نقش مسلمانان در حسابان

حیدرزاهد زاهدانی
استاد گروه ریاضی دانشگاه شیراز

مقدمه

حسابان قسمتی از ریاضیات می‌باشد که سکون کمتر و تحرک بیشتری دارد و با تغییرات و حرکت مربوط می‌باشد. در آن با کمیت‌هایی روبرو هستیم که به کمیت‌های دیگری نزدیک می‌شوند، بنابراین مفهوم حد توابع نقش اصلی در مطالعه حسابان خواهد داشت. پس می‌توان حسابان را قسمتی از ریاضیات تعریف کنیم که با حد مربوط می‌شود. حسابان از دو مسأله اصلی تشکیل می‌شود که آن را بدو شاخه حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال تقسیم می‌نماید و مسائل خط مماس و محاسبه مساحت شاخه‌های مذکور را بوجود می‌آورند. دو شاخهٔ اصلی فوق به‌نظر با یکدیگر متفاوت می‌باشند ولی آنها توسط قضیه اساسی حسابان به هم مربوط شده و به مفهومی عکس یکدیگرند.

در طی سالهای ۱۶۶۵ تا ۱۶۷۰، اسحاق نیوتن نوعی از حسابان را ابداع نمود که به سری‌های توانی محاسبه مساحت سطح زیر منحنی توابع وابسته بود. او می‌دانست که مساحت زیر منحنی $y=x^n$ بین خطوط $x=o$, $x=b$ برابر با $\frac{b^{n+1}}{n+1}$. (نتیجه‌ای که در سالهای ۱۶۳۰ توسط کاوالیری (Cavalieri)، روبروال (Roberval) و فرما (Fermat) حاصل شده بود). با گسترش سری توانی توابع و استفاده از فرمول

فوق نیوتن قادر به محاسبه مساحت سطح زیر منحنی توابع بی‌شماری شد و بالعکس با استفاده از فرمول مساحت سری توانی توابع زیادی را بدست آورد. برای مثال نیوتن سری توانی $y=\text{Arc} \sin x$ را با استفاده از بیان آن به صورت یک مساحت بدست آورد و با استفاده از تساوی $x = \sin y \iff y=\text{Arc} \sin x$ موفق به محاسبه سری توانی $\sin x$ گردید ولی نتیجه مذکور ۳۵ سال قبل توسط هندی‌ها با استفاده از فرمولی که ۱۰۰۰ سال بعد از میلاد توسط ابن هیثم مصری ثابت شده بود ارائه گردید.

در این نوشتار تحولاتی که منجر به اثبات نتایج فوق بخصوص توسط ابن‌هیثم شده است را بررسی می‌کنیم.

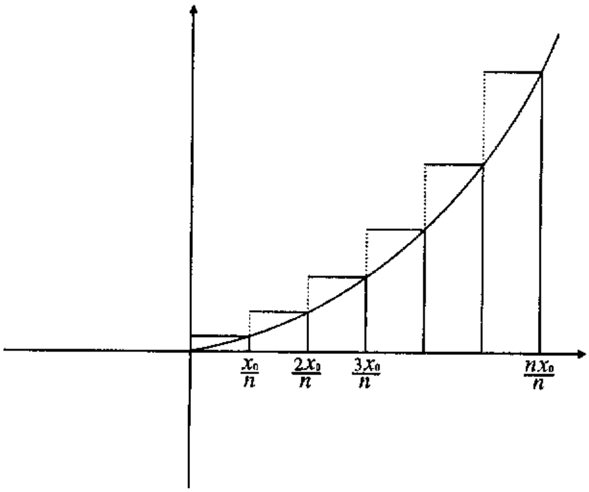
تاریخچه مسأله مساحت

در اکتبر سال ۱۶۳۶ روبروال در نامه‌ای به فرما اعلام نمود که مساحت سطح زیر منحنی $y=x^k$ را بوسیله فرمولی برای محاسبه «مجموع توانهای اعداد طبیعی» (فرمولی که اثبات آن توسط مسلمانان را بررسی خواهیم کرد) بدست آورده است که شکل ریاضی آن:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^{n} i^k$$

به نامساوی روبروال معروف است. فرما در پاسخ نامه او بیان می‌کند که او نیز نتیجه مشابه را با استفاده از نامساوی فوق برای محاسبه مساحت قبلاً اثبات کرده است. هردو آنها برای محاسبه مساحت سطح زیر منحنی $y=x^k$ روی فاصله $[0, x_0]$ از روش فرسایشی (یا روش افناء که یونانی‌ها ۲۵۰۰ سال پیش برای محاسبه مساحت دایره به‌کار بردند) تقسیم فاصله مذکور به n زیر فاصله به طول $\frac{x_0}{n}$ و پوشش سطح زیر منحنی $y=x^k$ با خطوط $x=x_0, x=0$ توسط مستطیل‌های محاطی و محیطی

استفاده کردند (شکل زیر).



مساحت مستطیل‌های محاطی برابر با

$$\frac{x_0^k}{n^k}\frac{x_0}{n} + \frac{(2x_0)^k}{n^k}\frac{x_0}{n} + \dots + \frac{(nx_0)^k}{n^k}\frac{x_0}{n} = \frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\dots+n^k)$$

و به طور مشابه مساحت مستطیل‌های محیطی را بدست آورده و اگر A مساحت سطح زیر منحنی بین 0 و x_0 باشد آنگاه

$$\frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\dots+(n-1)^k) < A < \frac{x_0^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\dots+n^k)$$

اگر n را باندازه کافی بزرگ اختیار کنیم با مقایسه با نامساوی روبروال مقدار A برابر با $\frac{b^{k+1}}{k+1}$ نتیجه می‌شود.

سؤال بدیهی که مطرح می‌شود آنکه چگونه روبروال و فرما فرمول مجموع توانهای اعداد صحیح را محاسبه کردند. هیچ مدرکی درکارهای روبروال بجز نامه او به فرما وجود ندارد و فرما هم بیان می‌کند که فرمول فوق را با استفاده از اعداد مثلثی و اعداد اهرامی که از ستون‌های مثلث پاسکال حاصل می‌شود اثبات کرده است (توجه کنید که کار فرما حدود بیست سال قبل از انتشار نتایج پاسکال انجام گرفته است هرچند که خواص مثلث خیام ـ پاسکال به اشکال مختلف در حدود ۶۰۰ سال قبل در چین، خاورمیانه، افریقای شمالی و اروپا منتشر شده بود).

فرما بیان می‌کند که با استفاده از رابطه (شکل ریاضی مدرن امروزی)

$$n\binom{n+k}{k} = (k+1)\binom{n+k}{k+1}$$

حاصل عبارت: $1^k+2^k+.....+n^k$

محاسبه می‌شود ولی او فقط حالت k=4 را بیان می‌کند[1]. برای سادگی حالت k=2 را با استفاده از خواص مثلث پاسکال بررسی می‌کنیم.

$$n\binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{3} = 3\sum_{j=2}^{n+1}\binom{j}{2}$$

$$= 3\sum_{j=2}^{n+1}\frac{j(j-1)}{2} = 3\sum_{i=1}^{n}\frac{i\ (i+1)}{2}$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{2} + \frac{i}{2}$$

بنابراین داریم

$$2\frac{n}{3}\ \frac{(n+2)\ (n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

در حالت کلی می‌توان نشان داد که

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + p\ (n)$$

وقتی که P(n) یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از k باشد. از تساوی فوق نامساوی روبروال به سادگی اثبات می‌شود. البته نمی‌دانیم که آیا فرما نتیجه نهائی را به صورت فوق محاسبه کرده است یا نه. زیرا او فقط حالت k=4 را بیان کرده است

1. Katz, V. "Ideas of calculus in Islam and India" *Mathematatis Magazine*, vol 68, no. 3 June 1995.

نتیجه‌ای که حدود ۶۵۰ سال قبل از آن توسط ابن هیثم ثابت شده است[۲]

ابن هیثم

فرمول محاسبه مجموع توانهای kام اعداد طبیعی حداقل برای $k=4$ و نامساوی روبروال ۶۵۰ سال قبل از قرن هفدهم توسط ابوعلی‌حسن ابن هیثم معروف به الهازن (۱۰۳۹ - ۹۶۵) اثبات شده است. البته حالت $k=2$ توسط ارشمیدس حدود ۲۵۰ قبل از میلاد و حالت $k=3$ توسط آریابهاتا (Arabhata) در هند حدود سال ۵۰۰ ثابت شده است[۳] و حالت $k=4$ ساده نیست زیرا با اثبات این حالت روش کلی برای اثبات رابطه برای هر عدد طبیعی k نتیجه می‌شود.

قبل از بررسی کار ابن هیثم در اثبات فرمول مجموع توانهای اعداد طبیعی به‌طور خلاصه اوضاع علوم اسلامی دوره او را توصیف می‌کنیم. در طی قرن نهم خلیفه مأمون یک سِتاد تحقیقاتی در بغداد تأسیس نمود و از تمام دانشمندان دعوت کرد که برای توسعه علوم سنتی در اسلام به آنجا بیایند. دعوت او نه‌تنها مسلمانان بلکه مسیحیان، یهودیان و زرتشتیان را نیز شامل می‌شد. هدف اولیه آنها ترجمه بهترین کارهای ریاضی و علمی انجام‌گرفته توسط یونانی‌ها و هندیها به زبان عربی و سپس ابداع ایده‌های ریاضی و علمی جدید بود. هرچند سِتاد مذکور بعد از دو قرن رفته، رفته از بین رفت ولی یکی از نتایج آن علاقمندی رهبران اسلامی به تشویق و حمایت کارهای علمی و تحقیقاتی و استفاده علمی از نتایج حاصل بود. به همین دلیل ابن هیثم که در بصره عراق متولد شده بود توسط خلیفه الحاکم برای تنظیم جریان نیل به مصر فرا خوانده شد. هرچند او موفق به انجام آن نشد ولی او مهمترین کار علمی خود را در هفت کتاب بنام علم نور یا فی‌المناظر تحریر نمود. کتاب او در قرن سیزدهم به لاتین ترجمه شده و قرن‌ها در اروپا مورد مطالعه و بررسی قرار

2. Rashed, Roshdi, "Ibn al-Haytham et la measure du Paraboloide" *J. for the History of Arabic Science 5 (1981), 262-241.*

3. Katz, V. "Ideas..." *op. cit.*

گرفت. نبوغ ریاضی ابن هیثم در مقالهٔ پنجم کتاب فی‌المناظر آنجا که مسأله‌ای را حل می‌کند که امروز به نام او معروف است به اوج شکوفایی رسیده است. مسأله الهازن به صورت زیر است:

«در صفحهٔ دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R دو نقطه ثابت A و B داده می‌شود. هرگاه دایره را به مثابهٔ آینه‌ای فرض کنیم بر آن نقطه‌ای چون M میابید که شعاع لوزی که از A خارج می‌شود پس از منعکس شدن در نقطه M بر B بگذرد».

راه حل بسیار پیچیده ابن هیثم به یک معادله درجه چهارم منتهی می‌شود که وی آن را با قطع کردن یک هذلولی متساوی‌القطرین و یک دایره حل کرده است. علاوه بر آن او با اثبات مسأله برای رویه‌های متنوع استوانه‌ای، کروی و مخروطی نشان داد که کاملاً بر هندسه یونانی‌ها مسلط بوده است (البته لئوناردو داوینچی هم به این مسأله علاقه پیدا کرد اما چون مبانی ریاضی مستحکم نداشت فقط توانست آن را از راه عملی (مکانیکی) حل کند. سرانجام هویگنس که در ۱۶۹۶ درگذشت ظریف‌ترین و ساده‌ترین راه حل را نشان داد).

اثبات فرمول مجموع توانهای اعداد صحیح در قرن یازدهم

ایده اصلی در اثبات ابن هیثم استفاده از رابطه:

$$(*).\qquad (n+1)\sum_{i=1}^{k} i^k = \sum_{i=1}^{k} i^{k+1} \sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right)$$

می‌باشد. او فقط نتیجه را برای n=4 و k=1,2,3 بیان کرده است ولی اثبات او برای هر یک از مقادیر فوق با استقراء روی n انجام گرفته و به راحتی برای هر k قابل اثبات است.[۴]

اثبات او را برای k=3 و n=4 بررسی می‌کنیم

4. R. Rashed, "Ibn al-Haytham ..." *op. cit.*

$$(4+1)(1^3+2^3+3^3+4^3) = 4\ (1^3+2^3+3^3+4^3)\ +\ 1^3+\ 2^3+\ 3^3+4^3$$
$$= 4.4^3+4\ (1^3+2^3+3^3)\ +\ 1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$= 4^4+\ (3+1)\ (1^3+2^3+3^3)\ +\ 1^3+2^3+3^3+4^3$$

از آنجا که تساوی (*) برای n=3 ثابت شده فرض می‌شود پس

$$(3+1)\ (1^3+2^3+3^3) = 1^4+2^4+3^4+(1^3+2^3+3^3)\ +\ (1^3+2^3)\ +\ 1^3$$

بنابراین

$$(4+1)(1^3+2^3+3^3+4^3)=4^4+1^4+2^4+3^4+(1^3+2^3+3^3)+(1^3+2^3)+1^3+1^3+2^3+3^3+4^3$$

پس (*) برای n=4 نیز صادق است. به سادگی می‌توان روش ابن هیثم را برای هر عدد طبیعی k با استقراء روی n به کار برده و (*) را ثابت کنیم.

ابن هیثم ابتدا از (*) فرمول مجموع توانها را برای مربع و مکعب اعداد پیدا کرد.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = (\frac{n}{3} + \frac{1}{3})\ n\ \ (n+\frac{1}{2}) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n}{4} + \frac{1}{4})\ n\ \ (n+1)\ n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

آنگاه حالت k=4 از (*) محاسبه می‌گردد.

$$(n+1)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^4 + \sum_{p=1}^{n} (\frac{p^4}{4} + \frac{p^3}{2} + \frac{p^2}{4})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{4}\ \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{4}\ \sum_{i=1}^{n} i^2$$

بعد از خلاصه کردن عبارات فوق داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = (\frac{n}{5} + \frac{1}{5})\ n\ \ (n+\frac{1}{2})\ \ [(n+1)n - \frac{1}{3}]$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

علاوه بر آن توجه کنید که با استفاده از رابطه فوق نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

رابطه‌ای که فرما و روبروال از نامساوی روبروال ثابت کردند.

ابن هیثم با استفاده از نتایج فوق حجم حادث از دوران سهمی $x=ky^2$ حول خط $x=kb^2$ عمود بر محور سهمی را با روشی که امروزه انتگرال نامیده می‌شود محاسبه کرد. فرمول ابن هیثم برای مجموع توانهای چهار در چندین قرن بعد از او در دنیای اسلام دیده شده است بویژه در کتاب مفتاح‌الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی. بهرحال معلوم نیست که ریاضی دانان مذکور چگونه از فرمول ابن هیثم آگاهی یافته و به چه منظوری از آن استفاده کردند. ریاضی‌دانان هندی در قرن شانزدهم فرمول ابن هیثم را به کار برده‌اند تا سری توانی توابع مثلثاتی sin x و cos x و Arc tang x را بیابند و نیوتن با استفاده از این نتایج نظریه حسابان خود را پایه‌گذاری نمود.

نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب ارائه شده فوق دانشمندان اسلامی یک فرمول عمومی را برای محاسبه انتگرال چند جمله‌ایها را در حدود ۱۰۰۰ بعد از میلاد توسعه داده و قادر بودند چنین فرمولی را برای هر چند جمله‌ای مورد علاقه تعمیم دهند. ولی به نظر میرسد که علاقمند به چند جمله‌ایها با درجه بیش از چهار نبوده‌اند. از طرف دیگر دانشمندان هندی در ۱۶۰۰ با استفاده از فرمول مجموع ابن هیثم برای هر عدد طبیعی موفق به محاسبه سری توانی توابع مورد علاقه‌شان گردیدند. بنابراین بعضی از ایده‌های اساسی حسابان قرن‌ها قبل از نیوتن در مصر و هند شناخته شده بود ولی آنها نیاز به گسترش از حالات خاص به شکل‌های عمومی را احساس نکردند. شاید، به نظر میرسد که باید کتب حسابان دوباره نویسی شده و با تقدیر از

زحمات نیوتن و لایپ نیتز ابداع اولیه حسابان توسط مسلمانان نیز یادآوری شود: شکی نیست که نیوتن و لایپ نتیز کسانی بوده‌اند که ایده‌های متفاوت بسیاری را بهم ترکیب کرده تا مفاهیم مشتق و انتگرال حاصل شوند و روابط بین آنها را به صورت سیستماتیک معرفی کرده و حسابان را به صورت قوی‌ترین وسیله حل مسائل تبدیل نمایند ولی نکته‌ای که هنوز روشن نمی‌باشد آن است آیا ریاضی‌دانان قبل از آنها بخصوص روبروال و فرما از ایده‌های ریاضی مسلمانان از منابعی که برای ما اکنون شناخته شده اطلاع داشته‌اند یا خیر؟ موضوع چگونگی انتقال دانش ریاضی از فرهنگ اسلامی به اروپا در حال حاضر مورد توجه و تحقیق می‌باشد. با توجه به ترجمه کتب ریاضی کشف شده از عربی به زبان‌های اروپائی ردپای بسیاری از ایده‌های ریاضی از عراق و ایران به مصر و سپس به مراکش و اسپانیا دنبال می‌شود. در قرون وسطا اسپانیا محل ملاقات فرهنگ‌های اسلامی، یهودی و فرهنگ نوخاسته مسیحی لاتینی اروپا بوده است. بسیاری از آثار علمی دانشمندان اسلامی در قرن دوازدهم توسط علمای یهودی که عبری هم می‌نوشتند به لاتین ترجمه شد. ولی با وجود اینکه هیچ مدرکی وجود ندارد که کار ابن هیثم روی مجموع توانهای صحیح در آن زمان ترجمه شده باشد ایده‌های اصلی او درکارهای لاتینی و عبری قرن سیزدهم آورده شده است و از آنجاکه ایده‌های اصلی کارش در مطالب هندی هم آورده شده است به نظر میرسد که اتصال به هند نیز از طریق ترجمه‌های فوق انجام گرفته باشد. بهرحال بررسی پاسخ دقیق چگونگی اتصال ایده‌های فوق به تحقیق بیشتری که هم اکنون در حال انجام می‌باشد نیاز دارد. شاید چندین سال دیگر مدارک کافی برای اینکه نشان دهیم که ایده‌های اصلی حسابان از افریقا یا آسیا به اروپا رفته است را در اختیار داشته باشیم.