شاخص دیویژیا و کاربرد آن در تابع تولید:

بررسی مقدار مصرف نهاده کود در کشت گندم آبی در استان سمنان

کامبیز هژبر کیانی

(دانشیار اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی)

علیرضا امینی

(دانشجوی دوره دکتری دانشگاه آزاد اسلامی)

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

مقدمه

شاخص دیویژیا یکی از معروفترین و کاراترین شاخصهای عددی است که از دیرباز در زمینه‌های مختلف علم اقتصاد کاربرد گسترده‌ای داشته است. به عنوان مثال، از این شاخص در زمینه بررسیهای تغییر فنی، تغییر بهره‌وری، اقتصاد رفاه (در خصوص مازاد

مصرف کننده و شاخص ترجیحات)، اقتصاد پولی و جمعی‌سازی[۱] نهاده‌ها در برآورد تابع تولید استفاده شده است.[۲] در تشکیل و توسعه چارچوب نظری این شاخص، اقتصاددانانی نظیر: ریچتر[۳]، گورمن[۴]، هیلینگر[۵] و هالتن[۶] نقش اساسی داشته‌اند.[۷]

از آن جا که در مطالعات انجام شده در اقتصاد ایران، ویژگیها و مفروضات این شاخص مورد توجه کافی قرار نگرفته، و عدم توجه به این مفروضات باعث ایجاد تورش در نتایج می‌شود، بنابراین در مقاله حاضر ابتدا به معرف شاخص و ویژگیها و مفروضات آن می‌پردازیم، سپس کاربرد شاخص رادر برطرف کردن مشکل همخطی در برآورد تابع تولید گندم آبی در استان سمنان نشان می‌دهیم.

۱. شاخص دیویژیا

شاخص دیویژیا، در واقع، یک مجموع موزون از نرخهای رشد است که در آن وزنها سهم ارزش هر نهاده از ارزش کل نهاده‌هاست. فرض کنید $\{X_1(t),\dots,X_n(t)\}$ بردار مقادیر n نهاده باشد که در تشکیل شاخص به کار می‌رود و $\{P_1(t),\dots,P_n(t)\}$ بردار قیمت متناظر با آن است. اگر a(t) بر مسیر Xها در فاصله زمانی [0 , T] دلالت داشته باشد، آنگاه شاخص دیویژیا در فرم پیوسته‌اش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(\Gamma)=exp\{\int_0^t(\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i(t)X_i(t)}{\sum P_j(t)X_j(t)}\cdot\frac{\dot{X}_i(t)}{X_i(t)})\,dt\}\qquad ,j=1,\dots,n \quad (1)$$

---

1. *Aggregation.*

۲. مآخذ شماره ۱۰: ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۱۸، ۲۳، ۲۴، ۲۸ را ملاحظه کنید.

3. *Richter.*

4. *Gorman.*

5. *Hillinger.*

6. *Hulten.*

۷. مآخذ شماره ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۲۲ را ملاحظه کنید.

$$= exp \int_{\Gamma} \psi d\alpha(t) =$$

که در آن نقطه بر روی متغیر معرف مشتق نسبت به زمان، Γ منحنی توضیح داده شده، بوسیله $\alpha(t), \circ \leq t \leq T$, ψ دلالت بر قیمتهای نرمالیزه شده دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = \left(\frac{P_1(t)}{\sum P_j(t) X_j(t)}, \ldots, \frac{Pn(t)}{\sum P_j(t) X_j(t)} \right) \qquad ,j = 1,\ldots,n$$

شاخص دیویژیا علی‌رغم بسیاری از خواص مطلوب، نقص عمده‌ای دارد. با توجه به اینکه، این شاخص یک انتگرال خطی است،[1] مقدار آن بستگی به مسیری دارد که انتگرال گرفته می‌شود. بدین ترتیب مشکل اساسی در معیار دیویژیا، امکان وجود ارزشهای چندگانه برای شاخص در یک نقطه مفروض است. از نظر ریاضی، یک انتگرال، خطی در ناحیه باز S در R^n مستقل از مسیر انتگرال است، اگر برای هر φ پیوسته دو نقطه X, Y در S داشته باشیم:[2]

$$\int_{\Gamma(x,y)} \psi da = \int_{\Gamma_1(x,y)} \psi d\beta \qquad (2)$$

به طوری که برای تمام مسیرهای α و β که منحنی‌های Γ و Γ_1 را توضیح می‌دهد داشته باشیم:

۱- برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد انتگرال خطی مآخذ شماره ۲، ۵ را ملاحظه کنید.

۲- صفحه ۲۹۲، تعریف ۴۴ - ۱۰، مآخذ شماره ۵ را ملاحظه کنید.

$$\Gamma,\Gamma_1 \in S, a \in \Gamma, \beta \in \Gamma_1$$

اگر رابطه (۲) برقرار نباشد، انتگرال خطی وابسته به مسیر است. به عنوان مثال، دو مسیر $\Gamma(x,x), \Gamma_1(x,x)$ در فاصله زمانی [0 , T] را در نظر بگیرید که یک نقطه X را به خودش متصل می‌کند. به دلیل اینکه، انتگرالهای خطی عموماً وابسته به مسیر است، داریم:

$$D(\Gamma(x,x)) \neq D(\Gamma_1(x,x))$$

معنی نامساوی فوق آن است که برای حداقل یکی از مسیرها، شاخص به ارزش اولیه‌اش بر نمی‌گردد. این مورد بر این نکته اشاره دارد که بواسطه دور زدن روی یک مسیر، ارزش شاخص در نقطه X می‌تواند به طور دلخواه بزرگ یا کوچک شود.[۱]

هالتن با دقت‌نظر خاصی به ارتباط مستقیم بین تک عیب عمده شاخص دیویژیا (مسئله دور زدن) و نظریه اقتصادی جمعی‌سازی پی برد. او معتقد است مسئله دور زدن وقتی منتفی است که انتگرال دیویژیا در $S \subset R^n$ مستقل از مسیر انتگرال باشد و این امر هنگامی رخ می‌دهد که یک کل اقتصادی مرتبط با هر نقطه $\{X_1, ..., X_n\} \in S$ وجود داشته باشد. البته این یک شرط لازم است نه کافی. با فرض اینکه رابطه (۱) انتگرال‌پذیر باشد، شرایط لازم و کافی برای مستقل از مسیر بودن شاخص دیویژیا را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:[۲]

الف- وجود یک کل تعریف شده در S.

ب- همگن خطی بودن این کل.

ج- وجود قیمت نرمال قابل مشاهده در هر نقطه S با حاصل‌ضرب عددی یکتا.

در مورد شاخص نهاده‌ها، شرایط (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

الف- ۱) تابع تولید پیوسته و مشتق‌پذیر $f(X_1(t), ..., X_n(t))$ باشد به طوری که در هر

---

۱. صفحه ۷۵۲ مآخذ شماره ۲۲ را ملاحظه کنید.

۲. مآخذ شماره ۱، ۱۶ را ملاحظه کنید.

جایی در S تعریف شود.

ب- ۱) نسبت به X_j همگن خطی باشد.

ج- ۱) رویه f یک قیمت نرمال یکتا با حاصل‌ضرب عددی داشته باشد.

برای روشن شدن مطلب به قضایای فرعی زیر توجه کنید.[۱]

قضیه فرعی نخست: اگر بردار نهاده‌هایی که در تشکیل شاخص به کار می‌رود، $[X_1(t),\ldots,X_n(t)]$، زیر مجموعه‌ای از بردارکل نهاده‌ها، $[X_1(t),\ldots,X_m(t)]$, $m>n$ باشد، آنگاه برای اینکه یک کل وجود داشته باشد، لازم است تابع تولید m نهاده‌ای به یک تابع n نهاده‌ای (شامل عناصر شاخص) و یک تابع m-n نهاده‌ای (شامل عناصر خارج از شاخص) تفکیک‌پذیر ضعیف باشد.

به عبارت دیگر، شاخص دیویژیا از $[X_1,\ldots,X_n]$ در یک ناحیه $S\subset R^n$ مستقل از مسیر انتگرال است، اگر تابع $G(X_1,\ldots X_m)$ که به طور پیوسته مشتق‌پذیر و در ناحیه $S'\subset R^m$ تعریف شده است، به تابعی دیگر از m-n متغیر باقیمانده تفکیک‌پذیر ضعیف باشد، یعنی توابع f و g و h وجود داشته باشد، به طوری که:

$$G(X_1,\ldots X_m)=g(f(X_1,\ldots,X_n),h(X_{n+1},\ldots,X_m)) \qquad (۴)$$

قضیه فرعی دوم: این قضیه به ارزشهایی که شاخص اختیار می‌کند مربوط می‌شود. تحت شرایط (۳)، شاخص دیویژیا ارزشهای واقعی تابع کل را که نسبت به یک دوره پایه نرمالیزه شده است به خود اختصاص می‌دهد، به عبارت دیگر، خواهیم داشت:[۲]

---

۱. همان مآخذ.

۲. اثبات این قضایا را در مآخذ شماره ۱، ۱۶ ملاحظه کنید.

$$D(\Gamma) = \frac{f(X(t))}{f(X(o))}$$

بنابراین این شاخص تمام اطلاعات موجود در مسئله را با نرمالیزه کردن حفظ می‌کند. بدین ترتیب، حتی در وضعیتهایی که مسئله دور زدن اجتناب‌پذیر است، شاخص دیویژیا حداقل بخوبی شاخصهای دیگر است. اثر واقعی این نتیجه از طریق تفسیر گسسته رابطه (۱) مشخص می‌شود. با توجه به اینکه داده‌های آماری در اقتصاد به صورت گسسته است، بنابراین تورن کویست[۱] تقریب زیر را برای محاسبه شاخص دیویژیا پیشنهاد می‌کند:[۲]

$$Ln(D_t) - Ln(D_{t-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[V_{i,t} + V_{i,t-1}][Ln(X_{i,t-1})]$$

که در آن:

$$V_{i,t} = \frac{P_{i,t}X_{i,t}}{\sum P_{j,t}X_{j,t}} \quad ,i,j = 1,\ldots,n$$

رابطه (۵) در واقع نرخ تغییر گسسته شاخص دیویژیاست.[۳] این رابطه دارای دو خاصیت مهم است: نخست، همیشه می‌توان این رابطه با مفروض بودن قیمتها و مقادیر نهاده‌ها محاسبه کرد، دوم، موقعی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، رابطه (۵) به سمت فرم پیوسته (۱) میل می‌کند. بنابراین، تحت شرایط (۳)، می‌توان از شاخص دیویژیای گسسته برای تقریب زدن ارزشهای واقعی شاخص استفاده کرد. بدین ترتیب، با مفروض بودن

1- Tornqvist.

۲. مآخذ شماره ۲۶ را ملاحظه کنید.

۳. برای اولین بار استفاده از این شاخص به ترتیب توسط ترنکویست، تایل و کلاک توصیه شده است. سپس در کارهای تحقیقاتی زیادی کریستنسن، جارگنسون، برندت و کومار از این شاخص استفاده کردند. برای کسب اطلاعات بیشتر مأخذ شماره ۸، ۹، ۱۱، ۱۹، ۲۰، ۲۵ را ملاحظه کنید.

شرایط (۳) می‌توان نتیجه گرفت شاخص دیویژیا بهترین انتخاب بین شاخصهای عددی است. البته، شرایط (۳)، و بالاخص، فرض همگنی خطی بیش از دو فرض دیگر محدودکننده است. در هر حال، در مواردی امکان حذف فرض همگنی خطی وجود دارد که در ادامه بحث این شرایط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۱. بازدهی متغیر نسبت به مقیاس

اگر اطلاعات اضافی در مورد مسئله تحت بررسی وجود داشته باشد، امکان حذف فرض بازدهی نسبت به مقیاس (همگنی خطی) وجود دارد. فرض کنید علاوه بر قابل مشاهده بودن بردار قیمت و مقدار نهاده‌ها، داده‌های آماری قابل مشاهده در مورد $V_o(t) = P_o(t) X_o(t)$، که در آن $P_o(t), X_o(t) = f[X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ قیمت متناظر با آن است، وجود داشته باشد. در شاخص کل نهاده‌ها و شاخصهای تغییر تکنولوژی سولو، منظور از $V_o(t)$ ارزش تولید در زمان $X_o(t),t$ میزان تولید در زمان $P_o(t),t$ ارزش یک واحد محصول در زمان t می‌باشد. با توجه به این اطلاعات اضافی، فرم جدید شاخص دیویژیا به صورت زیر تعریف می‌شود:[1]

$$D(\Gamma(O,T)) = exp\{\int (\sum \frac{P_i(t) X_i(t)}{P_o(t) X_o(t)} \cdot \frac{\dot{X}_i(t)}{X_i(t)})\, dt\} \qquad (۶)$$

$$D(\Gamma(O,T)) = exp\ \{\int_{\Gamma}^{*} \Psi\, da(t)\}$$

در رابطه (۶) و زنهای شاخص برابر $[\frac{P_i(t).X_i(t)}{P_o(t) X_o(t)}]$ بوده، در حالی که در رابطه (۱)، وزنهای شاخص برابر $[\frac{P_i(t) X_i(t)}{\Sigma P_j(t) X_j(t)}]$ است. در رابطه (۶) لازم نیست مجموع وزنهای شاخص، که معادل با کشش تولید تحت فرض حداکثرسازی سود است، برابر یک شود. به

۱- مآخذ شماره ۱۶ را ملاحظه کنید.

عبارت دیگر، مجموع و زنها متغیر بوده و می‌تواند ناهمگن خطی باشد. رابطه بین فرم جدید و قدیم شاخص دیویژیا به صورت زیر است:

$$\frac{\mathring{D}(t)}{D(t)} = \left(\frac{\Sigma P_i(t)\, X_i(t)}{P_o(t)\, X_o(t)}\right) \cdot \frac{\mathring{D}^*(t)}{D^*(t)}$$

روشن است که اگر فرض همگنی خطی معتبر باشد، دو فرم معادل است. اگر این فرض برقرار نباشد، نتایج حاصل از فرم نخست (۱) دارای تورش (اریب) خواهد بود. اگر برای مثال، f همگن درجه $r \neq 1$ باشد، آنگاه نرخ رشد (۱)، یعنی $\frac{D(t)}{D(t)}$ برابر نرخ رشد (۶) است.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، این معیار وقتی کاربرد دارد که امکان مشاهده ارزش متغیر مربوط به کل، یعنی f، وجود داشته باشد. از طرف دیگر، وقتی که شاخص معرف زیرمجموعه‌ای از نهاده‌ها (مورد بحث شده در قضیه فرعی ۱) باشد، وزنهای شاخص، همان نسبت ارزش هر نهاده به ارزش کل تولید خواهد بود.

۱-۲. تغییرناپذیری و استقلال مسیر

ریچتر در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۶[1] نشان داد تحت شرایطی که به طور اساسی با شرایط (۳) یکسان است، شاخص دیویژیا تنها شاخصی است که یک مجموعه قابل قبولی از آکسیومها[2] را برآورده می‌کند که در صدر این آکسیومها، آکسیوم تغییرناپذیری قرار دارد.

یک شاخص در فاصله $[O, T]$ تغییرناپذیر است، اگر برای هر مسیر $a(t) \in T$ که به طور کامل در یک سطح مفروض از f قرار می‌گیرد، داشته باشیم:

---

۱. مآخذ شماره ۲۲ را ملاحظه کنید.

2- *Axioms.*

$$D(\mathrm{r}(O,T)) = ۱$$

آکسیوم تغییرناپذیری در شاخص نهاده‌ها بدین مفهوم است که در طول یک تولید یکسان مفروض، شاخص نهاده‌ها تغییر نمی‌کند.

قبلاً نشان دادیم که شرایط (۳) اشاره بر مستقل از مسیر بودن شاخص دیویژیا دارد. در این جا می‌توان نشان داد که این شرایط بر تغییرناپذیری نیز دلالت دارد. از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{\overset{\circ}{D}(t)}{D(t)} = \Sigma \frac{P_i(t)\,X_i(t)}{\Sigma P_j(t)\,X_j(t)} \cdot \frac{\overset{\circ}{X}_i(t)}{X_i(t)}$$

$$= \Sigma \frac{f_i(t)\,X_i(t)}{\Sigma f_j(t)\,X_j(t)} \cdot \frac{\overset{\circ}{X}_i(t)}{X_i(t)}$$

$$= \frac{\Sigma f_i(t)\,\overset{\circ}{X}_i(t)}{f}$$

که برای مسیری که به طور کامل در یک سطح مفروض از f قرار می‌گیرد، یک مقدار ثابت و در نتیجه $\sum f_i \overset{\circ}{X}_i(t) = ۰$ است. برای این گونه مسیرها $\frac{\overset{\circ}{D}(t)}{D(t)} = ۰$, $D(\mathrm{r}) = ۱$ است، که اشاره به تغییرناپذیری شاخص دیویژیا دارد. بنابراین، وقتی که شاخص دیویژیا مستقل از مسیر است، نامتغیر نیز هست، ولی عکس این مطلب درست نیست.[۱]

۱-۳. تفکیک‌پذیری ضعیف

همان‌طور که در قضیه فرعی شماره ۱ ذکر شد، شرایط لازم و کافی برای وجود شاخص

---

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر مآخذ شماره ۱۶، ۲۲ را ملاحظه کنید.

دیویژیا از یک زیرمجموعه از نهاده‌ها، تفکیک‌پذیری ضعیف تابع تولید نسبت به n نهاده‌ای که شاخص براساس آن ساخته شده و سایر نهاده‌های باقیمانده است. بنابراین، قبل از به کارگیری شاخص، باید آزمون تفکیک‌پذیری ضعیف انجام شود.[۱] در راستای تحقق این هدف، تفکیک‌پذیری ضعیف را با جزییات بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید تابع تولید به صورت $N=[1,...,n], y=F(X)=F(X_1,...,X_n)$ مجموعه نهاده‌ها، $R=(N_1,\ldots,N_r)$ معرف r زیر مجموعه مستقل افراز شده، $F_i=\frac{\partial F}{\partial X_i}$ مشتق جزیی تابع تولید نسبت به نهاده iام و $F_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}$ مشتق تقاطعی تابع تولید به ترتیب نسبت به X_i و X_j باشد. با توجه به مفروضات فوق، تابع f(x) نسبت به افراز R تفکیک‌پذیر ضعیف است، اگر نرخ نهایی جانشینی[۲] بین هر زوج نهاده X_i و X_j از یک زیرمجموعه N_s (که در آن r و ....و ۱ = S)، مستقل از مقادیر نهاده‌های خارج از N_s باشد،[۳] یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial X_K}\left(\frac{F_i}{F_j}\right)=0 \qquad i,j\in N_s, k\notin N_s \qquad (۷)$$

شرایط تفکیک‌پذیری، ضعیف، یعنی رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$F_{ik}.F_j - F_{jk}.F_i = 0 \qquad i,j\in N_s, k\notin N_s$$

در ادامه، رابطه بین تفکیک‌پذیری ضعیف کشش جانشینی جزیی آلن (AES) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. کشش جانشینی جزیی آلن بین هر زوج نهاده X_i و X_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

---

۱. در مورد شیوه آزمون تفکیک‌پذیری ضعیف برای توابع تولید و هزینه ترنزلاگ مآخذ شماره ۸، ۹ را ملاحظه کنید.

2- *Marginal Rate of Substitution (MRS).*

۳. مآخذ شماره ۷ را ملاحظه کنید.

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^{n} F_h X_h \left| \overline{F}_{ij} \right|}{X_i X_j \left| \overline{F} \right|} \qquad , i \neq j \qquad (۸)$$

که در آن $\left| \overline{F} \right|$ دترمینان ماتریس هشین حاشیه‌دار[1] که عبارت است از:

$$\overline{F} = \begin{cases} \circ\ F_1 \ldots F_n \\ F_1 F_{11} \ldots F_{1n} \\ F_n F_{n1} \ldots F_{nn} \end{cases}$$

و $\left| \overline{F}_{ij} \right|$ کوفاکتور F_{ij} در $\overline{F}$ است.

طبق یکی از قضایا در این زمینه، شرایط لازم و کافی برای اینکه برای تمام $j \in N_s$ و $k \notin N_s$ تساوی $\sigma_{ik} = \sigma_{jk}$ برقرار باشد، آن است که تابع تولید F(x) نسبت به افراز R در هر نقطه در فضای نهاده تفکیک‌پذیر ضعیف باشد.[2]

اگر برای تمامی $j \in N_s$ و $k \notin N_s$ تساوی $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} = 1$ برقرار باشد، تفکیک‌پذیری ضعیف خطی وجود داشته و در صورتی که رابطه $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} \neq 1$ برقرار باشد، تفکیک‌پذیری ضعیف غیرخطی وجود دارد.

بنابراین، قبل از کاربرد شاخص دیویژیا لازم است آزمونهای تفکیک‌پذیری ضعیف انجام شود. در این رابطه، ابتدا فرضیه تفکیک‌پذیری ضعیف خطی آزمون گردیده و در صورتی که فرضیه رد نشد، فرایند آزمون فرضیه خاتمه یافته و می‌توان از شاخص دیویژیا استفاده کرد.

۱-۴. شاخص دیویژیا در داده‌های مقطعی

با توجه به اینکه در داده‌های مقطعی، تمامی اطلاعات آماری مربوط به یک سال معین

1- *Bordered Hessian*

۲. همان مأخذ.

است، رابطه (۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر به شرح زیر تبدیل کرد:[۱]

$$D = \exp\{\int \sum \frac{P_i(t)X_i(t)}{\Sigma P_j(t)X_j(t)} \cdot \frac{d\ln X_i(t)}{dt}\, dt\} = \exp\{\int(\sum V_{i,t} \cdot \frac{d\ln X_i(t)}{dt})dt\}$$

$$= \exp\{\Sigma \int V_{i,t} \cdot \frac{d\ln X_i(t)}{dt}\} = \exp\{\Sigma\, V_{i,t} \cdot \ln X_i(t)\} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{V_{i,t}}$$

که در آن t و V_i وزنهای شاخص بوده که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{i,t} = \frac{P_i(t)\, X_i(t)}{\Sigma P_j(t)\, X_j(t)}$$

تحت شرایطی که فرض همگنی خطی برقرار نباشد، وزنهای شاخص از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{i,t} = \frac{P_i(t)\, X_i(t)}{P_o(t)\, X_o(t)}$$

که در آن $P_o(t).X_o(t)$ ارزش تولید در زمان t می‌باشد.[۲]

---

۱. اثبات این فرمول توسط نگارندگان مقاله حاضر انجام شده، و بنابراین مسئولیت هر خطا یا لغزش به عهده آنهاست.

۲. کاربرد این فرمولها را در مآخذ شماره ۱، ۲۴، ۲۸ ملاحظه کنید.

۵.۱. کاربرد شاخص دیویژیا در رفع مشکل همخطی

یکی از کاربردهای شاخص دیویژیا، جمعی سازی نهاده‌ها و کاهش تعداد آنها و درنهایت کاهش شدت همخطی در برآورد تابع تولید است. همان طور که می‌دانیم در فرمهای انعطاف‌پذیر توابع تولید نظیر ترنزلاگ و متعالی، با افزایش تعداد نهاده‌ها، تعداد جملات به صورت تصاعدی افزایش یافته و احتمال بروز مشکل همخطی چندگانه بسیار بالاست.[۱] جهت رفع این مشکل می‌توان با استفاده از شاخص دیویژیا برخی از نهاده‌ها را که اثر انفرادی آنها برای تحلیلگر مهم نیست، جمعی‌سازی کرده، تعداد نهاده‌ها و در نتیجه تعداد جملات تابع را به طور موثری کاهش داد. همانگونه که قبلاً اشاره شد، قبل از استفاده از شاخص دیویژیا باید نسبت به برقرار بودن فرض تفکیک‌پذیری ضعیف در تابع تولید اطمینان حاصل شود.

۲. مطالعه موردی

اکنون با توجه به مبانی نظری مذکور در قسمتهای قبل، برای نشان دادن کاربرد شاخص دیویژیا در برآورد تابع تولید، به بررسی نحوه مصرف کود شیمیایی در کشت گندم آبی در استان سمنان می‌پردازیم.

با توجه به اینکه تابع ترنزلاگ در شرایط کلی به صورت تفکیک‌پذیر ضعیف نیست، بنابراین قبل از کاربرد شاخص در این تابع، شرایط تفکیک‌پذیری ضعیف آن مورد آزمون قرار گیرد. در مقاله حاضر، برای انجام آزمون تفکیک‌پذیری ضعیف خطی، یک معادله رگرسیون مقید[۲] با اعمال قیود مربوط به شرایط $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} = ۱$ بااستفاده از داده‌های

---

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد انواع مختلف توابع تولید و ویژگیهای آنها مأخذ شماره ۱ را ملاحظه کنید.

2- *Restricted*

آماری استان سمنان برآورد گردید[۱] که از مقایسه آن با معادله رگرسیون نامقید[۲] اولیه از طریق آماری F، فرضیه موردنظر در سطح معنیدار ۵ درصد رد نشد.[۳] بنابراین، تابع ترنزلاگ در مورد دادهای استان سمنان شرط تفکیک‌پذیری ضعیف خطی را برآورده می‌کند. اگرچه تابع ترنزلاگ شرایط بهره‌گیری از شاخص دیویژیا با استفاده از داده‌های مربوط به استان سمنان را دارد، ولی متأسفانه حتی با بهره‌گیری از شاخص دیویژیا، مشکل همخطی شدید چندگانه برطرف نشد. بنابراین، در بررسی حاضر در برخورد با مشکل از تابع انعطافپذیر دیگر یعنی، تابع تولید متعالی (ترانس‌دنتال) استفاده می‌شود.[۴] این تابع علاوه بر دارابودن کشش جانشینی متغیر، هر سه ناحیه تولید را نیز شامل می‌شود و مسئله مهمتر اینکه به طور ذاتی از خاصیت تفکیک‌پذیری ضعیف برخوردار است، که استفاده از شاخص دیویژیا را بدون هیچ مشکلی میسر می‌سازد.

جهت برآورد تابع تولید از داده‌های آماری طرح هزینه تولید محصولات کشاورزی در سال زراعی ۷۰-۷۱ استفاده کردیم. با توجه به اطلاعات موجود در رابطه با نهاده‌های کشاورزی، تولید گندم آبی تابعی از نهاده‌های کودشیمیایی، بذر، سطح زیرکشت، آب، نیروی کار ماشینی و غیرماشینی در نظر گرفته شد.

در مرحله اول تابع تولید با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی[۵] به صورت زیر

---

۱. توضیحات مربوط به اطلاعات آماری و نهاده‌های گنجانده شده در تابع تولید در قسمت بعد آمده است.

2- *Unrestricted*

۳. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه ر.ک. به مأخذ شماره ۳.

۴. در برخوردی دیگر با مشکل، تابع تولید گندم آبی در ۱۵ استان کشور با استفاده از تابع شبه ترنزلاگ (که ذاتاً تفکیک‌پذیر ضعیف است) نیز در مأخذ شماره ۱ برآورده شده است.

5- *Ordinary Least Square (OLS)*

آورد شد:[1]

$$\ln y = ۳/۷۵ + ۰/۳۲\ln F + ۰/۱۵\ln S - ۰/۰۷\ln H + ۰/۲۶\ln W + ۰/۱۴\ln L + ۰/۵\ln M$$
$$(۲/۵۸) \quad (۴/۷۱) \quad (۰/۷۳) \quad (-۰/۳۲) \quad (۲/۶۲) \quad (-۱/۴۷) \quad (۵/۰۳)$$

$$+ ۸/۴۶\times۱۰^{-۶}F - ۹/۹۹\times۱۰^{-۵}S ۰/۰۲ + H + ۷/۷۴\times۱۰^{-۷}W - ۰/۰۴\times۱۰^{-۲}L ۰/۰۲M$$
$$(۰/۳۱) \quad (-۰/۵۳) \quad (۰/۴۸) \quad (۰/۲۵) \quad (-۰/۱۵) \quad (-۰/۹۹)$$

$$\bar{R}^{۲} = ۰.۹۶, F = ۲۱۸/۳۱, n = ۱۰۳$$

که در آن y معرف مقدار تولید گندم آبی به کیلوگرم، F کود شیمیایی به کیلوگرم، S بذر به کیلوگرم، H سطح زیر کشت به هکتار، W آب برحسب مترمکعب، L نیروی کار غیرماشینی به نفر روز، M نیروی کار ماشینی[2] به ساعت، ln علامت لگاریتم طبیعی و n تعداد بهره‌برداران در نمونه است.

در تابع تولید برآورد شده فوق، علائم ضرایب W,E,F,lnL,lnH مخالف انتظار تئوریک بوده و از بین ۱۳ پارامتر برآورد شده، تعداد ۹ پارامتر از نظر آماری معنیدار نیست. با توجه به آماره F معنیدار، و معنیدار نبودن اکثر پارامترهای برآوردشده و مخالف انتظار بودن علائم برخی از پارامترها و بالابودن ضریب تعیین، مشکل همخطی چندگانه حاد مشهود است. برای رفع مشکل، همه نهاده‌ها، به استثناء کود که تنها متغیر حساس در تحلیل

---

۱. اعداد داخل پرانتز آماره‌های t می‌باشد.

۲. نحوه محاسبه نیروی کار ماشینی با مشورت کارشناسان بنگاه توسعه ماشین‌آلات کشاورزی محاسبه شده است. برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه محاسبه این نهاده و نهادهٔ آب ر.ک به مأخذ شماره ۱ .

حاضر است، را با استفاده از شاخص مقداری دیویژیا جمعی‌سازی کرده و بدین ترتیب تعداد پارامترهای برآورده شده را به طور موثری کاهش دادیم. شاخص دیویژیای نهاده‌هایی که در آن لحاظ شده است از رابطه زیر محاسبه شد:

$$D = S^{V_1}.H^{V_2}.W^{V_3}.L^{V_4}.M^{V_5} \qquad (۱۱)$$

که در آن D معرف شاخص دیویژیای نهاده‌ها و V_i برای i = ۱،...،۵ وزنهای شاخص بوده که سهم ارزش نهاده iام از ارزش تولید است.

در مرحله دوم، تابع تولید تحت شرایط جدید، با استفاده از همان روش OLS، به صورت زیر برآورده شد:[۱]

$$\ln y = ۱/۲۹۶۸۳۲۱\ln F + ۰/۰۲۵۲۲۴۱\ln D - ۰/۰۰۰۱۹۲۹F - ۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۷}D$$
$$(۱۲۷/۳۴) \qquad (۶/۱۶) \qquad (-۷/۳۷) \qquad (-۲۵/۴۹)$$

$$\overline{R}^{۲} = ۰/۹۹, F = ۱/۲۱ \times ۱۰^{۱۰}, n = ۱۰۳$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

تولید نهایی نهاده کود را می‌توان از (۱۲) به صورت زیر به دست آورد:

$$MP_f = \frac{\partial y}{\partial F} = y.\left(\frac{۱/۲۹۶۸۳۲۱}{F} - ۰/۰۰۰۱۹۲۹\right) \qquad (۱۳)$$

جدول شماره ۱، تولید نهایی نهاده کود را که از رابطه (۱۳) محاسبه شده برای ۱۰۳

---

۱. لازم به توضیح است که معادله از روش حداقل مربعات موزون *(Weighted Least square)* برآورده شده تا مشکل نابرابری واریانسها *(Hetroskedasticity)* که از طریق آزمون وایت *(White Test)* تأیید شد برطرف شود. همچنین با توجه به معنیدار نبودن عرض از مبدأ، معادله رگرسیون بصورت مقید و بدون عرض از مبدأ برآورد شد.

بهره‌بردار در نمونه تحت بررسی نشان می‌دهد.[1] همان طوری که ملاحظه می‌شود تولید نهایی کود برای ۶ بهره‌بردار منفی بوده، و بنابراین در ناحیه سوم تولید برای نهاده کود فعالیت می‌کند. به عبارت دیگر، مصرف نهاده کود این بهره‌برداران بیش از حد لازم است، به طوری‌که‌بدون‌تغییرسطح‌تولیدومصرف سایر نهاده‌ها، می‌توانند در مصرف کود صرفه‌جویی کنند. کشش تولید نسبت به نهاده کود را می‌توان از (۱۲) به صورت زیر به دست آورد:

$$EF = \frac{\partial y}{\partial F} \cdot \frac{F}{y} = ۱/۲۹۶۸۳۲۱ - ۰/۰۰۰۱۹۲۹F \qquad (۱۴)$$

نتایج تخمین کشش تولیدی نهاده کود از رابطه (۱۴) در جدول شماره ۱ ارائه شده است. کشش تولیدی نهاده کود برای ۸۲ بهره‌بردار بزرگتر از یک، برای ۱۵ بهره‌بردار بین ۰-۱ و برای ۶ بهره‌بردار کوچکتر از صفر است. به عبارت دیگر، ۸۲ بهره‌بردار در ناحیه اول تولید، ۱۵ بهره‌بردار در ناحیه دوم تولید و ۶ بهره‌بردار در ناحیه سوم تولید برای کود قرار دارند. بدین ترتیب، اکثریت بهره‌برداران (۸۸ بهره‌بردار) در ناحیه غیراقتصادی تولید برای نهاده کود (یعنی ناحیه ۱ و ۳) فعالیت می‌کنند.

با اتکاء به نتایج حاصل از برآورد تابع تولید، فوق، اکنون می‌توان مسئله استفاده بهینه (اقتصادی) از نهاده کود را مورد بررسی قرار داد. با توجه به اینکه شرایط رقابت کامل تا حدود زیادی بر بخش کشاورزی حاکم است، می‌توان جهت بررسی استفاده بهینه از نهاده کود از شرایط حداکثرشدن سود بهره‌بردار در بازار رقابت کامل استفاده کرد. در بازار رقابت کامل سود بهره‌بردار جایی ماکزیمم می‌شود که ارزش تولید نهایی کود با قیمت آن برابر شود. بنابراین، یک بهره‌بردار درصورتی از نهاده کود استفاده بهینه به عمل می‌آورد که ارزش تولید نهایی کود، یعنی $VMP_F = P \cdot MP_F$ که در آن P قیمت یک کیلوگرم محصول،

---

۱. جدول مذکور به لحاظ طولانی بودن در پایان مقاله حاضر ارائه شده است.

MP_F تولید نهایی فیزیکی کود و VMP_F ارزش تولید نهایی کود است، با قیمت کود برابر باشد.[۱] با مراجعه به جدول شماره ۱ مشخص می‌شود که برای ۹۷ بهره‌بردار $VMP_F > P_F$ و برای ۶ بهره‌بردار $VMP_F > P_F$ است، که در آن P_F قیمت یک کیلوگرم کود شیمیایی است. بنابراین، از جنبه اقتصادی هیچیک از بهره‌برداران در زمینه مصرف کود بهینه عمل نمی‌کنند. به عبارت دیگر، ۹۷ بهره‌بردار کمتر از حد بهینه و ۶ بهره‌بردار بیش از حد بهینه نهاده کود مصرف می‌کنند.

از طرف دیگر، با توجه به اینکه خطوط مرزی[۲] تابع تولید متعالی موازی محورهای مختصات است، اگر تولیدات نهایی کود (MP_F) و نهاده ترکیبی (MP_D) مساوی صفر در نظر گرفته شود، ترکیبی از آنها که حداکثر تولید را حاصل می‌کند به دست خواهد آمد.[۳] در مورد تابع برآورد شده، خواهیم داشت:

$$MP_F = y\left(\frac{۱/۲۹۶۸۳۲}{F} - ۰/۰۰۰۱۹۲۹\right) = ۰$$

$$MP_D = y\left(\frac{۰/۰۲۵۲۲۴}{D} - ۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۷}\right) = ۰$$

چون y نمی‌تواند صفر باشد، نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱/۲۹۶۸۳۲}{F} - ۰/۰۰۰۱۹۲۹ = ۰$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

---

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر مآخذ شماره ۴ و ۲۷ را ملاحظه کنید.

2- *Ridge Lines.*

۳. یعنی، حداکثر تولید در نقطه تقاطع دو خط مرزی عمود بر هم مشخص می‌شود.

$$\frac{۰/۰۲۵۲۲۴۱}{D} - ۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۷} = ۰$$

و از حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$F^* = ۶۷۲۲/۸۲kg$

$D^* = ۹۰۷۹۹/۵$

پس از جایگزین کردن مقادیر F^* و D^* در تابع تولید برآورده شده (۱۲)، مقدار حداکثر تولید عبارت است از:

$$\ln y = ۱/۲۹۶۸۳۲ \ln (۶۷۲۲/۸۲) + ۰/۰۲۵۲۲۴۱ \ln (۹۰۷۹۹/۵) - ۰/۰۰۰۱۹۲۹$$
$$(۶۷۲۲/۸۲) - ۲/۷۷۸ \times ۱۰^{-۷} (۹۰۷۹۹/۵) = ۱۰/۳۹۵۲۳۴۰۳$$

$y^* = \exp(\ln y) = ۳۲۷۰۳/۴kg$

اگر سطح زیر کشت در استان سمنان را باتوجه به محدودیت افزایش آن ثابت در نظرگرفته شود، و میانگین آن را با $\bar{H}$ نشان دهیم، متوسط حداکثر عملکرد بهره‌برداران به صورت زیر به دست می‌آید:

$$yH^* = \frac{y^*}{H} = \frac{۳۲۷۰۳/۴}{۵/۰۲} = ۶۵۱۴/۶\,kg/h$$

حال با توجه به اینکه، متوسط عملکرد در هکتار محصول گندم در استان سمنان، در شرایط فعلی، ۳۲۸۵/۵کیلوگرم است، با تغییر مصرف نهاده‌ها می‌توان متوسط عملکرد در هکتار را حداکثر تا ۳۲۲۹/۱کیلوگرم بیش از مقدار فعلی افزایش داد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که ترکیب بهینه اقتصادی نهاده‌ها، یعنی شرایط حداکثر سود، به سطح تولیدی منجر خواهد شد که متوسط عملکرد در هکتار آن کمتر از ۶۵۱۴/۶کیلوگرم است.[1]

---

۱. زیرا، در شرایط حداکثر سود $MP_F = \frac{P_f}{P}$, $MP_D = \frac{P_D}{P}$ است و چون قیمت محصول مخالف صفر است، شرایط تولیدات

نتیجه‌گیری

شاخص دیویژیا، یکی از مهمترین شاخصهای عددی است که در زمینه‌های مختلف علم اقتصاد کاربرد زیادی دارد. یکی از کاربردهای مهم این شاخص در نظریه رفتار تولیدکننده و در جمعی‌سازی نهاده‌ها درتابع تولید است. چنانکه پیش از این گفته شد، قبل از کاربرد شاخص باید از تفکیک‌پذیری ضعیف تابع تولید اطمینان حاصل کرد. در مورد توابعی که در حالت کلی دارای بازدهی نسبت به مقیاس متغیر است، باید وزنهای شاخص را از طریق سهم هزینه نهاده iام از ارزش تولید محاسبه کرد. اگر تحت این شرایط، بدون توجه به متغیربودن بازدهی نسبت به مقیاس، وزنهای شاخص به صورت سهم هزینه نهاده iام از هزینه کل نهاده‌ها محاسبه شود، نتایج تورشداری را حاصل خواهد کرد.

در قسمت پایانی بررسی حاضر، نحوه مصرف کود شیمیایی درکشت گندم آبی در استان سمنان را مورد بررسی قرار دادیم. براساس نتایج به دست آمده، اکثر بهره‌برداران در ناحیه غیراقتصادی تولید برای نهاده کود فعالیت می‌کنند و از نظر اقتصادی نیز مصرف کود بهینه نیست. همچنین، مشخص شد، با توجه به تکنولوژی موجود، اگر کلیه نهاده‌ها (به جز سطح زیر کشت) تغییر کند، متوسط عملکرد در هکتار استان حداکثر تا ۶۵۱۴/۶ کیلوگرم قابل افزایش است. بنابراین، ترکیب بهینه اقتصادی نهاده‌ها تحت شرایط حداکثر سود منجر به متوسط عملکرد در هکتاری خواهد شد که از ۳۲۸۵/۵ کیلوگرم بیشتر و از ۶۵۱۴/۶ کیلوگرم کمتر است. در صورتی که هدف افزایش سقف متوسط عملکرد در هکتار به بیش از ۶۵۱۴/۶ کیلوگرم مدنظر باشد، باید نکات زیر مورد توجه قرار گیرد:

۱. باتوجه‌به‌اینکه‌دراین‌استان از نهاده سم بسیار کم استفاده می‌شود (فقط ۶ بهره‌بردار از سم‌استفاده کرده‌اند)،بایدبرای‌مبارزه‌باآفات‌وعلفهای هرز، این نهاده مورد استفاده قرار گیرد.

۲. استفاده از بذرهای اصلاح شده و پرمحصول تشویق شود.

۳. استفاده صحیح و به موقع از نهاده‌های کشاورزی انجام پذیرد.

۴. استفاده از تکنولوژی مدرن برای توزیع یکنواخت کود و بذر در زمین[1]

نهایی مساوی صفر به معنی قیمت نهاده‌ها مساوی صفر است، که در واقع حداکثر تولید نامقید را نشان می‌دهد که به طور قطع بیش از شرایط مخالف صفربودن قیمت نهاده‌ها (حداکثر سود) خواهد بود.

۱- برای اطلاع از نقش اثر نحوه توزیع کود بر بازده، فصل سوم مأخذ شماره ۱ را ملاحظه کنید.

جدول شماره ۱ – داده‌های آماری عملکرد در هکتار، متوسط کود مصرفی در هکتار، قیمت هر کیلوگرم کود و نتایج تخمین تولید نهایی، کشش تولیدی و ارزش تولید نهایی کود

obs	YH	FH	MPF	EF	VMPF	PF
1	3166.667	400.0000	2.937435	0.371044	469.9896	14.00000
2	1600.000	100.0000	19.51493	1.219683	2732.090	25.00000
3	2000.000	100.0000	25.74377	1.287189	3861.566	26.00000
4	1500.000	125.0000	15.44626	1.287189	2316.939	26.00000
5	2285.714	285.7143	10.06606	1.258258	1509.909	15.00000
6	1800.000	300.0000	7.433823	1.238970	1115.073	15.00000
7	3000.000	350.0000	9.379852	1.094316	1406.978	50.00000
8	3500.000	350.0000	11.61821	1.161821	1742.732	50.00000
9	4000.000	150.0000	33.81070	1.267901	5409.712	25.00000
10	4000.000	150.0000	33.81070	1.267901	5409.712	25.00000
11	3111.111	400.0000	7.386258	0.949662	1107.939	15.55556
12	3500.000	400.0000	7.296960	0.833938	1094.544	16.00000
13	3500.000	300.0000	5.678958	0.486768	851.8438	25.00000
14	3666.667	333.3333	12.14356	1.103960	1821.533	25.00000
15	3500.000	250.0000	17.48060	1.248614	2622.090	16.00000
16	3500.000	250.0000	16.13049	1.152178	2419.573	16.00000
17	3125.000	350.0000	-36.63926	-4.103597	-5495.888	22.00000
18	2000.000	100.0000	25.35803	1.267901	3803.704	30.00000
19	2300.000	100.0000	29.60534	1.287189	4440.800	30.00000
20	2100.000	200.0000	13.21171	1.258258	1849.639	14.00000
21	3300.000	300.0000	13.62867	1.238970	2044.301	30.00000
22	3300.000	300.0000	13.62867	1.238970	2044.301	30.00000
23	3500.000	300.0000	4.328851	0.371044	649.3277	60.00000
24	2000.000	200.0000	11.42534	1.142534	1713.801	30.00000
25	3333.333	333.3333	12.77545	1.277545	1916.317	25.00000
26	2400.000	360.0000	8.414101	1.262115	1262.115	25.00000
27	1714.286	285.7143	7.549546	1.258258	1132.432	25.00000
28	1800.000	200.0000	10.97715	1.219683	1646.572	32.00000
29	1200.000	100.0000	15.21482	1.267901	2434.370	30.00000
30	1200.000	100.0000	15.21482	1.267901	2434.370	30.00000
31	3800.000	200.0000	23.90689	1.258258	3586.034	22.00000
32	2500.000	200.0000	15.72822	1.258258	2359.233	22.00000
33	2800.000	200.0000	17.88563	1.277545	2503.988	23.00000
34	3350.000	200.0000	20.42969	1.219683	2860.157	22.00000
35	6111.111	355.5555	16.98531	0.988236	2717.649	22.00000
36	2500.000	150.0000	21.37278	1.282367	3205.917	21.33333
37	2650.000	300.0000	10.94424	1.238970	1416.556	24.00000
38	2750.000	300.0000	11.35723	1.238971	1474.375	24.00000
39	3200.000	240.0000	15.74812	1.181109	2362.217	12.00000
40	3833.333	200.0000	20.41988	1.065385	2858.784	22.00000
41	3142.857	585.7143	4.837015	0.901444	725.5522	24.39024
42	4000.000	250.0000	18.43484	1.152178	2765.227	24.00000
43	4000.000	250.0000	19.20634	1.200396	2880.950	22.00000
44	3933.333	200.0000	23.22847	1.181109	3251.986	22.00000
45	2666.667	300.0000	10.75591	1.210039	1505.827	27.77778
46	3750.000	300.0000	14.76386	1.181109	2066.940	22.00000
47	3750.000	300.0000	14.76386	1.181109	2214.579	24.00000
48	3750.000	300.0000	14.76386	1.181109	2066.940	22.00000
49	4333.333	300.0000	13.71734	0.949662	2057.601	18.88889
50	3600.000	240.0000	17.71663	1.181109	2657.495	24.00000

ادامه جدول شماره ۱

51	4000.000	300.0000	15.74812	1.181109	2362.217	22.00000
52	3500.000	300.0000	13.77960	1.181109	1791.348	22.00000
53	2800.000	400.0000	8.942814	1.277545	1251.994	28.00000
54	1800.000	400.0000	5.662159	1.258258	736.0807	28.00000
55	3500.000	300.0000	-11.87243	-1.017637	-1804.610	30.00000
56	4533.333	266.6667	21.39038	1.258258	2994.653	16.00000
57	4300.000	250.0000	16.50005	0.959305	2392.508	16.00000
58	7000.000	350.0000	23.23643	1.161821	3485.464	43.00000
59	7250.000	400.0000	20.70843	1.142534	3106.265	43.00000
60	4000.000	600.0000	7.874058	1.181109	1181.109	60.83333
61	4000.000	500.0000	9.988913	1.248614	1498.337	57.00000
62	1600.000	400.0000	5.110179	1.277545	664.3233	25.00000
63	2000.000	400.0000	6.387724	1.277545	830.4042	25.00000
64	5000.000	500.0000	12.67901	1.267901	2028.642	24.00000
65	4000.000	300.0000	16.90535	1.267901	2704.856	24.00000
66	4000.000	500.0000	9.603168	1.200396	1344.443	93.00000
67	4500.000	550.0000	9.308556	1.137712	1303.198	930.0000
68	1600.000	350.0000	4.385396	0.959305	701.6633	33.00000
69	4000.000	500.0000	-1.197690	-0.149711	-179.6535	58.56000
70	3500.000	500.0000	5.027503	0.718215	754.1255	70.00000
71	4000.000	800.0000	6.098416	1.219683	914.7624	70.00000
72	4000.000	400.0000	12.58258	1.258258	1761.561	43.00000
73	4000.000	300.0000	16.13386	1.210039	2420.079	43.00000
74	1750.000	200.0000	9.997174	1.142534	1299.633	32.00000
75	3500.000	300.0000	13.77960	1.181109	2204.736	42.00000
76	2400.000	200.0000	15.09909	1.258258	2370.557	26.40000
77	2750.000	200.0000	16.77064	1.219683	2632.991	26.40000
78	3100.000	233.3333	16.33249	1.229327	2564.200	27.60000
79	3350.000	250.0000	16.08531	1.200396	2525.393	27.60000
80	3100.000	200.0000	18.30718	1.181109	2746.078	26.00000
81	2900.000	733.3333	3.450391	0.872513	507.2075	26.00000
82	4333.333	400.0000	11.54167	1.065385	1696.626	26.40000
83	3400.000	200.0000	19.42308	1.142534	3049.424	26.00000
84	3600.000	200.0000	22.99581	1.277545	3610.342	26.40000
85	3100.000	200.0000	5.153284	0.332470	809.0656	27.00000
86	3000.000	200.0000	18.87387	1.258258	2963.197	27.00000
87	4200.000	400.0000	9.566416	0.911087	1511.494	27.00000
88	3750.000	350.0000	11.00154	1.026811	1738.244	27.00000
89	5300.000	600.0000	6.344231	0.718215	996.0442	27.00000
90	6500.000	600.0000	-48.63453	-4.489342	-7635.622	27.00000
91	3200.000	200.0000	-2.086784	-0.130424	-327.6250	26.40000
92	3200.000	200.0000	18.89774	1.181109	2966.945	26.40000
93	2850.000	200.0000	17.93017	1.258258	2815.037	27.00000
94	2800.000	200.0000	17.07556	1.219683	2680.864	27.00000
95	2900.000	200.0000	17.68541	1.219683	2794.294	27.00000
96	3750.000	300.0000	-6.934292	-0.554743	-1088.684	27.00000
97	2900.000	100.0000	37.04880	1.277545	5816.662	26.50000
98	3000.000	200.0000	18.87387	1.258258	2963.197	26.40000
99	3666.667	200.0000	21.65366	1.181109	3399.625	27.00000
100	3200.000	200.0000	20.13212	1.258258	3160.743	27.00000
101	2600.000	200.0000	16.60808	1.277545	2607.469	26.50000
102	3100.000	200.0000	17.11138	1.103960	2703.597	26.00000
103	1000.000	200.0000	5.326926	1.065385	799.0389	27.00000

منابع و مآخذ

۱. امینی، علیرضا، تعیین میزان بهینه استفاده از کود شیمیایی درکشت گندم آبی در هر یک از استانهای کشور، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم اقتصادی و سیاسی، شهریور ۱۳۷۳.

۲. پورکاظمی‌حسینعلی، ریاضیات عمومی و کاربردهای آن، جلد دوم، نشرنی، تهران، چاپ اول، ۱۳۷۰

۳. هژبرکیانی، کامبیز، اقتصادسنجی و کاربرد آن، انتشارات جهاددانشگاهی شهید بهشتی، چاپ اول بهار ۱۳۶۸.

۴. هندرسون، جیمز ام - کوانت، ریچاردای ، تئوری اقتصاد خرد، ترجمه مسعود محمدی، انتشارات دفتر نشر فرهنگ اسلامی، تهران، چاپ اول، ۱۳۷۰.

5. Apostal.T.: Mathemathical Analysis. Reading Mass.: Addison - Wesley, 1957.

6. Barnett, William A.: "The Optimal Level of Monetary Aggreation (Divisia Index)", Journal of Money, Credit and, Banking Vol. 14, November 1990.

7. Berndt, Ernst. R and, Christensen, Laurits. R., "The Internal Structure of Functional Relationship: Separability, Substitution, and Aggregation. "Review of Economic Studies, July 1973a.

8. Berndt, Ernst R. and Wood, David. O., "Technology, Prices, and The Derived Demand for Energy," The Review of Econonomics and Statistics, Agust 1975, No.3.

9. Berndt, Ernst R. and. Christensen, laurits, R., "Testing for The Existence of a Consistent Aggregate Index of Labor Inputs, "American Economic Review, June 1974.

10. Bruce. Neil.: "A Note on Consumers Surplus The Divisia Index, And The Measurement of Welfare Changes. "Econometrica, Vol.45, No.4 (May 1977).

11. Christensen. L.R., And D.W. Jorgenson, "U.S. Real Product and Real Factor Input, 1929 -1967," Review of Income and Wealth, Series 16, 1970.

12. Denison, E.F.: "The Sources of Econonomic Growth in The United States and The Alternatives Before Us, "Supplementary paper No.13, Committe for Economics Development, New York, 1962.

13. Fernandez - Cornejo . J, Andjans. S: "Quantity - Adjusted price and Quantity Indices for pesticides, "Amer J. Agr, Econ. Vol. 77 (Agust 1995).

14. Gorman, W.M.: "Notes on Divisia Indices, "Unpublished, University of North Carolina. Chapel Hill. North Carolina, October, 1970.

15. Hillinger, C.: Comment on Invariance Axioms and Economic Indexes Econometrica, Vol.38, 1970.

16. Hulten, Charles

17.Jorgenson,D.W., and GRILICHESZ.: "The Explanation of Productivity Change," Review of Economic Studies, Vol.34,1967.

18.Kendrick,J.Productivity Trends in The United States.New York: National Bureau of Economic Research,1961.

19.Kleoeck,T.Indexijfers: Enig Methodologish Aspecten, The Hague: Pasmans, 1966.

20-Kumar.P and MRUTHYUNJAYA: "Input Use Efficiency In Indian Agriculture: Measurement Analysis of Total Factor Productivity Growth in Wheat. "Indian J. of.Agr Econ., Vol.47, No.3 (July-sep 1992).

21-Leontief,W.: "Introduction to the Theory of the Internal Structure of Functional Relationships," Econometrica, Vol.15,1947.

22.Richter,M.K.: "Invariance Axioms and Economic Indexes," Econometrica, Vol.34, 1966.

23.Solow,R.: "Technical Change and The Aggregate Production Function," Review of Economics and Statistics. Vol.39,1957

24.Stahl,D.O. "Quasi Homothetic Preferenes,The Generalized Divisa Quantity Index, and Aggregation, "Economica, Vol.50

25.Theil,H."The Information Approach to Demand Analysis. "Econometrica, Vol.33 (1965).

26.Tornqvist.L. "The Bank of Finland's Monthly Bulletin, no.10 (1936).

27.Varian,H.R.; Microeconomic Analysis, 3d,ed, Norton Company, Newyork.

28.Zuberi,H.A.: "Production Function, Institutional Credit and Agricultura Development in Pakistan," The Pakistan Development Review, Vol.28:1 (1989)