تقدیم به دانشجویان گروه ریاضی دانشگاه کاشان

بطلمیوس و کاشانی

از محاسبهٔ وتر یک درجه تا حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم

جعفر آقایانی چاوشی
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات
و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

منجمان قدیم برای محاسبات نجومی خود به جداول نجومی نیاز مبرم داشتند. این جداول می‌بایست از وتر یک‌درجه و یا سینوس یک درجه شروع شوند. اما تعیین وتر و یا سینوس یک‌درجه کار ساده‌ای نبود، چرا که نمی‌توان آنها را با معادله‌ی درجه دوم تعیین کرد.

در یونان باستان، بطلمیوس کوشید با استفاده از خاصیت چهار ضلعی محاطی وترهای اندکی کم‌تر از یک درجه و اندکی بیشتر از یک‌درجه را محاسبه و به کمک یک نامساوی دو حد نقصانی و اضافی را برای وتر یک‌درجه تعیین کرده و میانگین حسابی این دو حد را به عنوان اندازه‌ی تقریبی وتر یک درجه تعیین نماید.

قرن‌ها پس از او کاشانی، ریاضیدان نابغه‌ی ایرانی نیز همانند بطلمیوس برای محاسبه‌ی سینوس یک‌درجه از همان چهار ضلعی محاطی شروع کرد اما بر خلاف بطلمیوس موفق به کشف معادله‌ی مسئله شد و با حل این معادله نه تنها به کوشش چندین ساله‌ی ریاضیدانان برای تعیین سینوس یک‌درجه پایان داد، بلکه روشی را برای حل این‌گونه معادلات درجه سوم پیشنهاد کرد که مبتنی بر مفهومی است که

ریاضیدانان غربی قرن‌ها پس از او به آن دست یافتند و این، همان چیزی است که در آنالیز جدید به قضیه‌ی «نقطه‌ی ثابت یک تابع پیوسته و محدود» شهرت دارد.

ما در این مقاله می‌کوشیم که پس از شرح روش بطلمیوس و علل نارسایی آن شیوه‌ی کاشانی را مفصلاً مورد تحلیل قرار دهیم.

۱ ـ روش بطلمیوس برای تعیین وتر یک‌درجه

بطلمیوس محاسبات خود را برای تعیین وتر یک‌درجه، در کتاب معروف خود المجسطی انجام داده است. روش بطلمیوس را برای تعیین وتر یک‌درجه می‌توان در سه مرحله‌ی زیر خلاصه کرد.

۱. تعیین وترهایی که کمی بزرگ‌تر و کمی کوچک‌تر از وتر یک‌درجه می‌باشند؛

۲. یافتن قضیه‌ی کلیدی مسئله؛

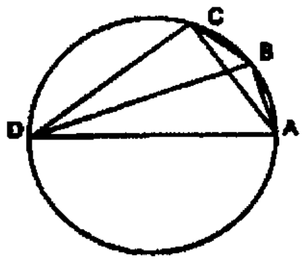
۳. درج واسطه‌ی حسابی.

۱.۱. تعیین وترهایی که کمی بزرگ‌تر و کمی کوچک‌تر از وتر یک‌درجه می‌باشند

این وترها عبارت‌اند از وتر $\frac{3^\circ}{2}$ و وتر $\frac{3^\circ}{4}$ برای تعیین این وترها نخست باید وتر °۱۲ را تعیین کرد و سپس با تنصیف‌های متوالی به آنها رسید. برای تعیین وتر °۱۲ بطلمیوس، از وتر °۶۰ که برابر است با cord ۶۰° = ۶۰ و وتر °۷۲ که ضلع پنج‌ضلعی منتظم می‌باشد و مقدار آن cord ۷۲° = ۷۲; ۳۲, ۳ آگاهی دارد. کافی است فرمولی برای وتر تفاضل cord ۱۲° = cord (۷۲° - ۶۰°) بیابد تا اندازه‌ی وتر °۱۲ را بر حسب وترهای °۶۰ و °۷۲ تعیین کند.

او برای این کار چهار ضلعی محاطی ABCD را در نظر گرفته و از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کند.

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \qquad (1)$$



شکل ۱

مطابق شکل ۱ فرض می‌کند AD قطر دایره بوده و این قطر به ۱۲۰ قسمت مساوی تقسیم شده باشد. اضلاع دیگر این چهار ضلعی را به ترتیب زیر فرض می‌کند:

$$\begin{cases} AB = \text{cord}\ (\beta) \\ AC = \text{cord}\ (\alpha) \\ BC = \text{cord}\ (\alpha - \beta) \end{cases}$$

در این صورت رابطه‌ی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{cord}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{cord}\ (\alpha)\ \text{cord}\ (۱۸۰^\circ - \beta) - \text{cord}\ \beta\ \text{cord}\ (۱۸۰^\circ - \alpha)}{۱۲۰} \qquad (۲)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$\text{cord}^۲\ (۱۸۰^\circ - \alpha) = CD^۲ = AD^۲ - AC^۲ = ۱۲۰^۲ - \text{cord}^۲\ (\alpha)$$

$$\text{cord}^۲\ (۱۸۰^\circ - \beta) = BD^۲ = AD^۲ - AB^۲ = ۱۲۰^۲ - \text{cord}^۲\ (\beta)$$

هرگاه در فرمول (۲) به جای α و β مقادیر ۷۲° و ۶۰° را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\text{cord}\ (۱۲^\circ) = ۱۲;\ ۳۲,\ ۳۶$$

حال برای تنصیف وتر ۱۲° بطلمیوس از فرمول زیر استفاده می‌کند:

$$\text{cord}^۲\ (\frac{\alpha}{۲}) = ۶۰\ [۱۲۰ - \text{cord}\ (۱۸۰^\circ - \alpha)]$$

به وسیله‌ی این فرمول وتر ۶° و سپس وتر ۳° و بالاخره وترهای نزدیک به وتر یک‌درجه یعنی $\text{cord}\ (\frac{۳^\circ}{۲}) = ۱;\ ۳۴,\ ۱۵$ و $\text{cord}\ (\frac{۳^\circ}{۴}) = ۰,\ ۴۷,\ ۸$ را محاسبه می‌کند.

حال که بطلمیوس این وترها را در اختیار دارد، می‌تواند واسطه‌ای حسابی آنها را به عنوان وتر یک‌درجه حساب کرده و مقدار زیر را به دست آورد:

$$\text{cord } ۱^{\circ} = \frac{۱}{۲}\left[\text{cord } \left(\frac{۳}{۴}\right)^{\circ} + \text{cord } \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\circ}\right] = ۱;\ ۱۰, ۴۱$$

البته این مقدار، اولین مقدار تقریبی وتر یک درجه است، ولی همان چیزی نیست که بطلمیوس در انتظار آن می‌باشد. چراکه فاصله‌ی این دو وتر زیاد است و یکی تقریباً مساوی با دوبرابر دیگری می‌باشد.

$$\text{cord } \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\circ} \simeq ۲ \text{ cord } \left(\frac{۳}{۴}\right)^{\circ}$$

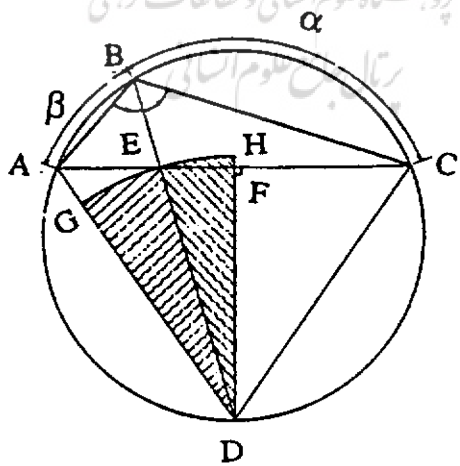
بنابراین بطلمیوس برای یافتن تقریبی دقیق‌تر ناگزیر به یافتن قضیه‌ی کلیدی زیر می‌باشد.

۲.۱. تعیین قضیه‌ی کلیدی مسئله

قضیه: نسبت هر کمان بزرگ‌تر به هر کمان کوچکتر در یک دایره، بزرگ‌تر از نسبت وتر کمان بزرگ‌تر به وتر کمان کوچک‌تر می‌باشد. یعنی هرگاه داشته باشیم: βکمان $> \alpha$ کمان، خواهیم داشت

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\text{cord } (\alpha)}{\text{cord } (\beta)}$$

اثبات قضیه‌ی کلیدی به وسیله‌ی بطلمیوس: در شکل زیر هرگاه $\text{BC} = \beta$ و $\text{AB} = \alpha$ باشند، بطلمیوس چنین عمل می‌نماید.



زاویه‌ی ABC را با نیمساز BE به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌ی D قطع کند. بنابراین خواهیم داشت: DC کمان = AD کمان ، از طرف دیگر می‌دانیم که در هر مثلث نیمساز یک زاویه ضلع مقابل را به نسبت اضلاع دیگر تقسیم می‌کند.

پس با استفاده از این قضیه در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \qquad (۳)$$

از آنجایی که AB < BC نتیجه می‌شود AE < EC ، حال از D عمود DF را روی ضلع AC اخراج می‌کنیم، نقطه‌ی F بر وسط AC قرار خواهد گرفت و خواهیم داشت:

$$AD > ED > FD$$

بنابراین دایره‌ی به مرکز D و به شعاع DE خط AD را در G، مابین A و D قطع کرده و امتداد DF را نیز در نقطه‌ی H قطع خواهد کرد.

حال دو قطاع DEH و DGE را در نظر می‌گیریم.

داریم

$$\text{قطاع } DEH > \text{مثلث } DEF$$

$$\text{قطاع } DEG > \text{مثلث } DEA$$

پس:

$$\frac{\text{مثلث } DEF}{\text{مثلث } DEA} < \frac{\text{قطاع } DEH}{\text{قطاع } DEG} \qquad (۴)$$

اما دو مثلث DEF و DEA دارای ارتفاع مشترک DF می‌باشند. از آنجا نتیجه می‌شود که نسبت مساحت‌های آنها مساوی نسبت قاعده‌های آنها می‌باشد. پس به جای طرف چپ رابطه‌ی (۴) می‌توان مقدار $\frac{EF}{EA}$ را قرار داد. از طرف دیگر می‌دانیم که نسبت مساحت‌های دو قطاع با نسبت زاویه‌های مرکزی آنها متناسب‌اند. پس به جای طرف راست رابطه‌ی (۴) می‌توان مقدار $\frac{\angle EDH}{\angle EDG}$ را قرار داد.

بنابراین نامساوی (۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{EF}{EA} < \frac{\angle EDH}{\angle EDG}$$

این نامساوی را می‌توان به نامساوی زیر تبدیل کرد:

$$\frac{EF+EA}{EA} < \frac{\angle EDH+\angle EDG}{\angle EDG}$$

و یا

$$\frac{AF}{EA} < \frac{\angle GDH}{\angle EDG}$$

و یا

$$\frac{2AF}{EA} < \frac{2\angle GDH}{\angle EDG} \Rightarrow \frac{AC}{EA} < \frac{\angle ADC}{\angle EDG}$$

هرگاه از طرفین این نامساوی عدد ۱ را کم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{AC-EA}{EA} < \frac{\angle ADC - \angle EDG}{\angle EDG}$$

و یا:

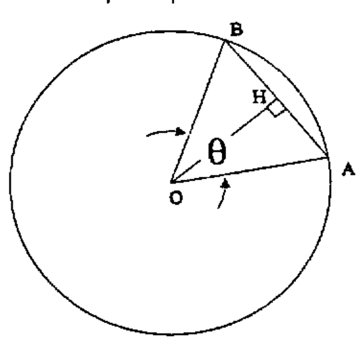
$$\frac{AC}{EA} < \frac{\angle CDE}{\angle EDG} \qquad (۲)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳) نامساوی (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{AB}{BC} < \frac{\text{کمان}\,AB}{\text{کمان}\,BC} \Rightarrow \frac{\text{cord}\,\alpha}{\text{cord}\,\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$$

اثبات قضیه‌ی کلیدی بطلمیوس در ریاضیات امروزی: همان طوری که مشاهده کردیم اثبات بطلمیوس بسیار طولانی است، در صورتی که این قضیه را با استفاده از ریاضیات جدید می‌توان به آسانی به شرح زیر اثبات کرد:

$$\alpha > \beta \Rightarrow \frac{\text{cord}\,\alpha}{\text{cord}\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\text{cord}\,\alpha} > \frac{\beta}{\text{cord}\,\beta}$$



با توجه به شکل فرض کنیم $f\ (\theta) = \dfrac{\theta}{\text{cord}\ \theta}$

$$\text{cord}\ \theta = AB = ۲BH = ۲R\sin\frac{\theta}{۲} \Rightarrow f\ (\theta) = \frac{\theta}{۲R\sin}$$

$$0 < \theta < \pi$$

مشتق f به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f'\ (\theta) = \frac{۱}{۲R}.\ \frac{\sin\frac{\theta}{۲} - \frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{۲}\ [\tan\frac{\theta}{۲} - \frac{\theta}{۲}]}{۲R\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}$$

$\cos\dfrac{\theta}{۲} > ۰$ زیرا $۰ < \dfrac{\theta}{۲} < \dfrac{\pi}{۲}$ پس علامت $f'\ (\theta)$ همان علامت $g\ (\theta) = \tan\dfrac{\theta}{۲} - \dfrac{\theta}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$g'\ (\theta) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}} - ۱\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[۱ + \tan^{۲}\frac{\theta}{۲} - ۱\right] = \frac{۱}{۲}\tan^{۲}\frac{\theta}{۲} > ۰$$

نیز $g'\ (\theta)$ برای $\theta \in]۰, \pi[$ مثبت می‌باشد، بنابراین g در فاصله‌ی $]۰.\pi[$ صعودی است اما:

$$g\ (۰) = ۰ \Rightarrow g\ (\theta) > ۰ \qquad \forall\ \theta \in]۰, \pi[$$

$$\Rightarrow f'(\theta) > ۰ \qquad \forall\ \theta \in]۰, \pi[$$

از اینجا نتیجه می‌شود که f در فاصله‌ی $]۰, \pi[$ صعودی است و داریم:

$$[\alpha > \beta \Rightarrow f\ (\alpha) > f\ (\beta)] \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\text{cord}\ \alpha} > \frac{\beta}{\text{cord}\ \beta}$$

$$\alpha > \beta \Rightarrow \frac{\text{cord}\ \alpha}{\text{cord}\ \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$$

۳.۱. درج واسطه‌ای حسابی

این نامساوی را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد.

$$\frac{\text{cord}\,\alpha}{\alpha} < \frac{\text{cord}\,\beta}{\beta}$$

با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{cord}(\frac{۳}{۴})^\circ}{\frac{۳}{۴}} < \frac{\text{cord}\ (۱)^\circ}{۱} < \frac{\text{cord}(\frac{۳}{۲})^\circ}{\frac{۳}{۲}}$$

و یا

$$\frac{۲}{۳}\,\text{cord}\ (\frac{۳}{۲})^\circ < \text{cord}\ ۱^\circ < \frac{۴}{۳}\,\text{cord}\ (\frac{۳}{۴})^\circ$$

بطلمیوس که قبلاً وترهای $\frac{۳}{۲}^\circ$ و $\frac{۳}{۴}^\circ$ را محاسبه کرده بود، حال وتر ۱° را از واسطه‌ی حسابی این دو مقدار تعیین می‌کند[1] یعنی:

$$\text{cord}\,۱^\circ = \frac{۱}{۳}\,[۲\ \text{cord}\ (\frac{۳}{۴})^\circ + \text{cord}\ (\frac{۳}{۲})^\circ] = ۱;\ ۲, ۵۰$$

۲. روش ابوالوفای بوزجانی

منجمان اسلامی نیز همچون منجمان یونان قدیم به جداول نجومی برای محاسبات نجومی خود نیاز مبرم داشتند در این دوره علم مثلثات به وسیله‌ی ریاضیدانان اسلامی کشف و توسعه یافته بود. از این رو این منجمان به جای وتر در جداول خود از سینوس استفاده می‌کردند و بالطبع جداول نجومی خود را بر حسب سینوس تنظیم می‌نمودند و بنابراین به سینوس یک‌درجه و یا نیم‌درجه احتیاج داشتند.

به همین جهت است که ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان و منجم برجسته‌ی ایران در قرن چهارم هجری به محاسبه سینوس نیم‌درجه همت می‌گمارد.

۱.۲. گزاره‌ی کمکی

ابوالوفا برای این محاسبه نخست به عنوان یک گزاره‌ی کمکی ثابت می‌کند که

1. Ptolémée, *Almagiste*, traduction française par M. Halma, Paris 1813, pp. 29-32 et 38, A. Aaboe, *Episodes from the Early history of Mathematics*, Washington, 1964, pp. 122-124.

هرگاه $\alpha - \beta$ و α و $\alpha + \beta$ کمان‌هایی در ربع اول دایره باشند آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)$$

برهان: طبق فرض مسئله داریم:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$$

پس

$$\sin\alpha \geq 0$$

و

$$\cos\beta \leq 1$$

طرفین نامساوی اخیر را در $2\sin\alpha$ ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$2\sin\alpha\cos\beta < 2\sin\alpha$$

این نامساوی را به شکل زیر نیز می‌توان نمایش داد:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) < 2\sin\alpha \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)$$

و بدین ترتیب گزاره‌ی کمکی ثابت می‌شود.

۲.۲. درج واسطه‌ی حسابی

براساس این گزاره می‌توان نامساوی‌های زیر را تشکیل داد:

$$\sin(\alpha+3\varepsilon) - \sin(\alpha+2\varepsilon) < \sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\varepsilon)$$

$$\sin(\alpha+2\varepsilon) - \sin(\alpha+\varepsilon) < \sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha < \sin(\alpha-\varepsilon) - \sin(\alpha-2\varepsilon)$$

$$\sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha = \sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha < \sin(\alpha-2\varepsilon) - \sin(\alpha-3\varepsilon)$$

از جمع عضو به عضو این سه نامساوی خواهیم داشت:

$$\sin\alpha + \frac{1}{3}[\sin(\alpha+3\varepsilon) - \sin\alpha] < \sin(\alpha+\varepsilon) < \sin\alpha + \frac{1}{3}[\sin\alpha - \sin(\alpha-3\varepsilon)]$$

ابوالوفا آن‌گاه نشان می‌دهد که با معلوم بودن وترهای 36° و 60° می‌توان با تنصیف‌های متوالی $\sin\left(\frac{18}{32}\right)^\circ$ و $\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ$ را نتیجه گرفت. به‌علاوه $\sin\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$ را نیز

می‌توان از طریق مساوی قرار دادن $(\frac{12}{32})^\circ$ با $(\frac{18}{32})^\circ - (\frac{3}{32})^\circ$ محاسبه کرد. آن‌گاه با قرار دادن $\alpha = \frac{15^\circ}{32}$ و $\in = \frac{1^\circ}{32}$ در نامساوی فوق به نامساوی زیر می‌رسد:

$$\sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3}\left(\sin\frac{18^\circ}{32} - \sin\frac{15^\circ}{32}\right) < \sin\frac{1^\circ}{2} < \sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3}\left(\sin\frac{15^\circ}{32} - \sin\frac{12^\circ}{32}\right)$$

ابوالوفا سینوس نیم‌درجه را با میانگین حسابی دو حدی که به دست آورده است مساوی می‌گیرد و مقدار زیر را برای این سینوس به دست می‌آورد.[۲]

$$\sin\frac{1^\circ}{2} = 31'\ 24''\ 55'''\ 54^{IV}\ 55^{V}$$

و از روی این مقدار می‌توان $\sin 1^\circ$ را به آسانی حساب کرد و مقدار زیر را برای آن تعیین نمود:

$\sin 1^\circ =$ ۰ و ۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷

چنان‌که می‌بینیم ابوالوفا با محاسبه‌ی $\sin\frac{1^\circ}{2}$ با تقریبی شایان تحسین از بطلمیوس فراتر رفت. اما او نیز همانند بطلمیوس این محاسبه را به کمک درج واسطه‌ی حسابی انجام داد و نتوانست روش جدیدی برای این محاسبه فراهم آورد.

این روش جدید تنها چند قرن پس از او به وسیله‌ی غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان بزرگ ایرانی در عصر تیموری کشف گردید و در رساله‌ی **وتر و جیب** او ارائه شد.[۳]

---

2. F. Woepcke, "sur une mesure de la circonférence du cercle, du aux astronomes arabes, et fondée sur un calcul d'Aboul Wafa", *Journal asiatique*, Avril-Mai 1860, pp. 590-595.

۳. قاضی‌زاده‌ی رومی ضمن اشاره به کار کاشانی چنین نوشته است: «این رساله‌یی است که در استخراج جیب یک‌درجه که براساس قواعدی از هندسه و حساب قرار گرفته است که آنها را برادر ارجمند و یکتای روزگار خویش جمشید پسر مسعود پزشک ملقب به غیاث به الهام دریافته است. سرآمدان فن ریاضی و کسانی که پیوسته در این کار می‌کوشند با آنکه شماره‌ی ایشان بسیار و وسایل کار آنها فراوان بود، پیرامون پژوهش این موضوع نرفته‌اند و به راه‌های تقریبی برای تدقیق آن اکتفا کرده‌اند تا جایی که برخی از ریاضیدانان گفته‌اند: «برای یافتن وتر ثلث قوسی که وتر آن معلوم است راهی نیست». (← دیباچه‌ی رسالة فی استخراج جیب الدراجة الواحدة، تألیف قاضی‌زاده‌ی رومی در سال ۱۲۸۶ هـ ق).

۳. روش کاشانی

کاشانی برای محاسبه‌ی سینوس یک‌درجه، همانند بطلمیوس از رابطه‌ی بین اضلاع و اقطار چهارضلعی محاطی استفاده کرد، اما بر خلاف بطلمیوس، در این استفاده یکی از فرمول‌های مهم مثلثاتی یعنی $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$ را کشف نمود، فرمولی که یک قرن پس از او توسط ریاضیدان فرانسوی ویت[4] مجدداً کشف گردید.

این کشف گام نخستین برای محاسبه‌ی سینوس یک‌درجه بود، زیرا او به خوبی با مقدار $\sin ۳^\circ = \sin(۱۸^\circ - ۱۵^\circ)$ که با عملیات ساده‌یی حاصل می‌شود آشنایی داشت و بنابراین می‌توانست $\sin ۱^\circ$ را بر حسب $\sin ۳^\circ$ به دست آورده و این معادله را تشکیل دهد $\sin ۳^\circ = ۳x - ۴x^۳$ که در آن x برابر با $\sin ۱^\circ$ است.

گام دوم کاشانی کشف روشی برای حل این معادله‌ی درجه سوم است. کشفی که اهمیت آن از محاسبه‌ی $\sin ۱^\circ$ نیز بیش‌تر است. این کشف همان است که در آنالیز جدید به قضیه‌ی «نقطه‌ی ثابت یک تابع عددی» شهرت دارد، یعنی به ریاضیدان امکان می‌دهد ریشه‌ی منحصربه‌فرد یک معادله‌ی درجه سوم را تا اندازه‌یی که می‌تواند حساب نماید.

این روش کاشانی نیز چند قرن پس از او توسط کپلر منجم بزرگ اروپایی مجدداً کشف گردید و به وسیله‌ی ریاضیدانان دیگر اروپایی به کارگرفته شد. قبل از اینکه به بررسی این گام‌های مهم کاشانی بپردازیم متذکر می‌شویم که رساله‌ی کاشانی در این زمینه که به وتر و جیب، معروف است، متأسفانه تاکنون یافت نشده است اما قاضی‌زاده‌ی رومی، ریاضیدان هم عصر او تحریری از رساله‌ی کاشانی را تحت عنوان رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحدة علی التحقیق الحقیق استخرجه افضل المهندسین غیاث‌الدین القاسانی ارائه داده که نسخه‌های خطی آن در کتابخانه‌های ایران و خارج موجود است. این رساله همچنین در سال ۱۲۸۶ هـ ق در تهران به

4. Viéte.

چاپ رسیده است. گذشته از آن میرم چلبی نوه‌ی قاضی‌زاده‌ی رومی در رساله دستورالعمل فی تصحیح الجدول، شرحی بر این روش کاشانی نوشته است.[۵] ملا علی بیرجندی در شرحی که به زبان فارسی بر زیج الغ بیک نوشته، همین روش کاشانی را مورد تحلیل قرار داده است.[۶] ما در زیر روش کاشانی را در دو مرحله مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۳. کشف فرمول مثلثاتی تثلیث زاویه

چهارضلعی ABCD محاط در دایره‌یی به مرکز O و به شعاع R را مطابق شکل زیر

۵. این شرح میرم چلبی برای نخستین بار توسط وپکه مورد تحقیق عالمانه قرار گرفت.

F. Woepcke "Discussion de deux methodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°", *Journal de Mathemathiques pures et Appliquees* t. XIX (1854), pp. 153-176.

روز تقلد نیز این شرح را به زبان روسی ترجمه کرده و در مسکو به چاپ رسانید و آقای پرویز شهریاری از روی همین ترجمه‌ی روسی، شرح میرم چلبی را به زبان فارسی ترجمه کرده است (شهریاری، غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی، تهران ۱۳۷۷، ص ص ۱۵۱ - ۱۸۰).

۶. از شرح بیرجندی نسخه‌یی خطی در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران به شماره‌ی ۴۷۳ موجود است. علاوه بر این شروح قدیمی، مورخان علوم جدید نیز روش کاشانی را در موضوع تحقیقات خود قرار داده‌اند که از آن جمله می‌توان به منابع زیر اشاره کرد.

1. A. Aaboe, "Al-Kashi's Iteration Method for the Determination of sin 1°", *Scripta Mathematica*, 20 (1954), pp. 24-29.

این مقاله توسط آقای محمد باقری به زبان فارسی ترجمه و در شماره‌ی ۱۶ - ۱۵ میراث جاویدان به چاپ رسیده است.

2. J.L Berggren, *Episodes in the Mathematiocs of Medieual Islam*, Springer, New York, 1986.

این کتاب توسط محمد قاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی تحت عنوان گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی، به زبان فارسی ترجمه و در سال ۱۳۷۳ در تهران به چاپ رسیده است.

3. F. Riahi, "An Early Iterative Method for the Determination of sin 1°", *The College Mathematics Journal*, vol. 26 (1995), pp. 16-21.

4. A.P. Youshkevitch, *Les mathemathiques arabes (VIII-XV siecle)*, traduction française par M. Cazenave et K. Jaouiche, Paris, 1976.

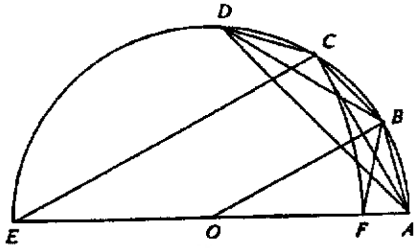
۵. ابوالقاسم قربانی، کاشانی‌نامه، تهران ۱۳۵۰، صص ۱۹۷ - ۲۲۴.

در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم EA قطر این دایره بوده و نقاط D, C, B روی نیمدایره به شکلی قرار گرفته باشند که داشته باشیم:

کمان AB = کمان BC = کمان CD

کاشانی با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس چنین می‌نویسد:

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD$$



از آنجایی که AB = CD = BC و AC = BD می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\overline{AB}^{2} + BC \times AD = \overline{AC}^{2} \qquad (1)$$

حال نقطه‌ی F را روی AE چنان اختیار می‌کنیم که EF = EC باشد. از تشابه مثلث‌های ABF و ABO نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AF = \frac{\overline{AB}^{2}}{R}$$

پس:

$$EF = 2R - AF = 2R - \frac{\overline{AB}^{2}}{R}$$

از طرف دیگر در مثلث قایم‌الزاویه‌ی AEC داریم:

$$\overline{AC}^{2} = \overline{AE}^{2} - \overline{EC}^{2} = 4R^{2} - \overline{EF}^{2} \qquad (2)$$

$$= 4R^{2} - (2R - \frac{\overline{AB}^{2}}{R})^{2}$$

$$= 4\overline{AB}^{2} - \frac{\overline{AB}^{4}}{R^{2}}$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$AD = 3AB - \frac{AB^{3}}{R^{2}} \qquad (3)$$

حال اگر کمان AB را مساوی با ۲α فرض کنیم کمان AD برابر با ۶α خواهد شد. باید توجه داشت که رابطه‌ی زیر بین وتر و سینوس یک زاویه وجود دارد:

$$۲R\sin \alpha = \text{وتر}\ (۲\alpha)$$

هرگاه در رابطه‌ی (۳) مقادیر AB و AD را بر حسب $\sin \alpha$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$۲R\sin ۳\alpha = ۶R\sin \alpha - ۸R^۳ \sin^۳ \alpha / R^۲$$

و یا

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin \alpha - ۴\sin^۳ \alpha$$

و این همان فرمول معروف تثلیث زاویه است که کاشانی برای اولین بار آن را کشف نموده است. حال برای محاسبه‌ی $\sin ۱^\circ$ کافی است آن را برابر با x بگیریم تا معادله‌ی درجه سوم $x = \frac{۴}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ$ را حاصل نماییم.

۲.۳. روش الگوریتمی کاشانی برای حل معادله‌ی درجه سوم

روش کاشانی برای تعیین ریشه‌ی منحصربه‌فرد معادله‌ی درجه سوم $ax^۳ \pm bx \pm c = ۰$ به صورت تقریبی در حالی که a مثبت و عددی بسیار کوچک بوده و داشته باشیم: $۴b^۳ + ۲۷ac^۲ > ۰$ همان است که در آنالیز جدید از آن به عنوان «تعیین نقطه‌ی ثابت $x۰$ در تابع پیوسته و محدود f» تعبیر می‌شود.

البته کاشانی تنها حالت خاصی از این معادله را حل می‌کند ولی چنان‌که بعداً نشان خواهیم داد این روش کاشانی سه قرن پس از او توسط ریاضیدان دیگر ایرانی به نام ملاعلی‌محمد اصفهانی برای حل تقریبی انواع مختلفی از معادلات درجه سوم با شرایط فوق تعمیم می‌یابد. برای فهم دقیق روش کاشانی ما به ذکر مقدمات و مفاهیمی نیاز داریم، مفاهیمی که برای کاشانی کاملاً ناشناخته بوده‌اند.

قضیه‌ی ۱: هرگاه $f(x)$ تابعی عددی و پیوسته در فاصله‌ی بسته‌ی $I \subset R$ باشد و داشته باشیم $f(I) \subseteq I$ معادله‌ی $f(x) = x$ حداقل دارای یک ریشه در I می‌باشد.

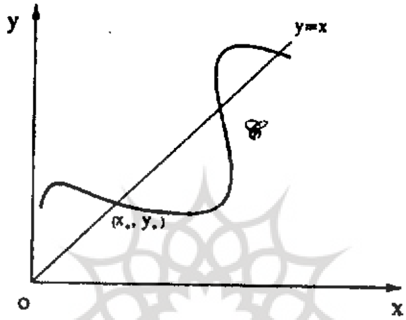
در واقع مشاهده می‌کنیم که خط $y = x$ منحنی (C) نمایش تابع $y = f(x)$ را حداقل در یک نقطه‌ی (x_o , y_o) قطع می‌کند، یعنی

$$y_o = f(x_o), y_o = x_o$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$x_o = f(x_o)$$

که این نشان می‌دهد که معادله‌ی $f(x)$ حداقل دارای یک ریشه‌ی x_o می‌باشد.



قضیه‌ی ۲: قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت: با استفاده از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت به نتیجه‌یی مهم‌تر از قضیه‌ی قبل خواهیم رسید.

حال اگر f تابعی پیوسته در محدوده‌ی بسته‌ی $I = [a, b]$ باشد به طوری که مشتق آن یعنی $f'(x)$ در نامساوی زیر صدق کند $|f'(x)| \leq M < 1$ نقطه‌ی x_o در فاصله‌ی I وجود دارد به طوری که تمام مقادیر $x_{n+1} = f(x_n)$ در این نقطه‌ی ثابت x_0 همگرا می‌شوند و به ازای $n > 1$ خواهیم داشت:

$$|x_n - x_o| \leq M^n |x_1 - x_o|$$

که در آن $0 < M < 1$ می‌باشد.

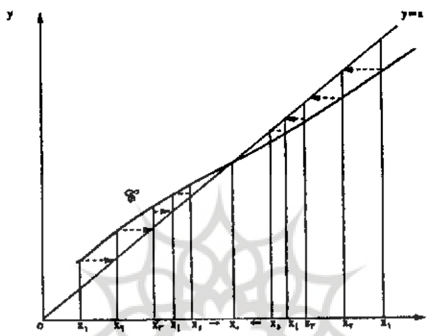
اثبات این قضیه در کتاب‌های درسی آنالیز موجود است.

الگوریتم برای تعیین مقدار تقریبی x_0

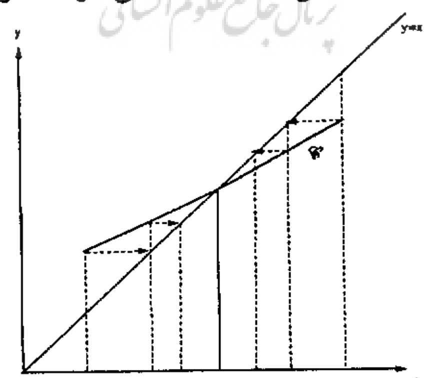
حال اگر تابعی داشته باشیم که در شرایط قضیه‌ی ۲ صدق کند، برای تعیین نقطه‌ی ثابت x_0، الگوریتم ساده‌یی به شرح زیر موجود است:

۱. x_1 مقدار دلخواهی را در فاصله‌ی I اختیار می‌کنیم.

۲. با استفاده از $x_n = f(x_{n-1})$ و به کمک استقرا رشته‌ی $\{x_n\}$ از عناصر I را برای $n > 1$ تعیین می‌کنیم.



۳. نشان می‌دهیم که رشته‌ی $\{x_n\}$ در نقطه‌ی ثابت x_0 همگرا می‌شوند. حال اگر $f(x)$ تابعی صعودی و محدّب و یا مقعّر باشد، در این صورت هرگاه $X_1 > X_0$ باشد رشته‌ی $\{x_n\}$ همان طوری که شکل بالا نشان می‌دهد نزولی است، در حالی که اگر $X_1 > X_0$ باشد، چنانچه در شکل زیر مشاهده می‌شود صعودی خواهد بود.



این همان مفهومی است که کاشانی به شکل شهودی آن را درک و از آن برای حل معادله‌های درجه سوم خود استفاده کرد. زیرا هرگاه معادله‌های درجه سوم $ax^3 - bx + c = 0$ را در نظر بگیریم این معادله را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$x = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x^3$$

طرف راست معادله یعنی $\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x^3$ را $f(x)$ در شرایط قضیه‌ی (۲) صدق نماید. بنابراین $x = f(x)$ دارای یک ریشه و فقط یک ریشه خواهد بود.

برای تعیین این ریشه $\{x_n\}$ را مطابق آنچه که قبلاً ذکر کردیم تعیین می‌کنیم. برای اولین تقریب $\frac{a}{b}x^3$ را نادیده می‌گیریم. خواهیم داشت: $x_1 = \frac{c}{b}$

آن را در $f(x)$ قرار می‌دهیم خواهیم داشت:

$$x_2 = f(x_1) = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c}{b} + \frac{ac^3}{b^4}$$

همین طور x_2 را در $f(x)$ قرار می‌دهیم خواهیم داشت:

$$x_3 = f(x_2) = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b} + \frac{ac^3}{b^4}\right)^3$$

و یا:

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{3a^2c^5}{b}$$

هرگاه به همین نحو مقادیر دیگر x_n را تعیین کنیم بیش از پیش به ریشه‌ی منحصر به فرد x_0 معادله نزدیک خواهیم شد.

حال به معادله‌ی کاشانی یعنی $x = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}\sin 3^\circ$ برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم: $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + p$ باشد که در آن $p = \frac{1}{3}\sin 3^\circ$، تابع $f(x)$ را در فاصله‌ی $I \in [0/01, 0/02]$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = 4x^2$$

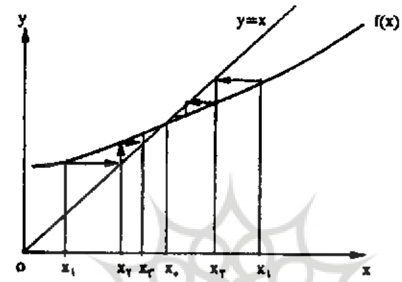
$f'(x)$ در فاصله‌ی I مثبت می‌باشد، پس تابع f در این فاصله‌ی صعودی است و ماکزیمم آن زمانی است که $x = 0/02$ باشد. پس داریم:

$$|f'(x)| \leq 1/6 \times 10^{-3}$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که مشتق این تابع کوچک‌تر از واحد می‌باشد، بنابراین طبق قضیه‌ی ۲، این تابع دارای یک نقطه‌ی ثابت x_0 در فاصله‌ی I می‌باشد. به علاوه برای هر مقدار x_1 در این فاصله رشته‌ی $\{x_n\}$ حاصل می‌شود، به طوری که

$$|x_n - x_0| \leq M^n |x_1 - x_0| \quad \text{برای تمام مقدار} \quad n \geq 1$$

این رشته که با x_1 شروع می‌شود همان طوری که در شکل زیر نمایش داده شده در نقطه‌ی ثابت x_0 همگرا می‌شود.



کاشانی برای پیدا کردن این نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد و یا ریشه‌ی معادله‌ی سینوس یک‌درجه الگوریتم خود را به کار برد. او همه‌ی محاسبات خود را در دستگاه شصتگانی انجام می‌دهد، ما برای سهولت، این محاسبات را در دستگاه اعشاری انجام می‌دهیم.[۷]

حل معادله‌ی کاشانی در دستگاه اعشاری با روش کاشانی

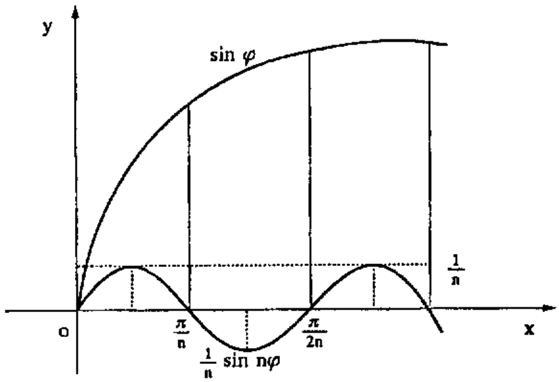
قضیه: هرگاه $0 < \varphi < \frac{p}{n}$ باشد، خواهیم داشت: $\sin \varphi > \frac{1}{n} \sin n\varphi$

برهان: فرض کنیم $f(\varphi) = \sin \varphi - \frac{1}{n} \sin n\varphi$ کافی است ثابت کنیم که $f(\varphi)$ تابعی است صعودی.

---

۷. این کار را آقای فرهاد ریاحی ریاضیدان ایرانی مقیم خارج از کشور در مقاله‌ی زیر انجام داده است که ما این قسمت را از آن مقاله اقتباس کرده‌ایم.

F. Riahi, "An Early Itrative Methode for the Determination of sin 1°", *The College Mathematics Journal*, vol. 26, no. 1, (1995), pp. 19-20.



$$f'(\varphi) = \cos\varphi - \cos n\varphi = ۲\sin\frac{n+۱}{۲}\varphi . \sin\frac{n-۱}{۲}.\varphi$$
$$\Rightarrow f'(\varphi) \geq ۰,\ ۰ < \varphi \leq \frac{۲\pi}{n+۱}$$
$$\frac{۲\pi}{n+۱} > \frac{\pi}{\pi}\ (n \geq ۱) \Rightarrow f(\varphi) > ۰ \quad ۰ < \varphi \leq \frac{\pi}{n}$$

پس از تابع صعودی و بنابراین قضیه ثابت است. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin ۱^\circ > \frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ$$

اما در معادله‌ی کاشانی یعنی $x = \frac{۴}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ$ ، از آنجایی که x مقداری است کوچکتر از واحد، بنابراین مکعب آن یعنی $x^۳$ بسیار کوچک خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود که $\sin ۱^\circ$ نمی‌تواند خیلی از $\frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ$ بزرگتر باشد. پس از این دو حداقل در دو رقم اعشاری اولیه باید مساوی باشند.

اما...$\frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ = ۰/۰۱۷۴۴۵۳$ پس x باید به شکل زیر نوشته شود:

$x = ۰/۰۱a_۱a_۲a_۳...$ پس معادله‌ی (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$۰/۰۱a_۱a_۲a_۳... = \frac{۴}{۳}(۰/۰۱a_۱a_۲a_۳...)^۳ + \frac{۱}{۳}\sin ۳^\circ$$

مقدار ۱ ۰ و ۰ را از طرفین این تساوی کم می‌کنیم خواهیم داشت:

$$۰/۰۰a_۱a_۲a_۳... = \frac{۴}{۳}(۰/۰۰a_۱a_۲a_۳...)^۳ + ۰ و ۰۰ ۷۴۴۵۳$$

حال اگر طبق الگوریتم کاشانی $\frac{۴}{۳}x^۳$ را به سبب ناچیزی آن نادیده بگیریم خواهیم داشت:

$$0/00\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots \simeq 0/074453$$

پس

$$a_1 = 7$$

و

$$x_1 = 0/001$$

$$x_2 = 0/0017$$

حال مقدار را معادله‌ی (۳) قرار می‌دهیم خواهیم داشت:

$$0/0017\, a_2\, a_3 \ldots = \frac{4}{3}\,(0/0017\, a_2\, a_3 \ldots)^3 + \frac{1}{3}\sin 3^\circ$$

و از طرفین این تساوی مقدار ۰۱۷ و ۰ را کسر می‌کنیم خواهیم داشت:

$$0/000\, a_2\, a_3 \ldots \frac{4}{3}\,(0/0017\, a_2\, a_3 \ldots)^3 + 0/0004453$$

با چشم‌پوشی از $\frac{4}{3}x^3$ خواهیم داشت:

$$0/000\, a_2\, a_3 \ldots \simeq 0/0004453 \Rightarrow a_2 = 4$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$x_3 = 0/00174$$

به همین طریق کاشانی ارقام دیگر x را تعیین کرده و $\sin 1^\circ$ را به صورت ۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۱۰۳ و ۰ محاسبه می‌کند که تا ۱۷ رقم اعشاری آن درست می‌باشد[8].

۳.۳. نفوذ کاشانی در ریاضیدانان پس از او

گرچه ریاضیدانان عصر تیموری همچون قاضی‌زاده‌ی رومی، میرم چلبی با روش تقریبی حل معادلات درجه‌ی سوم کاشانی آگاهی داشته‌اند ولی هیچ‌یک

8. R. Rashed, "Mathematiques traditionelles dans les pays islamiques aux XIX siécle l'exemple de l'Iran", dans *Transfer of Modern science Technology to the Muslim world*, Istanbul, 1992, pp. 393-404.

نتوانسته‌اند این روش را برای حل معادلات درجه سوم عددیی دیگر غیز از معادله‌ی کاشانی به کار برند تنها سه قرن پس از کاشانی، ریاضیدان دیگر از ایران به نام ملاعلی‌محمد اصفهانی توانست با درک درستی از روش کاشانی آن را برای انواع دیگری از معادلات درجه سوم عددی به کار برد. البته در عصر این ریاضیدان، دانشمندان اروپایی در ریاضیات پیشرفت قابل توجهی کرده و روش کاشانی را مجدداً کشف کرده بودند. بنابراین ملامحمدعلی اصفهانی اگر از این کشفیات آگاهی داشت، می‌توانست از طریق منابع اروپایی روش تقریبی حل معادلات درجه سوم را به دست آورد. اما آثار این ریاضیدان عصر قاجار گواه آن است که ادامه دهنده‌ی ریاضیات سنتی اسلامی بوده و از منابع بیگانه آگاهی نداشته است[۹]. بنابراین روش تقریبی حل معادلات درجه سوم را باید از طریق نوشته‌ی کاشانی و یا شارحان او به دست آورده باشد، با توجه به اینکه تحریر قاضی‌زاده‌ی رومی نیز در همین دوره به چاپ رسیده بود و او واقعاً از آن آگاهی داشته است و شاید به سبب حل معادلات درجه سوم به روش کاشانی بوده است که او را «غیاث‌الدین جمشید ثانی» نامیده‌اند[۱۰].

---

۹. امروزه در ماشین حسابهای مهندسی و نیز برنامهٔ ماشین حساب ویندوز ۹۸، سینوس یک درجه معمولاً برابر ۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۱۲۸۱۹۴۱۸۹۷۸۵۱۶۳۱۶۲ / ۰ در نظر گرفته می‌شود.

۱۰. در میان مورخان معاصر شادروان محیط طباطبایی ظاهراً اول کسی است که به این لقب ملاعلی‌محمد اصفهانی اشاره کرده است. او می‌نویسد: «در سال ۱۲۷۲ هـ ق پدر مرحوم حاجی نجم‌الدوله، ملاعلی‌محمد اصفهانی که «غیاث‌الدین جمشید ثانی» لقب داشت، به اتفاق برخی از فضلای عصر بدانجا (= رصدخانه سمرقند) رفته و نقشه‌یی از تپه و محل رصد و آثار باقیمانده برداشت که در روزنامه‌ی علمیه همان زمان به چاپ رسید.» (← محمد محیط طباطبایی «تعلیقات برنامهٔ غیاث‌الدین»، ماهنامهٔ آموزش و پرورش، ۱۳۱۹ هـ ش، س ۱۰، ش ۳، ص ۶۰). نیز در تقویم سال ۱۲۸۹ هـ ش که آقای محمدرضا صیاد فتوکپی آن را در اختیار این جانب قرار داده‌اند، ضمن مطلب مختصری به قلم میرزا ابوالحسن خان درباره‌ی نجم‌الدوله فرزند ملاعلی‌محمد اصفهانی چنین آمده است: «... پدر بزرگوارش مرحوم ملاعلی‌محمد که دانایان عصر سابق غیاث‌الدین جمشید ثانی می‌خواندند از روی حقیقت و انصاف از جمله دانشمندان ایران بلکه از اعاظم رجال دوران به شمار می‌آمد. فن مخصوصش ریاضی قدیم بوده... و در مسائل جبری به صاحبان این علم

←

نتیجه

چنان که دیدیم بطلمیوس برای وتر یک‌درجه از خاصیت چهار ضلعی محاطی استفاده کرده و پس از تعیین مقادیر وترهای $\frac{3^{\circ}}{2}$ و $\frac{3^{\circ}}{4}$ به کمک یک نامساوی بین این وترها و کمان‌هایشان وتر یک‌درجه را تعیین می‌کند. گذشته از آنکه روش بطلمیوس برای این منظور بسیار طولانی است، مقدار تقریبی حاصل از این روش برای وتر یک‌درجه نیز چندان دقیق نیست. از همین‌رو، ریاضیدانان اسلامی کوشیدند روش دیگری را جایگزین این روش نمایند. در این دوره مثلثات به وسیله‌ی دانشمندان اسلامی کشف گردیده و محاسبات نجومی با سینوس انجام می‌گرفت. به همین سبب ابوالوفای بوزجانی منجم برجسته ایرانی برای تنظیم جدول نجومی خود به جای وتر یک‌درجه، سینوس نیم‌درجه را محاسبه می‌کند. روش او گرچه دقیق‌تر از روش بطلمیوس بود، اما او نیز همانند بطلمیوس از درج واسطه‌ی حسابی استفاده می‌کند. این وضع به همین منوال ادامه داشت تا اینکه در عصر تیموری، کاشانی روشی کاملاً نوین برای محاسبه‌ی سینوس یک‌درجه ارائه داد. کاشانی همانند بطلمیوس از رابطه‌ی میان اضلاع و اقطار چهارضلعی محاطی شروع کرد ولی بر خلاف ریاضیدانان یونانی موفق به کشف فرمول مثلثاتی، تثلیث زاویه شد. او که معادله‌ی مسئله را کشف کرده بود دیگر نیازی به درج واسطه‌ی حسابی نداشت. او نه‌تنها معادله‌ی مسئله را کشف کرد، بلکه به کشف، آلگوریتمی برای حل این نوع معادلات فایق آمد که ما آن را آلگوریتم کاشانی نامیده‌ایم. همان که قرن‌ها پس از او به وسیله‌ی ملاعلی‌محمد اصفهانی مجدداً برای حل دیگر معادلات درجه سوم عددی به کار گرفته شد.

←

خدمت‌های بی‌حساب نموده است.» (← تقویم فارسی سال ۱۳۸۹ هش، استخراج مرحوم حاج میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله، ص ۳).