محاسبهٔ $_nL_x$ در جدول عمر خلاصه**

دکتر حسن سرائی*

«چکیده»

محاسبهٔ $_nL_x$ دوّمین مشکل روش شناختی در ساختن جدول عمر خلاصه است. در این مقاله، سه روش اصلی محاسبهٔ $_nL_x$ معرّفی و در مورد اطّلاعات تقریبی ایران سال ۱۳۶۵ بکار برده شده است. این روشها از این قرارند: (۱) روش مبتنی بر فرض توزیع یکنواخت مرگ در گروه سنی، (۲) روش گریویل، و (۳) روش رید - مرل. در پایان مقاله نیز به مقایسهٔ روشهای مزبور و ارزیابی آنها پرداخته شده است.

مقدمه:

مهمترین مشکل روش شناختی در جدول عمر مقطعی، تبدیل $_nm_x$ به $_nq_x$ است. این مشکل را در مقالهٔ دیگری مطرح کردیم.[1] مشکل روش شناختی دیگر استخراج $_nL_x$ معمولاً

---

* عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی

** در آخر لازم می دانم از همکار گرانقدر، **استاد کورش مهرتاش** سپاسگزاری نمایم. ایشان در عین حال که مشوق من در چاپ این مقاله بودند، دست نوشتهٔ آن را هم با حوصله و دقّت مطالعه فرمودند و برای اصلاح آن نظرات سازنده ای ابراز داشتند.

۱- در این باره نگاه کنید به: سرایی، **۱۳۷۳**.

از l_x است. این مشکل را در این مقاله مطرح می کنیم و راههای فائق آمدن بر آن را توضیح می‌دهیم. با وجود این، پیش از پرداختن به مشکل مزبور لازم است l_x را در دست داشته باشیم.

محاسبهٔ l_x

از لحاظ نظری «نسل» (Cohort) مفهوم محوری جدول عمر است. در واقع، برای نسل است که جدول عمر ساخته می شود. بنابراین، l_x هم که نشان دهندهٔ تعداد بازماندگان نسل در زمانهای مختلف از حیاتش است از جنبهٔ نظری مهمترین متغیّر جدول عمر است.

اگر نسل، واقعی و تاریخی باشد و اگر راجع به تعداد نسل در لحظات مختلف از حیاتش (l_x) اطّلاعات لازم در دست باشد برای آن نسل واقعی می توان جدول عمر طولی یا نسلی ساخت، به طوری که جدول عمر ساخته شده، نشان دهندهٔ تجربهٔ مرگ و میر نسل مزبور در جریان زمان باشد. ولی l_x برای نسلهای واقعی عموماً در دسترس نیست. از این رو، جمعیت‌شناسان برای نسل فرضی بر حسب اطّلاعات مقطعی واقعی ($_nM_x$) جدول عمر می سازند. به رغم این، باز هم، هر چند فرضی، نسل است که برای آن جدول عمر ساخته می شود. لذا در جدول عمر مقطعی نیز l_x از جنبهٔ نظری، متغیّر محوری است.

از بُعد روش شناختی، مهمترین قدم در ساختن جدول عمر مقطعی،تحمیل فکر طولی بر اطّلاعات مقطعی و تبدیل نرخهای مرکزی مرگ به نرخهای احتمالی است. ولی این قدم از لحاظ نظری فقط زمینه ساز دستیابی به l_x (تعداد بازماندهٔ نسل در سنّ دقیق x) است.

به فرض اساسی در جدول عمر مقطعی یا به طور خلاصه به جدول عمر بازگردیم. فرض کردیم ۱۰۰۰۰۰ نوزاد به دنیا بیاید.[۲] تا این جای فرض، فقط l_0 را در اختیار داریم (l_0 =۱۰۰۰۰۰) و از l های دیگر بی‌خبریم. ولی ، در ادامه فرض کردیم که مرگ و میر این نسل فرضی از صفر تا ۱ سالگی تابع $_1M_0$،(=۰/۰۷۴۵) جمعیّت معیّن در سال معیّن باشد یا به تعبیر دیگر، تابع $_1q_0$،(=۰/۰۷۱۷۵) متناظر بر آن باشد.[۳] بنابراین، تعداد نسل را در آغاز (l_0) داریم؛

۲- نگاه کنید به : سرایی، ۱۳۷۳.

۳- در جای دیگر nqx را از تقریب nMx ایران سال ۱۳۶۵ به سه شیوهٔ مختلف استخراج کردیم. این نتایج با هم کمی فرق داشتند. در اینجا از nqx حاصل به روش رید -مرل استفاده شده است. لازم به تذکر است که در منبع مزبور nqxهای←

احتمال مرگ هر یک از اعضاء نسل را نیز از آغاز تا سنّ دقیق ۱ سالگی ($_1q_0$) داریم؛ در نتیجه، تعداد مرگ نسل از ۰ تا ۱ سالگی را بدین صورت می توانیم محاسبه کنیم:

$_1d_0 = l_0 \times {}_1q_0$

=۱۰۰۰۰۰×۰/۰۷۱۷۵

=۷۱۷۵

l_0(= ۱۰۰۰۰۰) نفر، وارد کار زار زندگی شدند که از این تعداد، $_1d_0$(=۷۱۷۵) نفر قبل از رسیدن به اوّلین سالروز ولادتشان از پای درآمدند. حال، می پرسیم: چند نفر سال اوّل را زنده پشت سر گذاشتند و به لحظهٔ ۱ سالگی رسیدند؟ پیداست که اگر تعداد مردگان زیر ۱ ساله ($_1d_0$) را از روی تعداد آغازین نسل (l_0=۱۰۰۰۰۰) برداریم بازماندگان نسل در سنّ دقیق ۱ سالگی (l_1) پیدا می شود:

$l_1 = l_0 - {}_1d_0$

=۱۰۰۰۰۰−۷۱۷۵

=۹۲۸۲۵

اضافه بر l_0 که بر اساس فرض در دست داشتیم، حال l_1 را هم محاسبه کرده و در دست داریم. این مهم، با فرض دسترسی قبلی به $_nq_x$ طیّ دو قدم حاصل می شود: قدم اوّل، محاسبهٔ $_nd_x$ است: $_nd_x = l_x \times {}_nq_x$ و قدم دوّم هم، محاسبهٔ l_{x+n} است: $l_{x+n} = l_x - {}_nd_x$

در بالا ما با استفاده از l_0 و $_1q_0$ و برداشتن دو قدم مزبور l_1 را به دست آوردیم. حال، با استفاده از l_1 محاسبه شده در بالا و $_4q_1$ که از پیش در دست داشتیم[۴] و پیروی از دو قدم مزبور، l_5 را محاسبه می‌کنیم. البتّه در قدم اوّل باید $_nd_x$ در این مورد $_4d_1$ را به دست آوریم:

$_nd_x = l_x \times {}_nq_x$

$_4d_1 = l_1 \times {}_4q_1$

=۹۲۸۲۵×۰/۰۳۳۴۳

=۳۱۰۳

ـحاصل از روش ریدـمرل به اشتباه تحت عنوان روش گریویل گزارش شده است (همان).

۴- نگاه کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ و توجه کنید به تذکر مندرج در آن.

جدول شمارهٔ ۱ – محاسبهٔ l_x از $_nq_x$ برای نسل فرضی *

سن x تا x+n	$_nm_x$	$_nq_x$	l_x	$_nd_x$
۰ تا ۱	۰/۰۷۴۵	۰/۰۷۱۷۵	۱۰۰۰۰۰	۷۱۷۵
۱ تا ۵	۰/۰۰۸۵	۰/۰۳۳۴۳	۹۲۸۲۵	۳۱۰۳
۵ تا ۱۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۱۰۹۴	۸۹۷۲۲	۹۸۲
۱۰ تا ۱۵	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۸۴۷	۸۸۷۴۰	۷۵۲
۱۵ تا ۲۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۲۴۳	۸۷۹۸۸	۱۰۹۴
۲۰ تا ۲۵	۰/۰۰۳۳	۰/۰۱۶۳۸	۸۶۸۹۴	۱۴۲۳
۲۵ تا ۳۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۱۹۳۳	۸۵۴۷۱	۱۶۵۲
۳۰ تا ۳۵	۰/۰۰۴۴	۰/۰۲۱۷۸	۸۳۸۱۹	۱۸۲۶
۳۵ تا ۴۰	۰/۰۰۵۲	۰/۰۲۵۶۹	۸۱۹۹۳	۲۱۰۶
۴۰ تا ۴۵	۰/۰۰۶۱	۰/۰۳۰۰۸	۷۹۸۸۷	۲۴۰۳
۴۵ تا ۵۰	۰/۰۰۷۷	۰/۰۳۷۸۳	۷۷۴۸۴	۲۹۳۱
۵۰ تا ۵۵	۰/۰۱۰۸	۰/۰۵۲۶۸	۷۴۵۵۳	۳۹۲۷
۵۵ تا ۶۰	۰/۰۱۵۱	۰/۰۷۲۹۳	۷۰۶۲۶	۵۱۵۱
۶۰ تا ۶۵	۰/۰۲۳۱	۰/۱۰۹۵۵	۶۵۴۷۵	۷۱۷۳
۶۵ تا ۷۰	۰/۰۳۵۶	۰/۱۶۴۱۲	۵۸۳۰۲	۹۵۶۹
۷۰ تا ۷۵	۰/۰۵۷۴	۰/۲۵۱۹۶	۴۸۷۳۳	۱۲۲۷۹
۷۵ تا ۸۰	۰/۰۹۱۷	۰/۳۷۳۰۶	۳۶۴۵۴	۱۳۶۰۰
۸۰ تا ∞	۰/۱۹۳۸	۱/۰۰۰۰۰	۲۲۸۵۴	۲۲۸۵۴

* در این جدول nmx هم گزارش شده است، زیرا برای محاسبهٔ nLx به روش گرویل به nmx هم نیاز داریم.

در قدم دوّم باید l_{x+n}، در این مورد $l_{۵}$، را محاسبه کنیم:

$$l_{x+n}=l_x-{}_nd_x$$

$$l_{۵}=l_{۱}-{}_{۴}d_{۱}$$

$$=۹۲۸۲۵ - ۳۱۰۳$$

$$=۸۹۷۲۲$$

به همین طریق و با پیروی از قدمهای مزبور، می توان l های دیگر ($l_{۱۰}$، $l_{۱۵}$، ...) را هم به ترتیب محاسبه کرد.

با تشکیل نسل و پیدا کردن تعداد بازماندهٔ نسل در هر سنّ دقیق از حیاتش (l_x)، زمینهٔ لازم برای محاسبهٔ ${}_nL_x$ که موضوع اصلی این مقاله است، فراهم می شود. البتّه، باید یادمان باشد که در جدول عمر مقطعی، l_x برای نسل فرضی بر حسب اطّلاعات مقطعی واقعی (${}_nM_x$) فراهم می‌شود.

محاسبهٔ ${}_nL_x$

${}_nL_x$ مجموع سالهای زندگی نسل در فاصلهٔ سنّی x تا x+n است. ${}_nL_x$ چه از لحاظ نظری و چه از لحاظ روش حائز اهمّیّت است. از لحاظ نظری، ${}_nL_x$ نشان دهندهٔ ترکیب سنّی جمعیّت ساکن یا متوقّف است.(۵) از لحاظ روشی محاسبهٔ ${}_nL_x$ دوّمین مشکل روش شناختی در ساختن جدول عمر است.(۶) البتّه، محاسبهٔ ${}_nL_x$ مستلزم دسترسی قبلی به l_x است.(۷) بنابراین، حال که تعداد نسل (l) را در آغاز هر دورهٔ سنّی (x) از حیاتش در اختیار داریم، می‌توانیم مجموع سالهایی را که نسل در هر دورهٔ سنّی (x تا x+n) پر می‌کند، محاسبه کنیم.

۵- دربارهٔ جمعیّت ساکن یا متوقّف، خواننده می تواند به کتاب امین زاده (۱۳۵۶، فصل یازدهم)، امانی (۱۳۵۴، فصل چهارم) و پرسا (۱۳۷۱ : ۱۶۹-۱۶۶) مراجعه کند.

۶- همان طور که می دانید تنها موردی که شاید از نظر روش شناختی اهمّیّتش بیشتر از محاسبهٔ nLx باشد تبدیل nMx به nqx است.

۷- یادآوری می کنیم که اگر lx از زندگی واقعی یک نسل تاریخی گرفته شده باشد جدول عمری که بر اساس آن ساخته می‌شود، طولی است ولی، اگر lx برای نسل فرضی بر حسب اطّلاعات مقطعی واقعی (nMx) محسبه شده باشد، جدول عمری که ساخته می شود مقطعی است.

در تبدیل ${}_nm_x$ به ${}_nq_x$ سه شیوهٔ برخورد را معرّفی، اتّخاذ، و اعمال کردیم. در محاسبهٔ ${}_nL_x$ باز هم از همان سه شیوه، پیروی می کنیم.[۸] به تعبیر دیگر، ${}_nL_x$ را ابتدا با فرض یکنواختی توزیع مرگ در داخل هر گروه سنّی محاسبه می کنیم، سپس روشهای پیشنهاد شده توسّط رید-مرل وگرینویل را به کار می بندیم.

محاسبهٔ ${}_nL_x$ با فرض یکنواختی توزیع مرگ

پیش از این، ما از این فرض که ${}_nd_x$ داخل گروه سنّی x تا x+n یکنواخت توزیع شده است، استفاده کردیم و ${}_nm_x$ را به ${}_nq_x$ تبدیل کردیم.[۹] حال، باز هم با استفاده از همان طرز فکر و با اعمال همان فرض، مجموع سالهای زندگی نسل را در فاصلهٔ سنّی x تا x+n محاسبه می‌کنیم.

اگر ${}_nd_x$ در سرتاسر فاصلهٔ سنّی (x تا x+n) یکنواخت توزیع شده باشد جملهٔ $\frac{(l_x+l_{x+n})}{۲}$ نشان دهندهٔ تقریبی از «مجموع سالهای زندگی نسل» در داخل هر یک از سالهای فاصلهٔ سنّی است. برای مثال، اگر n مساوی ۱ باشد، $\frac{(l_x+l_{x+n})}{۲}$ مجموع سالهایی را به دست می دهد که نسل در فاصلهٔ سنّی x تا x + ۱ از حیاتش اشغال می کند. ولی فاصلهٔ سنّی در جداول عمر خلاصه، n ساله است. بنابراین ، مجموع سالهای زندگی نسل در یک فاصلهٔ سنّی n ساله ، از x تا x+n با فرض توزیع یکنواخت مرگ در داخل فاصلهٔ سنّی از این قرار می شود:

$$ {}_nL_x=n(\frac{l_x+l_{x+n}}{۲}) $$

در ابتدای این مقاله از ${}_nq_x$ که به روش رید و مرل به دست آمده است استفاده کردیم و l_x را بر مبنای l_0=۱۰۰۰۰۰ برای نسل فرضی محاسبه کردیم (نگاه کنید به جدول شمارهٔ ۱). حال با استفاده از اطّلاعات مندرج در ستون l_x و با کاربرد معادلهٔ مزبور می توانیم ${}_nL_x$ را با فرض توزیع یکنواخت ${}_nd_x$ در داخل گروه سنّی برآورد کنیم. برای مثال ${}_۵L_۵$ از این قرار می‌شود:

$$ {}_۵L_۵ = ۵\ (\frac{l_۵+l_{۱۰}}{۲}) $$
$$ =۵(\frac{۸۹۷۲۲+۸۸۷۴۰}{۲}) $$
$$ =۴۴۶۱۵۵ $$

۸- نگاه کنید به سرایی، فوق الذّکر.

۹- همان منبع.

به بیان دیگر، اگر فرض کنیم ${}_5d_5$(=۹۸۲) داخل فاصلهٔ سنّی ۵ تا ۱۰ ساله، یکنواخت توزیع شده است، در آن صورت نسلی که توسّط l_x مندرج در جدول شمارهٔ ۱ معرّفی شده است در فاصلهٔ سنّی ۵ تا ۱۰ سالگی بر روی هم ۴۴۶۱۵۵ سال زندگی می‌کند. به عنوان مثال دیگر، ${}_5L_{75}$ بدین صورت محاسبه می شود:

$$
\begin{aligned}
{}_5L_{75} &= 5\left(\frac{l_{75}+l_{80}}{2}\right)\\
&= 5\left(\frac{36454+22854}{2}\right)\\
&= 148270
\end{aligned}
$$

در جدول شمارهٔ ۲، تحت عنوان «با فرض یکنواختی توزیع مرگ»، غیر از اوّلین و آخرین فاصلهٔ سنّی، ${}_nL_x$ برای همهٔ فاصله های سنّی با استفاده از فرمول مزبور محاسبه شده است. L_0 معمولاً با استفاده از معادلهٔ دیگری محاسبه می شود. در این جا، L_0 را با استفاده از معادله‌ای که توسّط رید و مرل آماده شده است محاسبه کرده‌ایم. و ${}_{\infty}L_{80}$ را هم به روش گریویل به دست آورده‌ایم.

محاسبهٔ ${}_nL_x$ به روش گریویل

روش دیگر برای محاسبهٔ ${}_nL_x$ روش گریویل (۱۹۴۳) است. این روش مبتنی بر این فرض است که نرخهای مرکزی مرگ بر حسب سن در جمعیّت واقعی، درست مثل نرخهای مرکزی مرگ در جمعیّت متوقّف جدول عمر است. در آن صورت،

$$
{}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x}
$$

با انجام چند عمل جبری بسیار ساده، ${}_nL_x$ بدین صورت از فرمول مزبور استخراج می‌شود:

$$
{}_nL_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nm_x}
$$

بنابراین، با استفاده از ${}_nd_x$ که در بالا محاسبه شد و با دسترسی قبلی به ${}_nm_x$ می‌توان ${}_nL_x$ را محاسبه کرد. برای مثال، ${}_5L_{65}$ در مثال ما، با استفاده از فرمول مزبور، از این قرار می‌شود:[۱۰]

۱۰- با توجه به تأثیر ارقام اعشاری بر نتایج، ${}_5d_{65}$ را با پنج رقم اعشار در صورت کسر قرار داده‌ایم.

$$
\begin{aligned}
{}_{۵}L_{۷۵} &= \frac{{}_{۵}d_{۷۵}}{{}_{۵}m_{۷۵}} \\
&= \frac{۹۵۶۸/۵۲۴۲۴}{۰/۰۳۵۶} \\
&= ۲۶۸۷۷۹
\end{aligned}
$$

در جدول شمارهٔ ۲، تحت عنوان «روش گریویل» غیر از گروه سنّی زیر ۱ ساله، ${}_nL_x$ با استفاده از فرمول مزبور محاسبه شده است. برای اوّلین گروه سنّی، عموماً به جای روش گریویل، از فرمول رید و مرل یا شکل تعدیل شدهٔ آن استفاده می شود. در این جا نیز برای محاسبهٔ ${}_1L_0$ از فرمول اختصاصی رید و مرل برای این گروه استفاده شده است.

در مورد آخرین گروه سنّی x تا ∞، که از یک طرف باز است، به سبب آنکه ${}_\infty d_x$ مساوی l_x است فرمول مزبور برای محاسبهٔ ${}_\infty L_x$ به صورت زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
{}_\infty L_x &= \frac{{}_\infty d_x}{{}_\infty m_x} \\
&= \frac{l_x}{{}_\infty m_x}
\end{aligned}
$$

در مثال ما، ${}_\infty L_{۸۰}$ از این قرار می شود:

$$
\begin{aligned}
{}_\infty L_{۸۰} &= \frac{l_{۸۰}}{{}_\infty m_{۸۰}} \\
&= \frac{۲۲۸۵۴}{۰/۱۹۳۸} \\
&= ۱۱۷۹۲۶
\end{aligned}
$$

بعضی از جمعیت شناسان نظیر شرایاک و سیگل (۱۹۷۱ : ۴۴۶)، با توجّه به این نکته که ترکیب سنّی جمعیّت متوقّف در جدول عمر که با ${}_nL_x$ معرّفی می شود، ممکن است در اثر تغییرات زمانی در مرگ ومیر، با ترکیب سنّی جمعیّت واقعی در سال معیّن فرق کند، در استفاده از روش گریویل احتیاط می‌کنند. خود گریویل هم بر این باور است که از فرمول تقریب انتگرال l_x که در پایین می آید عملاً نتایج بهتری حاصل می شود. تقریب انتگرال l_x به قول او، «گر چه کمتر مستقیم است و از لحاظ نظری از دقّت کمتری برخوردار است [ولی] عموماً در عمل به نتایج بهتری می انجامد.» (گریویل، ۱۹۴۳: ۴۰).

فرمول تقریبی انتگرال l_x به نقل از گریویل، از این قرار است:

$$
{}_nL_x = \frac{n}{۲}(l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{۲۴}({}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n})
$$

برای مثال، با استفاده از این فرمول ${}_{۵}L_{۶۵}$ را برآورد می کنیم:

$$
\begin{aligned}
{}_{۵}L_{۶۵} &= \frac{۵}{۲}(l_{۶۵} + l_{۷۰}) + \frac{۵}{۲۴}({}_{۵}d_{۷۰} - {}_{۵}d_{۶۰}) \\
&= \frac{۵}{۲۰}(۵۸۳۰۲ + ۴۸۷۳۳) + \frac{۵}{۲۴}(۱۲۲۷۹ - ۷۱۷۳) \\
&= ۲۶۸۶۵۱
\end{aligned}
$$

با توجّه به اینکه از این فرمول، به شکل دیگری در روش رید و مرل استفاده خواهد شد ما آن را به عنوان یک روش مستقل مطرح نمی کنیم و توضیح بیشتر در این باره را تا قسمت بعد به تعویق می اندازیم.

محاسبهٔ ${}_{n}L_{x}$ به روش رید و مرل

رید و مرل (۱۹۳۹) به شیوه ای تجربی چند معادله برای تقریب ${}_{n}L_{x}$ تدارک دیده اند. اوّلین معادله، مجموع سالهای زندگی نسل را از آغاز تا لحظهٔ یک سالگی تقریب می کند:

$$ {}_{۱}L_{۰} = ۰/۲۷۶\, l_{۰} + ۰/۷۲۴\, l_{۱} $$

با اتخاذ l های مقتضی از جدول شمارهٔ ۱ و قراردادن آنها در معادلهٔ مزبور، ${}_{۱}L_{۰}$ در مثال ما از این قرار می شود:[۱۱]

$$
\begin{aligned}
{}_{۱}L_{۰} &= ۰/۲۷۶\,(۱۰۰۰۰۰) + ۰/۷۲۴\,(۹۲۸۲۵) \\
&= ۲۷۶۰۰ + ۶۷۲۰۵ \\
&= ۹۴۸۰۵
\end{aligned}
$$

رید و مرل معادلهٔ دیگری برای تقریب ${}_{۴}L_{۱}$ در آورده اند که ما آن را در پایین می‌آوریم و در مورد اطّلاعات مندرج در جدول شمارهٔ ۱ به کار می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
{}_{۴}L_{۱} &= ۰/۰۳۴\, l_{۰} + ۱/۱۸۴\, l_{۱} + ۲/۷۸۲\, l_{۵} \\
&= ۰/۰۳۴\,(۱۰۰۰۰۰) + ۱/۱۸۴\,(۹۲۸۲۵) + ۲/۷۸۲\,(۸۹۷۲۲)
\end{aligned}
$$

۱۱- البتّه، معدلهٔ مزبور مصداقی از این معادلهٔ کلّی تر است: ${}_{۱}L_{۰} = (۱-f')l_{۰} + f'l_{۱}$
(f' نسبتی از مردگان زیر ۱ ساله در سال تقویمی معیّن است که در همان سال تقویمی متولّد شده باشند.) بنابراین، اگر اطّلاعات برای f' دردست باشد برای برآورد ${}_{۱}L_{۰}$ بهتر است از فرمول مزبور استفاده شود. (دربارهٔ f' نگاه کنید به: سرایی، ۱۳۷۳).

$= ۳۴۰۰۰+۱۰۹۹۰۵+۲۴۹۶۰۷$

$= ۳۶۲۹۱۲$

آنها معادله‌ای نیز برای تقریب $_{۵}L_{۵}$ تدارک دیده اند. این معادله را هم می آوریم و در مورد اطّلاعات مقتضی از جدول شمارهٔ ۱ به کار می بریم:

$$_{۵}L_{۵} = -۰/۰۰۳\,l_{۰} + ۲/۲۴۲\,l_{۵} + ۲/۷۶۱\,l_{۱۰}$$

$$= -۰/۰۰۳(۱۰۰۰۰۰) + ۲/۲۴۲\,(۸۹۷۲۲) + ۲/۷۶۱\,(۸۸۷۴۰)$$

$$= -۳۰۰ + ۲۰۱۱۵۷ + ۲۴۵۰۱۱$$

$$= ۴۴۵۸۶۸$$

برای تقریب $_{۵}L_x$ در فواصل سنّی دیگر، غیر از دو فاصلهٔ سنّی آخر پیوستار سن، از معادلهٔ عمومی زیر می توان استفاده کرد:[۱۲]

$$_{۵}L_x = ۲/۷۰۸۳۳\,(l_x + l_{x+n}) - ۰/۲۰۸۳۳\,(l_{x-۵} + l_{x+۱۰})$$

برای مثال، $_{۵}L_{۶۵}$ را با کاربرد معادلهٔ مزبور در مورد اطّلاعات مندرج در جدول شمارهٔ ۱ بدین صورت محاسبه می کنیم:

$$_{۵}L_{۶۵} = ۲/۷۰۸۳۳\,(l_{۶۵} + l_{۷۰}) - ۰/۲۰۸۳۳\,(l_{۶۰} + l_{۷۵})$$

$$= ۲/۷۰۸۳۳\,(۵۸۳۰۲+۴۸۷۳۳) - ۰/۲۰۸۳۳\,(۶۵۴۷۵ + ۳۶۴۵۴)$$

$$=۲۸۹۸۸۶-۲۱۲۳۵$$

$$=۲۶۸۶۵۱$$

معادلهٔ مزبور، معادلهٔ عمومی برآورد $_{۵}L_x$ است. بنابراین، با استفاده از آن می توان $_nL_x$ را برای همهٔ گروههای سنّی، غیر از گروههای سنّی زیر ۱۰ ساله و دو گروه سنّی آخر پیوستار سن، برآورد کرد. برای $_{۱}L_{۰}$، $_{۴}L_{۱}$ و $_{۵}L_{۵}$ فرمولهای اختصاصی رید و مرل را گزارش کردیم. حال دو گروه سنّی آخر پیوستار سن باقی می ماند. در مورد آخرین گروه سنی مانند روشهای پیشین عمل می‌کنیم:

$$_{\infty}L_x = \frac{l_x}{_{\infty}m_x}$$

$_{۵}L_x$ در گروه سنّی ما قبل آخر را هم می توان به روش گرینویل، یا با فرض یکنواختی توزیع

۱۲- این معادله استخراج شده از معادلهٔ دیگری از رید و مرل است که در قسمت "یک توضیح تکنیکی" معرّفی خواهد شد.

مرگ، یا با استفاده از معادلهٔ خاص برآورد کرد. در اینجا، ما از روش گریویل برای برآورد $l_{۷۵}$ استفاده کرده‌ایم، ولی نتیجه را با ضرب کردن در ضریب ۰/۹۹۹۹۵ تعدیل کرده‌ایم.

یک توضیح تکنیکی

رید و مرل در اصل ${}_nL_x$ را در دو مرحله تقریب می کنند. ابتدا، T_x را از فرمول زیر که برای گروههای سنّی ۵ ساله تدارک دیده اند محاسبه می کنند:[۱۳]

$$T_x = ۰/۲۰۸۳۳\, l_{x-۵} + ۲/۵ l_x + ۰/۲۰۸۳۳ l_{x+۵} + ۵ \sum_{\alpha=1}^{\infty} l_{x+۵\alpha}$$

(در این فرمول، T_x مجموع سالهای زندگی نسل از سن دقیق x به بعد است. $\sum_{\alpha=1}^{\infty} l_{x+۵\alpha}$ هم تجمّع کمیّتهای ستون l_x از $l_{x+۵}$ به بعد است.) در مرحلهٔ بعد ${}_nL_x$ را از تفاضل T_xهای متوالی پیدا می‌کنند:

$${}_nL_x = T_x - T_{x+n}$$

استفاده از فرمول مزبور و پیروی از شیوهٔ دو مرحله ای رید و مرل برای محاسبهٔ ${}_nL_x$ وقت‌گیر و در بعضی شرایط برای فاصله های سنّی اواخر پیوستار سن، با اشتباه همراه است.[۱۴] به تعبیر دیگر، با استخراج معادلهٔ ${}_۵L_x$ از فرمول کلّی T_x و استفادهٔ عملی از آن ـ مانند کاری که ما در جدول شمارهٔ ۲ انجام داده ایم ـ محاسبهٔ مجموع سالهای زندگی نسل را در فاصلهٔ سنی xتا$x+n$ مستقیم تر، منطقی تر، کم زحمت تر، و در بعضی موارد دقیقتر می کند.

بگذارید معادلهٔ عمومی ${}_۵L_x$ را از فرمول T_x که رید و مرل برای گروههای سنّی ۵ ساله تدارک دیده‌اند استخراج کنیم:

$$
\begin{aligned}
{}_۵L_x &= T_x - T_{x+n} \\
&= [-۰/۲۰۸۳۳ l_{x-۵} + ۲/۵ l_x + ۰/۲۰۸۳۳ l_{x+۵} + ۵\sum_{\alpha=1}^{\infty} l_{x+۵\alpha}] \\
&- [-۰/۲۰۸۳۳ l_x + ۲/۵ l_{x+n} + ۰/۲۰۸۳۳ l_{x+۱۰} + ۵\sum_{\alpha=1}^{\infty} l_{x+۱۰\alpha}] \\
&= -۰/۲۰۸۳۳ l_{x-۵} + ۲/۵ l_x + ۰/۲۰۸۳۳ l_{x+۵} + ۵ \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} + l_{x+۱۰\alpha} + l_{x+۵\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

۱۳- در این باره مثلاً نگاه کنید به: شرایاک و سیگل (۱۹۷۱ : ۴۴۳). برای گروههای سنّی ۱۰ ساله رید و مرل فرمول جداگانه ای ارائه می دهند. دربارهٔ این فرمول هم نگاه کنید به همان منبع.

۱۴- در واقع، استفادهٔ از این معادله ایجاب می‌کند که l رابرای سنین دقیق بعد از ۱۰۰ سالگی هم در اختیار داشته باشیم. نگاه کنید به: بوگ و کیتاگاوا (Bogue & Kitagawa). در مثال ما، آخرین l مربوط به سن دقیق ۸۰ سالگی بود.

$$+0/20833 l_x - 2/5 l_{x+n} - 0/20833 l_{x+10} - 5 \sum_{\alpha=1}^{\infty} l_{x+10\alpha}$$

$$= 2/70833 l_x + 2/70833 l_{x+5} - 0/20833 l_{x-5} - 0/20833 l_{x+10}$$

در نهایت، $_5L_x$ از این قرار می شود:

$$_5L_x = 2/70833(l_x + l_{x+n}) - 0/20833(l_{x-5} + l_{x+10})$$

این همان معادله‌ای است که ما قبلاً برای تقریب $_5L_x$ به روش رید و مرل ارائه کردیم و از آن در مورد مثال جدول شمارهٔ ۱ استفاده کردیم.

در این قسمت، جا دارد که درنگ کنیم و در خصوص رابطهٔ موجود بین معادلهٔ عمومی $_5L_x$ در روش رید و مرل، معادلهٔ فوق‌الذّکر و فرمول انتگرال l_x که گریویل ارائه می‌دهد بیشتر تفحّص کنیم .

معادلهٔ عمومی $_nL_x$ در روش رید و مرل را می توان بدین صورت نوشت:

$$_5L_x = 2/5(l_x + l_{x+n}) + 0/20833(l_x + l_{x+n}) - 0/20833(l_{x-5} + l_{x+10})$$

با توجّه به اینکه در معادلهٔ مزبور n مساوی ۵ است، $\frac{n}{2}$ مساوی ۲/۵ و $\frac{n}{24}$ مساوی ۰/۲۰۸۳۳ می شود. بنابراین، با قراردادن $\frac{n}{2}$ به جای ۲/۵ و $\frac{n}{24}$ به جای ۰/۲۰۸۳۳ معادلهٔ مزبور بدین صورت درمی‌آید:

$$_5L_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{24}(l_x + l_{x+n}) - \frac{n}{24}(l_{x-5} + l_{x+10})$$

حال، با چند عمل جبری فرمول انتگرال l_x را برای گروههای سنّی ۵ ساله می توان از معادلهٔ مزبور استخراج کرد:

$$\begin{aligned} _5L_x &= \frac{n}{2}(l_x + l_{x+5}) + \frac{n}{24}(l_x + l_{x+5} - l_{x-5} - l_{x+10}) \\ &= \frac{n}{2}(l_x + l_{x+5}) + \frac{n}{24}[-(l_{x+5} - l_{x+10}) - (l_{x-5} - l_x)] \\ &= \frac{n}{2}(l_x + l_{x+5}) + \frac{n}{24}(_nd_{x+5} - {_nd_{x-5}}) \end{aligned}$$

جدول شمارهٔ ۲ – ${}_nL'_x$ بدست آمده از سه روش و تفاضل ${}_nL'_x$ حاصل از دو روش دیگر از ${}_nL_x$ حاصل از روش رید و مرل

سن x تا x+n	${}_nL'_x$ بافرض یکنواختی توزیع مرگ*	${}_nL'_x$ به روش گریویل**	${}_nL'_x$ به روش ریدومرل***	تفاضل از ${}_nL'_x$ رید و مرل: بافرض یکنواختی توزیع مرگ	تفاضل از ${}_nL'_x$ رید و مرل: به روش گریویل
۰تا۱	[۹۴۸۰۵]	[۹۴۸۰۵]	۹۴۸۰۵	—	—
۱تا۵	۳۶۵۰۹۴	۳۶۵۰۷۵	۳۶۲۹۱۲	+۲۱۸۲	+۲۱۶۳
۵تا۱۰	۴۴۶۱۵۵	۴۴۶۱۶۳	۴۴۵۸۶۸	+۲۸۷	+۲۹۵
۱۰تا۱۵	۴۴۱۸۲۰	۴۴۲۱۳۴	۴۴۱۸۴۴	-۲۴	+۲۹۰
۱۵تا۲۰	۴۳۷۲۰۵	۴۳۷۴۷۶	۴۳۷۳۴۵	-۱۴۰	+۱۳۱
۲۰تا۲۵	۴۳۰۹۱۳	۴۳۱۳۱۰	۴۳۱۰۲۸	-۱۱۵	+۲۸۲
۲۵تا۳۰	۴۲۳۲۲۵	۴۲۳۶۲۹	۴۲۳۳۰۹	-۸۴	+۳۲۰
۳۰تا۳۵	۴۱۴۵۳۰	۴۱۴۹۰۴	۴۱۴۶۲۵	-۹۵	+۲۷۹
۳۵تا۴۰	۴۰۴۷۰۰	۴۰۵۰۷۷	۴۰۴۸۲۰	-۱۲۰	+۲۵۷
۴۰تا۴۵	۳۹۳۴۲۸	۳۹۳۹۳۵	۳۹۳۶۰۰	-۱۷۲	+۳۳۵
۴۵تا۵۰	۳۸۰۰۹۳	۳۸۰۶۷۸	۳۸۰۴۱۰	-۳۱۷	+۲۶۸
۵۰تا۵۵	۳۶۲۹۴۸	۳۶۳۶۵۳	۳۶۳۴۱۰	-۴۶۲	+۲۴۳
۵۵تا۶۰	۳۴۰۲۵۳	۳۴۱۱۱۰	۳۴۰۹۲۸	-۶۵۷	+۱۸۲
۶۰تا۶۵	۳۰۹۴۴۳	۳۱۰۵۱۰	۳۱۰۳۶۳	-۹۲۰	+۱۴۷
۶۵تا۷۰	۲۶۷۵۵۸	۲۶۸۷۷۹	۲۶۸۶۵۱	-۱۰۶۳	+۱۲۸
۷۰تا۷۵	۲۱۲۹۶۸	۲۱۳۹۱۶	۲۱۳۸۰۸	-۸۴۰	+۱۰۸
۷۵تا۸۰	۱۴۸۲۷۰	۱۴۸۳۰۴	[۱۴۸۲۹۷]	-۲۷	+۷
۸۰تا∞	[۱۱۷۹۲۶]	۱۱۷۹۲۶	[۱۱۷۹۲۶]	—	—

* ${}_1L_0$ به روش رید و مرل و ${}_\infty L_{80}$ به روش گریویل محاسبه شده است.

** ${}_1L_0$ به روش رید و مرل محاسبه شده است. در ضمن در روش گریویل از لحاظ تأثیر قابل توجه ارقام اعشاری در ndx ، nLx قبل از گردکردن بر nmx تقسیم شد.

*** ${}_\infty L_{80}$ به روش گریویل محاسبه شد. ${}_5L_{75}$ هم بدین صورت به دست آمد:

$${}_5L_{75} = [\,{}_5d_{75} / {}_\infty m_{75}\,]\,۰/۹۹۹۹۵$$

پیداست که فرمول تقریب انتگرال l_x چیز جدیدی نیست. این فرمول دقیقاً هم ارز معادلهٔ $_nL_x$ است که از فرمول T_x رید و مرل استخراج شد.[۱۵] در واقع، از این رو بود که به رغم اهمیّت بیش از اندازهٔ فرمول تقریب انتگرال l_x، ما آن را به عنوان یک روش مستقل مطرح نکردیم.

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله ما در پی محاسبهٔ $_nL_x$، دوّمین مشکل روش شناختی در ساختن جدول عمر خلاصه بودیم. سه روش را برای فائق آمدن به این مشکل پیش کشیدیم: روش مبتنی بر فرض یکنواختی توزیع مرگ در داخل گروه سنّی، روش گرِیویل، و روش رید و مرل. همان طور که از جدول شمارهٔ ۲ پیداست نتایج حاصل از سه روش، بسیار به هم نزدیک هستندو اختلافات به طور نسبی بسیار کوچک و جزیی است. با وجود این، این اختلافات جزیی از الگوی مشخّصی پیروی می‌کنند: نتایج حاصل از روش گریویل به طور سیستماتیک بر نتایج متناظر حاصل از روش رید و مرل فزونی دارد. همچنین، نتایج حاصل از روش مبتنی بر فرض یکنواختی توزیع مرگ در داخل گروه سنّی، به استثنای گروههای سنّی زیر ۱۰ ساله، به طور سیستماتیک نسبت به نتایج متناظر در روش رید و مرل کاستی دارد. لذا، ممکن است این سؤال پیش بیاید که ارجحیّت با کدام روش است؟

همان طور که خود گریویل اذعان دارد $_nL_x$ حاصل از کاربرد فرمول تقریب انتگرال l_x بر $_nL_x$ حاصل کاربرد روش گریویل ارجح است، زیر کاربرد فرمول تقریب انتگرال l_x «عموماً در عمل به نتایج بهتری می انجامد.» حال، با توجّه به اینکه $_nL_x$های حاصل از فرمول انتگرال l_x با نتایج حاصل از معادلهٔ عمومی $_nL_x$ مستخرج از فرمول T_x رید و مرل برای گروههای سنّی ۵ ساله دقیقاً هم ارز است از گفتهٔ گریویل می توان چنین نتیجه گرفت که روش رید و مرل بر روش گریویل ارجحیّت دارد. پیداست که به سبب توزیع نایکنواخت مرگ در داخل برخی از گروههای سنّی، روشی که مبتنی بر فرض توزیع یکنواخت مرگ در داخل گروه سنّی است از

۱۵- در این باره، همچنین نگاه کنید به کی فیتز و فلیجر (Keyfitz & Flieger)، ۱۹۷۱ : ۱۳۵.

روشهای دیگر، ضعیف تر عمل می کند. بنابراین، در مجموع چنین به نظر می رسد که کاربرد روش رید و مرل برای برآورد $_nL_x$ برتر از روشهای دیگر باشد.

منابع و مآخذ

امانی، مهدی. روشهای تحلیل جمعیّت شناسی. تهران: مؤسسه مطالعات و تحقیقات اجتماعی دانشگاه تهران، ۱۳۴۵.

امین زاده، فرخ. جمعیّت شناسی عمومی. جلد اوّل، تهران: انتشارات دانشگاه ملّی ایران، ۱۳۵۶.

پرسا، رولان. جمعیّت شناسی آماری. ترجمهٔ محمّد سید میرزایی. مشهد: مؤسسه چاپ و انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۷۱.

سرایی، حسن. «تبدیلی نرخ مرکزی مرگ به نرخهای احتمالی در جدول عمر خلاصه».فصلنامهٔ علوم اجتماعی. دانشکدهٔ علوم اجتماعی، دانشگاه علاّمه طباطبایی، دورهٔ دوم،شمارهٔ (۵ و ۶)، پاییز و زمستان ۱۳۷۳.

Bogue, Donald J. and Evelyn M. Kitagawa. **Manual of Demographic Research Techniques.** Department of Sociology, The University of Chicago. Unpublished.

Greville. T.N.E. "Short Method of Constructing Abridged Life-Table". **Record of the American Institute of Actuaries.** Vol. 32, pp. 29-43, June 1943.

Keyfitz, Nathan and Wilhelm Flieger. **Population: Facts and Method of Demography.** United States of America: W.H. Freeman and Company, 1971.

Reed, Lowell J. and Margaret Merrell. "A Short Method for Constructing an Abridged Life-Table". **American Journal of Hygiene.** Vol. 30, pp. 33-62. Septamber 1939.

Shryock, Henry S. and Jacob S. Siegel. **The Methods and Materials of Demography.** Washington D.C: U.S. Bureau Of the Consus, 1971.