکز:

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{a} \right] \right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right)$$



شکل ۱۵

و به شعاع CU محور x ها را در نقاط: x_1 و x_2 قطع خواهد کرد. عمودهایی از نقاط x_1 و x_2 بر محور x ها رسم می‌کنیم تا دایره به شعاع واحد را در چهار نقطه‌ای که چهار رأس پنج‌ضلعی مطلوب می‌باشند، قطع کنند، رأس پنجم نیز روی $(0, 1)$ قرار دارد.



شکل ۱۶

۴- روشهای بوزجانی، دورر و داوینچی برای ترسیم پنج ضلعی منتظم

۱-۴ روش بوزجانی

ابوالوفای بوزجانی، ریاضیدان و منجم عالیقدر ایرانی که در قرن چهارم هجری می‌زیسته است، صاحب آثار ارزنده‌ای در ریاضیات و نجوم است.

از جمله این آثار، کتابی است موسوم به نجارت و یا اعمال هندسی که ابوالوفا آن را برای تسهیل کار بتایان و معمارانی که با هندسه سر و کار داشته‌اند نگاشته است.

از این اثر که به زبان عربی نوشته شده است، دو ترجمه فارسی قدیمی موجود است. این کتاب شامل مباحثی بدیع و مبتکرانه در علم هندسه است. نیز بر اساس این کتاب می‌توان بوزجانی را مبتکر علم هندسه عملی در جهان اسلام نامید. زیرا هندسه‌دانان یونان باستان، تنها به هندسه نظری توجه داشتند و به دلایل فلسفی از کاربرد عملی این علم روی‌گردان بودند. هندسه اقلیدس نمونه بارزی از چنین دیدگاهی است. در این اثر مهم هیچگونه نشانه‌ای از کاربرد عملی هندسه وجود ندارد.

در عصر شکوفائی فرهنگ و تمدن اسلامی اگرچه ریاضیدانانی همچون خوارزمی، بنوموسی و ثابت بن قره، در آثار هندسی خود، به کاربرد عملی این علم نیز اشاراتی کرده‌اند. با این حال یک اثر منظم و منسجمی در این باب وجود نداشت. و کتاب بوزجانی نخستین کتابی است که در این زمینه تدوین یافته است.

از نکات ابتکاری دیگر این کتاب انجام یک رشته ترسیمات هندسی با خطکش غیر مندرج و پرگار با دهانه ثابت است. ابوالوفا پرگار با دهانه ثابت را ظاهراً از آن جهت استعمال کرده تا کار بتایان را به هنگام کار آسان کند و آنها را از باز و بسته کردن مداوم دهانه پرگار بی‌نیاز گرداند. این روش که بعدها در بین معماران و بنایان قدیمی رواج پیدا کرد، بتدریج وارد هندسه نظری نیز گردید و مخصوصاً هندسه‌دانان ایتالیایی عصر رنسانس بدان علاقمند گردیدند، و ترسیمات زیادی را با خطکش و پرگار با دهانه ثابت انجام دادند. این علاقه‌مندی تا آنجا پیش رفت که در قرن نوزدهم میلادی دو هندسه‌دان بزرگ اروپایی یعنی پونسله و اشتینر ثابت کردند که تمام ترسیمات هندسه مقدماتی را حداقل با یک خطکش و یک پرگار با دهانه ثابت می‌توان انجام داد.^۷

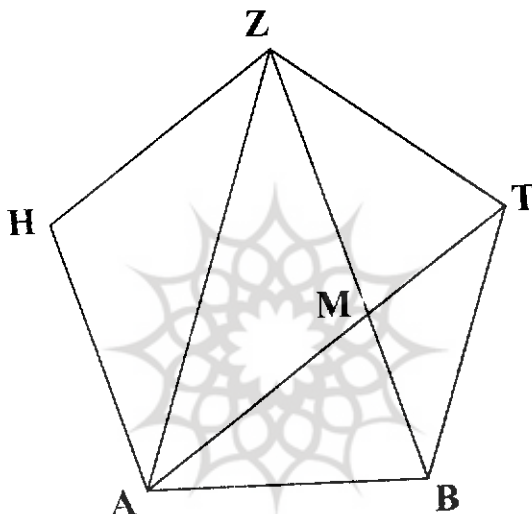
از جمله ترسیمات بوزجانی با خطکش و پرگار با دهانه ثابت ترسیم پنج ضلعی منتظم می‌باشد.

7. J. Victor Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822); Jacob Steiner, *Die geometrischen Konstruktionen ...* (Berlin, 1833); M. e. Stark (trans.), R. C. Archibald (ed.), *Jacob Steiner's Geometrical Constructions ...* (New York: *Scripta Mathematica*, 1950).

بوزجانی چون این روش را برای صنعتگران بیان کرده از ارائه برهان خودداری نموده است. حال آنکه ما برای فهم بهتر باید این برهان را بر رسم ابوالوفا اضافه نماییم.

ترسیم ابوالوفا مبتنی بر مشاهدات هندسی زیر است:

مسئله را حل شده انگاشته، فرض می‌کنیم $ABTZH$ پنج‌ضلعی منتظم مطلوب باشد که اقطار BZ و AT آن در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. نیز فرض می‌کنیم که ضلع AB از این پنج‌ضلعی مساوی a باشد. همانطوری که در شکل مشاهده می‌شود، هرگاه بتوانیم قطر این پنج‌ضلعی را



شکل ۱۷

بر حسب a بدست آوریم ترسیم آن آسان خواهد شد. دو مثلث ABT و BMT متشابه‌اند، زیرا زوایای یکی از آنها نظیر به نظیر با زوایای آن دیگری برابرند. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AT} = \frac{BM}{BT} \Rightarrow AB \cdot BT = AT \cdot BM$$

اما $AT = BZ$ و $AB = BT$ می‌باشد.

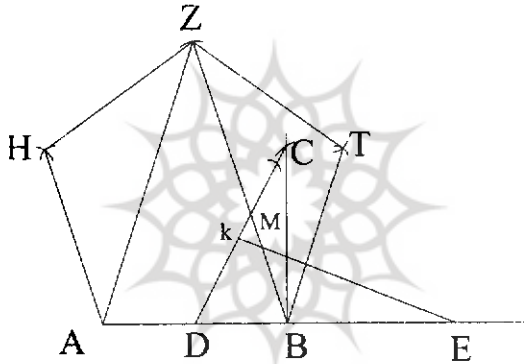
پس می‌توان رابطه قبلی را به صورت زیر نمایش داد:

$$\overline{BT}^2 = BM \cdot BZ$$

این رابطه نشان می‌دهد که هرگاه قطر یک پنج‌ضلعی منتظم را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نماییم، ضلع پنج‌ضلعی قسمت بزرگتر آن خواهد بود.

بنابراین هرگاه طول AB مفروض باشد، مسئله منجر به این می‌شود که روی امتداد AB نقطه‌ای مانند E بیابیم به طوری که هرگاه AE را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم AB قسمت اعظم آن گردد.

روش ابوالوفا برای تعیین این نقطه و نیز رسم پنج ضلعی منتظم از قرار زیر است: «از نقطه B از ضلع معلوم AB عمود BC را مساوی با AB بر آن اخراج می‌کنیم و نقطه C را به نقطه D وسط AB وصل کرده روی DC طول DS را برابر با AB جدا می‌کنیم. پاره خط DS را در نقطه K به دو قسمت مساوی تقسیم می‌نمائیم. از نقطه K عمودی بر DC اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع نماید.^۸» E همان نقطه مطلوب است که رسم پنج ضلعی را آسان می‌کند زیرا دو



شکل ۱۸

مثلث BCD و KED برابرند. بنابراین $ED = CD$ از آنجا:

$$\overline{ED}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = (DE + BD)(DE - BD) \\ &= AE \cdot BE \end{aligned}$$

با معلوم بودن E مثلث متساوی‌الساقین ABZ را روی ضلع AB می‌سازیم به طوری که دو ساق آن AZ و BZ مساوی با AE باشند.

۸. ابوالقاسم قربانی و محمد علی شیخان، بوزجانی نامه، تهران ۱۳۷۱ ص ۴۲

مقایسه روشهای ابوالوفای بوزجانی، لئوناردو داوینچی و ... ۲۳

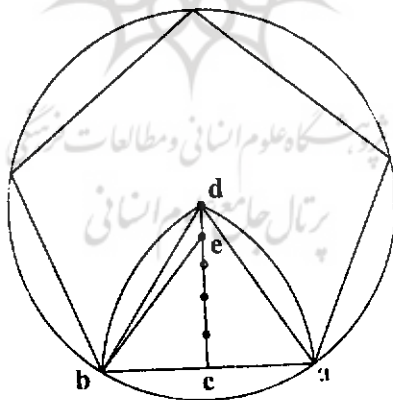
حال با پرگاری که دهانه ثابت آن مساوی AB است به مرکزهای A و Z کمانهایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در T قطع نمایند. به طریق مشابه کمانهایی به مراکز B و Z رسم می‌کنیم تا نقطه H به دست آید ABTZH پنج ضلعی مطلوب است.

۲-۴ روش ترسیم لئوناردو داوینچی

لئوناردو داوینچی نقاش و هنرمند برجسته ایتالیایی از کسانی بود که به هندسه علاقه فراوان داشت. از او رساله‌ای در تعلیم هندسه موجود است که شارل هانری (Ch. Henry) در سال ۱۸۸۴ میلادی آن را مورد بررسی قرار داده است. داوینچی در این اثر روش ترسیم پنج ضلعی را به صورت زیر شرح می‌دهد:

«هرگاه خط ab مفروض باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع adb را رسم کن. c وسط ab را به رأس d وصل نما و آن را به پنج قسمت مساوی تقسیم کن، یک شاخه پرگار را روی e یعنی چهارمین قسمت dc قرار بده و با شاخه دیگر دایره‌ای ترسیم کن، به طوری که دو انتهای خط ab را در بر بگیرد. مشاهده خواهی کرد که این خط ضلع پنج ضلعی خواهد بود.»^۹

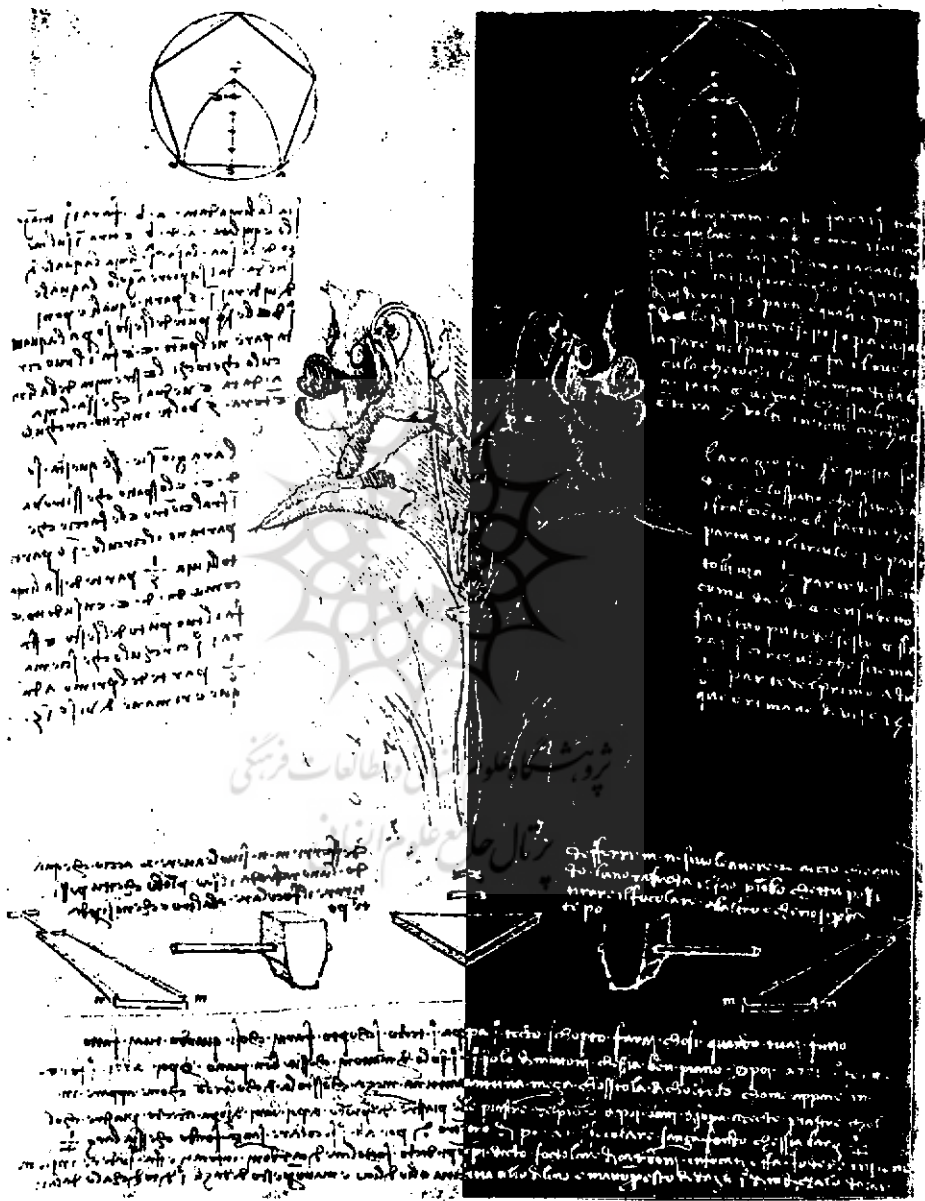
این ترسیم همان طوری که در زیر ثابت خواهیم کرد. دقیق نیست. یعنی پنج ضلعی حاصل یک



شکل ۱۹

پنج ضلعی منتظم نمی‌باشد.

9. -Ch.HENRY, "Les manuscrits de Léonard de Vinci et son enseignement géométrique", *Revue de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur*, N° 3 (1884), pp. 118-119



شکل ۲۵ دستور ساخت پنج ضلعی منتظم از داوینچی و به خط ابن هنرمند

اثبات:

نقطه e را به b وصل کرده، فرض می‌کنیم $\overline{eb} = r$ و $\overline{bc} = \alpha$ باشد. در مثلث متساوی‌الاضلاع abd داریم:

$$\overline{dc} = \sqrt{3}\alpha \Rightarrow \overline{ec} = \frac{4}{5}\alpha\sqrt{3}$$

$$r^2 = \alpha^2 + \frac{48}{25}\alpha^2 \Rightarrow r = \frac{\alpha\sqrt{73}}{5}$$

با استفاده از این رابطه می‌توان نوشت.

$$\alpha = \frac{r \cdot 5}{\sqrt{73}}$$

و چون ضلع پنج‌ضلعی برابر با 2α است پس:

$$2\alpha = \frac{10r}{\sqrt{73}}$$

هرگاه r شعاع دایره محیطی این پنج‌ضلعی را برابر با واحد بگیریم، خواهیم داشت:

$$2\alpha = \frac{10}{\sqrt{73}} = 1,1704114$$

حال آنکه اندازه ضلع پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع واحد برابر است با

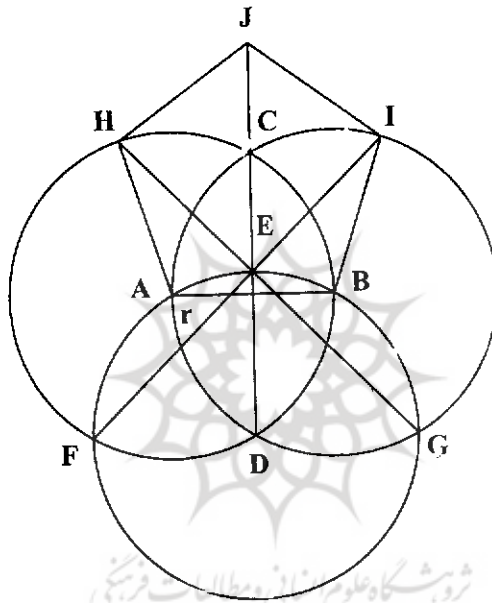
$$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} = 1,1755705$$

۳-۴ روش آلبرش دورر

آلبرش دورر نیز همانند داوینچی نقاشی بود که به هندسه علاقه فراوان داشت. او کتابی درباره ترسیمات هندسی نوشته که در سال ۱۵۲۵ میلادی در نورنبرگ به چاپ رسیده است.^{۱۰} این اثر به زبان فرانسوی نیز ترجمه گردیده است که ما ترسیم پنج‌ضلعی را از آن اقتباس کرده‌ایم. این ترسیم چنین است:

10. Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit* (Nürnberg, 1525).

«به شعاع مفروض r و به مراکز A ، B و D سه دایره رسم می‌کنیم (D یکی از نقاط تلاقی دو دایره به مراکز A و B می‌باشد) محل تلاقی وتر مشترک دو دایره A و B را E می‌نامیم. مطابق شکل EF و GE را رسم می‌کنیم تا دایره‌های A و B را به ترتیب در H و I قطع کنند. A ، B ، H و I چهار رأس پنج‌ضلعی هستند که رأس پنجم آن یعنی J نیز به آسانی بدست خواهد آمد.^{۱۱} پنج‌ضلعی حاصل از این روش نیز یک پنج‌ضلعی منتظم نیست.



پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران
 کتابخانه دیجیتال ملی
 کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران
 شکل ۲۱

اثبات:

هرگاه D را به عنوان مرکز مختصات بگیریم و فرض کنیم $AB = BI = 1$ با توجه به حاصلضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$\vec{AB} \cdot \vec{IB} = \cos \hat{B}$$

11. E. FOURREY, *Procédés originaux de constructions géométriques*, Paris 1924, p.

88. Voir également: Albrech DÜRER, *Géométrie*, présentation et traduction de J. Peiffer. Paris 1995. pp. 207-208.

مختصات نقاط A و B به قرار زیر می‌باشند:

$$A \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ و } B \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

پس مختصات بردار \overrightarrow{AB} برابر است با $(0, 0)$. بنابراین $\cos \hat{B}$ مساوی با طول بردار IB روی محور مختصات مفروض خواهد بود. از طرف دیگر نقطه I روی خط EF به معادله $y = x + 1$ قرار گرفته است.

نقطه I دارای مختصات $(x, x + 1)$ خواهد بود. با ملاحظه به این مطلب مختصات \overrightarrow{IB} را می‌توان چنین نمایش داد:

$$\overrightarrow{IB} \left(\frac{1}{2} - x, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - x \right)$$

اما بنا به فرض: $|\overrightarrow{IB}| = 1$
پس می‌توان نوشت:

$$|\overrightarrow{IB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - x\right)^2} = 1$$

از حل این معادله برای $x > 0$ نتیجه می‌شود:

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

اما:

$$\cos \hat{B} = \frac{1}{2} - x = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

پس:

$$\hat{B} = \arccos \left(\frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4} \right) \Rightarrow \hat{B} = 108^\circ 21' 58''$$

حال اگر فرض کنیم $\theta = D\hat{J}I$ داریم:

$$\sin \theta = x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\hat{J} = 2\theta = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4} \right) \Rightarrow \hat{J} = 109^{\circ}11'32''$$

در حالی که هر یک از زوایای یک پنج ضلعی منتظم مساوی 108° است نتیجه:
از این سه ترسیم نتیجه می‌شود که ترسیم ابوالوفا، هم ساده است زیرا که با یک خطکش و یک پرگار
با دهانه ثابت انجام می‌گردد، و هم دقیق است، چرا که یک پنج ضلعی منتظم را بدست می‌دهد.
پس ترسیمی است زیبا.

ترسیم دورر از ترسیم ابوالوفا ساده‌تر است لیکن دقیق نیست و تنها یک پنج ضلعی
متساوی‌الاضلاع بدست می‌دهد. ترسیم داوینچی نه سادگی دو روش پیشین را دارد و نه دقت
ترسیم ابوالوفا را. این ترسیم یک پنج ضلعی منتظم بدست نمی‌دهد.