افلاطون‌گرائی در فلسفهٔ ریاضیات

سهراب علوی نیا

دانشگاه شهید بهشتی

چکیده:

می‌خواهیم بدانیم که آیا موجودات ریاضی (مانند تابع و عدد) تحقق عینی دارند یا ساخته ذهن ما هستند؟ آیا می‌توان گفت که موجودات ریاضی، اشیائی در عالم مثال افلاطونی‌اند. فرگه در اوائل قرن گذشته به نوعی افلاطون‌گرایی افراطی در فلسفهٔ ریاضی روی آورد. گودل و کواین راه او را دنبال‌کردند، ولی ریاضی‌دانانی چون هیلبرت به‌هیچ‌وجه آن را نپذیرفتند. به‌عقیدهٔ آن‌ها در ریاضیات "وجود داشتن" به معنی عدم تناقض است. دامنهٔ ریاضی (Poincone, p. 454) این جدال به دوران ما کشیده شد و مسألهٔ صدق ریاضی به مسألهٔ روز تبدیل شد. مقالهٔ بناسراف تحت عنوان صدق ریاضی در ۱۹۷۳ به اعتباری، نقطهٔ عطف این ماجرا است. منظور از این تحقیق مقایسهٔ این آراء و طرح دلایل له و علیه هرکدام از آن‌هاست.

واژگان کلیدی: افلاطون، افلاطون‌گرایی، ریاضیات، فلسفهٔ ریاضی، هیلبرت، گودن، فرگه.

***

درآمد:

مسأله این است که ریاضیات دربارهٔ چیست؟ مثلاً اعداد چیستند؟ آیا اگر حیاتی در جهان وجود نداشت باز هم این اعداد وجود داشتند؟ ما غالباً در مورد ماهیت حقایق ریاضی به فهم متعارف متوسل می‌شویم و می‌گوییم کار ریاضی‌دان مطالعهٔ حوزه‌های

مختلف مانند نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گروهها و نظریهٔ مجموعه‌ها است. از این دیدگاه، همانطور که فیزیک دربارهٔ اشیاء فیزیکی است، ریاضیات هم دربارهٔ موجوداتی معین مثل عدد، مجموعه و تابع است که واقعاً وجود دارند؛ بنابراین، چون احکام ریاضی دربارهٔ واقعیت‌اند، یا صادق‌اند یا کاذب؛ ولی به محض اینکه کمی عمیق‌تر به مسأله نگاه می‌کنیم بامشکلات فراوانی روبرو می‌شویم. مسأله این است که این موجودات چه ماهیتی دارند؟ کجا هستند؟ اگر قول افلاطون را قبول کنیم که موجودات ریاضی متحیز در زمان و مکان خاصی نیستند، چگونه می‌توانیم آن‌ها را بشناسیم؟

بعضی از ریاضی دانان وقتی به این مخمصه دچار می‌شوند عقب نشینی می‌کنند و صورت‌گرا می‌شوند و می‌گویند "در ریاضیات کار ما فقط بازی با نمادهای بی معنی است". شاید برای ریاضیدان حرفه‌ای اهمیتی نداشته باشد که چنین موضع دوگانه‌ای اتخاذ کند و به اصطلاح در روزهای هفته افلاطونی و در تعطیلات آخر هفته صورت‌گرا باشد، ولی فیلسوف ریاضی نمی‌توانند چنین برخوردی را بپذیرد.

افلاطون‌گرائی ساده این است که عقیده داشته باشیم موجودات ریاضی به صورت مثالی یا آرمانی در عالم مثال، تحقق عینی دارند و ازلی و ابدی‌اند. از این دیدگاه، اعیان ریاضی از وجود ما مستقل و احکام ریاضی پیشینی و ضروری‌اند، ولی افلاطون‌گرایان اخیر نظیر کواین و پاتنم عینیت موجودات ریاضی را مبتنی بر رابطهٔ ریاضیات و علوم طبیعی می‌دانند. از آنجا که کاربرد ریاضیات در فیزیک اجتناب‌ناپذیر است و فیزیک دربارهٔ واقعیت عینی است، پس ریاضیات هم به عالم عینی مربوط می‌شود. موضوع این است که با این بیان ریاضیات نیز مانند فیزیک می‌شود و دیگر پیشینی و ضروری نیست.

ما در فیزیک، موجودات نظری مشاهده‌ناپذیر مانند پایون و کوارک داریم، وجود آن‌ها را چگونه توجیه می‌کنیم؟ وجود اشیاء ریاضی را نیز می‌توان به همین ترتیب توجیه کرد. این واقعیت گرایی را در مورد اعیان ریاضی و موجودات مشاهده‌ناپذیر فیزیکی واقع گرائی علمی می‌خوانیم و در مقابل واقع گرائی ساده قرار می‌دهیم. گودل سؤال اساسی‌تری را پیش می‌کشد و می‌پرسد که اصلاً چرا ما به وجود اعیان طبیعی عقیده

داریم. ماهیت یک شیء فیزیکی و به اصطلاح کانت ماهیت شیء فی نفسه برای همیشه مکتوم است. ما فقط به نمودها و پدیدارهای عالم دانش حضوری داریم؛ فقط به رنگ و بو و طعم وسایر ارتسامات و انطباعات حسی خود دسترسی بی‌واسطه داریم و وجود شیء فیزیکی را به عنوان بهترین تبیین این ارتسامات فرض می‌کنیم.

به نظر گودل، منطق و ریاضیات مانند فیزیک بر مبنای اصول موضوعه با محتوای عینی و مضمون واقعی بنا شده‌اند. فرض وجود مجموعه‌ها همان قدر مشروع است که فرض وجود اعیان طبیعی. ما همان طور که برای تبیین ادراک حسی خود فریضهٔ وجود اعیان طبیعی را پیش می‌گیریم، برای توجیه و تبیین یک نظام ریاضی نیز وجود مجموعه‌ها را فرض می‌کنیم؛ بنابراین، همان طور که ادراک حسی ما منشأ شناخت هستی فیزیکی است، شم و شهود ما نیز چنین نقشی را در شناخت ریاضی ایفا می‌کند. گودل حتی آن دسته از حقایق ریاضی را نیز که برخلاف شم و شهود ما هستند عینی می‌داند و این باور را با اعتقاد به عینیت موجودات مشاهده‌ناپذیر فیزیکی قابل مقایسه می‌داند. به نظر او در ریاضیات نیز مانند فیزیک، وقتی اصل موضوعی فاقد بداهت شهودی باشد باز می‌توانیم صدق آن را به دلیل کارآیی‌اش در اثبات نتایج تصدیق‌پذیر قبول کنیم.

برهان اجتناب‌ناپذیری کواین | پانتم، مبتنی بر اجتناب پذیری کاربرد ریاضیات در علوم طبیعی است. علم بدون ریاضیات، تصورپذیر نیست؛ پس ما ملزم به قبول اشیاء ریاضی هستیم، یعنی فرض وجود آن‌هابرای بهترین تبیین و توجیه ما از پدیدارهای هستی ضروری است. البته توجیه این نحله از واقع گرائی ریاضی مستلزم اثبات رابطهٔ میان علوم طبیعی و ریاضیات است. در اینجا می‌بینیم که افلاطون‌گرائی معاصر با افلاطون گرائی ساده تفاوت بارزی دارد. ولی تلقی فیلسوف معاصر از افلاطون‌گرائی به هیچ وجه چنین نیست. ریاضیات بدان دلیل راجع به واقعیت عینی است که در بطن نظریهٔ علمی قرار دارد و به همین جهت مانند تمام نظریات علوم تجربی نه قطعیت و ضرورت دارد و نه مقدم بر تجربه است.

اشکال این دیدگاه آن است که فقط به بخشی از ریاضیات مربوط می‌شود که در علوم تجربی کاربرد دارد. بخشی از ریاضیات معاصر کاربرد ندارد و بنابراین برهان اجتناب ناپذیری کواین | پاتنم در مورد این بخش از ریاضیات پذیرفتنی نیست. کواین فقط آن قسمت از ریاضیات را عینی می‌داند که در علوم طبیعی مورد نیاز است. به نظر او پی آمدهای ترانسفینی ریاضیات متناهی فقط به دلیل سادگی دستگاه مطرح می‌شوند. ایرادی که به نظریهٔ کواین می‌گیرند این است که اولاً اکثر ریاضیدانان قبول نمی‌کنند که توجیه ادعاهای آن‌ها مبنی بر آزمایشهای فیزیکی است؛ ثانیاً تز کواین فقط ریاضیاتی را توجیه می‌کند که در سطوح بالا وارد نظریه‌پردازی علمی می‌شوند، ولی مقبولیت ریاضیات مقدماتی نظیر "2+2=4" را تبیین نمی‌کند.

از وجهی می‌توان خود افلاطون‌گرائی را به دو نحله تقسیم کرد: افلاطون‌گرائی عینی و افلاطون‌گرایی ساختاری. از دیدگاه نخست، اشیاء انتزاعی ریاضی در خارج از زمان و مکان وجود دارند و قضایای ریاضی به توصیف این اشیاء می‌پردازند. فرگه و گودل به این نحله متعلقند. افلاطون گرایان ساختاری معتقدند که نظریات ریاضی توصیف الگوها ساختارهای انتزاعی ریاضی‌اند که غیر فیزیکی، غیر ذهنی، فرازمانی، فرامکانی هستند. آنها این ادعا را که قلمرو انتزاعی مورد بحث مجموعه‌ای از اشیاء است رد می‌کنند.

مطابق افلاطون‌گرایی ساختاری، یک نظریهٔ ریاضی دربارهٔ دستگاه خاصی از اشیاء انتزاعی نیست بلکه توصیف یک ساختار انتزاعی است. به عقیدهٔ پارسونز، در ساختارگرایی، اشیاء ریاضی خواص ذاتی ندارند و فقط روابط آنها با یکدیگر مطرح است. (Parsons,P-303)

از آنجا که ما امروز عموما" ریاضیات را علم ساختارها یا الگوهای ریاضی می‌دانیم و به خواص ذاتی موجودات ریاضی - اگر واقعا" چنین موجوداتی وجود داشته باشد - توجهی نمی‌کنیم، این نحله از افلاطون‌گرایی اهمیت خاصی پیدا می‌کند.

هیچ نظریه‌ای را نمی‌توان به محض مقایسه با واقعیت ارزیابی نمود. یکی از راههای بررسی یک نظریه، مقایسهٔ آن با نظریات رقیب است. برای فهم عمیق‌تری از افلاطون

گرایی نگاهی به مکاتب آن می‌اندازیم.

افلاطون‌گریزی را نیز می‌توانیم به دو دستهٔ اصلی تقسیم کنیم: افلاطون‌گریزی رئالیستی و افلاطون‌گریزی غیر رئالیستی. دستهٔ اول می‌گویند که نظریات ریاضی به وصف اعیان انتزاعی نمی‌پردازند، بلکه اشیاء انضمامی (زمانی ـ مکانی) را توصیف می‌کنند. دستهٔ دیگر بر این باورند که نظریات ریاضی در بارهٔ هیچ چیز نیستند و به عبارت دیگر مضمون واقعی ندارند. از دیدگاه دستهٔ اول، ریاضیات دربارهٔ اشیاء فیزیکی است. بارزترین مدافع این نحله جان استوارت میل است که عقیده دارد گزاره‌های ریاضی کلی‌ترین قوانین طبیعت‌اند. مثلاً "1+2=3" به ما می‌گوید که اگر یک شیء فیزیکی را به دو شیء دیگر اضافه کنیم، سه شیء فیزیکی خواهیم داشت. این جمله هیچ حرفی از اشیاء انتزاعی نمی‌زند، چون به نظر میل اصلاً اشیاء انتزاعی وجود ندارند. تعبیرات مختلفی از دیدگاه نحله دوم یعنی از افلاطون‌گریزی غیر رئالیستی شده است. یکی از آن‌ها، قرارداد گرایی است. به نظر قرارداد گراها، راستیِ جملات ریاضی، راستی تحلیلی است. مثلاً" جمله " 1+2=3" مانند جملهٔ "همهٔ مردان مجرد ازدواج نکرده‌اند" است و صدق آن مبتنی بر معنی واژه هائی است که در آن به کار رفته‌اند. تعبیر دیگری از این نحلهٔ فکری، اگر ـ انگاه گرایی (if_thenism) یاقیاس‌گرایی (deductivism) است.از این دیدگاه، صدق قضایای ریاضی به صورت "اگر A آنگاه T" است که در آن A مجموعه‌ای از اصول موضوعه و T قضیه‌ای است که برپایهٔ آن اصول اثبات می‌شود؛ مثلاً اگر اصول موضوعهٔ پئانو صادق باشد، قضیهٔ "1+2=3" ضرورتاً صادق است؛ به عبارت دیگر، جملهٔ "1+2=3" قضیه‌ای از دستگاه صوری حساب پئانو است. از تعبیرات دیگر افلاطون‌گریزی غیر رئالیستی تلقی ویتگنشتاین از ماهیت قضایای ریاضی است. او در رساله بر این باور است که قضایای ریاضی همانگویی‌اند و در دورهٔ اخیر تکامل اندیشه‌اش این قضایا را قاعده یا معیار می‌انگارد و من در مقالات دیگری به تفصیل در این باره بحث کرده‌ام.(علوی نیا، ص ۷۶ و بعد؛ ماونس، ص ۲۰ و ۵۸ ـ ۵۹) نیازی نیست که در اینجا آن‌ها را تکرار کنم فقط لازم به یادآوری است که برهان اجتناب

ناپذیری کوین به کلی رای ویتکنشتاین را تخطئه می‌نماید.

افلاطون گرایان کلاسیک: فرگه، گودل

اغلب فلسفهٔ افلاطون را ستایش می‌کنند ولی نظریهٔ مثل او را متعلق به موزهٔ تاریخ فلسفه می‌شمارند. ریاضیدانان تمایل بیشتری به افلاطون دارند و از آنجاکه دائماً" با عدد، تابع، چند جمله‌ای و چیزهایی از این قبیل سر و کار دارند به این فکر می‌افتند که شاید این چیزها هم وجود مستقلی برای خود داشته باشند. ممکن است مسئله را به این صورت مطرح کنیم: ما در فیزیک از اشیاء فیزیکی صحبت می‌کنیم، اشیائی مانند میز و کتاب. موضوع مورد مطالعه ریاضی دان چیست؟ شاید جواب دهند که او به مطالعهٔ اشیاء ریاضی مانند عدد و تابع می‌پردازد. مسئله این است که اعیان فیزیکی، انضمامی هستند ولی اشیاء ریاضی، انتزاعی و مجردند. شناخت اشیاء فیزیکی بر پایهٔ ادراکات جسمی است که از طریق آلات حسی مانند چشم و گوش حاصل می‌شوند. در شناخت موجودات مجرد و انتزاعی ریاضی چنین امکانی نیست. بدین جهت بسیاری از فلاسفه و ریاضی دانان واقعیت موجودات ریاضی را انکار نموده و گزاره‌های ریاضی را تهی از مضمون عینی و محتوای تجربی می‌دانند. مثلاً ویتگنشتاین ریاضیات را به دو بخش کاربردی و محض تقسیم می‌کند و می‌گوید که ریاضیات کاربردی همان فیزیک است و ریاضیات محض هم حرفی از عالم نمی‌زند.(Einstein,P.31-32) حلقهٔ وینی‌ها قضایای ریاضی را همانگویی (tautology) یا معلوم متکرر و تهی از مضمون عینی می‌انگارند.

افلاطون‌گرائی ساده

ما میان سیب‌های مختلف شباهتی می‌بینیم و گاهی می‌گوییم: چیزی در میان آنها مشترک است. حالا ممکن است بپرسند آن چیز مشترک چیست. افلاطون گفت که شیء مشترک، مثال سیب است. این مثال، صورت کامل سیب یا نمونهٔ اعلای آن است و سیب‌های واقعی معمولی نمونه هایی از آن امثال اعلی هستند. مسأله این است که ما از

کجا به مثل آگاهی پیدا می‌کنیم؟ به نظر افلاطون ارواح جاودانه ما قبل از ورود به این عالم از مثل آگاهند، ولی به محض ورود به این جهان گذشته‌ها را فراموش می‌کنند؛ بنابراین، از دیدگاه افلاطون یادگیری صرفاً یادآوری است و روش درست تدریس روش سقراطی است که در آن معلم واقعیات را بیان نمی‌کند بلکه با سؤالات پی در پی شاگرد را وادار می‌نماید که مطالب گذشته را به یاد آورد. مثلاً افلاطون در رسالهٔ منون سقراط را نشان می‌دهد که به دانش‌آموز کمک می‌کند فقط آنچه را قبلاً می‌دانسته به خاطر آورد.

نظریهٔ افلاطون از جهتی شگفت‌انگیز و از جهتی دیگر مهمل است. بدان لحاظ شگفت آور است که اگر آن را بپذیریم می‌بینیم قلمرو وسیعی را در بر می‌گیرد و بسیاری از مشکلات فلسفی ما را جواب می‌دهد. مثلاً نشان می‌دهد که آنچه در همهٔ سیب‌ها مشترک است چه ماهیتی دارد؟ شناخت ما به چه طریق حاصل می‌شود؟ ریاضیات دربارهٔ چیست؟ به عنوان مثال، وقتی در بارهٔ دایره صحبت می‌کنیم به نظر نمی‌رسد که موضوع صحبتمان دایرهٔ خاصی که بر روی کاغذ کشیده‌ایم باشد. چنین دایره‌ای فقط به دایرهٔ مورد نظر نزدیک است. در ریاضیات منظور ما از "دایره" یک دایرهٔ کامل است که در هیچ کجای این عالم مادی وجود ندارد.(Plotto,Book IV) پس در اینجا طبیعی است که ما به مثل جاودانهٔ افلاطونی توجه کنیم. از جهت دیگر می‌بینیم که مجردات عالم مثال افلاطون متحیز در هیچ زمانی و مکانی نیستند و بدین دلیل فهم معنی عبارات "موجود مجرد"، "روح ابدی" و "تذکار افلاطونی" دشوار است، ولی ما در فلسفهٔ ریاضیات نیازی نداریم که همهٔ عقاید افلاطون را بپذیریم. فقط می‌توانیم وجود مثل، به خصوص مُثُل ریاضی و امکان دسترسی به آن را قبول کنیم.

افلاطون‌گرایی فرگه

به نظر فرگه تصورات و انطباعات ذهنی ما موجوداتی روانشناختی‌اند. او مضمون این تصورات را "اندیشه" می‌خواند. اندیشه نه از اعیان عالم طبیعی است و نه از تصورات

ذهنی بلکه از عالم مثال افلاطونی است. مثلاً اندیشه‌ای که با قضیهٔ فیثاغورث بیان می‌شود جاودانه است و صدق آن از این‌که ما آن را بدانیم یا ندانیم مستقل است. اگر کسی این قضیه را کشف نمی‌کرد باز هم صادق بود. به قول فرگه این اندیشه مانند سیاره‌ای است که قبل از اینکه کسی آن را دیده باشد وجود داشته است.(Erege,P.523)به عبارت دیگر، قضایای ریاضی صادق یا کاذبند ولی این صدق یا کذب ربطی به آگاهی ما از آن ندارد، و می‌توان گفت که صدق ریاضی بخشی از واقعیت عینی است. فرگه به انتقاد از صورت‌گرایی اولیه می‌پردازد. به نظر او ریاضیات نمی‌تواند دربارهٔ نمونه‌هایی از نمادهای منفرد باشد، بلکه دربارهٔ انواع یا طبقاتی از نمادهاست.

سلسله‌ای مانند / / / / / شامل پنج نمونهٔ مجزاست که همهٔ آنها از یک نوعند. می‌بینیم که نمونه‌ها، انضمامی‌اند ولی انواع، مجرد و انتزاعی هستند. ممکن است خود این نمونه‌ها نمادهایی بی معنی باشند، ولی انواع به هیچ وجه چنین نیستند.

از طرف دیگر، حتی اگر ریاضیات را مانند بازی شطرنج یک بازی بی معنی با مهره‌های بی معنی تلقی کنیم، فرا۔ نظریهٔ یک بازی نمی‌تواند بی معنی باشد؛ به عبارت دیگر فرا۔ ریاضیات بی معنی نیست. مثلاً فرض کنید بگوییم "برهان فلان قضیه پنج مرحله دارد" یا "با شاه و دو اسب نمی‌توان طرف مقابل را مات کرد". این جملات فرا۔ قضیه هایی دربارهٔ بازیهای ریاضیات و شطرنجند و کاملاً با معنی‌اند. شاید همانطور که فرمالیست‌ها می‌گویند بازی شطرنج و یک دستگاه صورت ریاضی بازی‌هایی بی معنی باشد ولی فرا۔ قضیه‌هایی که دربارهٔ این بازی مطرح می‌شوند، بی معنی نیستند و محتوا و مضمون عینی دارند.

افلاطون‌گرایی گودل

به نظر گودل مجموعه‌ها و سایر موجودات ریاضی، اشیائی واقعی هستند که از تعاریف و ساختمان‌های ریاضی ما مستقل‌اند. او ریاضیات را با فیزیک مقایسه می‌کند و می‌گوید:

درست به همان دلیل که ما وجود اشیاء فیزیکی رامی‌پذیریم موجودات ریاضی را هم قبول

می‌کنیم. یعنی همانطور که برای تبیین ادراکات حس خود وجود اعیان طبیعی را فرض می‌نماییم، پذیرش واقعیت اشیاء ریاضی هم برای تأسیس یک نظام قابل قبول ریاضی ضروری است.(Godel, *Russell,s mathematicallogic,* P,456_7).

ما ادراکی حسی از مجموعه‌ها نداریم ولی چاره‌ای هم نداریم که چیزی شبیه این ادراک را در مورد مجموعه‌ها بپذیریم.

من دلیلی نمی‌بینم که ما به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، اطمینان کمتری از ادراک حسی داشته باشیم.(Golde, *what is cantor...* P. 483).

مطابق نظر گودل ما می‌توانیم اشیاء ریاضی را با چشم ذهن شهود کنیم. البته اصطلاح چشم ذهن (mind's eye) یک استعماره است، ولی ما چاره‌ای جز استعمال این استعماره نداریم؛ به عبارت دیگر، همان طور که با ادراکات حسی از فضای فیزیکی اطلاع حاصل می‌کنیم به فضای موجودات ریاضی نیز به طریقی مشابه آن، یعنی از راه شهود ریاضی دسترسی پیدا می‌نماییم.

همانطور که قضایای اولیهٔ ادراک حسی ـ مانند "علف سبز است" ـ دارای بداهت حسی هستند، می‌توانیم بگوئیم قضایای سادهٔ ریاضی مانند "5+7=12" نیز دارای بداهتی شهودی اند. ما احساس می‌کنیم که باید قضیهٔ "5+7=12" را بپذیریم. باور ما بدین قضیه مبتنی به شم و شهود است؛ به اصطلاح می‌گوییم قضیهٔ مذکور دارای بداهت ذاتی است. این موضوع یکی از وجوه تفوق افلاطون‌گرایی بر سایر نحله‌های فلسفهٔ ریاضی مانند قراردادگرایی است. به نظر قراردادگراها ریاضیات مانند یک بازی شطرنج است که با قواعد خاصی در مورد نمادهای ریاضی انجام می‌شود. در اینجا، افلاطون گرایی در راستای این واقعیت روانشناختی است که ما احساس می‌کنیم بازی با مهره‌های شطرنج به صلابت و استحکام قضیهٔ "5+7=12" نیست. مسأله این است که ما می‌توانیم ادراک حسی معمولی خود را توجیه و تبیین کنیم ولی هیچ اطلاعی از نحوهٔ کار چشم ذهن نداریم. حالا ببینیم که دقیقاً از ادراک حسی معمولی چه می‌دانیم؟ البته به جنبهٔ فیزیولوژیک این فرآیند واقفیم، ولی دربارهٔ خود ادراک و نحوهٔ تکوین باوری که مثلاً

به وجود یک کتاب پیدا می‌کنیم چیزی نمی‌دانیم. مثلاً من کتابی را روی میز می‌بینم. ابتدا فوتونها از کتاب می‌آیند و وارد چشم من می‌شوند. در آنجا واکنش هایی صورت می‌گیرد و علامتی از عصب نوری به بخش بصری پوستهٔ مخ فرستاده می‌شود و امثال آن. اینها جنبهٔ فیزیولژیک قضیه است. موضوع این است که هیچ کس تا به حال نحوهٔ تکوین خود ادراک و نحوهٔ شکل‌گیری باور را روشن نکرده است. اینکه چگونه یک فرآیند فیزیولژیک به باور تبدیل می‌شود، رمز و راز بزرگی است. این، در واقع همان مسألهٔ قدیمی رابطهٔ ذهن و عین است که کماکان لاینحل باقی مانده است. رازگونگی این مسأله درست مانند آن است که نمی‌دانیم چگونه موجودات ریاضی سبب تکوین معتقدات ریاضی ما می‌شوند. البته اگر می‌توانستیم هر دو راز را بدانیم خیلی خوب بود ولی به هر حال جهل ما در مورد موجودات ریاضی بیشتر از ناآگاهی ما از اعیان طبیعی نیست.

اصلاً این ادعا که ما به مکانیسم ادراک حسی معمولی کاملاً واقفیم ولی از مکانیسم شهود ریاضی بی‌اطلاعیم، ربطی به مسألهٔ مورد بحث ندارد. ببینیم ادعای افلاطون گرا چیست؟ او می‌گوید ما از نظریه و پراتیک ریاضی آگاهی داریم و این واقعیتی است که نیاز به تبیین و توضیح دارد. بهترین تبیین این است که بگوییم اعیان ریاضی وجود دارند و ما می‌توانیم با چشم ذهن آنها را ببینیم. این استدلال شبیه موضوعی است که در برابر بار کلی مطرح شد. ما می‌دانیم که کتاب روی میز است و باید توضیح دهیم که این شناخت از کجا حاصل می‌شود. بهترین تبیین این است که بگوییم کتاب واقعاً وجود دارد و باعث ارتسامات و انطباعات ذهنی ما می‌شود. آیا در اینجا لازم است که ما مکانیسم ادراک حسی را به تفصیل بیان کنیم تا استدلالمان اقناعی باشد؟ نه! دانشمندان قبل از اینکه فتونرا کشف کنند این استدلال را علیه بار کلی پذیرفتند. اینکه افلاطون‌گرا نمی‌تواند مکانیسم رؤیت با چشم ذهن را با دقت و صراحت بیان کند به هیچ وجه خللی به استحکام استدلال او وارد نمی‌کند.

از طرف دیگر، درست است که ما رابطهٔ مستقیم با موجودات ریاضی نداریم، ولی پوزیترون و الکترون را هم بی واسطه نمی‌شناسیم. به نظر گودل اصول موضوعهٔ یک

دستگاه ریاضی حدس هایی هستند که دارای مضمون عینی‌اند و با نتایج خود آزموده می‌شوند. بدین اعتبار، یک دستگاه ریاضی مانند فیزیک است. ما فرضیه‌ای را به عنوان یک حدس مطرح می‌کنیم و نتایجی از آن استخراج می‌نماییم که در آزمایشگاه تأیید یا تکذیب می‌شوند.اگر این نتایج صادق بودند باور ما به آن فرضیه بیشتر می‌شود و اگر کاذب از آب در آمدند آن فرضیه را رد می‌کنیم. مسأله‌ای که پیش می‌آید این است که آزمون وارسی یک فرضیه به این سادگی نیست، چون یک فرضیهٔ کاذب می‌تواند نتایج صادقی داشته باشد؛ به صرف اینکه نتایج حاصل از یک فرضیه صادقند، آن فرضیه محقق نمی‌شود.تاریخ نظریهٔ مجموعه‌ها هم این مطلب را نشان می‌دهد.

برهان اجتناب ناپذیری کواین / پاتنم

آیا ریاضیات برای علم تجربی ضروری است؟ به عبارت دیگر، آیا کاربرد ریاضیات در علوم طبیعی اجتناب‌ناپذیر است؟ این موضوع، مسألهٔ اصلی مورد نزاع نامگرایان و واقع‌گرایان است. پاسخ کواین و پاتنم به این مسأله مثبت و پاسخ هارتری فیلد منفی است. گزارهٔ "دو سیب در سبد است" را در نظر بگیرید. به نظر می‌رسد که برای بیان این گزاره‌ها راهی جز استفاده از عدد 2 نداریم ولی با کمی توجه می‌بینیم که می‌توان مضمون آن را بدون توسل به حساب بدین صورت بیان کرد:

$$\exists x\, \exists y \forall z = (Px \& Py \& x \neq y \& (Pz \rightarrow z = x \vee z = y))$$

که در آن P به معنی "سیبی در سبد است" می‌باشد. به نظر فیلد تمام علوم را می‌توان بدون استفاده از عدد به همین ترتیب ارائه نمود. البته او قدرت اکتشاف ریاضیات یا نقش روانشناختی آن را برای فیزیک انکار نمی‌کند، ولی می‌گوید که ریاضیات برای علوم طبیعی ضروری نیست.

کواین و پاتنم در مقابل فیلد قرار می‌گیرند و می‌گویند چون گزاره‌های ریاضی برای علوم طبیعی ضروری‌اند، باید صادق باشند و برای اینکه صادق باشند باید اشیائی نظیر مجموعه، تابع و عدد واقعاً وجود داشته باشد.

استفاده از نظریهٔ تسویر در مورد موجودات ریاضی در علوم طبیعی و صوری اجتناب‌ناپذیر است... . این مطلب ما را وادار می‌کند که وجود اشیاء ریاضی را بپذیریم. البته ابتکار اولیهٔ این نوع استدلال با کواین است که سالها بر اجتناب ناپذیری تسویر روی موجودات ریاضی اصرار ورزیده و انکار وجود اشیائی را که از پیش فرض‌های روزمرهٔ ما هستند، خلاف صداقت علمی دانسته است.(Putnam,P.57)

مطابق معیار کواین ـ که پاتن آن را تأیید کرده است ـ وقتی می‌پذیریم که جمله‌ای صادق است و هیچ راهی هم برای بیان آن به طریق دیگری که بتوانیم عبارت حاوی سورش را حذف کنیم نداریم، ملزم هستیم که وجود این اشیاء ریاضی را قبول کنیم. به عبارت دیگر، ریاضیات برای علم ضروری است و صداقت علمی ایجاب می‌کند که بپذیریم اعداد و سایر موجودات ریاضی تحقق عینی دارند.

فیلد در برابر این افلاطون گرایی به نوعی نام گرایی روی می‌آورد. او مدعی است که ریاضیات برای علوم طبیعی ضروری نیست و فقط مدلهائی ارائه می‌نماید که در آن عالم یا بخشی از آن باز نمایی می‌شود. به نظر فیلد ما می‌توانیم بدون استفاده از ریاضیات هم به همان نتایج منطقی برسیم. اشکال کار در این است که در اینجا مفهوم نتیجهٔ منطقی به منطق مرتبهٔ دوم متعلق است و منطق مرتبهٔ دوم را نمی‌توان به روش بازگشتی، اصل موضوعی کرد؛ به عبارت دیگر، در اینجا "نتیجهٔ منطقی" اصطلاحی شناختی است. شاید بتوان استنتاجات نحوی را (که زنجیره‌ای از نمادهای بی معنی هستند)نامینالیستی دانست، ولی بدون شک این مطلب در مورد استنتاجات معنی شناختی درست نیست. این استنتاجات مبنی بر مفهوم صدق به معنی "صدق در همهٔ مدلها" هستند،که متعلق به نظریهٔ مجموعه هاست. از نظر کواین منطق مرتبهٔ دوم همان نظریهٔ مجموعه‌ها است که به لباس دیگری ارائه شده است.(Quine, P.68)

برهان معرفت شناختی بناسراف

اگر نظریهٔ علّی شناخت را بپذیریم، می‌توانیم بگوییم برای اینکه چیزی شناخته شود باید

بین فاعل شناسا و موضوع شناسایی رابطه‌ای علّی برقرار شود. از آنجاکه اعیان مجرد عالم مثال، فرا ـ مکانی و از نظر علّی بی اثرند، نمی‌توانیم با آنها رابطه‌ای داشته باشیم. نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که حتی اگر اعیان مذکور وجود داشته باشند نمی‌توانیم هیچ شناختی از آنها داشته باشیم؛ پس رأی فیلسوف افلاطونی باطل است. این ایراد مبتنی بر نظریهٔ علّی شناخت است که این روزها، به خصوص از طرف معرفت شناسان طبیعی، مورد تأیید قرار گرفته است.

بدین بیان، شناخت ریاضی نمی‌تواند دربارهٔ اعیان مجرد باشد و باید آن را به طریق دیگری توجیه نماییم. این شیوهٔ استدلال دست‌کم به سکستون امپیریکوس بر می‌گردد و بیان جدید آن در مقالهٔ کلاسیک 1973 نوشتهٔ بناسراف ارائه شده است. (Benacerraf,P.403.420) خلاصهٔ برهان معرفت شناختی بناسراف این است که معنی‌شناسی رسمی تارسکی در ریاضیات با نظریهٔ علّی شناخت قابل تلفیق نیست. این برهان را تقریباً می‌توانیم بدین صورت بنویسیم:

۱. ما انسانها موجوداتی کاملاً زمانی ـ مکانی هستیم یعنی متحیز در زمان و مکان خاصی هستیم؛

۲. اگر اشیاء انتزاعی ریاضی وجود دارند، خارج از زمان و مکانند؛

۳. با دو مقدمهٔ فوق و بنا بر نظریهٔ علّی شناخت، اگر اشیاء انتزاعی ریاضی وجود دارند، ما نمی‌توانیم شناختی از آنها داشته باشیم؛

۴. پس اگر افلاطون‌گرایی ریاضی درست باشد، ما نمی‌توانیم از ریاضیات شناختی داشته باشیم؛

۵. ما دارای شناخت ریاضی هستیم؛

۶. بنابراین، افلاطون‌گرایی باطل است.

به بیان دیگر، اگر اشیاء ریاضی خارج از زمان و مکانند، از نظر علّی بی اثرند، یعنی نمی‌توانند با هیچ چیز رابطه‌ای علّی داشته باشند؛ بنابراین، با ما هم چنین رابطه‌ای ندارد. حالا اگر ما نظریهٔ علّی شناخت را به عنوان بهترین نظریه قبول داریم، به هیچ وجه

نمی‌توانیم شناختی از موجودات ریاضی به دست آوریم.

در پاسخ بناسراف، یک راه این است که نظریهٔ علی شناخت را رد کنیم، یعنی مثال نقضی برای آن پیدا کنیم؛ به عبارت دیگر، در جهان فیزیکی موردی بیابیم که این نظریه صدق نمی‌کند. اگر نشان دهیم که از یک واقعهٔ فیزیکی آگاهی داریم ولی هیچ رابطهٔ علّی با آن نداریم، در آن صورت حکم مورد نظر خود را ثابت کرده‌ایم؛ این مثال نقض، تجربهٔ ذهنی اینشتاین، پادلسکی رزن است. فرض کنیم با تجربهٔ یک ذرهٔ بنیادی دو فوتون در دو جهت مخالف به طرف آشکارسازهایی که در دو طرف یک دستگاه نصب شده‌اند حرکت نمایند. آشکارسازها دارای صافی‌های پلاریزاسیون هستند که جهت اسپین فوتونها را نشان می‌دهند. تئوری و تجربه نشان می‌دهد که حالت اسپین دو فوتون به یکدیگر وابسته است. یعنی اگر اسپین یکی از آنها به طرف بالا باشد اسپین دیگری به طرف پائین خواهد بود، ولی ما هرگز نمی‌توانیم پیش بینی کنیم که چه اسپینی در کدام طرف دستگاه حاصل می‌شود. در اینجا، نکتهٔ مهم وابستگی کامل دو فوتون است. ممکن است بگوییم که اندازه گیری در یک شاخهٔ دستگاه سبب می‌شود که نتیجهٔ حاصله در طرف دیگر چنان شود؛ ولی این مکان با توجه به نظریهٔ نسبیت خاص منتفی می‌شود؛ چون هیچ اثری نمی‌تواند با سرعتی بیش از سرعت سیر نور منتقل شود؛ یعنی این دو اندازه‌گیری خارج از مخروط نوری یکدیگر واقع می‌شوند و بنابراین هیچکدام از آنها بر دیگری تأثیری نمی‌گذارد. ممکن است فرض کنیم که عامل مشترک پنهانی در موقع تولید این زوج فوتون در کار است که سبب وابستگی آنها به یکدیگر می‌شود. این نتیجه‌ای بود که اینشتاین، پادلسکی و رزن گرفتند و این علت مشترک را متغییر موضعی پنهان خواندند. ولی بنابر کارهای جان بل، وجود چنین متغیر پنهانی محال است؛ چون نتایج تجربی و پیش‌بینی‌های نظری مبتنی بر فرمالیسم هایزنبرگ نیز خلاف آن را نشان می‌دهد؛ بنابراین، ما به یک مثال نقض آشکار در مورد نظریه علّی شناخت رسیده‌ایم. البته ممکن است کسی نظریهٔ نسبیت خاص را قبول نکند و بگوید که یک علامت می‌تواند با سرعتی بیش از سرعت سیر نور فرستاده شود یا ممکن است که نتایج کارهای

جان بل را دربارهٔ متغیر موضعی پنهان رد کند، ولی پذیرش این چیزها آسانتر از قبول نظریه نسبیت خاص و نتایج کارهای جان بل نیست. وقتی ما نظریهٔ علّی شناخت را رد کردیم دیگر مانعی در راه شناخت اعیان انتزاعی نخواهیم داشت و مشکل عدم دسترسی به موجودات مجرد ریاضی منتقی خواهد شد. از طرف دیگر اگر تعبیر کپنهاگی فرمالیسم هایزنبرگ را بپذیریم، می‌بینیم که مسأله‌ای در بین نیست. شگفت‌انگیزترین ره‌آورد نظریه هایزنبرگ این است که عمومیت اصل علیت را مورد شک قرار می‌دهد و تمام تعصباتی راکه از زمان نیوتن بر قلمرو فیزیک حاکم بوده است فرو می‌ریزد. (راسل، ص ۷۹) در فیزیک کلاسیک، قوانین اساسی ضروری تلقی می‌شوند و تحلیل آماری فقط وسیله‌ای عملی برای کار کردن با دستگاههای پیچیده است و جنبهٔ نظری ندارد؛ یعنی در آن جا آمار به منظور تسهیل کار یا به دلیل ناآگاهی ما مطرح می‌شود، ولی هایزنبرگ دیدگاه آماری را اصل قرا رمی دهد و انگاره وجوب علّی را رد می‌کند؛ به عبارت دیگر، ما در طب، اقتصاد و سایر علوم اجتماعی و حتی در مکانیک آماری کلاسیک به دلیل پیچیدگی موضوع و ناآگاهی خود به آمار متوسل می‌شویم، ولی قوانین اساسی هستی را واجب و ضروری می‌انگاریم. در نظریهٔ کوانتومی با یک رشته قوانین آماری برخورد می‌کنیم که از ناآگاهی ما ناشی نمی‌شوند بلکه مبیّن ساختار اساسی عالمند.

صورت‌گرایی هیلبرت و تخیّل گرایی فیلد

صورت‌گرایی اولیه با کار فرگه در ۱۸۸۴ به کلی درهم شکسته شد. (Frege, *Arithmetic*) (*the Fundations*) جنبهٔ کانتی صورت گرایی هیلبرت آن را از صورت گرایی قبل از او متمایز می‌سازد. از نظر کانت زمان و مکان صور ادراک حسی هستند. ما اشیاء را در قالب زمان و مکان تجربه می‌کنیم. خود زمان و مکان دارای وجودی مستقل و جدا از ما نیستند و واقعیت عینی ندارند. پس به اعتباری می‌توانیم بگوئیم که ما آنها را خلق می‌کنیم. هندسه به شهود ما از مکان، و حساب به شهود ما از زمان مربوط می‌شود. البته حدی برای حرکت ما در فضا نیست. هر چه جلو می‌رویم، باز می‌توانیم قدمی جلوتر

بگذاریم و هر تعدادی از وقایع را هم که تجربه می‌کنیم، همیشه ممکن است واقعهٔ دیگری را تجربه نمائیم، ولی هر مرحله راکه در نظر بگیریم می‌گوئیم که تا آن مرحله فقط قدمهای محدودی برداشته‌ایم و وقایع محدودی را تجربه نموده‌ایم؛ بنابراین زمان و مکان مورد شناسایی ما دارای محدودیت ذاتی‌اند. از نظرگاه کانت تنها بی‌نهایت مجاز، بی نهایت بالقوه (potential infinity)است نه بی‌نهایت بالفعل (actual infinity)از آنجا که زمان و مکان به اعتباری مخلوق ما هستند، پس خواص آنها را به صورت پیشینی یا ما قبل تجربی می‌دانیم؛ بنابراین، یک ریاضی دان کانتی مانند هیلبرت بر این باور است که ما می‌توانیم حقایق ریاضیات متناهی راکه مستقیماً با ادراک حسی ما وابسته است با قطعیت بشناسیم. بدین ترتیب هیلبرت چهار چوب معرفت‌شناسی کانت را می‌پذیرد و آن را در مورد نمادهای ریاضی به کار می‌برد. به عنوان مثال، توالی نمادهای ///// را به عنوان اشیائی که موضوع ادراک حسی ما هستند در نظر بگیرید. واضح است که وقتی سری‌های // و /// راکنار هم بگذاریم به سری ///// می‌رسیم. حالا می‌توانیم این مطلب را بدین شکل بنویسیم: "2+3=5". حقیقت مسلم مذکور، نه به عالم مثال افلاطونی تعلق دارد و نه موضوعی زبانشناختی است بلکه حقیقتی پیشینی دربارهٔ ساختار هر ادراک حسی است.

اگر ما به ریاضیات متناهی قانع بودیم این بیان هیلبرت توجیهی برای تمام ریاضیات می‌شد ولی هیلبرت می‌خواست که تمام ریاضیات کلاسیک را حفظ کند. بخشی از ریاضیات کلاسیک نظریهٔ مجموعه‌های ترانسفینی است که هیلبرت دربارهٔ آن می‌گوید:

هیچکس نمی‌تواندما را ازبهشتی‌که کانتور برایمان آفریده‌است‌بیرون‌براند. (Hilbert, p. 191)

از نظر تاریخی همهٔ پارادکس‌ها و معضلات ریاضیات از موضوع "بی‌نهایت" ناشی شده است. از پارادکس‌های زنون ایلیایی گرفته تا مسألهٔ بی‌نهایت کوچکها در قرن هفدهم و پارادکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها در اواخر قرن نوزدهم در همه جا اشکال کار به "بی‌نهایت ریاضی" مربوط بوده است. هیلبرت می‌دید که در عالم طبیعی، مجموعه‌های نامتناهی یافت نمی‌شوند. از طرف دیگر اگر فرضیهٔ اتمی را هم بپذیریم، باز

از جنبهٔ مفهومی، مشکل حل نمی‌شود. اشیاء بی‌نهایت کوچک وجود عینی ندارند؛ چون امکان تقسیم پذیری هیچ شیئی بی‌نهایت نیست. از دیدگاه نظریهٔ نسبیت عام نیز عالم، متناهی است؛ یعنی مثلاً تعداد ستاره‌ها بی‌نهایت نیست؛ بنابراین، مفهوم بی‌نهایت نمی‌تواند مبتنی بر ادراک حسی ما باشد. هیلبرت می‌خواست که ریاضیات ترانسفینی را در چهارچوب ریاضیات متناهی کانتی بگنجاند، بدین معنی که قدرت، کارآیی و زیبایی خیره کنندهٔ ریاضیات کلاسیک را حفظ کنند و در عین حال به طریقی مطمئن شوند که دیگر هیچ پارادکسی پیدا نخواهد شد. هیلبرت می‌گوید:

هدف نظریه من این است که یکبار و برای همیشه قطعیت روشهای ریاضی را ثابت کنم.(Hilbert,p. 184)

هیلبرت ریاضیات را به دو دسته تقسیم کرد: بخش متناهی که به دلائل کانتی فوق، با معنی و صادق است؛ و بخش نامتناهی که بی معنی است و هیچ ارزش صدقی ندارد. به نظر او؛ علی‌رغم اینکه قضایای ریاضیات نامتناهی بی‌معنی است، وقتی آن را به بخش محدود و متناهی ریاضیات به عنوان مکمل می‌افزاییم قضایای با معنی جدیدی استنتاج می‌نماییم. ریاضیات نامتناهی که هیلبرت آن را بخش آرمانی ریاضیات را می‌خواند، فقط ارزش ابزاری دارد و قضایا و برهانهای ریاضی را ساده می‌کند. نمی‌توانیم عناصر آرمانی را هر کجا که می‌خواهیم اضافه کنیم. افزودن عناصر آرمانی به منظور گسترش دامنهٔ ریاضیات متناهی فقط به شرطی مجاز است که مایهٔ تناقض نباشد؛ یعنی افزودن عناصر آرمانی مشروط به برهان سازگاری دستگاه است. هیلبرت اعداد موهومی و مجموعه‌های ترانسفینی را به عنوان نمونه‌هایی از عناصر آرمانی ریاضیات متناهی ذکر می‌کند؛ بدین ترتیب، ریاضیات را منبع دو نوع فرمول می‌انگاریم: یکی فرمولهای معطوف به قضایای ریاضیات متناهی و با معنی و دیگری فرمولهایی که به هیچ چیز دلالت نمی‌کنند و ساختارهای آرمانی نظریه ما هستند.

به نظر هیلبرت، ریاضیات دربارهٔ نمادهای بی معنی است، ولی ریاضیاتی که در اینجا مطرح می‌کند ریاضیات نامتناهی نیست بلکه ریاضیات متناهی است که مستقیماً به

ادراک حسی اعیان انضمامی یعنی ادراک حسی نمادهای خود ریاضیات کلاسیک وابسته است. اگر ما نگران سازگاری نظریهٔ مجموعه‌های ترانسفینی هستیم نمی‌توانیم از خود این نظریه برای بررسی سازگاری آن استفاده کنیم ولی می‌توانیم برای این کار به تکنیکهای ریاضیات متناهی متوسل شویم. یکی از روشهای اثبات سازگاری یک دستگاه، استفاده از برهان سازگاری نسبی است. مثلاً سازگاری دستگاه هندسه‌های نا اقلیدسی در قرن نوزدهم به وسیلهٔ اثبات سازگاری یک مدل اقلیدسی آنها نشان داده شد. هیلبرت هم برای نشان دادن سازگاری هندسهٔ اقلیدسی، یک برهان سازگاری نسبی ارائه کرد و از اعداد حقیقی به عناون مدل استفاده نمود. برنامهٔ هیلبرت را دیگران ادامه دادند و بدین ترتیب دژ محکمی در برابر افلاطون‌گرایی تأسیس شد تا اینکه مقالهٔ ۱۹۳۱ گودل این دژ را در هم کوبید.

بارزترین و روزآمدترین شاخهٔ افلاطون گریزی غیررئالیستی، نحلهٔ تخیل‌گرایی (Fictionalism) در ریاضیات است. از این دیدگاه، جملات و نظریات ریاضی همان معنای ظاهری خود را دارند و از این لحاظ تخیل‌گرایان به افلاطون‌گرایان شبیه‌اند. مثلاً آنها می‌پذیرند که جملهٔ "3 عدد اول است" دربارهٔ چیزی به نام عدد 3 است. نکتهٔ اصلی این است که وقتی می‌گوییم رمان اولیورتویست دربارهٔ پسر یتیمی به نام اولیور است، هیچ ضرورتی ندارد که قبول کنیم واقعاً چنین پسر یتیمی وجود داشته است. در اینجا هم می‌گوییم اگر چیزی به نام عدد 3 وجود داشته باشد، در آن صورت آن چیز یک شیء انتزاعی است. اختلاف تخیل‌گرایان و افلاطون‌گرایان این است که تخیل‌گرایان قبول ندارند که واقعاً چیزی به اسم عدد 3 وجود دارد؛ و بنابراین نمی‌پذیرند که جملاتی چون "3 عدد اول است" صادق‌اند. به نظر تخیل‌گرایان، نظریات ریاضی مانند داستانهای تخیلی‌اند. می‌گوییم: "رستم سهراب را کشت" یا "بابانوئل در قطب شمال زندگی می‌کند". این جملات راست نیستند؛ چون "بابانوئل" و "سهراب" (به صورتی که در شاهنامه آمده است) مصداق عینی ندارند. حالا، همانطور که بابانوئل وجود ندارند، عدد 3 هم از مضمون عینی تهی است. پس از این دیدگاه، اشیاء ریاضی وجود ندارند و بنابراین، اسامی

خاص ریاضی هم الفاظی بی محتوی هستند. شاید این ادعای تخیل‌گرایان که می‌گویند قضایائی چون "1+2=3" کاذبند، عجیب به نظر آید. ولی از آنجا که آنها به اشیاء انتزاعی عقیده ندارند و ریاضیات هم دربارهٔ اشیاء انتزاعی است، طبیعی است که ریاضیات را مانند یک داستان تخیلی بیانگارند که قضایای آن صادق نیستند. شاید بپرسید که اگر "1+2=3" قضیه‌ای کاذب است، چه فرقی با قضیهٔ کاذبی چون "2+2=3" دارد؟ موضوع این است که جملهٔ "1+2=3" بخشی از یک داستان رسمی و شناخته شدهٔ ریاضی است، در حالی که "1+2=4" چنین نیست. به بیان دیگر هیچکدام از دو قضیهٔ 1+2=3 و 1+2=4 به خودی خود صادق نیستند. شاید بپرسید که اگر " 1+2=3" قضیه‌ای کاذب است، با قضیهٔ کاذبی چون "2+2=4" چه فرقی دارد. موضوع این است که جملهٔ "1+2=3" بخشی از یک داستان رسمی و شناخته شدهٔ ریاضی است، در حالی که "1+2=4" چنین نیست. به بیان دیگر، هیچکدام از دو قضیهٔ " 1+2=3"و" 1+2=4" صادق نیستند. محمول صدق دیگری داریم که عبارت است از "در داستان ریاضیات صادق است". می‌توانیم این محمول را در مورد قضیهٔ "1+2=3" به کار بریم ولی نمی‌توانیم از آن در مورد "1+2=4" استفاده کنیم.(Field, p.2-3) البته این بیان نشان نمی‌دهد که از نظر هستی شناختی میان دو قضیهٔ " 1+2=3" و "1+2=4" فرقی وجود دارد. به نظر تخیل‌گرایان هر دو قضیه کاذبند، چون اساساً خود ریاضیات را داستانی تخیلی می‌دانند. نکتهٔ مهم این است که ما "داستانهای" ریاضی مختلفی داریم. بعضی از آنها جزو داستان ریاضیات رسمی نیستند. حالا تخیل‌گرا باید توضیح دهد که چرا ما این داستان ریاضی خاص را به عنوان داستان رسمی برمی‌گزینیم و بقیه را که با آن متوافق نیستند کنار می‌گذاریم. جواب این سؤال دشوار نیست. دلیل آن کارآیی این داستان خاص یا جنبهٔ زیبایی شناختی آن یا جور بودن آن با "شیوهٔ تفکر" ماست. شاید این نکتهٔ آخر، یعنی جور بودن داستان با شیوهٔ تفکر ما، از جنبهٔ کارآیی (پراگماتیستی)یِ آن مهمتر باشد. مثلاً ما، در حساب، نظریه‌ای را قبول می‌کنیم که با برداشتی که از عدد داریم جور دربیاید.

نتیجه

منظور از افلاطون‌گرایی در ریاضیات این است که اشیاء ریاضی وجودی واقعی و مستقل از ما دارند. اشیاء ریاضی اصولاً با اعیان طبیعی ماند درخت یا اشیاء نامتعارف فیزیکی مثل پوزیترون فرقی ندارند. ما موجودات ریاضی را خلق نمی‌کنیم، بلکه آنها را کشف می‌نماییم و با قضایای ریاضی به توصیف آنها می‌پردازیم. از دیدگاه افلاطون‌گرایان در یک نظام ریاضی هر جملهٔ درست ـ ساختی یا صادق است یا کاذب، و آنچه این جمله را صادق یا کاذب می‌کند، اشیائی هستند که جملهٔ مذکور بر آنها دلالت می‌نماید؛ یعنی صدق یک گزارهٔ ریاضی، نه وابسته به ساختار ذهن ماست و نه وابسته به زبانی که برای بیان آن به‌کار می‌بریم بلکه مبتنی بر واقعیت عینی موجودات ریاضی است. بدین ترتیب، افلاطون‌گرایان برای توجیه مسئلهٔ صدق ریاضی مشکلی ندارند، در حالی که رقبای آنها در این‌باره با مشکلات زیادی مواجهند و به انواع چاره جویی‌ها متوسل می‌شوند. مثلاً صورتگرایان ابتدا صدق ریاضی را با برهان یکی می‌دانستند اما وقتی گودل ثابت کرد که همیشه قضایای صادقی داریم که در یک دستگاه صوری اثبات‌پذیر نیستند، دیگر یکی انگاشتن صدق و برهان ممکن نبود.

افلاطون‌گرایان کلاسیک، مانند فرگه و گودل بر این باور بودند که موجودات ریاضی واقعیت عینی دارند. برهان اخیر کواین، مبنی بر اجتناب‌ناپذیری کاربرد ریاضیات در فیزیک، این نظر را تأیید کرد. به نظر کواین، واقعیاتی در جهان فیزیکی هست که فقط با جملاتی که به اعیان انتزاعی دلالت می‌کنند قابل بیانند، مانند بعضی از قضایای علوم طبیعی که فقط با فرمولهای ریاضی بیان می‌شوند. اگر واقعاً چنین قضایایی وجود دارند، چاره‌ای نداریم جز اینکه وجود اعیان انتزاعی را بپذیریم. فیلد در مقابل او می‌گوید که ما می‌توانیم تمام علوم طبیعی را بدون استفاده از ریاضیات بیان کنیم. منظورش این است که اصولاً می‌توانیم تمام نظریات فیزیکی را نامینالیزه کنیم. یکی از مشکلات این نحلهٔ فکری این است که تا به حال نتوانسته‌اند روش نامینالیستی را در مکانیک کوانتومی به

کار برند. با بررسی و تقابل آراء افلاطونیانی چون فرگه، گودل و کواین با افلاطون گریزانی مانند هیلبرت، اینشتاین و فیلد می‌بینیم که برهان قاطعی له یا علیه افلاطون‌گرایی در فلسفهٔ ریاضیات نداریم.

منابع و مآخذ:

راسل، برتراند. جهان بینی علمی. ترجمهٔ سید حسن منصور. تهران: انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۵۵، چ ۲.

علوی نیا، سهراب. مقایسهٔ معرفت‌شناسی ریاضی ویتگنشتاین و کواین. تهران: انتشارات نیلوفر، ۱۳۸۰.

ماونس، هاورد. درآمدی بر رسالهٔ ویتگنشتاین. ترجمهٔ سهراب علوی نیا. تهران: طرح نو، ۱۳۷۹.

Benacerraf, P. Mathematcal Truth. in Benacerraf, P. and putnam, H. *philosophy of Mathematics.* Cambridge University Press, 1983.

Einstein, A. *Sidelights on Relativity.*

Frege, G.Thought: A Logical Inguiry. Translated by Quinton, A., in klemke, E.D.*Essays on Frege* University of Chicago Press.

Frege, G. *The Foundations of Arithmetic.* Translated by J. L. Austin, Blackwell, 1989.

Field, H. *Realism, Mathematics and Modality,* Blackwell, Oxford, 1989.

Godel, K. Russell,s Mathematical Logic. In Benacerraf, P. & Putnam, H. *Philosophy of Mathemtics.* Cambridge University Press, 1983.

Godel, K. What is Cantor is Continuum Problem, *Op. Cit.*

Hilbert, D. On the Infinite. in Benacerraf, P. & Putnam, H. *Philosophy of Mathematics.* Cambridge University Press, 1983.

Plato's *Republic,* Book IV.

Putnam, H. *Philosophy of Logic.* Prentice Hall, 1970

Quine, W. V. O. *Philosophy of Logic.* Prentice Hall, 1970.