دکتر سعید مرید، دانشگاه تربیت مدرس
دکتر هوشنگ قائمی، سازمان هواشناسی
شماره مقاله: ۳۷۱

برآورد پارامترهای توزیع وکبی[1] با گشتاورهای وزنی احتمال[2] و کاربرد این توزیع در رودخانه‌های حوزه آبریز کرخه[3]

Dr. Saeid Morid; ***University Tarbiat Modarres***

Dr. Hoshang Ghaemi; ***Meteorological Organization***

Parameters Estimation of Wakeby Distribution With PWM and Application of This Dis. to the Floods of Karkheh Watershed.

This paper investigates the capability of Wakeby distribution. That in the recent decade has been considered by the world hydrologists, for flood frequency analysis in Karkheh watershed, Also parameters estimation of this distribution with Probable Weighted Moments (PWM), Presented. The results of comparing Wakeby distribution. with Normal, Gumble Pearson, Gamma and their logaritmic distribution show this distribution analysis flood frequency very logical with a good physical support and among 21 stations in Karkheh watershed, in 11 stations, Wakeby. dis. has had. The best results and the least residual sum of squares.

1- Wakeby Distribution

2- Probability Weighted Moments.

۳- مطالعات طرح جامع کرخه، معاونت آبخیزداری جهادسازندگی، شرکت خدمات مهندسی جهاد.

مقدّمه

در مطالعات هیدرولوژی همواره برآورد سیلاب با دورهٔ برگشتهای مختلف آن از قسمتهای اصلی آن بوده است و در این رابطه توزیعهایی مانند گامبل، گاما، پیرسون و لگاریتم آنها کاربرد گسترده‌ای داشته‌است که از این بین، توزیع پیرسون و لگاریتم آن با سه پارامتر بطور گسترده‌تری مورد استفاده قرار می‌گیرد و بسیاری از مؤسّسات بین‌المللی نیز آن را تأکید کرده‌اند.

علاوه بر این توزیعها در دههٔ اخیر توزیعهایی نیز توسط محقّقین مختلف تعریف شده‌اند که لازم‌است در بکارگیری آنها نیز توجّه بیشتری گردد از میان آنها می‌توان به توزیع وکبی با ۴ و ۵ پارامتر اشاره داشت.

در مقالهٔ حاضر به توزیع وکبی و نحوهٔ محاسبه پارامترهای آن براساس روش گشتاورهای احتمال (PWM)[۴] اشاره خواهد شد و سپس کاربرد گستردهٔ این توزیع برای رودخانه‌های حوزهٔ آبریز کرخه و نتایج آن خواهد آمد.

برآورد پارامترها توسط گشتاورهای وزنی احتمال (PWM)

گشتاور وزنی احتمال اوّلین بار در سال ۱۹۷۹ توسط گرین وود[۵] و همکارانش ارائه شد. سپس توسط هاس‌کینگ[۶] در سال ۱۹۸۶ مورد تجزیه و تحلیل و اصلاحاتی قرار گرفت.

این گشتاورها در استخراج روابط پارامترهای توزیع آماری که شکل معکوس آنها $X = X(f)$ صریحاً قابل تعریف باشند، کاربرد دارد، بویژه در به دست آوردن پارامترهای توزیعهایی که تنها به شکل معکوس قابل تعریف هستند، مانند توزیع وکبی که در سال ۱۹۷۸ توسط هاس‌کینگ برای بررسی فراوانی سیلابها ارائه شد. ذکر این نکته لازم است که توزیعهایی مانند توزیع مقادیر نهایی نوع (I)[۷] و مقادیر کلی (GEV)[۸] را نیز می‌توان به دو شکل $X = X(f)$ و $F = F(x)$ نیز نوشت و برآورد پارامترهای این توزیع توسط این روش امکان‌پذیر می‌باشد.

احتمال گشتاورهای وزنی به شکل زیر تعریف می‌شوند (گرین‌وود ۱۹۶۹):

$$M_{ijk} = E[x^i F^j (1-F)^k] = \int_0^1 X(F)^i F^j (1-F)^k dF \qquad (1)$$

۴- گشتاور وزنی احتمال از این پس در این مقاله به اختصار PWM نامیده خواهد شد.

5- Green Wood

6- Hosking

7- Extreme Value Type I.

8- General Extreme Value.

که در آن i و j و k اعداد حقیقی هستند. اگر J = K = ۰ باشد و i نیز عدد صحیح و غیرمنفی باشد M_{IJK} برابر M_{i00} خواهد شد که همان گشتاورهای معمولی مرتبه iام حول مرکز است، در موارد خاص که i = ۱ ، j = ۰ و k ≠ ۰ یا i = ۱ ، j ≠ ۰ و k = ۰ باشد مقادیر $M_{۱ok}$ و $M_{۱jo}$ نسبت به x خطی هستند و جهت برآورد پارامترها کلّیت کافی را دارند. در این حالت $M_{۱ok}$ و $M_{۱jo}$ مستقل هستند و به شکل زیر رابطه دارند:

$$M_{۱ok} = \sum_{j=۰}^{k} \binom{k}{j} (-۱)^j M_{۱jo} \qquad (۲)$$

$$M_{۱jo} = \sum_{k=۰}^{j} \binom{j}{k} (-۱)^j M_{۱ok} \qquad (۳)$$

نمونه برآوردهای (PWM):

برآورد ناااریب[9] $M_{۱jo}$ یا $M_{۱ok}$ را می‌توان توسط رابطه زیر بیان کرد:

$$\hat{M}_{۱jo} = N^{-۱} \sum_{i=۱}^{N} [\binom{i-۱}{j} / \binom{N-۱}{j}] X(i) \; , \; j = ۰ , ۱, ۲, \ldots , N - ۱ \qquad (۴)$$

$$\hat{M}_{۱ok} = N^{-۱} \sum_{i=۱}^{N} [\binom{N-i}{k} / \binom{N-۱}{k}] X(i) \; , \; k = ۰ , ۱, ۲, \ldots , N - ۱ \qquad (۵)$$

در رابطه فوق x (i) و i = (۱, ۲, ... , N) از مرتبه Nام بوده و N تعداد نمونه‌هاست بطوری‌که i = ۱ نمایانگر کوچکترین مقدار می‌باشد و کمیتهای درون کروشه F^j و $(F - ۱)^k$ به ترتیب نوع کمیتها یا وزنها می‌باشد. شکل دیگر نوع تابع وزنی موقعیت نقاط[10] به صورت ذیل می‌باشد:

$$F(i) = \frac{i - ۰/۳۵}{N} \qquad (۶)$$

که منجر به تشکیل معادله ذیل می‌شود:

$$\hat{M}_{۱jo} = N^{-۱} \sum_{i=۱}^{N} F(i)^j \, x(i) \qquad (۷)$$

$$\hat{M}_{۱ok} = N^{-۱} \sum_{i=۱}^{N} [۱ - F(i)]^k \, x(i) \qquad (۸)$$

9- Unbaisness

10- Point position.

ین شکل اخیر به منظور کاربرد در مطالعات هیدرولوژی توصیه می‌شود.

متذکر می‌شود که $\hat{M}_{1j0}$ برای $j = 0$ و $\hat{M}_{10k}$ برای $k = 0$ مشابه میانگین نمونه‌ها می‌باشد. همچنین روابط (۲) و (۳) که معادل $\hat{M}_{10k}$ و $\hat{M}_{1j0}$ می‌باشند از روابط (۴) و (۵) محاسبه می‌شوند و با در نظر گرفتن رابطهٔ (۶) مقادیر فوق از طریق روابط (۷) و (۸) قابل محاسبه خواهند بود.

محاسبه PWM

برای آن‌که توضیحات داده شده دربارهٔ این روابط و معادلات بیشتر کاربرد داشته باشد این موارد با استفاده از آمار حداکثر سیلاب لحظه‌ای رودخانه کرخه در ایستگاه پای‌پل بررسی و تشریح می‌شود. آمار و اطلاعات این ایستگاه همراه با مقادیر PWM اریب که از روابط (۷) و (۸) بـه دست آمـده است در جدول شمارهٔ ۱ ارائه شده است:

جدول شمارهٔ ۱: آمار و اطلاعات بدست آمده از سیلاب رودخـانه کـرخـه در ایسـتگاه پای‌پل و مقادیر PWM (۱۳۳۵-۱۳۷۰)

749. 0	1644. 3	2322. 2	1511. 2	1450. 2	939. 1	2518. 4	797. 1	2480. 9	618. 5
1194. 7	2194. 5	369. 3	1084. 5	2820. 9	980. 0	2220. 0	2095. 0	1655. 0	4224. 0
946. 0	1810. 0	645. 0	3200. 0	3176. 0	2267. 0	1727. 5	2383. 0	1676. 0	2665. 0

Ranked Data:

369. 3	618. 5	645. 0	749. 0	797. 1	939. 1	946. 0	980. 0	1084. 5	1194. 7
1450. 2	1511. 2	1644. 3	1655. 0	1676. 0	1727. 5	1810. 0	2095. 0	2194. 5	2220. 0
2267. 0	2322. 2	2383. 0	2480. 9	2518. 4	2665. 0	2820. 9	3176. 0	3200. 0	4224. 0

Estimated of probabilty weighted moments:

Biassed:

	j=k=o	j=k=1	j=k=2	j=k=3	j=k=4
M1j0	1812. 1430	1165. 7730	873. 1295	703. 6191	592. 5031
m10k	1812. 1430	646. 3702	353. 7267	230. 5936	165. 8546

همانگونه که در جدول ملاحظه می‌شود دو دسته مقادیر PWM، اختلاف جزئی با هم دارند ولی این اختلاف منجر به برآوردهای متفاوتی از پارامترهای این توزیع می‌شود، متذکر می‌شود که بـرآورد

اریب PWM برای مقاصد هیدرولوژی و مواردی که این علم با آن سر و کار دارد مطلوبتر است.

محاسبه مقادیر $\hat{M}_{1jo}$ با استفاده از رابطهٔ (۷) (رابطه مطلوب ولی اریب) بطور خلاصه در جدول شمارهٔ ۲ ارائه شده است. محاسبه مقادیر $\hat{M}_{1ok}$ بر اساس $F(i)^j$ که جایگزین $[F(i)]^k$ ـ ۱] شده، صورت گرفته است، راه حل دیگر برآورد $\hat{M}_{1ok}$ از طریق $\hat{M}_{1jo}$ و بر اساس معادله (۲) می‌باشد بنابراین:

$$\hat{M}_{1,0,1} = \hat{M}_{1,0,0} - \hat{M}_{1,1,0} \qquad (۹)$$

$$\hat{M}_{1,0,2} = \hat{M}_{1,0,0} - ۲\hat{M}_{1,1,0} + \hat{M}_{1,2,0} \qquad (۱۰)$$

$$\hat{M}_{1,0,3} = \hat{M}_{1,0,0} - ۳\hat{M}_{1,1,0} + ۳\hat{M}_{1,2,0} - \hat{M}_{1,3,0} \qquad (۱۱)$$

$$\hat{M}_{1,0,4} = \hat{M}_{1,0,0} - ۴\hat{M}_{1,1,0} + ۶\hat{M}_{1,2,0} - ۴\hat{M}_{1,3,0} + \hat{M}_{1,4,0} \qquad (۱۲)$$

لازم است مقادیر PWM تا چهار رقم بعد از اعشار محاسبه شود تا در برآورد پارامترها مشکلی به وجود نیاید و توصیه می‌شود به هنگام محاسبات اعداد گرد نشوند. البته چون این محاسبات معمولاً با ماشینهای محاسباتی انجام می‌شود، مشکلی وجود ندارد.

جدول شمارهٔ ۲: مقادیر محاسبه شده برای M1jo با استفاده از رابطه (۷)

Rank i	F(i) (i-0. 35)/30	X(i)F(i)	X(i)F(i)^2	X(i)F(i)^3	X(i)F(i)^4	X(i)F(i)^5
1	.022	369. 30	8. 0015	.1734	.0038	.0001
2	.055	618. 50	34. 0175	1. 8710	.1029	.0057
3	.088	645. 00	56. 9750	5. 0328	.4446	.0393
4	.122	749.00	91.1283	11.0873	1.3490	.1641
5	.155	797.10	123.5505	19.1503	2.9683	.4601
6	.188	939.10	176. 8638	33. 3094	6. 2733	1. 1815
7	.222	946. 00	209. 6967	46. 4828	10. 3037	2. 2840
8	.255	980. 00	249. 9000	63. 7245	16. 2497	4. 1437
9	.288	1084. 50	312. 6975	90. 1611	25. 9965	7. 4956
10	.322	1194. 70	384. 2951	123. 6149	39. 7628	12. 7904
11	.355	1450. 20	514. 8210	182. 7614	64. 8803	23. 0325
12	.388	1511. 20	586. 8493	227. 8931	88. 4985	34. 3669

ادامهٔ جدول شمارهٔ ۲: مقادیر محاسبه شده برای M1jo با استفاده از رابطه (۷)

Rank i	F(i) (i-0. 35)/30	X(i)F(i)	X(i)F(i)^2	X(i)F(i)^3	X(i)F(i)^4	X(i)F(i)^5
13	.422	1644. 30	693. 3466	292. 3611	123. 2790	51. 9826
14	.455	1655. 00	753. 0250	342. 6264	155. 8950	70. 9322
15	.488	1676. 00	818. 4467	399. 6748	195. 1745	95. 3102
16	.522	1727. 50	901. 1791	470. 1151	245. 2434	127. 9353
17	.555	1810. 00	1004. 5500	557. 5253	309. 4265	171. 7317
18	.588	2095. 00	1232. 5580	725. 1551	426. 6329	251. 0023
19	.622	2194. 50	1364. 2480	848. 1072	527. 2400	327. 7675
20	.655	2220. 00	1454. 1000	952. 4354	623. 8452	408. 6186
21	.688	2267. 00	1560. 4520	1074. 1110	739. 3463	508. 9167
22	.722	2322. 20	1675. 8540	1209. 4080	872. 7897	629. 8633
23	.755	2383. 00	1799. 1650	1358. 3700	1025. 5690	774. 3046
24	.788	2480. 90	1955. 7760	1541. 8040	1215. 4550	958. 1839
25	.822	2518. 40	2069. 2850	1700. 2630	1397. 0490	1147. 9090
26	.855	2665. 00	2278. 5750	1948. 1820	1665. 6950	1424. 1700
27	0888	2820. 90	2505. 8990	2226. 0740	1977. 4960	1756. 6750
28	.922	3176. 00	2927. 2130	2697. 9150	2486. 5780	2291. 7960
29	.955	3200. 00	3056. 0000	2918. 4800	2787. 1480	2661. 7270
30	.988	4224. 00	4174. 7200	4126. 0150	4077. 8780	4030. 3030
Sum		54364. 20	34973. 1900	26193. 8800	21108. 5700	17775. 0900
Mean		1812. 14	1165. 7730	873. 1295	703. 6191	592. 5031
Sum/50		= M100	= M110	= M120	= M130	= M140

برآورد پارامترهای توزیع وکبی

راه حل صریح براساس PWM ، M_{10k} به وسیله گرین وود (۱۹۷۹) برای هر دو حالت توزیع ۴ پارامتره و ۵ پارامتره وکبی ارائه شده است، که در ادامه ارائه می‌شود.

در حالت اوّل در نظر گرفته می‌شود:

$M_k = M_{1ok,k} = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$

(i) : در شرایطی که $m = ۰$ باشد (توزیع چهار پارامتره وکبی)

۱) مقادیر $N_۱ , N_۲ , N_۳$ مطابق زیر محاسبه می‌شوند:

$$N_۱ = -۲۷ \hat{M}_{(۲)} + ۱۶ \hat{M}_{(۱)} - \hat{M}_{(۰)} \qquad (۱۳)$$

$$N_۲ = -۹ \hat{M}_{(۲)} + ۸ \hat{M}_{(۱)} - \hat{M}_{(۰)} \qquad (۱۴)$$

$$N_۳ = -۳ \hat{M}_{(۲)} + ۴ \hat{M}_{(۱)} - \hat{M}_{(۰)} \qquad (۱۵)$$

۲) $C_۱, C_۲, C_۳$ به ترتیب زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_۱ = -۶۴ \hat{M}_{(۳)} + ۵۴ \hat{M}_{(۲)} - ۸ \hat{M}_{(۱)} \qquad (۱۶)$$

$$C_۲ = -۱۶ \hat{M}_{(۳)} + ۱۸ \hat{M}_{(۲)} - ۴ \hat{M}_{(۱)} \qquad (۱۷)$$

$$C_۳ = -۴ \hat{M}_{(۳)} + ۶ \hat{M}_{(۲)} - ۲\hat{M}_{(۱)} \qquad (۱۸)$$

۳) $\hat{b}$ مطابق زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{b} = \frac{(N_۳C_۱ - N_۱C_۳) \pm H}{۲(N_۲C_۳ - N_۳C_۲)} \qquad (۱۹)$$

بطوری که:

$$H = [(N_۱C_۳ - N_۳C_۱)^۲ - ۴(N_۱C_۲ - N_۲C_۱)(N_۲C_۳ - N_۳C_۲)]^{۱/۲} \qquad (۲۰)$$

اگر $b_۱ , b_۲$ دو مقدار b در رابطه (۱۶) باشد:

$$\hat{b} = \max (b_۱ , b_۲) \qquad (۲۱)$$

۴) محاسبه می‌شود $\hat{d}$:

$$\hat{d} = (N_۱ + \hat{b} N_۲) / (N_۲ + \hat{b} N_۳) \qquad (۲۲)$$

سپس محاسبه شود:

$$\{۰\} = (۱ + \hat{b})(۱ - \hat{d})M_{(۰)} \qquad (۲۳)$$

$$\{۱\} = ۲(۲ + \hat{b})(۲ - \hat{d})M_{(۱)} \qquad (۲۴)$$

سپس $\hat{a} , \hat{c}$ مطابق زیر تخمین زده می‌شود:

$$\hat{a} = \frac{(\hat{b} + ۱)(\hat{b} + ۲)}{\hat{b}(\hat{b} + \hat{d})} \left(\frac{\{۱\}}{۲ + \hat{b}} - \frac{\{۰\}}{۱ + \hat{b}}\right) \qquad (۲۵)$$

$$\hat{c} = \frac{(۱ - \hat{d})(۲ - \hat{d})}{\hat{d}(\hat{b} + \hat{d})} \left(\frac{-\{۱\}}{۲ - \hat{d}} + \frac{\{۰\}}{۱ - \hat{d}}\right) \qquad (۲۶)$$

توجه شود که شرایط $\hat{b} > -1$ ، $\hat{d} < 1$ و $\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d} > 0$ برای راه حل معتبر موردنیاز است (در بخش قبلی به آن اشاره شده است).

سپس:

$$\hat{X}_T = x(F = 1 - 1/T) = \hat{a}(1 - (1 - F)^{\hat{b}}) - \hat{c}(1 - (1 - F)^{-\hat{d}}) \qquad (۲۷)$$

(ii)- در شرایطی که $m \neq 0$ باشد (توزیع پنج پارامتره وکبی):

۱) N_1 و N_2 ، N_3 مطابق زیر محاسبه می‌شود:

$$N_1 = +64\hat{M}_{(3)} - 81\hat{M}_{(2)} + 24\hat{M}_{(1)} - \hat{M}_{(0)} \qquad (۲۸)$$

$$N_2 = +16\hat{M}_{(3)} - 27\hat{M}_{(2)} + 12\hat{M}_{(1)} - \hat{M}_{(0)} \qquad (۲۹)$$

$$N_3 = +4\hat{M}_{(3)} - 9\hat{M}_{(2)} + 6\hat{M}_{(1)} - \hat{M}_{(0)} \qquad (۳۰)$$

۲) C_1، C_2 و C_3 به ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

$$C_1 = 125\hat{M}_{(4)} - 192\hat{M}_{(3)} + 81\hat{M}_{(2)} - 8\hat{M}_{(0)} \qquad (۳۱)$$

$$C_2 = 25\hat{M}_{(4)} - 48\hat{M}_{(3)} + 27\hat{M}_{(2)} - 4\hat{M}_{(0)} \qquad (۳۲)$$

$$C_3 = 5\hat{M}_{(4)} - 12\hat{M}_{(3)} + 9\hat{M}_{(2)} - 2\hat{M}_{(0)} \qquad (۳۳)$$

۳) $\hat{b}$ طبق رابطه زیر:

$$\hat{b} = \frac{(N_3C_1 - N_1C_3) \pm H}{2(N_2C_3 - N_3C_2)} \qquad (۳۴)$$

بطوری که:

$$H = [(N_1C_3 - N_3C_1)^2 - 4(N_1C_2 - N_2C_1)(N_2C_3 - N_3C_2)]^{1/2} \qquad (۳۵)$$

اینها دو مقدار $\hat{b}$ را ارائه می‌دهند، فرض $\hat{b}_1$ ، $\hat{b}_2$:

$$\hat{b} = \max(b_1, b_2) \qquad (۳۶)$$

۴) محاسبه می‌شود $\hat{d}$:

$$\hat{d} = (N_1 + \hat{b}N_2) / (N_2 + \hat{b}N_3) \qquad (۳۷)$$

سپس محاسبه شود:

$$\{0\} = (1 + \hat{b})(1 - \hat{d})\hat{M}_{(0)} \qquad (۳۸)$$

$$\{1\} = 2(2 + \hat{b})(2 - \hat{d})\hat{M}_{(1)} \qquad (۳۹)$$

$$\{2\} = 3(3 + \hat{b})(3 - \hat{d})\hat{M}_{(2)} \qquad (۴۰)$$

$$\{3\} = 4(4 + \hat{b})(4 - \hat{d})\hat{M}_{(3)} \qquad (۴۱)$$

سپس $\hat{m}$ ، $\hat{a}$ ، $\hat{c}$ طبق روابط ذیل تخمین زده می‌شوند:

$$\hat{m} = [\{3\} - \{2\} - \{1\} + \{0\}] / 4 \qquad (42)$$

$$\hat{a} = \frac{(\hat{b} + 1)(\hat{b} + 2)}{\hat{b}(\hat{b} + \hat{d})} \left(\frac{\{1\}}{2 + \hat{b}} - \frac{\{0\}}{1 + \hat{b}} - \hat{m}\right) \qquad (43)$$

$$\hat{c} = \frac{(1 - \hat{d})(2 - \hat{d})}{\hat{d}(\hat{b} + \hat{d})} \left(\frac{-\{1\}}{2 - \hat{d}} + \frac{\{0\}}{1 - \hat{d}} + \hat{m}\right) \qquad (44)$$

و در نهایت :

$$\hat{X}_T = x\left(F = 1 - \frac{1}{T}\right) = \hat{m} + \hat{a}(1 - (1 - F)^{\hat{b}}) - \hat{c}(1 - (1 - F)^{-\hat{d}}) \qquad (45)$$

کاربرد این معادلات برای دبی‌های حداکثر سیلاب لحظه‌ای رودخانه کرخه در ایستگاه پای‌پل مقادیر زیر را دارد:

$N_1 = -۱۹۳/۱۳۵۶$	$N_2 = ۸۳/۱۷۴۶۲$	$N_3 = -۱۹۵/۰۸۸۲$
$C_1 = -۶۱/۲۳۲۵۸$	$C_2 = ۴۳/۰۱۵۳۲$	$C_3 = -۴۷/۰۴۹۵$
$b_1 = -۰/۵۸۶۱۷۷$	$b_2 = ۱/۲۲۴۵۷۱$	
$\hat{b} = ۱/۲۲۴۵۷۱$	$\hat{d} = ۰/۵۸۶۱۷۷$	
$\{0\} = ۱۶۶۸/۲۱۸۰$	$\{1\} = ۵۸۹۳/۵۶۶۰$	
$\{2\} = ۱۰۸۲۱/۲۴۰۰$	$\{3\} = ۱۶۴۵۱/۲۴۰۰$	
$\hat{a} = ۲۳۵۰/۶۷۸$	$\hat{c} = ۱۱۷/۸۸۹۰۰$	
$\hat{m} = ۳۵۱/۱۶۳۷۰۰$	$\hat{x}_{۵۰} = x(۰/۹۸) = ۳۷۳۲/۲۳ m^3/s$	

بررسی صحت پارامترها

توجّه شود که تمام ترکیبهای حاصل از مقادیر d, c, b, a به یک رابطهٔ X - F که در آن مقادیر F بین ۰ تا ۱ و مساحت زیرمنحنی آن ۱ باشد منجر نمی‌شود. ترکیبهای معتبر و غیرمعتبر پارامترهای توزیع وکبی به وسیله لندوهر [11] (۱۹۷۸) و اصلاح شدهٔ آن (۱۹۷۹) و تجدیدنظر شده آن توسط والیس (۱۹۸۰) ارائه شده است. این ترکیبها در جدول شمارهٔ ۳ ارائه شده است. علاوه بر آن شرط ذیل نیز ضروری است تا میانگین توزیع وکبی ((M(۰) =) وجود داشته باشد:

$$b > -1 , d < 1 \qquad (46)$$

11- Landwehr

جدول شمارهٔ ۳: شرایط لازم برای تعیین پارامترهای توزیع وکبی

(i)	Sign of Parameter				Valid distribution?		
	a	b	c	d	Yes	Maybe	No
	+	+	+	+	X		
	-	+	+	+		1	
	+	+	-	+			X
	-	+	-	+			X
	+	+	+	-		2	
	-	+	+	-			x
	+	+	-	-	x		
	-	+	-	-		3	
	+	-	+	+		4	
	-	-	+	+			
	+	-	-	+			x
	-	-	-	+		5	
	+	-	+	-			x
	-	-	+	-		1	
	+	-	-	-			x
	-	-	-	-	x		

1: Valid if $(ab + cd) > 0$.
2: Valid if $(ab + cd) > 0$ and $a > c$ and $b \leq |d|$.
3: Valid if $(ab + cd) > 0$ and $a > c$ and $b \geq |d|$.
4: Valid if $(ab + cd) > 0$ and either $|b| < |d|$ or $c > a$ When $|b| = |d|$.
5: Valid if $(ab + cd) > 0$ and either $|b| > |d|$ or $c > a$ When $|b| = |d|$.

In addition to the above it is necessary for the mean to exist i. e. $b>-1$ and $d<1$, (Eqn. A4. 43)

(ii)	Condition	Hosking's notation	Greenwood et al's. notation
	1	$\beta+\delta>0$ or $\beta=\gamma=\delta=0$	$b+d > 0$ or $b=cd=d=0$
	2	if $a = 0$ then $\beta = 0$	if $ab = 0$ then $b=0$
	3	if $\gamma = 0$ then $\delta = 0$	if $cd = 0$ then $d=0$
	4	$\gamma \geq 0$	$cd \geq 0$
	5	$a + \gamma \geq 0$	$ab + cd \geq 0$

اگر این شرایط به وسیلهٔ $\hat{d}$ و $\hat{b}$ تعیین نگردد لازم است در نحوهٔ محاسبات به عمل آمده تجدیدنظر شود که در ادامه شرح بیشتر آن خواهد آمد.

روشی توسط هاسکینگ برای ایجاد شرایط جدول شمارهٔ ۳ ارائه شده است که در ادامهٔ جدول آمده است، سه شرط اوّلیه لازمند تا منحصر به فرد بودن X و F را تضمین کنند. توضیح این که هیچ ترکیب متفاوت پارامترهای توزیع وکبی X(F) مشابهی را نتیجه نمی‌دهند. دو شرط نهایی در کنار سه شرط اوّلیه وجود یک توزیع احتمالاتی صحیح را تضمین خواهند کرد.

چنانچه طی محاسبات انجام شده ترکیب نامعتبری از پارامترها به دست آید، لندوهر (۱۹۷۹) و والیس (۱۹۸۰) پیشنهاد داده‌اند یک مقدار حداکثر مجاز برای $\hat{b}$ فرض شود. مثلاً ۵۰ و سایر پارامترها براساس $\hat{b}$ محاسبه شود. اگر پارامترهای جدید مجدداً ترکیب غیرمعتبری را ارائه داده‌اند، مقدار $\hat{b}$ به اندازه یک Δb که از قبل انتخاب شده است، کاهش یابد و مجدداً براساس شرایط جدید محاسبات انجام و آزمون انجام پذیرد. این عملیات تکراری آنقدر ادامه یابد تا ترکیب معتبری از پارامترها به دست آید و چنانچه مقدار $\hat{b}$ از حداقل مجاز انتخاب شده، مثلاً $\hat{b} = ۱$ کمتر شود بدین معناست که روش انتخابی نمی‌تواند ترکیب معتبری از ۴ تا ۵ پارامتر این توزیع را ارائه دهد، مؤلفین مقاله با استفاده از این روش در بسیاری موارد توانسته‌اند ترکیب معتبر پارامترهای وکبی را به دست آورند. شکست در PWM ممکن است در برآورد پارامترهای نمونه‌هایی که از تعداد کم و توزیعی با دنباله باریک برخوردار هستند، رخ دهد. (والیس ۱۹۸۴).

تحمیل مقادیر بالای $\hat{b}$، مشارکت کمّیت $(۱ - F)^{\hat{b}}$ را در X(F) به حداقل می‌رساند، بجز مواردی که مقدار F بسیار کم باشد. در چنین شرایطی $(\hat{m} + \hat{a})$ بطور مشترک به مشابه یک پارامتر عمل می‌کنند و توزیع وکبی عملاً به یک توزیع سه پارامتری تبدیل و معادل توزیع کلّی «پارتو»[۱۲] می‌شود.

وقوع چنین شرایطی از نظر هاسکینگ چندان مطلوب نیست. وی عقیده دارد که باید قبول کنیم که توزیع وکبی برای این داده‌ها برازش مناسبی نیست، مؤلفین نیز در تحلیل فراوانی آمار سیلاب تعدادی از ایستگاههای حوزهٔ کرخه به نتیجهٔ مشابهی رسیدند که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

دقت عددی

ممکن است تعداد اعداد اعشاری که در مثال بالا، ذکر شد برای مطالعات متعارف هیدرولوژی بالا، بنظر برسد ولی PWM بشدّت نسبت به گرد کردن اعداد حساس است و گرد کردن اعداد می‌تواند خطاهایی را به دنبال داشته باشد. از این گونه گرد کردنها باید در طول محاسبات پرهیز شود و مقادیر $\hat{X}_T$

12- Generalised Pareto Distribution.

در پایان محاسبات گرد شوند. در مثالی برای داده‌های سیل یک رودخانه، پارامترها تا دهم گرد شد (ماکزیمم ۰/۰۷٪ گرد شدن) به همین دلیل پارامتر $\hat{d}$ توزیع وکبی به مقدار ۱۰/۷۶ منتهی شد که این مقدار از یک بیشتر شده و باعث غیرمعتبر شدن پارامترها شد (به رابطه ۴۶ مراجعه شود)، در حالی که در صورت گرد نکردن، توزیع معتبر و نتایج مطلوبی را دارد، لذا چنانچه در نظر باشد برنامه‌ای برای این مدل تهیه شود، توصیه می‌شود از دستور دو دقّته برای پارامترها استفاده شود.

نتایج کاربرد توزیع وکبی در حوزهٔ کرخه

به منظور مشخص شدن درجهٔ مطلوب بودن برازش توزیع وکبی، نتایج حاصل از این روش با ۸ توزیع نرمال، پیرسون، گامبل، گاما و لگاریتم[۱۳] آنها مقایسه شده است و بدین منظور از آزمون مجموع مربعات[۱۴] باقیمانده استفاده شده است:

$$R.S.S = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_{Ei} - Q_{Oi})^2}{n - m}\right)^{1/2} \qquad (۴۷)$$

که در آن:

R. S. S = مجموع مربعات باقیمانده

Q_{Ei} = مقدار برآورد شده متغیر

Q_{Oi} = مقدار مشاهده شده متغیر

n = تعداد نمونه

m = تعداد پارامترهای توزیع می‌باشد.

نتایج حاصل از این مقایسه در جدول شمارهٔ ۴ آمده است. همان‌گونه که در جدول ملاحظه می‌شود از ۲۱ ایستگاه که آب‌سنجی ۲۱ واحد هیدرولوژیکی حوزهٔ کرخه را به عهده دارند، در ۹ ایستگاه توزیع وکبی کمترین R. S. S را دارد و بعد از آن توزیع گامبل در ۵ مورد، لوگ پیرسون ۳ مورد، لوگ گاما و لوگ نرمال در ۲ مورد کمترین مقدار این آماره را دارند.

مسلماً در این گونه مطالعات گذشته از استفاده از آزمونهای مرسوم، نظر کارشناسی و ارقام منطقی متناسب با خصوصیات بارندگی منطقه نیز، در انتخاب بهترین توزیع مؤثر می‌باشد و از این دیدگاه نیز

۱۳- با توجّه به مناسب نبودن توزیع لوگ گامبل برای تحلیل فراوانی سیلاب از مقایسهٔ ارقام آن صرفنظر شده است.

14- Residual Sum of Squars.

توزیع وکبی نتایج منطقی داشته است. ارقام برآورد شدهٔ سیل مربوط به ایستگاههای فوق براساس این توزیع در جدول شمارهٔ ۵ آمده است.

جدول شمارهٔ ۴: مقادیر R. S. S توزیعهای مختلف آماری بر سیلابهای لحظه‌ای رودخانه‌های حوزه کرخه

R. S. S											
حوزه	رودخانه	ایستگاه	نرمال	لوگ نرمال	پیرسون	لوگ پیرسون	گامبل	گاما	لوگ گاما	وکبی	توزیع منتخب
گاماسیاب	نهاوند	گوشه	۸/۱	۴/۵	۵/۰	۴/۴	۴/۶	۵/۴	۴/۳	۳/۶	وکبی
	ملایر	پل حاجی مراد	۷/۳	۸/۶	۷/۴	۷/۵	۷/۶	۷/۴	۹/۸	۶/۶	وکبی
	تویسرکان	فیروزآباد	۸/۴	۵/۲	۴/۸	۴/۴	۵/۶	۶/۲	۴/۰	۴/۵	لوگ‌گاما
	خرم رود	آران	۲۱/۲	۶/۷	۱۲/۱	۱۱/۶	۱۳/۶	۱۳/۹	۱۰/۷	۱۰/۹	لوگ‌نرمال
	دینه‌ور	بیستون	۱۳/۶	۱۰/۷	۱۰/۳	۱۰/۹	۹/۲	۹/۳	۱۱/۹	۸/۴	وکبی
	گاماسیاب	پل چهر	۴۰/۵	۱۷/۴	۲۱/۰	۱۶/۸	۱۵/۷	۲۴/۷	۱۵/۲	۱۳/۸	وکبی
قره‌سو	سازآور	حجت‌آباد	۵۴/۹	۴۷/۷	۴۱/۱	۴۱/۰	۴۸/۹	۴۸/۲	۴۶/۹	۴۸/۱	لوگ‌پیرسون
	قره‌سو	دوآب‌مرک	۲۳/۸	۱۴/۶	۱۴/۴	۱۴/۶	۱۴/۴	۱۰/۷	۲۱/۶	۱۰/۶	وکبی
		مرک	۷/۹۱	۹/۲	۷/۲	۵/۹	۴/۹	۶/۱	۱۴/۷	۴/۸	وکبی
		قره‌باغستان	۱۰/۶	۲۷/۴	۱۰/۳	۱۱/۱	۱۰/۶	۱۱/۹	۸۵/۲	۱۰/۶	وکبی
سیمره	زال	پل زال	۳۸/۷	۵۶/۷	۳۷/۸	/۸۳۴	۳۲/۴	۶۵/۰	۷۸/۷	۵۲/۹	گامبل
	سیمره	هلیلان	۳۱۸/۸	۲۳۳/۳	۱۹۲/۱	۱۷۳/۹	۲۳۴/۳	۲۴۵/۵	۲۱۱/۴	۱۸۳/۱	لوگ پیرسون
		چم‌زاب	۷۲/۳	۵۵/۳	۵۶/۱	۵۴/۱	۴۳/۰	۶۰/۴	۵۳/۶	۵۵/۳	گابل
		تنگ سازبن	۱۱۵/۵	۸۸/۷	۹۲/۲	۸۸/۱	۶۶/۱	۹۶/۹	۸۵/۵	۸۶/۸	گامبل
	کرخه	پای پل	۱۸۴/۰	۲۰۴/۳	۱۵۰/۶	۱۳۷/۶	۱۳۲/۷	۱۳۸/۹	۲۵۰/۷	۱۸۳/۳	گامبل
کشکان	چولهول	آفرین	۸۰/۰	۲۵/۴	۴۴/۲	۳۰/۲	۵۶/۲	۵۲/۰	۴۲/۵	۳۸/۴	لوگ نرمال
	کشکان	آفرین	۱۰۵/۴	۷۲/۳	۶۰/۴	۵۴/۱	۶۷/۶	۸۰/۰	۶۶/۸	۵۳/۶	وکبی
	خرم‌آباد	چم‌انجیر	۹۴/۳	۱۰۳/۸	۹۹۹/۰	۹۹۹/۰	۶۵/۱۹	۹۵/۷	۱۰۷/۳	***	گامبل
	هررود	کاکارضا	۴۹/۰	۳۰/۹	۳۰/۲	۲۹/۲	۳۴/۹	۳۶/۸	۲۷/۴	۲۹/۳	وکبی
	کشکان	پل کشکان	۱۰۶/۳	۷۱/۳	۷۴/۰	۶۹/۲	۷۴/۷	۷۹/۴	۶۸/۵	۶۷/۵	وکبی
	کشکان	پل‌دختر	۱۷۳/۷	۱۰۲/۱	۱۱۰/۱	۱۰۵/۴	۱۰۹/۸	۱۱۰/۵	۱۱۲/۰	۹۰/۹	وکبی

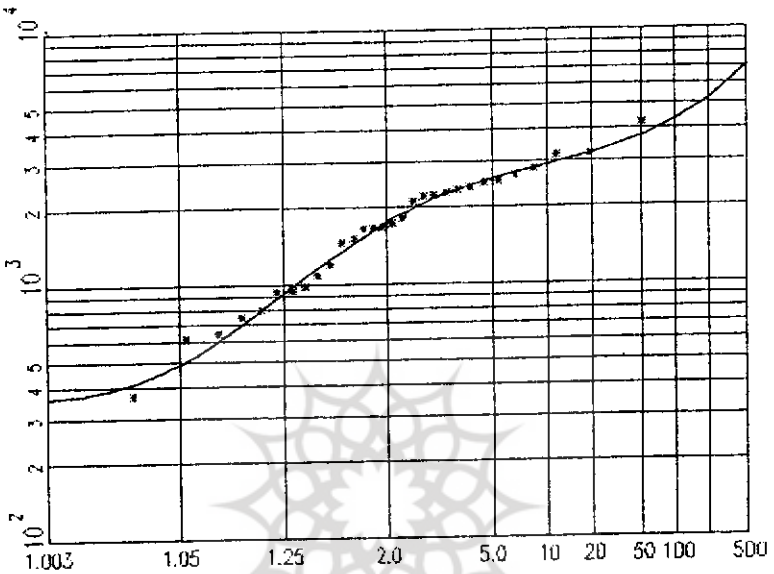
* امکان تحقق شرایط معتبر برای پنج پارامتر توزیع وکبی وجود ندارد.

جدول شماره ۵: ارقام برآورد شده سیل مربوط به ایستگاهها بر اساس توزیع وکبی

\ - Tr. St. \ (yr)	2	5	10	25	50	100	200	500	1000	
GOOSHEH	33.44	59.34	76.10	94.53	106.06	115.85	124.16	133.25	138.93	*
POL HAJIABD	61.44	94.23	110.08	123.60	130.14	134.60	137.65	140.25	141.50	*
FIROOZ ABAD	18.86	33.65	46.52	66.11	83.15	102.37	124.06	157.07	185.79	
ARAN	46.95	87.81	121.98	172.35	214.83	261.47	312.69	388.21	451.87	
BISTOON	112.80	165.24	200.33	244.69	277.52	310.21	343.15	386.70	420.16	*
POL E CHEHR	260.78	404.68	501.49	615.78	692.94	762.92	826.39	901.32	951.91	*
HOJAT ABAD	68.53	97.04	130.10	198.54	278.87	396.63	569.24	926.55	1345.99	
DOAB MERK	58.04	127.69	174.97	230.14	266.92	299.92	329.53	364.06	387.08	*
KHERS ABAD	50.08	87.92	108.90	130.57	143.59	154.34	163.22	172.65	178.37	*
GHARA BAGH	127.87	239.72	366.58	619.96	907.33	1316.01	1897.20	3057.99	4374.51	*
POL E ZAL	268.14	403.86	462.68	545.92	636.38	770.03	970.68	1400.02	1920.80	
SEYMAREH	462.18	947.28	1371.76	2021.22	2589.29	3233.31	3963.43	5080.54	6057.63	
CHAM JAB	557.47	765.59	925.41	1145.43	1318.80	1498.37	1684.38	1940.53	2142.37	
TANG SAZBON	551.38	888.38	1138.09	1461.42	1701.00	1936.35	2167.54	2466.90	2688.72	
PAY E POL	1755.02	2559.25	2898.42	3316.20	3732.23	4328.78	5212.38	7086.31	9344.43	
AFARINH CH.	88.37	224.83	341.02	504.46	633.69	767.12	904.59	1092.52	1239.45	
AFARINH KA.	407.65	638.10	801.31	1026.09	1211.27	1414.01	1637.38	1969.06	2251.13	*
CHAM ANGIR	******	******	******	******	******	******	******	******	******	
KAKA RAZA	111.56	195.22	267.11	375.16	468.00	571.66	687.40	861.33	1010.79	*
POL E KASH.	272.32	508.81	692.44	941.60	1135.06	1332.92	1535.27	1809.84	2023.03	*
POL E DOKH.	519.34	1065.57	1388.41	1711.17	1894.70	2038.42	2150.96	2263.18	2326.97	*

* پذیرفته شدن توزیع وکبی

برای تشریح بیشتر تواناییهای این توزیع، برازش آن بر اساس آمار ایستگاه پای‌پل در نمودار شمارهٔ ۱ آمده است. امکان وجود چند نقطهٔ عطف از ویژگیهای این توزیع می‌باشد که امکان برازش بهتر آن را فراهم می‌سازد.



نمودار شمارهٔ ۱: برازش توزیع وکبی بر سیلابهای رودخانه کرخه ـ ایستگاه پای‌پل

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

چند نکته در استفاده از توزیع وکبی

براساس تجارب وسیع استفاده از این توزیع در رودخانه‌های حوزه کرخه و همچنین مطالعات دیگری که در حوزه هرمزگان انجام شده، در شرایطی امکان تحقّق پارامترهای معتبر فراهم نشده و توزیع سه پارامتره می‌شود و نتایج آن نامطلوب و اغلب نتایج کم‌ارزش می‌شوند و همانگونه که قبلاً ذکر شد استفاده از آن توصیه نمی‌شود. در ذیل به تعدادی از آنها اشاره می‌شود:

۱) وجود مقادیر خارج از مرز در میان داده‌ها

۲) ضریب تغییرات بالا نمونه

۳) تعداد سالهای آماری کم (معمولاً کمتر از ۱۰ سال)

جمعبندی و نتیجه‌گیری

با توجّه به مباحث مطروح شده در این مقاله، توزیع وکبی از جمله توزیعهایی است که امکان استفادهٔ مطلوب از آن برای بسیاری از رودخانه‌های حوزه‌های آبریز کشور میسر می‌باشد و دست‌اندرکاران محترم صنعت آب کشور می‌توانند از آن استفاده کنند.

علاوه بر مدل کامپیوتری[15] که برای این مطالعات[16] نوشته شد بسته نرم‌افزاری[17] نیز این توزیع را، در کنار توزیعهای دیگر در خود جای داده و محاسبه می‌کند که می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

قدردانی

در انجام این مطالعات از امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، همچنین مراجع مهندسین مشاور آب و خاک تهران استفاده شده است که بدین وسیله تشکر می‌شود و همچنین از ادارهٔ مطالعات و خدمات فنی مدیریت آبخیزداری سازمان جهاد سازندگی استان تهران که در تهیّه این مقاله نهایت همکاری را داشته‌اند قدردانی می‌شود.

منابع و مآخذ

1- ***Consolidated Frequency Analysis Package, User manual for Version*** - 1, Water Resources Branch, Environment, Canada, 1985.

2- Cunnane. C: ***Statistical Distribution for Flood Frequency Analysis***, WMO - No. 718, 1989.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

15- Wakeby. for

۱۶- مهندسین مشاور آب خاک تهران .Wakeby. for

17- Consolidated Frequency Analysis - canada.