طرحواره‌های ذهنی: توجیه‌گر بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان

دکتر زهرا گویا* و عبداله حسام**

چکیده

هدف از این مقاله، ارائۀ بخشی از یافته‌های پژوهشی در مورد بررسی و ریشه‌یابی علل وقوع بدفهمی‌ها و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در درس ریاضی است که در آن از ابزار شناختی طرحواره‌ها برای تجزیه و تحلیل داده‌ها استفاده شده است. لذا، در تبیین مبانی نظری پژوهش، ابتدا چیستی طرحواره‌ها و نقش آن‌ها در یادگیری ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است و سپس به اختصار، مروری بر بدفهمی‌های ریاضی می‌شود. در ادامه، ضمن اشاره به مواردی از یافته‌های پژوهشی مربوط به نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی و بیان چگونگی انجام پژوهش، دو مورد دیگر از چگونگی نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان که از نتایج این پژوهش‌اند، معرفی می‌گردند.

کلید واژه‌ها: طرحواره، بدفهمی‌های ریاضی، طرحواره ذهنی، ابزارشناختی

مقدمه

در دنیای امروز، نسبت به نقش ریاضی در صورت‌بندی نظام عالم، تبیین پدیده‌ها و پرورش قوۀ استدلال و تفکر آدمی اجماع وجود دارد. همان‌طور که در اصول و معیارهای برنامۀ درسی شورای ملی معلمان ریاضی[1] (NCTM، ۲۰۰۰) در امریکا بیان شده است، «نیاز به فهم و درک و استفاده

---

* دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی E-Mail:gooya@sbu.ac.ir

** کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی اصفهان

از ریاضی در عصر جدید روز به روز درحال افزایش است. ارتقای توانایی تفکر در انسان، ریاضی و حل مسئله برای کار، ریاضی برای جامعهٔ علمی و صنعتی، همه و همه نقش بی‌بدیل ریاضی را در این عصر روشن‌تر می‌کنند. در چنین شرایطی، داشتن توانایی‌های ریاضی‌وار، درهایی را برای آینده‌ای پربار باز می‌کند که فقدان آن‌ها، این درها را بسته نگه می‌دارد» (ص ۴ و۵).

به دلیل چنین نقشی، در نظام آموزشی ایران نیز، ریاضی در برنامهٔ درسی مدرسه‌ای، از جایگاه والایی برخوردار است و هزینه و نیروی شایان توجهی به آن اختصاص داده شده است. با این‌حال، در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای موانعی وجود دارند که شناختن و مرتفع کردن آن‌ها، از دغدغه‌های اصلی آموزشگران ریاضی بوده و هست. یکی از این موانع، بدفهمی‌های[۲] ریاضی دانش آموزان است که نیازمند بررسی و ریشه‌یابی می باشد. در این مقاله، با استفاده از طرحواره‌ها به عنوان یک ابزار نظری مناسب، دو مورد از بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان بررسی شده است.

علت انتخاب طرحواره‌ها

بر اساس دیدگاه ساخت و سازگرایی[۳]، دانش آموزان دریافت کنندهٔ منفعل و بی‌کم و کاست دانش نیستند؛ بلکه با بازتاب آنچه به آن‌ها ارائهٔ می‌گردد و انتخاب و تجزیه و تحلیل آن، معانی و مفاهیم را به گونه‌ای منحصر به‌فرد در ذهن خویش می‌سازند. بنابراین، «دانش آموزان، خود، آفرینندهٔ دانش خویش هستند» (ون دوویل[۴]،۱۳۸۲). در واقع، ساخت و سازگرایان معتقدند که یادگیری، ضبط یا جذب دانش نیست، بلکه ساختن دانش توسط یادگیرنده است (آنتونی، ۱۹۹۶). طبق این دیدگاه، ممکن است معانیِ آفریده شده توسط دانش آموز، با آنچه که معلم در نظر دارد متفاوت یا در مواردی خطا باشد، اما همین خطاها نیز اهمیتی ویژه دارند؛ زیرا هم جزئی از فرایند ساختن و آزمودن نظریه‌های شخصی[5] توسط دانش آموزان هستند و هم ماهیت فهم و درک یادگیرنده را نشان می‌دهند. در این مورد، هرسکویچ و نشر (۱۹۹۶) یادآوری می‌کنند که در یک نظریهٔ یادگیری مبتنی بر ساخت و سازگرایی، طرحواره‌ها نقشی کلیدی دارند، پس می توان با استفاده از رویکرد ساخت و ساز گرایی، برای توصیف، تبیین و تحلیل بدفهمی‌های دانش‌آموزان، طرحواره‌های ذهنی آن‌ها را مورد بررسی قرارداد (اولیویر، ۱۹۹۲). بنابراین، برای مطالعهٔ بدفهمی های ریاضی دانش آموزان، ابتدا به چیستی طرحواره ها می پردازیم.

طرحواره چیست؟

به گفتۀ دیویس و تال (۲۰۰۲)، اصطلاح طرحواره در روان شناسی، که عبارت‌های انگاره، طرح و شِما نیز به عنوان معادل‌های فارسی آن آورده شده‌اند، ابتدا توسط بارتلت (۱۹۳۲) استفاده شد و پس از آن، مینسکی[۶] در سال ۱۹۷۵، ایدۀ چارچوب‌ها و شانک[۷] در سال ۱۹۷۵ ایده‌ی متن[۸] را که مشابه با طرحواره‌های بارتلت بودند، مطرح کردند. علاوه بر این‌ها، سیف (۱۳۷۹) اظهار می کند که پیاژه در تبیین نظریۀ رشد شناختی خود، از طرحواره به عنوان ساختار شناختی فرد که به طریقی معین موجب انجام یک عمل توسط وی می‌شود، استفاده نمود. او از قول پیاژه ابراز می‌دارد که مثلاً، «به چنگ گرفتن» اشیا توسط کودکان، ناشی از «طرحوارۀ به چنگ گرفتن» است که کودک آن را دارد. این طرحواره، باعث می‌شود که کودک بتواند این کار را به صورتی معین انجام بدهد. بنابراین، طرحوارۀ به چنگ گرفتن را می‌توان آن ساخت ذهنی دانست که تمام اعمال مربوط به چنگ گرفتن را ممکن می‌سازد و نشان می‌دهد که در ورای هر کدام از آن‌ها، چیزی بنیادین وجود دارد که باعث بروز آن عمل شده است. سیف (۱۳۷۹) در ادامه، با اشاره به بایلر و اسنومن ۱۹۹۳ بیان می‌کند که طرحواره، یک ساختار انتزاعی است که معرف اطلاعات ذخیره شده در حافظه است. انتزاعی می باشد از آن جهت که اطلاعات مربوط به موارد یا مثالهای متعدد یک چیز را خلاصه می‌کند و ساختار است، زیرا نشان می‌دهد چگونه این اجزای اطلاعاتی به هم مرتبط هستند. همچنین، سیف (۱۳۷۹) به نقل از اسلاوین ۱۹۹۱ طرحواره را به صورت «شبکه‌هایی از اندیشه‌ها یا روابط مرتبط به هم ، یا شبکه‌هایی از مفاهیم که در حافظۀ افراد وجود دارند و آنان را قادر می‌سازد تا اطلاعات تازه را درک و جذب نمایند» (ص ۳۰۸)، در نظر می‌گیرد.

به گفتۀ اسکمپ (۱۹۸۹)، طرحواره یک ساختار سازمان یافتۀ دانش است که دانش یا تجربۀ فرد امکان مطابقت با آن را دارد. چیناپان (۱۹۹۸) نیز این تعریف ها را بسط داده و معتقد است که منظور از طرحواره، «انبوهه‌ای از دانش است که شامل اطلاعاتی دربارۀ مفاهیم اصلی، رابطه ی بین این مفاهیم، و دانشِ چگونگی و زمان به کارگیری آن‌ها می‌باشد»و به صورت «ساختارهای سازمان‌یافتۀ دانش[۹]»عمل می‌کنند. با این تعبیر از طرحواره، وقتی دانش‌آموزان مفاهیم، اصول و رویه‌های ریاضی را می‌آموزند، آن‌ها را در قالب طرحواره‌هایی در ذهن خود سازماندهی می‌کنند که پایۀ

دانش، دانـش آمـوزان را بـرای فعالیـت‌هـای بعـدی تـشکیل مـی‌دهنـد. بـرای مثـال، مـی‌تـوان طرحـوارهٔ یـک دانـش‌آمـوز را از مثلـث قـائم الزاویـه، بـه عنـوان یـک مفهـوم اصـلی در نظـر گرفت که هر خاصـیتی ماننـد رابطـهٔ فیثـاغورس، انـدازهٔ طـول میانـهٔ وارد بـر وتـر، حالـت‌هـای تساوی و نظایر آن‌ها را با این مفهوم مرتبط کرده است.

نقش طرحواره‌ها در یادگیری ریاضی

با توجه به سازمان یافته بودن ساختارهای ریاضی، طرحواره‌ها در یادگیری و آموزش ریاضی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. برای نمونه، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را در نظر گرفت که برای یادگیری آن ها لازم است که دانش آموزان به عنوان پیش‌نیاز، دانش مربوط به مختصات، مثلث قائم الزاویه، دایره، نسبت و مانند آن‌ها را در اختیار داشته باشند- دانش هایی که هر کدام، یک طرحواره یا جزئی از یک طرحواره هستند که فرد برای درک مفهوم یا مطلب جدید، به توانایی استفاده از این طرحواره‌ها یا «بازخوانی طرحواره‌ها[۱۰]» نیز، نیازمند است. از این رو، کیفیت یادگیری دانش آموزان، به کیفیت ساختار طرحواره‌های قبلی و توانایی آنها در مرتبط کردن مطالب جدید با آن طرحواره‌ها برای ساختن طرحوارهٔ ذهنی مربوط به مفهوم جدید بستگی دارد. علاوه بر این، تال (۲۰۰۲) معتقد است که چون تجربهٔ جدیدی که با یک طرحواره جفت و جور[۱۱] می‌گردد، به خوبی به خاطر سپرده می‌شود، پس یک طرحواره، تأثیر گزینشی[۱۲] زیادی بر تجارب ما دارد؛ زیرا آنچه که با آن جفت و جور نشود، اکثراً یاد گرفته نخواهد شد و اگر هم یاد گرفته شود، به زودی فراموش می‌شود.

در همین خصوص، اسکمپ (۱۹۸۹) ضمن معرفی «یادگیری عادتی[۱۳]» و «یادگیری هوشمند[۱۴]»، به نقش کلیدی طرحواره‌ها در یادگیری هوشمند اشاره کرده و اظهار می دارد که فهمیدنِ یک چیز، به معنای «جذب آن در یک طرحوارهٔ مناسب» است.

اسکمپ معتقد است که یادگیری زمانی مفید است که باعث اتصال و ارتباط بین طرحواره‌های موجود در ذهن فرد و درآمیختن آن‌ها با مطالب جدید شود و بدین ترتیب، بعضی، از معادل «فراخوانی» نیز استفاده کرده اند. او معتقد است که باید پیوندهای منسجم و درستی ایجاد گردد و در نهایت، با جرح و تعدیل‌هایی که انجام می‌پذیرد، مفهوم یا رویهٔ جدید درک شود. بدین جهت، از نظر وی، یادگیری هوشمند، به دلیل پیوندهای بسیاری که دارد، هم اقتصادی تر و هم با شرایط و موقعیت‌های مختلف سازگارتر[۱۵] می‌باشد. افزون بر این با قدرت‌تر و

اثربخش‌تر نیز هست. حال آنکه یادگیری عادتی، تنها منجر به بروز یک پاسخ عادتی یا غریزی به یک موقعیت یا محرک خاص و مشخص می‌شود و چون مطالب اساساً به هم مرتبط نیستند یا ارتباط آن‌ها ضعیف است، نرخ ماندگاری آن‌ها کم است؛ پس اقتصادی و مولد نیست و توانایی سازگاری با موقعیت‌های مختلف را ندارد.

در همین ارتباط، فیش باین و موزیکانت (۲۰۰۲) نیز با پذیرش چنین تعبیری از یادگیری، بیان کرده‌اند که «با تدریس قوانین و قواعد، به ریاضی دسترسی پیدا نخواهیم کرد. ما تدریس قوانین را به سادگی انجام می‌دهیم؛ ولی ریاضی دانستن، مستلزم در اختیار داشتن یک گروه از طرحواره‌های یکپارچه و سلسله مراتبی است» (ص ۶۵).

یادگیری هوشمند که متکی به طرحواره های ذهنی است، درگیر دو فرایند «بسط[۱۶]» و «بازسازی[۱۷]» طرحواره هاست (اسکمپ، ۱۹۸۹). در فرایند «بسط طرحواره»، مطالب و عقاید جدید با طرحواره‌های موجود جفت و جور می‌شوند و یادگیرنده آن‌ها را در طرحواره‌های موجود خود جذب می‌کند که در نتیجه، طرحواره های موجود فرد توسعه و گسترش می‌یابند. اما به گفتهٔ تال (۲۰۰۲)، زمانی که مطالب و عقاید جدید با طرحواره‌های موجود جفت و جور نیستند، طرحوارهای موجود با بازتاب بر عقاید جدید و درگیر شدن با آن‌ها، جرح و تعدیل می‌یابند و بازسازی می‌گردند تا بتوانند با ایده‌های جدید سازگار شوند.

بنابراین، از دیدگاه ساخت و سازگرایان و بر اساس نظریهٔ طرحواره‌ها، یادگیری به منزلهٔ ارتباط و تعامل عقاید و مفاهیم و تجربه‌های جدید فرد با طرحواره یا طرحواره‌های موجود وی و در نتیجه، بسط و جرح و تعدیل[۱۸] طرحواره‌های موجود و تشکیل طرحواره‌های مرتبهٔ بالاتر[۱۹] است. این دو فرایند یادگیری، به طور مشابه، توسط آزوبل و پیاژه بحث و بررسی شده‌اند که به دلیل اهمیت این تشابه، در جدول ۱ به طور خلاصه به آن‌ها پرداخته شده است.

جدول۱. فرایندهای یادگیری در نظریه‌های اسکمپ، آزوبل و پیاژه

نظریهٔ طرحواره های	نظریهٔ یادگیری معنادار	نظریهٔ تعادل شناختی
اسکمپ	آزوبل	پیاژه
بسط طرحواره: مطلب جدید با طرحوارهٔ موجود فرد، جفت و جور می شود.	شمول اشتقاقی: مطلب تازه، موردِ خاصی از مطالب موجود در ساخت شناختی فرد است.	جذب: شخص، مطلب جدیدی را برحسب مطالبِ آشنا می بیند.
بازسازی طرحواره: طرحوارهٔ فرد برای قابلیت جفت و جور شدن با مطلب جدید، جرح و تعدیل می شود.	شمول همبستگی: مطلب تازه، موردخاصی از مطالب و مفاهیم موجود نیست و لذا، مطالب قبلی به این مطلب تازه گسترش می یابند.	انطباق: شخص مجبور می شود شناخت ذهنی خود را برای برخورد با مطلب جدید، تغییر دهد.

بدفهمی چیست؟

وایت و میشل مور (۲۰۰۲) توضیح می‌دهند که مفاهیم، طی یک فرایند «انتزاعی[20]» در ذهن شکل می‌گیرند؛ فرایندی که توسط آن، فرد نسبت به نظم و تشابهات موجود در تجارب خود، آگاه می‌شود و می‌تواند این نظم و تشابه بین تجربه‌ها را، در موقعیت‌های آتی نیز تشخیص دهد. پس هر مفهوم، توصیف واضحی از تشابهات عمده در همهٔ موقعیت‌های مختلفی است که از آن‌ها منتزع می‌شود.

از این گذشته، اسکمپ ابراز می دارد که «مفاهیم اولیه[21]»، مستقیماً از تماس با اشیای فیزیکی و تجارب روزمره منتزع می‌شوند؛ در حالی که «مفاهیم ثانویه[22]» ، از مفاهیم دیگر- چه اولیه چه ثانویه- منتزع می‌گردند و چون مفاهیم ریاضی، ایده‌هایی هستند که اغلب، طی دو یا چند مرحله از تجرید شکل می‌گیرند، جزو مفاهیم ثانویه هستند. به همین دلیل، امکان مغایرت بین چگونگی شکل‌گیری این مفاهیم در ذهن دانش آموزان با آنچه که مورد نظر معلم بوده و در نتیجه، تشکیل طرحواره‌هایی متفاوت با انتظار وی محتمل‌تر است. از این‌رو، در ادبیات مربوط به این حوزه، واژهٔ «بدفهمی» برای بیان موقعیتی به کار می‌رود که در آن، ممکن است عقیده‌ای که دانش‌آموز از یک مفهوم در ذهن می‌سازد، با عقیده کارشناسان آن علم در تقابل باشد. این موقعیت، با جایی که در آن، یک «خطای سهوی[23]» اتفاق می‌افتد، تفاوت دارد، زیرا موجب بروز خطاهای مفهومی نظام‌مند می‌گردد؛ یعنی اشتباهاتی که در موقعیت‌های مشابه نیز اتفاق

می‌افتند. به گفتهٔ بن‌زیو (۱۹۹۶)، الگوریتم‌های خطای دانش آموزان، اغلب نظام‌مند، قانون‌مدار و غیرتصادفی هستند. بدین سبب، وی از واژهٔ «خطاهای منطقی[۲۴]» استفاده کرده است تا نشان دهد که در چنین شرایطی، اگرچه دانش آموزان قانونی ناصحیح را به وجود آورده‌اند، ولی از آن در موقعیت‌های مختلف، به صورتی پایدار و ظاهراً منطقی استفاده می‌کنند.

از این گذشته، اولیویر (۱۹۹۲)، بدفهمی را باورها و اصولی در ساختار شناختی فرد می‌داند که علت بروز خطاهای مفهومی نظام‌مند هستند. اسمیت و همکاران (۱۹۹۳) نیز، در جمع‌بندی خود از تحقیقات انجام گرفته در مورد بدفهمی‌های حوزه‌های ریاضی و علوم، به این نتیجه رسیده‌اند که می‌توانند بدفهمی را برای نشان دادنِ آن گونه از برداشت های دانش آموزان که منجر به تولید الگوی نظام‌مندی از اشتباهات می‌شود، به کار ببرند.

برای روشن‌تر شدن موضوع، به چند مورد از بدفهمی‌های ریاضی که توسط شهریاری (۱۳۷۵) شناسایی شده‌اند، می‌پردازیم:

$$\frac{۴^x}{۲^x} = ۲ \quad \text{و} \quad a^{\frac{-۲}{۳}} = a^{\frac{۳}{۲}}$$

$$x^{۲a} + x^{۲b} = x^{۲}(x^a + x^b) \quad \text{و} \quad ۴ \times ۲^a = ۸^a \quad \text{و} \quad ۲^x + ۴^x = ۶^x$$

نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی

بر اساس پژوهش های انجام شده در مورد چگونگی نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی شش مورد شناسایی شده که به اختصار، به هر یک اشاره می‌شود.

باز خوانی یک طرحوارهٔ نامناسب: فیش‌باین و موزیکانت، (۲۰۰۲) در پژوهش‌های خود، به این نتیجه رسیدند که منشاء بروز بدفهمی های دانش آموزان، بازخوانی یک طرحوارهٔ نامناسب بود. آن ها متذکر شدند که به طور مثال، استفاده از قوانین مربوط به معادلات درجهٔ اول، بدون توجه به وجود شرایط لازم باعث ایجاد اشتباهاتی در عملکرد دانش آموزان می‌شود، مثل اینکه دانش آموزان، مانند معادله، از یک عبارت جبری نیز مقداری را کم می‌کنند. اولیویر (۱۹۹۲) نیز قبلاً، مواردی را مستند کرده بود که علت آن را می توان همین مورد دانست. برای نمونه، اولیویر دریافت که دانش آموزان برای حل معادلهٔ ۴= (x-۳) (x-۲)، طرحوارهٔ ۰= (x-۳) (x-۲)، را

بازخوانی کرده بودند و به این دلیل، برای حل این معادله، هم (x-۳) و هم (x-۲) را مساوی ۴ قرار داده بودند.

مداخلهٔ طرحوارهٔ پیشین در یادگیری جدید اولیویر (۱۹۹۲) دریافت که در برخی موارد، طرحواره‌های پیشین دانش‌آموزان در یادگیری جدید آن‌ها مداخله می‌کند و این امر، باعث بروز بدفهمی‌هایی در یادگیری ریاضی آن‌ها می‌شود. وی برای نمونه، به موردی اشاره کرده که قضاوت در مورد بزرگی اعداد اعشاری، بر اساس بزرگی ظاهری آن‌ها انجام شده است که ناشی از مداخلهٔ طرحوارهٔ مربوط به اعداد صحیح در یادگیری اعداد اعشاری است.

مداخلهٔ یادگیری جدید در طرحوارهٔ قبلی: اولیویر (۱۹۹۲) در پژوهش خود دریافت که برخی از دانش آموزان که پیش از یادگیری ضرب عبارات جبری، به درستی $x + x$ را $2x$ نوشته بودند، پس از یادگیری ضرب عبارات جبری، دچار بدفهمی شده و با دخالت نابه‌جای طرحوارهٔ جمع در یادگیری جدید خود، حاصل جمع $x + x$ را $x^{۲}$ نوشته بودند.

بیش‌تعمیمی[۲۵]: بیش تعمیمی یا تعمیم نابه‌جا به عنوان نتیجهٔ طبیعی گسترش طرحواره‌ها (شونفیلد، ۱۹۸۵؛ اولیویر،۱۹۹۲؛ بن زیو،۱۹۹۶؛ هاجی‌دمتریو و ویلیامز،۲۰۰۰؛ گیلبر،۲۰۰۳)، یکی از رایج ترین علت های بدفهمی ریاضی دانش آموزان است. برای نمونه، دانش آموزان با تعمیم نابه‌جای خواص ضرب بر جمع، می نویسند:
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $(a+b)^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$.

تشابه یک واژهٔ ریاضی با واژه‌ای در زبان عامیانه: بسیاری از پژوهشگران از جمله بلاسر (۱۹۸۷)، فیش‌باین و بالتسان (۱۹۹۹)، و گیلبر (۲۰۰۳) معتقدند که گاهی تشابه واژهٔ ریاضی با واژه‌ای در زبان عامیانه، باعث ایجاد بدفهمی می‌شود، برای مثال در اثر تشابه واژهٔ «مجموعه[۲۶]» با واژهٔ عامیانه، آن به عنوان «گردایه[۲۷]»، ممکن است بدفهمی‌های مختلفی در مورد مفهوم مجموعه شکل بگیرند که موارد زیر از آن جمله‌اند:

- یک مجموعه، باید بیش از یک عضو داشته باشد (عقاید مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ تک‌عضوی، رد می‌شوند).
- عضوهای تکراری، به عنوان عضوهای مجزا به حساب می‌آیند.
- دو مجموعه مساویند، اگر و تنها اگر، تعداد اعضایشان یکسان باشند.

تأثیر ساختارهای شهودی: شنارک (۱۹۹۹) و زازکیس (۱۹۹۹) در پژوهش‌های خود به این نتیجه رسیدند که ساختارهای شهودی فرد می تواند عاملی برای ایجاد بدفهمی های ریاضی وی گردد. به اعتقاد آن ها، شهود را می‌توان زمینه‌ای دانست که طرحواره‌ها در آن رشد و توسعه می‌یابند. لذا شهود، تأثیر چشم‌گیری بر کیفیت طرحواره‌های ذهنی فرد دارد. بدین علت، برخی از بدفهمی‌ها در اثر توسعه نیافتگی شهود ایجاد می شوند، به عنوان نمونه، مستر (۱۹۸۹) در پژوهش خود نتیجه گرفت که برای بسیاری از دانش آموزان، عددی که بزرگ‌تر است، عامل‌های (اول) بیشتری دارد، یا آنکه دانش آموزان باور دارند که هنگام ریختن تاس، آمدن عدد ۶ از هر عدد دیگر مشکل‌تر است و معتقدند که پس از سه بار پرتاب سکه و آمدن «رو»، در مرتبهٔ چهارم، احتمال آمدن «پشت» بیشتر است.

روش شناسی پژوهش

به دلیل اهمیت نقش طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان، مؤلفان این مقاله، با هدف بررسی نقش طرحواره‌های ذهنی و چگونگی تأثیر آن‌ها در ایجاد اشتباهات مفهومی دانش آموزان ایرانی در درس ریاضی، پژوهشی را انجام دادند.

برای طراحی این مطالعه، پس از بررسی پیشینهٔ پژوهش، ابتدا با پنج نفر از دبیران ریاضی گفت و گویی صورت گرفت و ضمن توضیح موضوع، از آن‌ها درخواست گردید تا مواردی از اشتباهات و بدفهمی‌های دانش آموزان را- به‌ویژه در پایهٔ اول متوسطه- که با آن مواجه شده‌اند، ذکر کنند. سپس، با جمع‌آوری این موارد، یک برگهٔ آزمون (پیوست الف) حاوی چندین پرسش ریاضی تهیه گردید تا برای اجرا در مطالعهٔ مقدماتی مورد استفاده قرار گیرد.

درگام بعدی، هفتاد و دو دانش‌آموز داوطلب از سه کلاس پایهٔ اول یک دبیرستان دخترانه واقع در یکی از شهرهای مرکزی ایران دراین مطالعه شرکت نمودند. معدل پایهٔ سوم راهنمایی

آنها- به غیر از ۲ یا ۳ نفر- بالاتر از ۱۸ بود که همگی، پس از شرکت در آزمون ورودی این دبیرستان پذیرفته شده بودند. درصد بالای پاسخ‌های نادرست این دانش آموزان- با توجه به وضعیت تحصیلی و برخورداری از امکانات مختلف- که در مواردی به بیش از نود درصد می‌رسید، باعث شد که پژوهشگران، با علاقه و جدیت بیشتری به پیگیری موضوع برای مطالعهٔ اصلی بپردازند. افزون بر این، بر اساس نتایج حاصل از مطالعه‌ی مقدماتی، محتوای آزمون برای مطالعهٔ اصلی جرح و تعدیل گردید.

پس از این مرحله، به جمعی متشکل از حدود بیست نفر از دبیران ریاضی مراجعه شد. این جمع، شرکت کنندگانِ در جلسات هفتگی بودند که به منظور بررسی مسائل مربوط به آموزش ریاضی در این شهر تشکیل می‌شد و شرکت آن ها به صورت داوطلبانه بود و هیچ گونه امتیاز مالی یا رسمی نداشت. در این جلسات، ابتدا موضوع پژوهش برای دبیران شرکت کننده تبیین گردید. سپس از ایشان پرسیده شد که آیا در تجربهٔ تدریس خود، با این قبیل بدفهمی‌های پایدار در ذهن دانش آموزان برخورد کرده‌اند یا خیر که اکثریت این دبیران پاسخ مثبت دادند. لذا، از آن‌ها خواسته شد تا مواردی از بدفهمی‌های رایج در بین دانش آموزان را که در تجربهٔ آموزشی خود با آن‌ها مواجه شده‌بودند، بر روی برگه‌هایی که توزیع شده بود بنویسند. در نهایت، براساس این دیدگاه‌ها و جرح و تعدیل‌های انجام شده در مطالعهٔ مقدماتی، برگهٔ آزمون مطالعهٔ اصلی (پیوست ب) تهیه شد.

همچنین، علت انتخاب پایهٔ اول متوسطه برای انجام پژوهش این بود که بخش شایان توجهی از مبانی ریاضی دورهٔ متوسطه در این پایه تدریس می‌شود و تا حدود زیادی، نگرش دانش آموزان نسبت به ریاضی و نسبت به توانایی خود در انجام ریاضی، و در نتیجه، انتخاب رشتهٔ تحصیلی نیز در این پایه شکل می‌گیرد. اما در کنار آن، پایهٔ سوم راهنمایی هم به دلیل مشابهت بسیاری از موضوعات اساسی ریاضی آن با پایهٔ اول متوسطه و دارا بودن نسبی برخی از ویژگی‌هایی که ذکر شد، برای این مطالعه انتخاب گردید تا امکان مقایسهٔ میزان بدفهمی‌های دانش آموزان در پرسش‌های مشترک این دو پایه، و بررسی تأثیر یک سال آموزش بیش‌تر بر این پدیده، فراهم گردد.

همچنین، زمان برگزاری آزمون‌ها نیز به طور هدفمند انتخاب شد تا تأثیر احتمالی فراموشی ناشی از تعطیلات تابستان بر وجود بدفهمی‌ها - به عنوان یک عامل مداخله‌گر- از بین برود.

به همین خاطر، دو هفتهٔ اول نیمسال دوم سال تحصیلی، یعنی بلافاصله پس از امتحانات پایانی نیمسال اول که دانش‌آموزان تمام مطالب درسی را دوره و تمرین‌های متنوع و فراوانی را حل کرده بودند، به عنوان زمان برگزاری آزمون نتخاب گردید.

شرکت کنندگان در پژوهش

برای اجرای آزمون طراحی شده، در مجموعاً ۹۱۶ دانش آموز ۴ مدرسهٔ راهنمایی و ۹ دبیرستان از سه ناحیهٔ آموزش و پرورش یکی از شهرهای مرکزی ایران، با مشورت تعدادی از دبیران و مسؤلان آموزشی آن نواحی، به عنوان مدارس خوب، یعنی دارای عملکرد آموزشی متوسط به بالا برگزیده شدند.علت این انتخاب این بودکه بدفهمی های احتمالی، به ضعف آموزشی دانش‌آموزان نسبت داده نشود. جدول ۲، اطلاعات مدارس و دانش آموزان شرکت کننده در مطالعه را نشان می‌دهد.

جدول۲. آمار مربوط به مدارس، کلاس‌ها و دانش آموزان شرکت کننده در مطالعه

				تعداد کلاس	تعداد افراد
مدارس راهنمایی	مدرسهٔ شمارهٔ (۱)	پسرانه	دولتی	۲	۵۵
	مدرسهٔ شمارهٔ (۲)	پسرانه	دولتی	۱	۳۸
	مدرسهٔ شمارهٔ (۳)	دخترانه	دولتی	۲	۷۲
	مدرسهٔ شمارهٔ (۴)	دخترانه	دولتی	۲	۷۴
مدارس متوسطه	دبیرستان شمارهٔ (۱)	پسرانه	دولتی	۲	۶۳
	دبیرستان شمارهٔ (۲)	پسرانه	دولتی	۳	۱۰۳
	دبیرستان شمارهٔ (۳)	پسرانه	دولتی	۲	۶۴
	دبیرستان شمارهٔ (۴)	پسرانه	غیر انتفاعی	۲	۴۳
	دبیرستان شمارهٔ (۵)	پسرانه	غیر انتفاعی	۲	۶۱
	دبیرستان شمارهٔ (۶)	دخترانه	دولتی	۲	۷۸
	دبیرستان شمارهٔ (۷)	دخترانه	دولتی	۲	۷۴
	دبیرستان شمارهٔ (۸)	دخترانه	دولتی	۳	۷۷
	دبیرستان شمارهٔ (۹)	دخترانه	غیر انتفاعی	۲	۴۲
	دبیرستان شمارهٔ (۱۰)	دخترانه	غیر انتفاعی	۳	۷۲
مجموع				۳۰	۹۱۶

ابزار جمع آوری داده‌ها

در این پژوهش، برای جمع آوری داده‌ها از ابزارهای زیر استفاده شد:

- برگه‌های آزمون (پیوست ب)؛
- فیش‌های تهیه شده از مصاحبه با معلمان که شامل تجربهٔ آن‌ها در مورد بدفهمی‌های دانش آموزان بود؛
- یادداشت‌های میدانی یکی از پژوهشگران که هنگام تحقیق برداشته شد.

تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این پژوهش، دو برگهٔ آزمون ویژهٔ پایه‌های سوم راهنمایی و اول متوسطه (پیوست ب) مورد استفاده قرار گرفتند که قسمت‌عمدهٔ برگهٔ آزمون سوم راهنمایی، مشابه با اول دبیرستان بود. به همین دلیل، تنها از برگهٔ آزمون پایهٔ اول دبیرستان برای تحلیل داده‌ها استفاده شد.

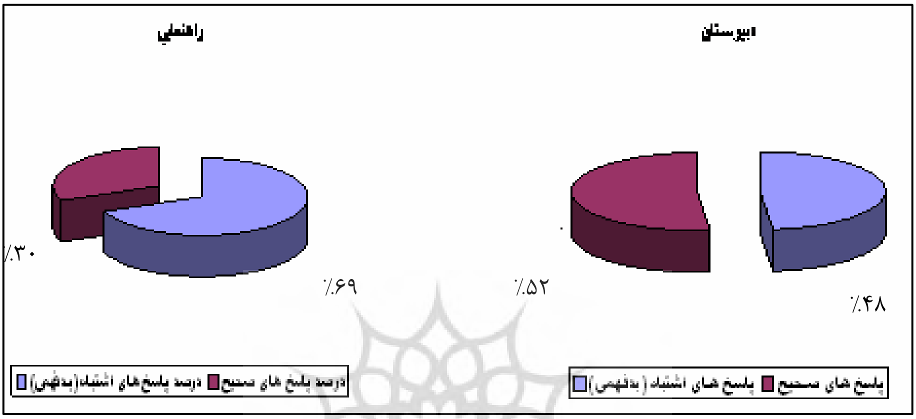
تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که بسیاری از بدفهمی‌های شناسایی شده که در ادبیات پژوهش این حوزه به آن‌ها اشاره شده، در این دانش آموزان نیز وجود داشت و درصد عمومیت آن‌ها نیز بالا بود که از جمله می توان به شش مورد از تأثیر طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان اشاره نمود. افزون بر این‌ها، پژوهش حاضر به دو مورد جدید از چگونگی تأثیر طرحواره‌ها در ایجاد بدفهمی‌های دانش‌آموزان دست یافت که یکی «فقدان طرحوارهٔ مورد نیاز» و دیگری، «ناقص یا مخدوش بودن طرحواره» بود که در این بخش، به این دو مورد پرداخته می‌شود.

الف) فقدان طرحوارهٔ مورد نیاز

تجزیه و تحلیل داده‌های این پژوهش نشان داد که در برخی مواقع، اشتباهات مفهومی به این علت رخ می‌دهند که دانش‌آموز طرحوارهٔ مورد نیاز را برای حل یک مسئله در اختیار ندارد و بنابراین از طرح واره های دیگری که برای آن موقعیت پاسخگو نیستند، استفاده می‌کند. برای مثال، در دو پرسش زیر از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا درستی یا نادرستی دو

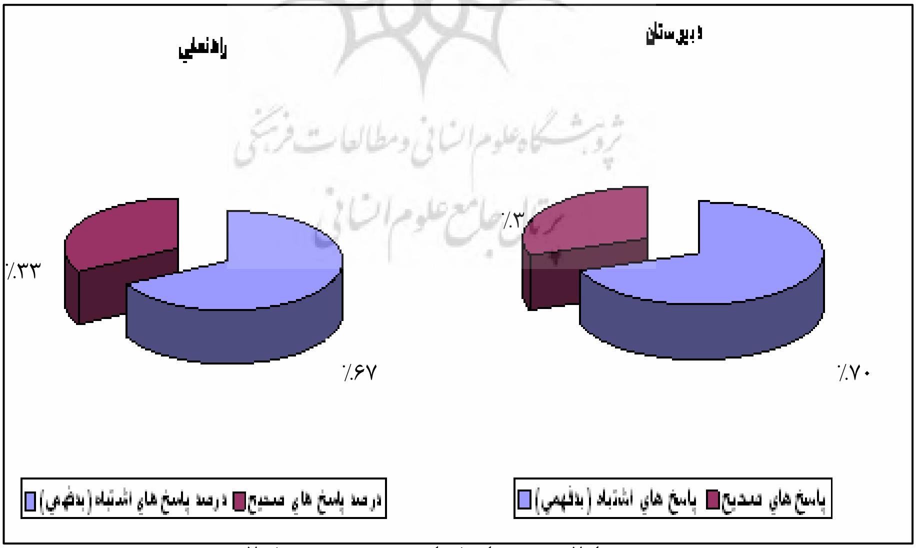
عبارت زیر را تعیین کنند. نمودارهای ۱ و۲ درصد پاسخ‌های درست به این دو پرسش را نشان می‌دهد.

پرسش ۱) $۳ \times ۲^{x} = ۶^{x}$



نمودار۱: درصد پاسخ‌های درست به پرسش۱

پرسش ۲) $۷-۲(x+y) = ۵(x+y)$

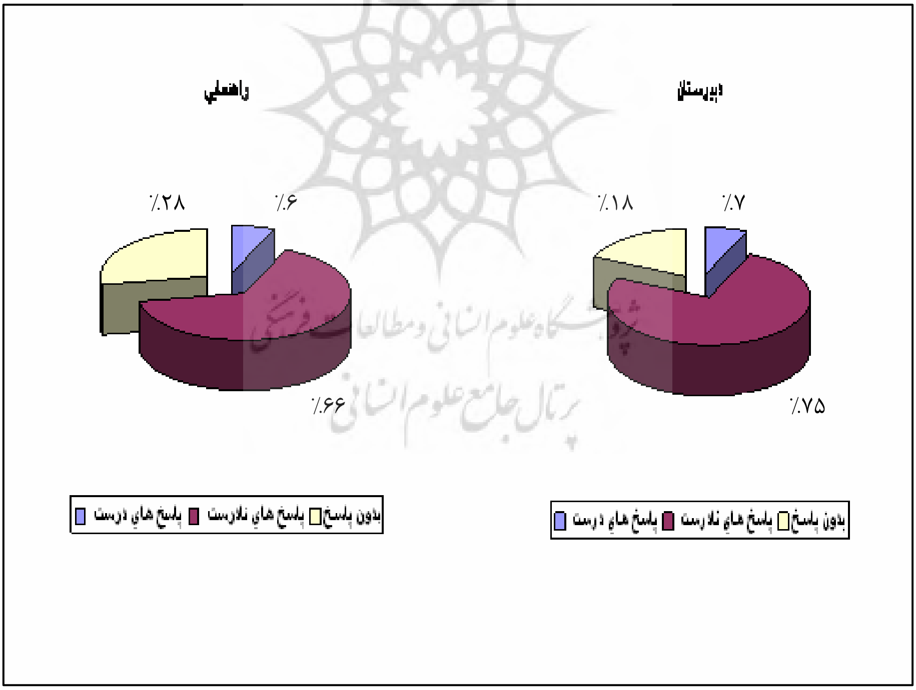


نمودار۲: درصد پاسخ‌های درست به پرسش۲

با بررسی پاسخ‌های دانش آموزان معلوم شد که علت بروز این اشتباهات، فقدان طرحوارهٔ مناسب یعنی «ترتیب عملیات» است، زیرا دانش آموزان، در نوشتن و خواندن عبارات ریاضی، از چپ به راست عمل می‌نمایند و طبیعی است که در صورت آشنا نبودن با «ترتیب عملیات»، محاسبات را نیز به ترتیب از سمت چپ به راست انجام دهند. در نتیجه در پرسش (۱)، دانش آموزان ابتدا ۲×۳ برابر ۶ دانسته و سپس آن را به توان x رسانده بودند. در مورد پرسش دوم نیز، اگرچه عبارت داده شده یک عبارت اولیه و سادهٔ جبری بود، با این حال، درصد بالایی از بدفهمی‌ها را به خود اختصاص داده بود.

پاسخ‌های دانش آموزان به دو پرسش تشریحی زیر نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است:

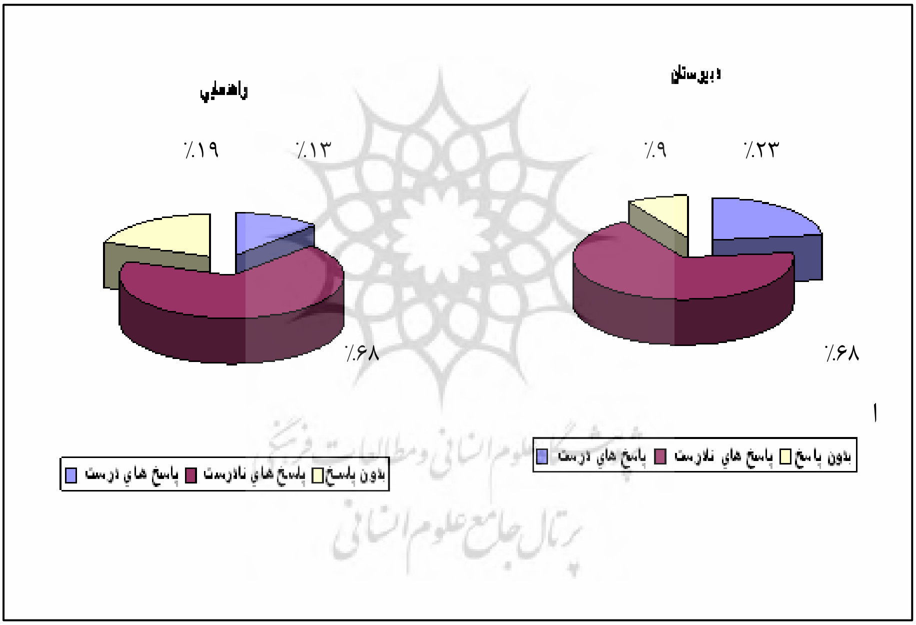
پرسش ۳) عبارت روبه‌رو را محاسبه کنید[۲۸]: $\sqrt{۱+۳\sqrt{(۱+۴)}} = \square$



نمودار۳: درصد پاسخ‌های درست به پرسش ۳

اشتباهات مفهومی (پاسخ‌های نادرست): اولین اشتباه عمده‌ای که ۳۲ نفر از دانش آموزان سوم راهنمایی و ۱۳۶ نفر از دانش آموزان اول متوسطه انجام داده بودند، انجام عمل جمع $(۳+۱)$ قبل از ضرب و به دست آوردن جواب $(\;\sqrt{۴\times ۵} = \sqrt{۲۰}\;(= ۲\sqrt{۵})$ بود. اشتباه عمده‌ی دوم، این بود که عده‌ای، پس از به دست آوردن $\sqrt{(۱+۴)^{۲}} = ۵$ بین ۵ و عدد ۳ قبل از آن، علامت + قرار داده بودند! یعنی: $۳ = \sqrt{۹} = \sqrt{۱+۳+۵} =$

پرسش۴) حاصل را به دست آورید[۲۹]: $۲-۲\times ۳^{۲}$



نمودار۴: درصد پاسخ‌های درست به پرسش۴

اشتباهات مفهومی (پاسخ‌های نادرست): در این پرسش نیز، به طور عمده، اشتباه در ترتیب انجام عملیات، منجر به پاسخ‌های نادرست شد که به طور نمونه، به چند مورد از آن‌ها اشاره می شود.

۷۴ دانش‌آموز راهنمایی و ۱۷۵ دانش آموز دبیرستان پاسخِ $۲-۲\times۳^{۲}=(۲-۲)\times۳^{۲}=۰$ را به دست آورده بودند. از طرفی، ۵۱ دانش آموز راهنمایی و ۱۲۴ دانش آموز دبیرستانی پاسخ $۲-۲\times۳^{۲}=۹$ را نوشته بودند. آنچه در مورد این اشتباه مهم به نظر می‌رسد، این است که دانش‌آموزان پس از ساده کردن (خط زدن) ۲ با ۲ـ ، چیزی به جای آن‌ها ننوشته و علامت ضرب میانی را نیز نادیده گرفته بودند و در نتیجه، حاصل را $۳^{۲}=۹$ به دست آورده بودند. در برخی موارد هم، با این که $۹\times۰=$ را نوشته بودند، حاصل را برابر با ۹ دانسته بودند!

نمودارهای ۱ تا ۴ نشان می‌دهد که الزاماً، یک سال آموزش بیشتر، باعث بهبود عملکرد دانش‌آموزان دبیرستانی در این مورد نشده بود. در مصاحبه‌هایی هم که با دبیران ریاضی انجام شد، معلوم گردید که دلیل عمدهٔ بروز این اشتباهات، عدم طرح مبحث مهم «ترتیب عملیات» در دو کتاب ریاضی سوم راهنمایی و اول متوسطه است؛ با وجودی که ترتیب عملیات، کاربرد بسیار زیاد و اساسی در انجام محاسبات ریاضی دارد. به همین دلیل، اشتباهات ناشی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان، به طور عمده در اثر «فقدان طرحوارهٔ ترتیب عملیات» در ذهن آن‌ها شکل گرفته بود.

ب) مخدوش یا ناقص بودن طرحواره

اگر طرحواره‌ای که دانش آموز برای حل یک مسئله از آن استفاده می‌نماید، ناقص یا مخدوش باشد، یا در واقع، سازمان‌یافته و یکپارچه نباشد، ممکن است باعث بروز بدفهمی شود. برای مثال، ۲۷ درصد دانش آموزان پایهٔ اول دبیرستان در قسمت پنجم پرسش (۱) این مطلب اشتباه را تأیید کرده بودند که $x^{۰}=x^{۱}$ از طرفی، نظر به اینکه دانش‌آموزان عموماً با این حکم که «هر عدد به توان صفر برابر ۱ است» آشنا بودند، انجام این اشتباه را می‌توان به خاطر تصور اینکه «هر عدد به توان صفر، با آن عدد به توان ۱ برابر است» به عنوان طرحواره‌ای مخدوش یا به دلیل «ناقص بودن طرحواره‌ی مربوط به متغیر» در ذهن آن‌ها دانست، زیرا به اعتقاد برخی از دبیران ریاضی ممکن است که دانش‌آموزان به جای x ، فقط عدد ۱ را که معمولاً به عنوان اولین عدد برای امتحان کردن به کار می‌رود قرار داده باشند و با ملاحظهٔ درست بودن عبارت، آن را همواره درست بدانند. در نتیجه، طرحوارهٔ مخدوش یا ناقص دانش‌آموزان دربارهٔ متغیر و عبارات جبری باعث ایجاد بدفهمی‌های جدی می‌شود که

یافته های این مطالعه، مؤید این ادعاست. مثلاً، به عنوان مصداقی برای این طرحوارهٔ مخدوش یا ناقص، در پرسش: در مورد درستی یا نادرستی عبارت $۳x = \frac{۳}{x}$ قضاوت کنید. عده‌ای از دانش آموزان، این عبارت را «درست» ارزیابی کرده بودند، یعنی برداشت آن‌ها در مواجهه با این عبارت، تنها دیدن یک ۳ و یک x در دو طرف تساوی بود و درک و فهمی نسبت به اینکه تقسیمِ این دو، نتیجه‌ای مغایر با ضرب آن‌ها دارد، نداشتند.

مورد دیگر، تأیید این حکم بود که حاصل هر عدد به توان ۲، از خود آن عدد بزرگتر است. این قضاوت نادرست، به خاطر «ناقص بودن طرحوارهٔ مربوط به ضرب (یا توان)» بود، زیرا در این طرحواره، عقیده‌ای در مورد اعداد بین صفر و یک وجود ندارد.

نتیجه‌گیری و توصیه‌های آموزشی

به طور طبیعی، انتظار می‌رود که هر معلم ریاضی، علاقه‌مند به ایجاد «فهم و درک صحیح ریاضی» در دانش‌آموزان است. با این حال، پژوهش حاضر نشان داد که تنها علاقه‌مندیِ معلمان به این موضوع و تدریس مطالب ریاضی به طور صحیح، این انتظار را برآورده نمی‌کند. این یافته، تأییدی بر ادعای ساخت وسازگرایان است که معتقدند هر شخص، دانش منحصر به فرد خویش را می‌سازد. به قول اولیویر(۱۹۹۲)، اشتباهات دانش آموزان اگرچه غلط هستند، اما از نظر روان‌شناختی، از دیدگاه خود آن‌ها بسیار با معنی می‌باشند. ازاین رو، شناخت بدفهمی‌های دانش‌آموزان می‌تواند به عنوان ابزاری مفید برای ارزیابی فهم و درک آن‌ها به کار گرفته شود.

از این گذشته، وجود بدفهمی‌ها، حل مسئلهٔ دانش‌آموزان را با مشکل مواجه کرده و آن‌چنان که یافته‌های این پژوهش نشان داد، باعث می‌گردد تا حتی در حل برخی از مسائل معمولی که دانش آموزان، دانش مورد نیاز را برای حل آن مسائل در اختیار دارند، باز هم به نتیجه نرسند و تلاش آن‌ها با شکست مواجه گردد. بنابراین، باید توجه داشت که:

- برای اینکه بتوانیم چگونگی استفادهٔ صحیح از یک مهارت ریاضی را به دانش‌آموزان آموزش دهیم، لازم است با شرایطی که تحت آن‌ها دانش آموزان مستعد اشتباه کردن هستند، آشنا باشیم.
- به گفتهٔ اولیویر (۱۹۹۲)، اشتباهات و بدفهمی‌ها نتیجهٔ طبیعی تلاش دانش آموزان برای ساختن دانش خویش است، پس ایجاد و بروزشان اجتناب‌ناپذیر است و نباید با آن‌ها به

عنوان چیزهای وحشتناکی که باید ریشه‌کن شوند، برخورد نمود. در عوض، وی توصیه می‌کند که بهترین شکل توجه به بدفهمی‌ها، استفاده از آن‌ها به عنوان بخشی از فرایند یادگیری است. بنابراین لازم است که در کلاس درس ریاضی، فضایی ایجاد شود تا بتوانیم نسبت به اشتباهات و بدفهمی‌های دانش آموزان صبور بوده و از وجود بدفهمی‌ها، به عنوان فرصت‌هایی برای ارتقای یادگیری ریاضی استفاده کنیم.

- شونفیلد (۱۹۹۶، به نقل از بن زیو، ۱۹۸۸) معتقد است آموزشی که حفظ کردن طوطی‌وار را یاد کند، به شکل‌گیری بدفهمی‌ها منجر می‌شود. در عوض، آن نوع از یادگیری که به دانش‌آموزان احساس رضایت، قناعت درونی، مالکیت بر آموخته‌های خویش و توانایی ارزیابی عقاید، سازمان‌دهی آن‌ها و ایجاد طرحواره‌های ذهنیِ از درون‌مرتبط و با قابلیت سازگاری بالا را آموزش می‌دهد، همان است که اسکمپ (۱۹۸۹) از آن به عنوان یادگیری هوشمند (معنادار) یاد می‌کند.
- برای رویارویی با بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان، معلمان نه تنها باید با شیوه‌های تفکر آن‌ها آشنا باشند، بلکه باید از این دانش برای توسعهٔ استراتژی‌هایی که بر یادگیری معنادار تأکید دارند نیز استفاده نمایند. دانش فرد در قالب طرحواره‌ها شکل گرفته که این طرحوارهها، مانند ساختمان‌های ذهنی، بسیار مستحکم اند و ایجاد تغییر در آن‌ها کار ساده‌ای نیست. پس، از آن‌جا که دانش آموزان فعالانه دانش خود را می‌سازند، معلمان نیز باید فعالانه به دانش آموزان کمک نمایند تا بدفهمی‌های خود را توسط «بازسازی مفاهیم»، با فهم و درک درست جایگزین نمایند. در این ارتباط، بحث، گفتمان، بازتاب و مذاکره بر سر معانی، ویژگی‌های ضروری یک رویکرد موفق برای رفع بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان هستند.

پیوست الف

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

ز) $a^{-1}+b^{-1}=\frac{1}{a+b}$ الف) $\sqrt{4a^2+9}=2a+3$

ل) $\frac{x^3-a^3}{x-a}=x^2-a^2$ ب) $(a+b)^2=a^2+b^2$

ح) $x(y-z)=xy-z$ ج) $4\times 2^x=8^x$

م) $(-1-x)^2=-(1+x)^2$ د) $x^0=x^1$

س) $6x\div\frac{1}{2}=3x$ ه) $x+x=x^2$

ک) $(4x-1)^2=16x^2-1$ و) $3x=\frac{3}{x}$

ق) $(2x)^3=8x$ چ) حاصل هر عدد به توان ۲، از خودش بزرگ‌تر است.

ش) $2(a\times b^2)=2a\times 2b^2$ ت) $5y-y=0$

ر) اگر عدد a، بر عددی تقسیم شود کوچک‌تر می‌گردد.

۲- عبارات زیر را در صورت امکان ساده‌تر بنویسید.

ب) $2-2\times 3^2=$ الف) $\frac{(x+1)+x^2}{(x+1)}=$

د) $2^x+4^x=$ ج) $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{(1+4)^2}}}=$

و) $\frac{x^2-y}{x^2-z}=$ ه) $(5^{10})^6=$

ز) $\frac{6x^2}{2x^2+3x}=$

۳- در دانشکده‌ای برای هر ۶ دانشجو، یک استاد وجود دارد. اگر D، تعداد دانشجویان و O تعداد استادان باشد کدام درست است؟

الف) D=6O ب) O=6D ج) 6O = 6D

۴- ۱ کیلوگرم ماده پاک کننده برای ساخت ۱۵ کیلوگرم صابون به کار می‌رود. چقدر صابون می‌تواند از ۰/۷۵ کیلوگرم ماده پاک کننده به‌دست آید؟

پیوست ب

بسمه تعالی

دانش‌آموز گرامی، سلام:

این آزمون جهت انجام یک کار پژوهشی با هدف بهبود آموزش، اجرا می‌گردد و نتیجه‌ی آن هیچ تأثیری در نمره‌ی درس ریاضی شما نخواهد داشت.

لطفاً با فکر و حوصله به سؤالات پاسخ دهید.

در ضمن نوشتن نام و نام‌خانوادگی اختیاری است.

از همکاری شما سپاسگزارم.

عبداله حسام، دبیر ریاضی

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

.... $a^{-۱}+b^{-۱} = \frac{۱}{a+b}$

.... $\sqrt{۱۶} = \pm ۴$

.... $۶a \div \frac{۱}{۲} = ۳a$

.... $\frac{۳x}{x} = ۲x$

.... $\frac{x^۳-a^۳}{x-a} = x^۲-a^۲$

.... $\sqrt{a^۲+۹} = a+۳$

.... $\frac{۳}{x} = ۳x$

.... $۳\times ۲^x = ۶^x$

.... $(-۱-x)^۲ = -(۱+x)^۲$

.... $x^{\circ} = x^۱$

.... $a(x-z) = ax-z$

.... $x+x=x^۲$

.... $۲(a\times b^۲)=۲a\times ۲b^۲$

.... $(a+b)^۲ = a^۲+b^۲$

.... $(۴x+۱)^۲ = ۱۶x^۲+۱$

.... $(a^{-۱})^{-۱} = a$

.... $|-a| = a$.

.... $۷-۲(x+y)=۵(x+y)$

اگر عدد a، بر عددی تقسیم شود .... کوچکتر می‌گردد.

حاصل هر عددی به توان ۲، .... از خود آن بزرگتر است

ادامه سؤالات، پشت صفحه

ادامه پیوست ب

۲- در دانشکده‌ای برای هر ۶ دانشجو، یک استاد وجود دارد. اگر تعداد دانشجویان را با S و تعداد استادان را با P نشان دهیم، کدام یک درست است؟

الف) $S=۶P$ ب) $P=۶S$ ج) $۶P=۶S$

۳- عبارات زیر را در صورت امکان ساده‌تر بنویسید: (و حاصل را به دست آورید):

الف) $\frac{(x+۱)+x^۲}{(x+۱)}$

ب) $\sqrt{۱+۳\sqrt{(۱+۴)^۲}}$

ج) $۲-۲\times۳^۲$

د) $(x^{\sqrt{۵}})^۲$

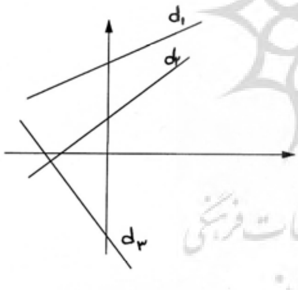
هـ) $۲^x+۴^x$

و) $\frac{x^۲-y}{x^۲-z}$

ز) $\frac{۶x^۲}{۲x^۲+۳x}$

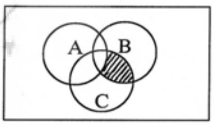
۴- شیب کدامیک از خطوط زیر بیشتر است؟

الف) $d_۱$ ب) $d_۲$ ج) $d_۳$

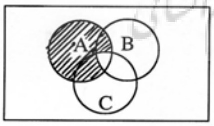


۵- کدام شکل مجموعهٔ $A-(B\cap C)$ را نشان می‌دهد؟

الف)



ب)



یادداشت‌ها

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. Misconceptions
3. Constructivism
4. Van De Walle
5. Personal Theories
6. Minskey
7. Schank
8. Scripts
9. Organised Knowledge Structures
10. Retrieval
11. Fit
12. Selective
13. Habit Learning
14. Intelligent Learning
15. Adaptable
16. Expanding
17. Reconstruction
18. Modify
19. Higher Order Schemas
20. Abstraction
21. Primary Concepts
22. Secondary Concepts
23. Slip
24. Rational Errors
25. Over generalization
26. Collection
27. Set
28. پاسخ درست: با توجه به تقدم عمل ضرب بر جمع در انجام عملیات، داریم

$$= \sqrt{۱+۳(۵)} = \sqrt{۱+۱۵} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

29. پاسخ درست: با لحاظ نمودن تقدم توان بر ضرب و ضرب بر تفریق داریم:

$$۲-۲\times۳^{۲}=۲-۲\times۹=۲-۱۸= -۱۶$$

منابع

سیف، علی اکبر. (۱۳۷۹). ***روان‌شناسی پرورشی (روان‌شناسی یادگیری و آموزش)***. تهران: مؤسسه انتشارات آگاه. ویرایش پنجم. چاپ سوم.

شهریاری، پرویز. (۱۳۷۵). ***در حل مسأله‌های ریاضی اشتباه نکنیم***. تهران. انتشارات تهران. چاپ اول.

گویا، زهرا و حسام، عبداله. نقش طرحواره‌ها در شکل گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان (۱۳۸۴). ***مجلهٔ رشد آموزش ریاضی***. شمارهٔ ۸۲، ص ۴ تا ۱۶. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

ون دوویل، جان. اِ. (۱۳۸۲). توسعهٔ فهم و درک ریاضی. (قسمت اول). ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا. ***مجلهٔ رشد آموزش ریاضی***. شمارهٔ۷۳، ص۴ تا ۱۴. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

Anthony, G. (1996). Active learning in a constructivist framework. ***Educational Studies in Mathematics***, 31,349-469.

Ben-zeev, T. (1996). ***When erroneous mathematical thinking is just as "correct": The oxymoron of rational errors***. IN R. J. Sternberg & T. Ben-zeev (Eds). The Nature of Mathematical Thinking, 55-79. LEA Publishers.

Blosser, P. E. (1987). ***Science misconceptions research and some implications for the teaching of science to elementary school students.*** ERIC/SMEAC Science Educational Digest No.1, 1987.ED282776.
www.ed.gov/databases/ERIC_Digest/ed282776.html

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. ***Educational Studies in Mathematics***, 36, 201-217.

Davis, G. E., & Tall, D. (2002). ***What is Scheme?*** IN D. Tall & M. O. J. Thomas (Eds). Intelligence, Learning and Understanding Mathematics, 131-150. Flaxton, Australia: Post Pressed.

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the 'collection' model**.** ***Educational Studies in Mathematics***, 37, 1-22.

Fischbein, E., & Muzicant, B. (2002). ***Richard Skemp and his conception of relational and instrumental understanding: open sentences and phrases***. IN D. Tall & M. O. J. Thomas (Eds). Intelligence, Learning and Understanding Mathematics, 49-78. Flaxton, Australia: Post Pressed.

Gilber, K. (2003). ***Using action research to uncover misconceptions about scale***. 11th Annual Meeting of Minds Undergraduate Conference: a Celebration of Research Creative Endivors. Dearborn, MI.
www. umd.umich. edu/sep/syudents/kjgilber/kjgilber_arrep.html

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2000). ***Assessing graphical Literacy in year 10 mathematics pupils British Education al Research Assocciation Student Symposium***. www.man.ac.uk.cme/ck

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. ***Educational Studies in Mathematics***, 30, 339-366.

Mestre, J. (1989). ***Hispanic and Anglo students' misconceptions in mathematics. ERIC Digest Publications***. ED313192.
www.ericfacility.net/database/ERIC_Digest/ed313192.html

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). ***Principles and standards for school mathematics.*** Reston, Virginia. The Author.

Olivier, A. (1992). ***Handling pupil's misconceptions***. IN M. Moodley, R.Njisane & N. Presmeg (Eds). Mathematics Education for In-Service and Pre-Service Teachers, 193-209. Pietermaritzburg: Shuter and Shooter.

Schnarch, D. (1999**). *Intuitive and schemata in probabilistic reasoning-the evolution with age of probabilistic misconceptions***.
www.tau.ac.il/education/toar3/archiveetakzir1999-7.html

Schoenfeld, A. H. (1985). ***Mathematical problem solving.*** New York: Academic Press.

Shaughnessy, M. (1977). Misconceptions on probability: an experiment with a small group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. ***Educational Studies in Mathematics***, 8, 295-316.

Skemp, R. R. (1989). ***Mathematics in the primary school***. London: Rutledge.

Smith, J., DiSessa, A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. ***Journal of the Learning Science,*** 3(2), 115-163.

Tall, D. (2002). ***Continuities and discontinuities in long-term learning schemas***. IN D. Tall & M. O. J. Thomas (Eds). Intelligence, Learning and Understanding Mathematics, 151-177. Flaxton, Australia: Post Pressed.

White, P., & Mitchelmore, M. (2002). ***Teaching and learning by abstraction***. IN D. Tall & M. O. J. Thomas (Eds). Intelligence, Learning and Understanding Mathematics, 235-255. Flaxton, Australia: Post Pressed.

Zazkis, R. (1999). Intuitive rules in number theory: examples of "the more of A, the more of B" rule implementations. ***Educational Studies in Mathematics***, 40(2), 97-209.