سیستمهای فازی و بهینه یابی

دکتر اسرافیل کسرایی*

چکیده

نظریه مجموعه‌های فازی و سیستمهای آن به عنوان چالش و مبنای جدیدی برای بازبینی و بازنگری در علم و روابط علمی پدیده‌ها در چارچوب مجموعه‌های سنتی و کلاسیک مطرح می‌شود. مطالعه فازی ابتکاری برای زیبا شناسی مجموعه‌ها و یا جزء ترکیبی ساختارهای واقعی مدلها یا سیستمهای هوشمند نیست بلکه یک قالب ترکیبی اجتناب ناپذیر در اغلب سیستمهای طبیعت و امور انسانی است که باید به طور طبیعی با آن سر و کار داشت و آنرا باور کرد. در بررسی پدیده‌ها، وقتی سیستمها بسیار پیچیده و پدیده‌ها به قدری ناقص تعریف شده باشند که اطمینان یا امکان تحلیل آنها با ابزارها و تکنیکهای رایج و مرسوم، ناممکن یا مشکوک و مظنون به نظر برسد، این قالب به عنوان یک شیوهٔ روش‌شناسی به کار می‌رود. جذابیت این نظریه بدین علت است که برمبنای توانایی، فطرت و قوه درک مستقیم انسان بنا شده و ایدهٔ توانمندی است برای ایجاد نتایجی بسیار جالب توجه، جدید و هوشمند که می‌تواند روشنگر موضوعات و گره‌های کور و بحث انگیز گذشته باشد. فازی یک مفهوم از قبل تصریح شده و روشن نیست و مستلزم قدری تعمق و توضیح است.

مفاهیم سیستمهای فازی و شیوه‌های کاربردی آن ابزاری جدید برای مدل سازی سیستمهای غالباً انسان محور بوده و به عنوان یک واقعیت در پدیده‌هایی از دنیای واقعی که به نظر می‌رسد بهتر و بیشتر بتوانند فرآیندهای مغزی و ادراکی انسان را به تصویر بکشند، مطرح می‌شود. در حالت عادی، یکی از مهمترین پدیده‌های انسان متفکر، توانایی وی در خلاصه‌سازی اطلاعات به شکل دسته‌بندیهایی از مجموعه‌های فازی است که تقریبهایی از دنیای بیرون را در بر می‌گیرد که معمولاً توصیفهای خلاصه شدهٔ زبانی یا بیانی از وضعیتهای پیچیده حیات ـ مانند زشت و زیبا، خوب و بد، کم و زیاد، شدید و ضعیف و... ـ هستند که همگی، در ماهیت، دارای جوهره فازی می‌باشند.

* عضو هیأت علمی دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران.

۱) مقدمه [1]

موضوع گیج کننده‌ای که در تحلیل رفتارهای انسانی و اجتماعی، به ویژه در مورد زمان و فضا (یا ابعاد) به چشم می‌خورد، ناشی از ماهیت ناسازگار عوامـلي چـون ذهـنیت و عـینیت، دقت و عـدم دقت، سـادگی و پیچیدگی، اطمینان و عدم اطمینان و ... است. تلاش برای تحلیل عوامل پیچیدهٔ ذهـنیت، عـدم دقت، عـدم اطمینان در نظامهای انسانی و طبیعی یا سیستمهای بزرگ چند بعدی فضایی با استفاده از عینیت، دقت، سادگی و ... تا به حال با نتایج رضایت بخشی توأم نبوده است. گرچه شایان ذکر است که طی سالهای درازی مـدلها و تکنیکهای تعیینی ریاضی در تصویر الگوهای رفتاری و فضایی، در شرایط اطمینان، با موفقیتهای چشمگیری روبرو بوده‌اند و فرآیندهای احتمالی (تصادفی[2]) نیز تواناییهای ما را در تحلیل رفتارهای فضایی و انسانی تحت شرایط تصادفی[3] تا حد زیادی توسعه و گسترش داده‌اند، اما موفقیتهای آنان در رسمی کردن و شکل دادن[4] بعضی از پدیده‌ها زیاد خشنود کننده نبوده و با تعریف قالب و توصیف کامل و جامع واقعیتها[5]، فرسنگها فاصله داشته است. در کاوشی برای درک و فهم عینیت، سادگی، دقت و ... مدلهای خشک و بیروح ریاضی کلاسیک برای پیچیدگی سیستمها و عدم دقت، بخصوص در فرآیند تصمیم‌گیریها، نه هیچ نوع تدارک و تمهیداتی را به همراه داشته و نه آنها را مجاز می‌دانسته است؛ لحاظ نمودن ذهنیّت انسانی در پژوهشهای عملی و رفتاری، فرضی عبث و نامعقول و تصویر دقت انسانی در رفتارهای رسمی را ناممکن و دستیابی به سطوح بالای دقت را فقط در علوم فیزیکی و کامپیوتر امکان پذیر به شمار می‌آورده است. امروزه به تدریج به دنبال دانشمندان علوم فیزیکی، اندیشمندان علوم انسانی و اجتماعی براین باورند که ماهیت دقیق سیستمهای انسانی را نیز می‌توان به طور کارآ و مؤثر به وسیله ریاضیات و نظریه‌های جدید تحلیل کرد. به عبارت دقیق تر، سعی می‌شود که دقت و هوش مصنوعی را برای فرآیندها و پدیده‌های غیر دقیق اعمال کرد و در راستای انجام این عمل، بـی‌دقتی ذاتی ظاهری سیستمهای انسانی را در تجسس «دقت»، به عنوان یک «هدف»، بهبود بخشید. با توجه به این که با بزرگ‌تر و پیچیده‌تر شدن ابعاد سیستمها، درک انسان و تواناییهای وی در «دقت» کمتر می‌شود، در حالتهای بی‌نهایت پیچیده، «دقت» معمولاً امری ناممکن به شمار می‌رود. مدلهای انسانی و فضایی در این برخوردها

---

۱ ـ اگرچه از زمان ظهور اولین مقاله Zadeh (۱۹٦۷) تا به حال بیش از ۵۰۰۰ مقاله و کتاب دربارهٔ نظریه فازی و کاربرد آن ارائه شده است، همچنان این موضوع بیش از هر موضوع دیگری جالب و تقریباً به صورت توان نمائی رشد نموده است.

2 - Stochastic

3 - Random

4 - Formalism

5 - Realism

سعی می‌کنند بیش از حد ساده، بسیار مکانیکی و بدون انعطاف باشند تا بتوانند به اندازهٔ کافی یک واقعیت کشش پذیر و پیچیده را توصیف کنند، زیرا به دلیل عدم وجود منطق ریاضی مناسب، در موقع ساختن مدلهای رسمی، متناسب کردن شیوه‌های رفتاری انسان با شرایط نرمال مشکل‌زا و توسعهٔ این‌گونه مدلها را غیرممکن می‌سازد. به عبارت دیگر، مدلهای عملی مناسبی برای تقریب و کنترل دقیق سیستمهای انسانی، و مدلهایی که قادر به تقلید فرآیند هوش مصنوعی در رفتارهای انسانی بخصوص در فضا و زمان باشند، وجود نداشته است. محدودیتهای زمان و منابع، محدودیتهای مغزی و فکری، عدم دسترسی به اطلاعات جامع و کافی از پدیده‌ها، از جمله دلایل عمده این امر می‌باشند. به عبارت دیگر، بیشتر مفاهیم مربوط به این دسته پدیده‌ها و موضوعاتی چون توسعه، مطلوبیت، بهینه‌سازی و حدود و ثغور آنها حتی ارزشها و معیارهایی چون دستمزد زیاد، محیط آرام، درآمد نسبتاً کم، یا درآمد مورد انتظار، خوب و بد و غیره اصطلاحاً مفاهیمی ایهامی یا فازی هستند[۶]. زیرا ضوابط و ملاکهای کم و زیاد، خوب و بد، بالا و پایین، راحت، امن، مورد انتظار، ...، ارزشهای ذهنی و دقیقی نیستند، اگرچه همین معانی غالباً نقشهای بسیار مهمی در فرآیندهای تصمیم‌گیری ایفا می‌کنند.

به نظر می‌رسد نظریه‌های مجموعه فازی[۷]، که از سال ۱۹۶۵ آغاز گردید، در میان روشهای موجود می‌تواند همچون پلی میان مدلهای رسمی و کلامی (بیانی) به کار گرفته شود. برای این نوع نظریه و منطق، دستگاه مغز انسان را می‌توان یک سیستم انعطاف‌پذیری دانست که در آن درک و استدلال موضوعات بر حسب درجهٔ اهمیت، به طور موازی و همزمان، طبقه‌بندی، اولویت‌بندی و یا وزن‌بندی می‌شوند. این سیستم ریاضی با منطق «هوشیاری محوری» به ما اجازه می‌دهد که «عدم لحاظ» یا «لحاظ نمودن» سلوک و شیوه‌های رفتاری یا ذهنیت‌گراییهای انسان را هرچند غیر دقیق، در به فرمول درآوردن مسایل و مشکلات امکان‌پذیر نماییم. بدین ترتیب، انتقاد لوکاس[۸] (در دههٔ ۱۹۷۰) به مدلهای کلان برنامه‌ریزی اقتصادی با توجه به ضرایب تعیینی و ثابت بودن پارامترهای دستگاه معادلات، حتی در مواقعی که دولتها یا بانکهای مرکزی حرف از تغییر

---

۶ ـ ژولی یا فازی بودن (Fuzziness) با نامعلومی و ابهام (Vaguness) یا سردرگمی (Ambiguity) و کلی‌گویی (Generality) متفاوت و قابل تمیز و تشخیص است. کلیّت یا تعمیم دادن، به کاربرد یک نماد برای تعدادی از اشیاء یا موضوعات یک حوزه باز می‌گردد. ابهام به معنای اشتراک یک مفهوم در تعداد متناهی و محدودی از گزینه‌هاست که همگی دارای یک شکل، یک علامت یا یک صدا باشند. اما فازی بودن نمادی مربوط به عدم وجود کران یا حد و مرزهای خوش تعریف (well-defined) مجموعه‌ای از اشیاء یا موضوعاتی است که این نمادها در آنها اعمال می‌شوند.

7 - Fuzzy (system) set, logic

8 - Lucas

سیاست و تعدیل به میان می‌آورند[9]، منتفی می‌شود؛ زیرا با استفاده از اعداد فازی، مفهوم ضرایب ثابت و تعیینی[10] معادلات، شکل دیگری به خود می‌گیرد و مباحث اعتباری و دامنه دار مانند کم، زیاد، پایین، بالا، سخت، راحت و... مفهوم پیدا می‌کنند.

تغییر سیاستها و روند تکامل فکری سیاستمردان در فرو ریختن مرزها در اروپا، روسیه، و ادغام کشورها با هم، اندیشمندان سیاسی، اقتصادی و اجتماعی را متوجه این ساخته است که چون اعمال و اتخاذ تعداد زیادی از سیاستهای جاری و پیشنهادهای سیاستگذاران به منظور بهبودی در ساختار اقتصادی (بخصوص در جهان سوم) وبه نیت ایجاد تغییر و تصحیح در وضعیتهای تعادلی و توازنی گذشته بوده است، و با توجه به اینکه این سیاستها ممکنست اثرات کوتاه‌مدت و میان مدت متفاوت و متناقضی بر روی غالب پدیده‌های گوناگون چون رفاه، تورم، بیکاری و غیره داشته باشند، بهتر آن است که پدیده‌های آرمانی از دو بعد «تعادل» یا اثرات واکنشی میان مدت و فرآیند انتقال آن به طرف تعادل مطلوب در دراز مدت، دارای سازگاری داخلی باشند. در نتیجه، منطقی است که هر پدیدهٔ مکملی مانند خرد و کلان[11] در یک مدل با هم لحاظ شده و اجرا شوند تا بهتر بتوانند اثرات کوتاه‌مدت و میان مدت را با هم کنترل، تعدیل و لحاظ نمایند. به عبارت ساده‌تر، بحث اصلی مربوط به شفافیت ساختار در ادغام مدلهای ریاضی کوتاه‌مدت و میان مدت و پویایی آنها با توجه به رفتار تعادلی‌شان در درازمدت در مقیاس وسیع است[12] (سیستمهای فازی و شبکه‌های عصبی یا نروفازی[13] و در این زمینه‌ها نیز تحولاتی را در دست تکوین دارند).

طبق منطق فازی و هوش مصنوعی شبکه‌های عصبی، می‌توان یک مدل کلان اقتصادی را با توجه به روند و حالتهای موجود در سریهای زمانی «هوشمند» به جای پیش‌بینی و برون‌یابی ضرایب و متغیرهای ثابت در توابع خاص از قبل معیّن شده، تعلیم و آموزش داد تا در شرایط مختلف اثرات متفاوتی از خود نشان بدهند. به

9- Schoonbeek L., Sterken E. and Kuipers S.K., Methods and Applications of Economic Dynamics, Elsevier; 1995, P. 2.

10 - Deterministic.

۱۱ - یا از دید منطق برنامه‌ریزی: در سطح شهر، منطقه و کشور

۱۲ - این موضوع در سالهای اخیر در نظریه‌های جدید اقتصادی نیز در رابطه با مفاهیم همگرایی (Cointegration) و مدل تصحیح خطا (Error Correction Model) از رشد چشمگیری برخوردار بوده است.

13 - Neural Networks

عبارت دیگر، با شبیه‌سازی[14]، ماهیت هوشمندی را در دستگاه معادلات به کار گرفت که در شرایط خاص دارای عکس‌العمل هوشمندی باشند[15]. کاربردهای مختلف مجموعه‌ها و سیستمهای فازی، از جمله در کامپیوتر، مهندسی کنترل، مدیریت و پژوهشهای عملیاتی تا به حال موفقیت‌آمیز بوده، ولی در علوم انسانی و اجتماعی، بخصوص در تحلیلهای اقتصادی، پیشروی نسبتاً کندی داشته است (اگرچه این بررسی، برای بعضی از گرایشها مانند جغرافیا، برنامه‌ریزی شهری و منطقه‌ای و علوم منطقه‌ای با سرعت بیشتری پیش رفته است). و بالاخره، باید اضافه کرد که هدف از دیدگاه چند دیسیپلینی و کاربردی هوش مصنوعی فازی به صورت نظام خبرگان[16] ایجاد بهبودی در عملکرد و شبیه‌سازی رفتار انسانی، و لحاظ ذهنیت و کیفیت در حل مسائل پیچیده و وسیع است؛ زیرا کلید موفقیت این سیستمها اعتبار و جامعیت پایگاههای اطلاعاتی زیر سیستمهای آنهاست. هنگامی که این پایگاهها با تکنیکهای هوش مصنوعی، بخصوص فازی، ترکیب شوند، توانایی سیستمها در حل مسایل و مشکلات به مراتب از عملکرد مدلها با یک یا چند نفر خبره بالاتر می‌رود. کاربرد سیستمهای خبره، به ویژه در کمی کردن متغیرهای کیفی و به کارگیری آنها در فرآیند سیاستگذاریها، بسیار جالب و شگفتی‌آور است[17].

۲) مفاهیم فازی

اگرچه در اواخر دهه ۱۹۸۰، در ژاپن و آمریکا، منطق فازی و نظریهٔ مجموعه‌های فازی در تحلیلهای متغیرهای زبانی[18]، عدم قطعیت (نایقینی)، استدلال تقریبی، استدلال شهودی، طبقه‌بندی فازی، سیستمهای عصبی ـ فازی (در شبکه‌های فازی)، سیستمهای کنترل و ایجاد ماشینهایی با استفاده از منطق فازی و زبانهای

---

14 - Simulation

۱۵ ـ این پدیده در شبکه‌های عصبی مصنوعی در حال تکوین است.

16 - Expert system

۱۷ ـ در کمی‌کردن مسایل کیفی و اولویت بندی آنها در سیستمها از طریق نظام خبرگان به منبع زیر مراجعه شود:

کسرایی، اسرافیل؛ «تعیین اولویت پدیده‌ها با استفاده از خواص بردار و مقدار آیگن»؛ مجله تحقیقات اقتصادی دانشکده اقتصاد، دانشگاه تهران، شماره ۴۸، ۱۳۷۵، صفحات ۴۳ ـ ۷۹.

18 - Linguistic variables

برنامه‌نویسی هوشمند[19] و روشهای هوشمند آن و ... مورد اقبال و استفاده بیشتر قرار گرفت و در کنار علوم دقیق دیگر در مدل‌سازی علوم انسانی، اجتماعی و سیاسی، بخصوص در پژوهشهای عملیاتی، مدیریت و برنامه‌ریزی (که محاسبات دقیق و دقت زیاد بیش از حد در آنها مشکل و دور از واقعیت است)، به کار گرفته شد. ولی باید تاکید کرد که پایه‌گذار آن دکتر لطفی عسگرزاده (ملقب به زاده[20]) فارغ‌التحصیل دانشکده فنی دانشگاه تهران است که سالها در دانشگاههای کشور آمریکا (کلمبیا و برکلی) مشغول به تدریس و تحقیق بود و علاوه بر مجموعه‌های فازی، چند نظریهٔ مهم دیگر از جمله شناسایی سیستمها، کنترل و آشکارسازی رادار، از ایشان در دست است.

تکنیکهای ریاضی و برنامه‌ریزی پویای فازی در قالب مدلهای نرم (با احکام و دستوراتی که با قطعیت و دقت زیاد مدل سازی نمی‌شوند) در اوایل دهه ۱۹۶۰ شهرت فراوان پیدا کرد و محاسبات نرم آن[21] توام با هوش محاسباتی[22] به صورت رقیبی برای علوم دقیقه متداول درآمد. در این تکنیکها واقعیت وجودی غالب پدیده‌ها، نایقینی را بهتر از روشهای مرسوم، مدل‌سازی می‌کنند (زیرا در آنها نیازی به دقت بسیار زیاد و صرف زمان و هزینه زیادتر نیست و غالباً کمتر به دنیای واقعی نزدیک هستند).

موفقیت اولیه سیستمهای فازی، مدیون چشمگیرشدن سیستم متروی ژاپن بود که با طرح کنترل فازی آن در موقع ترمز، امروزه فاقد شتابهای ناراحت کننده عادی است. در ضمن لازم به ذکر است که در زبان ژاپنی کلمه‌ای برای «احتمالات» وجود ندارد ولی برای «فازی» وجود دارد؛ لذا طبیعی است که چون نظریه‌های فازی با تفکر مردم ژاپنی بیشتر عجین بوده، در ابتدا بیشتر از غرب و کشورهای غربی مقبول واقع شد و رشد کرد. در نتیجه، کنترل فازی به عنوان یک تکنولوژی میان‌بُر برای کامپیوتر، و استدلال فازی به عنوان راه‌حلی مناسب برای تغییرات نرم‌افزاری لازم نسل پنجم و سیستمهای خبره آن در نظر گرفته شده است.

فرض کنید X حوزه یا میدانی[23] از یک جامعه یا جهان مرجع[24] که به اختصار به جامعه[25] نیز موسوم است، دامنه‌ای[26] از اشیای معینی را در بر بگیرد. زیر مجموعه A را نیز درنظر بگیرید که در آن انتقال بین عضو بودن یا درجه تعلق[27] از غیر عضویت یا عدم تعلق، به تدریج و نه دفعتاً شدید صورت می‌گیرد. این «زیر

19 - Prolog
20 - Zadeh
21 - Soft computing
22 - Computing inteligence
23 - Field
24 - Referense
25 - Universe
26 - Range
27 - Membership

مجموعه‌های فازی» دارای کرانها یا حد و مرز تعریف شده‌ای نیستند، و در آنها طبقه‌بندی یا دسته‌بندی در افراد، اشیاء، یا موضوعاتی چون هستی و نیستی، سایه و روشن، خوبی و بدی، زشتی و زیبایی و... در دامنه‌ای از اعداد بین صفر و یک به چشم می‌خورد. برای مثال، A ممکن است مجموعه‌ای از مردان بلند قد[۲۸] در جامعهٔ X باشد. معمولاً عناصری از X وجود دارند که با قاطعیت می‌توان گفت که بلند قد هستند، دیگرانی که قطعاً بلند قد نیستند ولی در حالتهای مرزی یا بینابین قرار می‌گیرند، نیز وجود دارند. بنابراین، مرز عضویت و عدم عضویت به روشنی قابل تعریف‌اند و به صورت اندازه یا درجات[۲۹] مرتب شده‌ای تصویر می‌شوند[۳۰].

در حالت کلاسیک درجهٔ عضویت «1» برای افرادی که به طور کامل به A تعلق دارند، یعنی مردانی که قطعاً بلند قد هستند، درنظر گرفته شده‌است و به عکس افرادی که ابداً متعلق به A نیستند، دارای درجه عضویت «O» می‌باشند. طبیعی است که درجه‌های عضویت دارای حالتهای مرزی بین صفر و یک نیز می‌باشد. هر قدر که عضو یا عنصر x بیشتر به A تعلق داشته باشد، نزدیکتر به «1» و درجه عضویت آن طبق تعریف، $\mu_A(x)$ است. استفاده از مقیاسی مانند فاصله [1 , 0] می‌تواند نمایش ساده‌ای از درجه‌بندی عضویت را نشان بدهد. مقادیر عضویت دقیق به خودی خود وجود ندارند، آنها شاخصهای تمایل (یا مطلوبیت) هستند که به وسیلهٔ فرد یا گروهی از افراد به طور ذهنی درنظر گرفته می‌شوند. به عبارت دیگر، آنها دارای وابستگی محتوایی[۳۱] می‌باشند. درجات عضویت منعکس کننده رتبه و ترتیب[۳۲] اشیا یا موضوعات جهان یا جامعه هستند که از طریق حمل همبستگی[۳۳] با A ایجاد می‌شوند. این ترتیب (در صورت وجود)، بسیار با اهمیت‌تر از خود مقادیر عضویت است. ارزیابی عضویت اشیا یا موضوعات می‌تواند بعضی اوقات، از طریق استفاده از مقیاس اندازه‌گیری عددی، با توجه به عنصر آرمانی، ساده‌تر انجام پذیرد. تعیین مقادیر عضویت برای مفاهیمی مانند «بلندی قد» که به سادگی با یک مقیاس اندازه‌گیری فیزیکی مشخص می‌شود، غالباً از مفاهیم ذهنی و پیچیده دیگری مانند «عدالت، امنیت، رفاه یا زیبایی» کمتر بحث انگیز است. باید دقت نمود که یک مقدار عضویت $\mu_A(x)$ می‌تواند به عنوان درجه‌ای از تطابق حمل همبستگی (استناد ارتباط) با A و شیئ x تعبیر و تفسیر گردد. پس اگر تابع عضویت در یک زیرمجموعه کلاسیک $(x \in X)$ به صورت زیر تعریف شود:

---

28 - Tall

29 - Graded

30 - Dubois, Didier J., & Prade, Henry; Fuzzy Sets and Systems, Theory and Apllications; Toulouse, France, Academic Press, Inc. 1980, P. 2.

31 - Context-dependent

32 - Ordering

33 - Predicate associated with A

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر و فقط اگر} \quad x \in A \\ 0 & \text{اگر و فقط اگر} \quad x \notin A \end{cases} \qquad (1)$$

در واقع، تابع عضویت[۳۴] در مجموعه‌های عادی یا مجموعه مرجع X با یکی از دو مقدار 0 و 1 (یا {0 , 1}) تبیین و تصویر می‌گردد:

$$\mu_A : x \rightarrow \{0 , 1\}$$

دقت شود که در این مجموعه عادی، $x \in X$ به مجموعه A تعلق دارد یا خیر. اگر x متعلق به A باشد، $\mu_A(x) = 1$ و اگر x تعلقی به X نداشته باشد، $\mu_A(x) = 0$ است. بنابراین، تابع عضویت فقط دو مقدار 0 و 1 را می‌تواند اختیار کند[۳۵]. حال اگر مجموعه (۱) مقادیر حقیقی در فاصله [1 , 0] به خود بگیرد، یک

---

34 - Chracteristic functionl

۳۵ - مثلاً اگر بتوانیم زیرمجموعهٔ A را به صورت زیر که در آن هر عضو همراه با تابع عضویت آن در مجموعه است، نشان دهیم :

$X = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$

و $A = \{ 1 , 4 \}$ یا $A = \{ \frac{1}{1} , \frac{2}{0} , \frac{3}{0} , \frac{4}{1} \}$

آنگاه 1 و 4 عضو زیرمجموعه A، ولی عناصر دیگر مانند 2 و 3 عضو زیرمجموعه A نیستند. اگر مجموعه X شامل عناصر گسسته و محدود باشد، می‌توان زیرمجموعه A را با یک بردار نشان داد که در آن مقادیر مؤلفه‌های بردار، بیانگر

مقادیر توابع عضویت عناصر مرتب خواهند بود. به این ترتیب زیرمجموعه A را می‌توانیم به صورت زیر نشان

ادامه در صفحهٔ بعد ...

مجموعه فازی که در آن $\mu_A(x)$ درجه عضویت x به A است، به وجود می‌آید[۳۶].

باید توجه کرد که اگرچه فازی بودن با عدم دقت تفاوت دارد، ولی استفاده از هوشیار محوری کامپیوتر و زبانهای هوشمند آن بهتر می‌تواند پدیده‌ها را در سیستمها به تصویر بکشد. در تحلیلهای حد تحمل یا تغییرهای مجاز[۳۷]، «عدم دقت» اشاره به عدم علم و آگاهی یک پارامتر دارد که به صورت فاصله یا دامنه‌ای از حد تغییرات نوسان‌دار بیان می‌شود. این دامنهٔ مجاز، مجموعه‌ای از مقادیر ممکن آن پارامتر است که ممکن است در سیستم اعمال شود. فازی موقعی اتفاق می‌افتد که دامنهٔ تغییرات دارای کران یا مرزهای تند و تیزی نباشد.

... ادامه از صفحهٔ قبل ...

دهیم:

$$A = \{ 1 , 0 , 0 , 1 \}$$

که، در آن، تعلق عناصر اول و چهارم مجموعه X به زیر مجموعه A را نشان می‌دهند ولی عناصر دوم و سوم آن متعلق به A نیستند.

۳۶ - نمایش مجموعه‌های معادل فازی A، وقتی مجموعه X به صورت منفصل (Finite) یا ناگسسته $(x_1, \ldots x_n)$ باشند، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \mu_A(x_1)/x_1 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$$

و یا

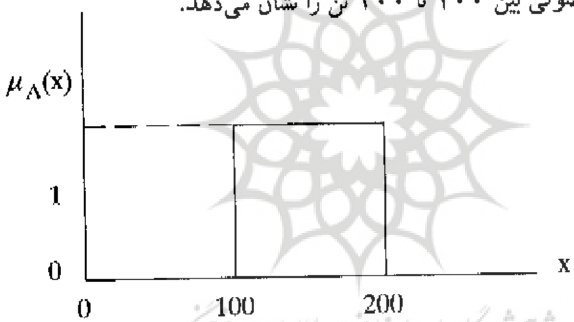
$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu_A(x_i)}$$ یا زوج $$A = \{ (x, \ \mu_A(x_i) \quad , \ x \in X \}$$

در حالتی که مجموعه مرجع X پیوسته (not finite) باشد، زیر مجموعه A را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

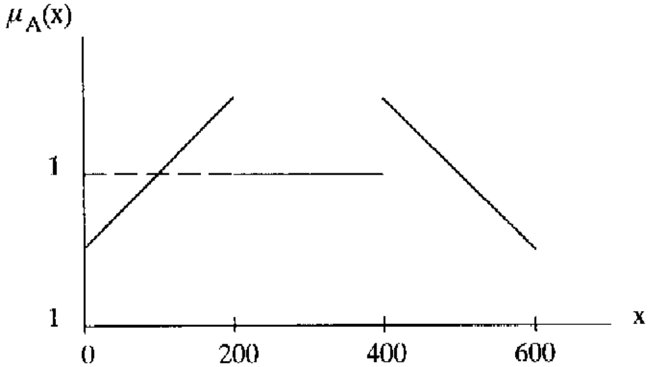
37 - Tolerance Analysis

بنابراین، $\mu_A(x)$ به عنوان درجه‌ای از امکان یا احتمال، و x مقدار به عنوان پارامتری که به صورت فازی به‌وسیله A قید می‌شود، تفسیر می‌گردد. در مجموعه‌های فازی، به علت غیردقیق بودن یا مشخص نبودن کرانها، حدّ یا مرز چنین مجموعه‌هایی به طور دقیق تعریف نشده و، همچنان که گذشت، تابع عضویت نیز محدود به دو مقدار صفر و یک نیست، بلکه به صورت متصل و تدریجی (با مرزکشانی) تغییر می‌کند. عضویت در این مجموعه‌ها را با تابع عضویت و هر عددی در بازه[38] بسته [0 , 1] تعریف می‌نمایند، مثلاً در $\mu_A(x) \in [0, 1]$ عدد $\mu_A(x)$ میزان و حدود x از مجموعه مرجع X را در زیر مجموعه A به صورت نسبی مشخص می‌کند. رابطه $\mu_A(x) = 0.7$ ، نشان می‌دهد که عضو x با درجه ۰/۷ متعلق به مجموعه A یا دارای ویژگی مجموعه A است. توضیح اینکه عضوی با $\mu_A(x)=1$، عضو کامل زیرمجموعه A است و عضوی با $\mu_A(x)=0$ اصلاً متعلق به A نیست. دو شکل ۱-۱ و ۲-۱ زیر را بررسی کنید که در آن شکل ۱-۱ مجموعه تولیدات محصولی بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ تن را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱ : تابع عضویت یک مجموعه غیر فازی (با مرزهای دقیق و یکی از دو مقدار صفر یا یک)

38 - Range



شکل ۲ ـ ۱ : تابع عضویت یک مجموعه فازی

در شکل ۲ ـ ۱ تابع عضویت به ازای نقاط مجموعه مرجع آن با روابط ریاضی مشخص شده است :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{200} & \text{اگر} \quad 0 \le x \le 200 \\ 1 & \text{اگر} \quad 200 \le x \le 400 \\ \dfrac{600 - x}{200} & \text{اگر} \quad 400 \le x \le 600 \\ 0 & \text{اگر} \quad x \ge 600 \end{cases} \qquad (۲)$$

تابع عضویت مجموعه مرجع X را می‌توان با بازهٔ پیوسته [1 , 0] تصویر کرد:

$\mu_A : x \to [0 , 1]$

توجه شود که در شکل ۲ ـ ۱ تعریف دقیق مجموعه A بستگی به بازده تغییرات تولیدات محصول دارد و برای تعریف مجموعه فازی A هر عضو را باید همراه با تابع عضویت آن نشان داد. این بدان معنی است که یک مجموعه فازی به کمک تابع عضویت آن، که دیگر به دو مقدار «0» و «1» محدود نیست و هر مقداری در بازه بسته [0, 1] را می‌تواند اختیار کند، به صورت زیر و مجموعه‌ای از یک مجموعه غیرفازی (مجموعه مرجع) تعریف نمود (برای حالتهای خاص به ضمیمه «الف» مراجعه شود) [39].

۳۹ ـ در نمایش توصیفی مجموعه‌ها، مجموعه را با ذکر یک یا چند عبارت که بیانگر ویژگی یا ویژگیهای

$$A = \left\{ \frac{x}{\mu_A(x)} \;\middle|\; x \in X \right\} \qquad 0 \le \mu_A(x) \le 1 \qquad (۳)$$

۳) برنامه‌ریزی خطی و فازی

اعمال شیوه‌های مختلف مدیریتی و برنامه‌ریزی یا به طور کلی، تمرین و تدوین برنامه‌های کاربردی راهبردی، بخصوص در رشته‌های علوم انسانی و اجتماعی، تا حد زیادی نیاز به پایگاههای اطلاعاتی صحیح، مناسب و کامل دارد تا پیش‌بینی‌ها و تخمینهای قابل اعتمادی به دست دهد و سیاستگذاریهای عملی و کارآ را ممکن نماید. متأسفانه چون بیشتر کشورهای در حال توسعه فاقد آمار و ارقام صحیح، مناسب، مرتب و مدون هستند و به طور کلی، ماهیت اطلاعات در آنها ضعیف، ناقص و محدود است، در نتیجه، این وضعیت باعث عدم طراحی و تهیهٔ طرحهای کاربردی موفقیت‌آمیز و حل مسایل و مشکلات جامعه با الگوهای متداول برنامه‌ریزی کشورهای پیشرفته می‌شود. گرچه وجود یک پایگاه اطلاعاتی مناسب برای بهبود کارآیی و سیاستهای کارآمد در کشورهای در حال رشد اجباری به نظر می‌رسد، با این حال، شرایط حاکم در بیشتر این کشورها جمع‌آوری آمار و ارقام دقیق و صحیح در زمینه‌های اقتصادی، اجتماعی و سیاسی را نیز غیرممکن می‌نمایاند. به ناچار، تنها راه علاج و یگانه گزینهٔ ممکن باقی مانده، استفاده از روشها و الگوهایی در فرآیند برنامه‌ریزی است که بر مبنای اطلاعات ناقص و ناکافی بنا شده باشد. به نظر می‌رسد که یکی از این الگوها، بخصوص در زمینه برنامه‌ریزی سیستمها، استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی و شبکه‌های عصبی است که در آن اطلاعات ذهنی و غیردقیق افراد خبره و متخصص می‌تواند با چارچوبی مناسب در تحلیل فرآیندهای تصمیم‌گیری به کار رود. در این بخش، هدف ما معرفی فکر اصلی این نظریه به طور کلی در برنامه‌ریزی خطی و به خصوص در کشورهای در حال توسعه و همچنین در کاربردهایی مانند تخصیص منابع است.

... ادامه از صفحهٔ قبل ...

مشترک اعضای مجموعه باشد، توصیف می‌کنند. مثلاً می‌گویند که «مجموعه‌ای از تمام اعداد صحیح بزرگتر از یک و کوچکتر از ۱۰» و آن را به صورت $\{x : x \in Z , 1 < x < 10\}$ نمایش می‌دهند. نماد کلی مجموعه‌های توصیفی، به صورت $\{x : P(x)\}$ می‌باشد که در آن $x \in U$ بوده و $P(x)$ یک «گزاره» یا (Statement) است. همچنین توجه کنید که فرآیند احتمالات و استوکستیک با نااطمینانی (نایقینی) رویداد در مورد تصادفی بودن آن سر و کار دارد، در حالی که مجموعه‌های فازی با ژولی بودن و ابهام معنی آن سر و کار دارند.

تخصیص بهینه منابع و امکانات محدود بین فعالیتهای رقیب، یکی از مسایل بسیار متداول مباحث اقتصاد یا برنامه‌ریزی در کشورهای در حال رشد است؛ زیرا انتخاب و اجرای برنامه‌ها از نظر محدودیت منابع برای توسعه، بسیار اهمیت دارد[۴۰]. تکنیک برنامه‌ریزی خطی و آرمانی به خصوص در برنامه‌ریزی اقتصادی کشورهای پیشرفته، به دلیل برخورداری از تسهیلات کامپیوتری و سادگی چارچوب منطقی و ریاضی آن، از موفقیتهای چشمگیری برخوردار بوده است. اما از آنجایی که ماهیت کلی این نوع برنامه‌ریزی به طور عمده بستگی به وجود داده‌های دقیق و کامل دارد و کشورهای در حال رشد نیز فاقد پایگاههای اطلاعاتی جامع هستند، استفاده و کاربرد این تکنیکها در جهان سوم معدود و اغلب در مسایل کاربردی بزرگ غیرممکن بوده است. اگرچه برنامه‌ریزیهای تصادفی و احتمالی[۴۱] در برنامه‌ریزی تحت شرایط عدم اطمینان، توسعه بسیاری یافته است، اما راه حل بهتر برای رفع مشکل کمبود و ضعف پایگاههای اطلاعاتی در حل مسایل برنامه‌ریزی (مانند تخصیص منابع و امکانات در کشورهای در حال رشد)، وجود الگوهای انعطاف‌پذیری است که داده‌های غیردقیق در آنها پذیرفتنی و اشکالات جزیی قابل اغماض و برنامه‌نویسی قابل انجام و قابل اعمال باشد.

در سالهای اخیر، برنامه‌نویسی ریاضی فازی[۴۲] سرمنشأ تحقیقات زیادی گردیده و در همین میان، بهینه‌سازی در محیط تصمیم‌گیری فازی که در آن اهداف، قیود یا ضرایب به صورت غیر دقیق قابل تعریف شده باشند، معرفی شده است. پایگاه اطلاعاتی ضعیف و ناقص (به طور کمی) کشورهای در حال توسعه، برنامه‌ریزان را بناچار مجبور به فرمولی کردن اهداف و قیود مبهم ساخته است. در این کشورها، به طور کلی، برنامه‌نویسی ریاضی با استفاده از اطلاعات فازی به نظر مناسب‌تر می‌آید.

۴۰ - برای نمونه، در این زمینه به منبع زیر مراجعه نمود:
کسرایی، اسرافیل؛ «مدل تخصیص بهینه بودجه دانشگاههای کشور در برنامه دوم جمهوری اسلامی ایران»؛ مندرج در فصلنامهٔ پژوهش و برنامه‌ریزی در آموزش عالی، شمارهٔ ۱۱ و ۱۲، پائیز و زمستان ۱۳۷۴ صفحات ۸۱ـ۱۱۴.

۴۱ - توجه کنید که فرآیندهای احتمالی و تصادفی به دلیل عدم اطمینان در مورد وقوع تصادفی رویداد، به کار گرفته می‌شوند در حالی که مجموعه‌های فازی به علت ابهام در معنی و اندازهٔ داده‌ها به کار می‌رود.

42 - Bellman, R. E., & Zadeh, L. A., "Decision - making in a Fuzzy Environment", Management Science,(Stochastic) 17, 1970, B141 - B164.

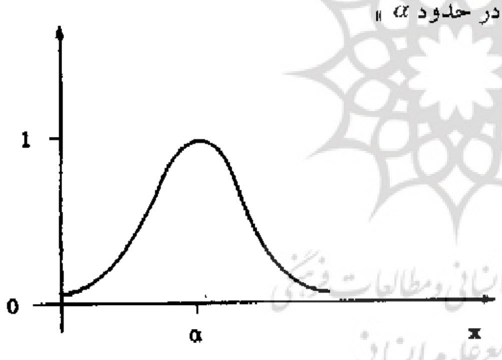
اکنون، برای آشنایی و مقایسهٔ نتایج روش مرسوم برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌نویسی ریاضی فازی، مفاهیم اصلی بحث را (با توجه به ضمیمه «ب») در قالب چند نمونه زیر توضیح می‌دهیم:

نمونه ۱ : در اقتصاد هر تصمیم‌گیرنده‌ای غالباً ممکن است با محدودیت امکاناتی چون بودجه مواجه باشد. مقدار بودجه ممکن است دقیقاً مشخص، و یا در بعضی مواقع، فقط به طور تقریبی در دست باشد. لذا، بجای عبارت «مقدار بودجه α است»، ممکن است عبارت «بودجه در حدود α است» تنها اطلاعاتی باشد که در اختیار اقتصاددان یا برنامه ریز گذاشته می‌شود. این گزاره یا عبارت شامل جملهٔ غیر دقیق « در حدود α »[۴۳] یا اطلاعات غیر صریح[۴۴] است. برای تحلیل آن، عبارت « در حدود α » را می‌توان به صورت یک زیرمجموعهٔ فازی با عضویت زیر تعریف کرد.

$$\mu_{\text{about } \alpha}(x) = e^{-k(x-\alpha)^2} \quad \text{و} \quad k > 1 \qquad (۴)$$

و تابع عضویت زیرمجموعهٔ فازی « در حدود α » را به صورت زیر ترسیم نمود:

شکل ۳ـ۱ : تابع عضویت زیرمجموعهٔ فازی « در حدود α »



نمونه ۲ : در برنامه‌ریزی آرمانی[۴۵]، ممکن است تابع هدف بیشینه‌یابی[۴۶] پدیده‌ای مانند درآمد خالص، و فرآیند بهینه‌یابی نیز محتملاً تحت شرایط فازی، مشروط باشد. مثلاً عبارت «درآمد خالص باید خیلی بیشتر از β باشد» امکان دارد به صورت یک هدف آرمانی به شکل بیشینه‌یابی بیان شود. تعریف تابع عضویت زیرمجموعه فازی « خیلی بزرگتر از» ممکن است به شکل ۴ - ۱ زیر قابل تشخیص و ترسیم باشد:

---

43 - About α.

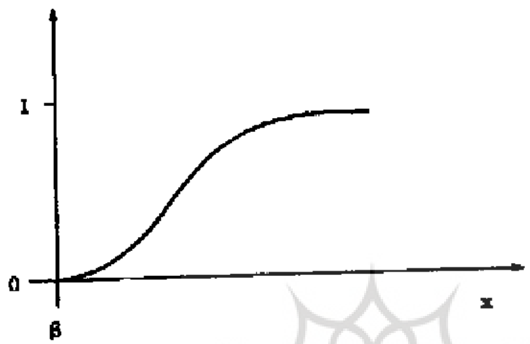
44 - Imprecise

45 - Goal Programming

46 - Maximization

$$\mu_{\text{much greater than } \beta}(x) = 1 - e^{-k(x-\beta)} \quad \text{و} \quad x > 1 \qquad (۵)$$

شکل ۴-۱: تابع عضویت زیرمجموعهٔ فازی «خیلی بیشتر از β»



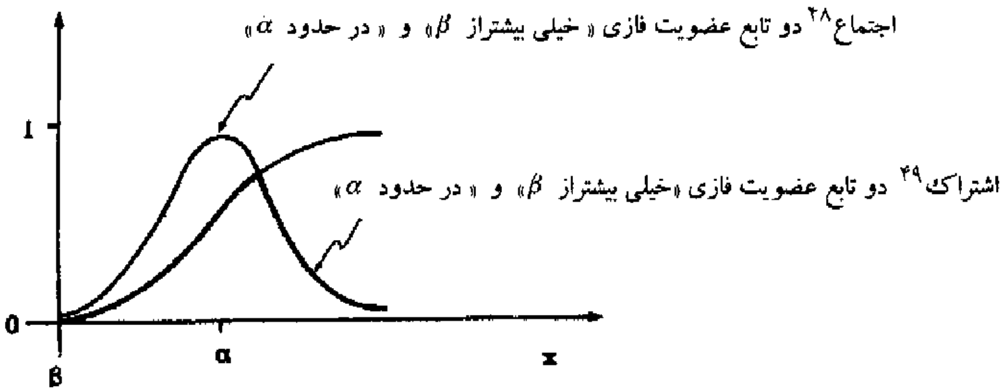
نمونه ۳: اگر به فرض $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ یک مجموعه عادی از اشیاء یا موضوعات باشد، با توجه با اهمیت[47] آنها، می‌توان زیرمجموعهٔ زیر را استنتاج کرد:

$$\{\ 0.1/x_1\ ,\ 1/x_2\ ,\ 0.5/x_3\ ,\ 0.8/x_4\ \} \qquad (٦)$$

و در $\mu_{\text{important}}(x_i)$، به طور ذهنی، مقداری برای هر یک که در آن «1» معرف عضویت کامل داشتن اهمیت و «0» معرف غیر عضویت کامل اهمیت است، منتسب نمود. مثلاً، درجهٔ اهمیت x_3 برابر با 0.5 است. در اینجا، تابع عضویت μ شکل خاصی ندارد.

نمونه ۴: تابع عضویت اشتراک و اجتماع زیرمجموعه‌های فازی A و B طبق تعریف معادلات (۴) و (۵) به صورت شکل ۵-۱ زیر قابل ترسیم است (برای تعاریف مفاهیم، به ضمیمه «ب» به خصوص تعریف ۵ و ٦، رجوع کنید):

47 - Important



شکل ۵-۱ : تابع عضویت اشتراک و اجتماع زیرمجموعه‌های فازی، نماد « و » برای اشتراک دو مجموعه یا بزرگ‌ترین زیر مجموعه مشترک دو مجموعه A و B است وقتی که با عملگر -min تعریف شود، و نماد « یا » برای اجتماع دو مجموعه یا کوچکترین زیر مجموعه مشترک دو مجموعه A و B است، در هنگامی که با عملگر -max تعریف شود، (ضمیمه «ب» رجوع شود).

نمونه ۵ : مدل برنامه ریزی خطی زیر را در تخصیص زمین برای فعالیتهای مختلف در یک منطقه در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{۷}$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \geq p \tag{۸}$$

---

48 - " about α " $\cup$ " much greater then β "

49 - " about α " $\cap$ " much greater then β "

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq f_i \quad \text{برای } i = 1, 2, ..., m \tag{۹}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} = e_j \quad \text{برای } j = 1, 2, ..., n \tag{۱۰}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{برای} \quad i = 1, 2, ..., m \text{ و } j = 1, 2, ..., n \tag{۱۱}$$

m : تعداد مناطق، نواحی (zones)، یا قطعاتی از زمین با واحدها یا مساحتهای مساوی از روی یک طرح در دست بررسی.

n : تعداد دسته‌بندی کاربریهای زمین (Land use)، مانند مسکونی، صنعتی، کشاورزی و ... در طرح.

x_{ij} : مقدار هکتار منطقه یا ناحیه i که برای طبقه کاربری j تخصیص داده شده است.

c_{ij} : هزینهٔ توسعهٔ یک هکتار از ناحیه i در تخصیص کاربری j.

p_{ij} : درآمد خالص از توسعه یک هکتار ناحیه i برای تخصیص کاربری j.

p : کل درآمد خالص قابل انتظار در تخصیص کاربری زمین.

f_i : مقدار حدّ زمین در منطقه یا ناحیه i، که می‌تواند برای کاربریهای مختلف تخصیص داد.

d_i : ضریب نرخ خدمات که برای پشتیبانی خدمات زمینهای مورد نیاز، که برای توسعه کاربری طبقه j تدارک می‌شود، ضروری است.

e_j : کل تقاضای کاربری زمین طبقه j.

هدف از این برنامه تخصیص بهینه زمین به فعالیتهای مختلف به نحوی است که هزینهٔ کل توسعه به حداقل برسد و استانداردهای مطلوبِ توصیه شده، برقرار و محقق گردد. معادله قید شمارهٔ (۸) مقرر می‌دارد که کل درآمد خالص از یک مقدار مشخص (p) بیشتر باشد. معادله قید شمارهٔ (۹) حد دقیقی را برای مقدار کل زمین در هر ناحیه که بتوان آن را برای کاربریهای مختلف زمین تخصیص داد، برقرار می‌کند. معادله قید شمارهٔ (۱۰) مطمئن می‌سازد که کل تخصیص دقیقاً مساوی با کل تقاضا در هر نوع یا هر دسته از کاربری زمین است.

حال اگر اطلاعات مسأله فوق، غیر دقیق[50] باشد، دقت قیود در معادلات قیود (۸)، (۹) و (۱۰) نیز ممکن است به نسبت، کاهش یابد؛ یعنی از نظر برنامه‌ریز، امکان دارد که تجویز حدهای دقیق و مشخص قابلیت استفادهٔ زمین f_i غیر ممکن شود. همچنین ممکن است تحمیل یک مقدار مورد انتظار دقیق از کل درآمد خالص (p) از نظر سرمایه‌گذاری غیر واقع‌بینانه باشد، یا برقراری تقاضاهای دقیق، (e_j) برای هر طبقهٔ کاربری زمین، عملی نباشد. بنابراین، محتمل است که گیرندگان مجبور به مشخص کردن حالتهای فازی، به جای معادلات دقیق قیود باشند. با توجه به معادلهٔ قید شمارهٔ (۸)، قید فازی که بیشتر واقع‌بینانه باشد ممکن است به صورت زیر ترسیم شود :

(۱۲) «درآمد خالص باید بیشتر از p یا خیلی زیاد کمتر از p' نباشد».
(نه خیلی کمتر از p' باشد[51])

این قید حاکی از آن است که کل درآمد خالص ترجیحاً باید بیشتر از p باشد. در حالتی که چنین ضرورتی نتواند به علت عدم اطمینان برقرار گردد، فقط می‌تواند به مقدار کوچکی کمتر از p باشد. چون « بیشتر از p' » و « نه خیلی کمتر از p' » معیارهایی زبانی[52] هستند و می‌توان آنها را به عنوان زیرمجموعه‌های فازی لحاظ نمود. توابع تقریبی به ترتیب در شکلهای ۶-۱ و ۷-۱ تصویر شده است. قید فازی معادلهٔ (۱۲) حاصل «اجتماعی» از دو زیرمجموعهٔ فازی است که یک فاصلهٔ فازی (t) را روی متغیر پایه با یک واحد پولی تحمیل می‌کند (شکل شمارهٔ ۸-۱). بنابراین، به جای تحمیل اینکه کل درآمد خالص بزرگتر از یک مقدار مشخص مانند p باشد، یک سطح مجاز انحراف t از p را در قید فازی داخل می‌کنیم. اکنون معادله قید دقیق (۸) به قید غیردقیق فازی جدید زیر تبدیل شده است.

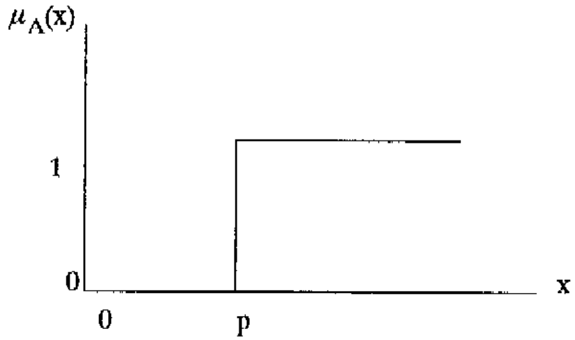
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \gtrapprox p \, ; \, p\text{-}t \qquad (۱۳)$$

که در آن $\gtrapprox$ نسخه فازی $\geq$ بوده و p و $p\text{-}t$ دو نقطه حدی (کران) فاصله فازی هستند.

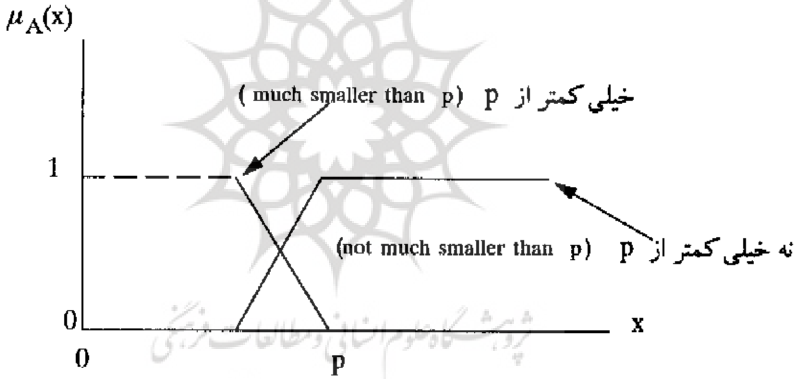
50 - Imprecise

51 - " not much smaller "

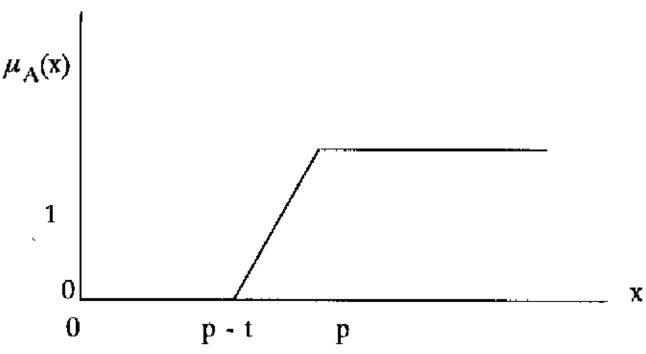
52 - Linguistic criteria



شکل ٦ـ۱ : تابع عضویت « بزرگتر از p (Greater than p) »



شکل ۷ـ۱ : تابع عضویت « نه خیلی کمتر از p »



به همین ترتیب، درجه رضامندی برنامه‌ریز در خصوص مقدار

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij}$$

با توجه به بیان معادله (۱۲) ممکن است به صورت تابع عضویت زیر تقریب گردد.

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij}\right) = \begin{cases} 0 & \text{باشد} \quad \text{اگر} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij} \le p-t \\ 1 - \dfrac{p - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij}}{t} & \text{باشد} \quad \text{اگر} \quad p-t \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij} < p \\ 1 & \text{باشد} \quad \text{اگر} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_{ij} \ge p \end{cases}$$

(۱۴)

یعنی، هنگامی که کل درآمد خالص بزرگتر از p باشد، برنامه‌ریز با درجه عضویت مساوی با یک کاملاً راضی است، سپس درجهٔ رضامندی وی به طور یکنواخت تا صفر کاهش پیدا می‌کند تا به مقدار p-t می‌رسد.
به طور مشابه، اطلاعات غیردقیق مربوط به کل مقدار زمین موجود برای توسعه در هر ناحیه ممکن است که برنامه‌ریز را مجبور نماید که هر قید دقیق از معادلهٔ (۹) را با یک قید فازی معادل جایگزین نماید.

(۱۵) «کل مساحت زمین برای توسعه در ناحیه i باید کمتر از f_i یا نه خیلی بیشتر از f_i باشد»

با استفاده از نمادها می‌توان عبارت فوق را به صورت زیر بیان کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le f_i \,;\, f_i + d_i \qquad i = 1, 2, ..., m \;\; \text{برای تمام مقادیر} \qquad (۱۶)$$

در اینجا نیز می‌توان سطوح مجاز قابل نوسان (قابل قبول) d_i را برای قابلیت استفاده زمین f_i، طبق شکل ۹ - ۱، برقرار نمود:

$$\mu_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)=\begin{cases} 1 \quad \text{باشد} & \text{اگر} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le f_i \\ 1-\dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}-f_i}{d_i} \quad \text{باشد} & \text{اگر} \quad f_i < \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le f_i+d_i \\ 0 \quad \text{باشد} & \text{اگر} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le f_i+d_i \end{cases} \qquad (۱۷)$$

با استدلال مشابه، نا اطمینانی از تقاضاهای آتی ممکن است که به فرمول معادله قید دقیق (۱۰) را غیرواقعی جلوه دهد؛ لذا برنامه‌ریز محتملاً هر یک از آنها را با قید فازی زیر جایگزین می‌کند:

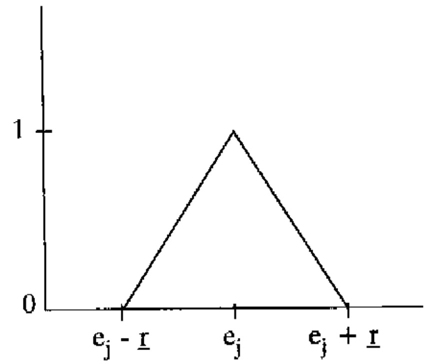
«کل تخصیص برای طبقهٔ زکاربری زمین باید <u>مساوی با e_j یا</u>

<u>نه خیلی بیشتر از e_j و نه خیلی کمتر از e_j باشد»</u> (۱۸)

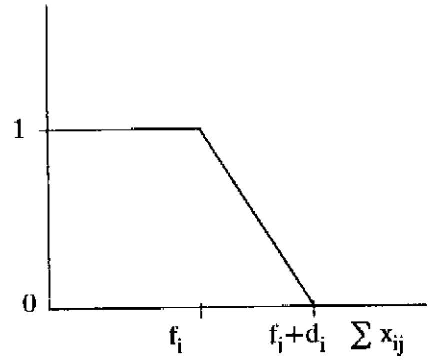
با استفاده از نمادها می‌توان قید را به صورت زیر بیان نمود:

$$\sum_{i=1}^{m} d_j\, x_{ij} \cong e_j \quad ; \quad e_j-\underline{r} \text{ و } e_j+\overline{r} \qquad j=1, 2, ..., m \quad \text{برای مقادیر} \qquad (۱۹)$$

در این به فرمول درآوردن، سطوح قابل قبول انحراف در سمت چپ، $\underline{r}$، و در سمت راست، $\overline{r}$، مقدار e_j تصریح شده‌اند.



شکل ۱۰-۱ : تابع عضویت درجه رضامندی
مربوط به مقدار $\sum_i d_j x_{ij}$



شکل ۹-۱ : تابع عضویت درجه رضامندی
مربوط به مقدار $\sum_j x_{ij}$

درجهٔ رضامندی برنامه‌ریز در خصوص مقدار $\sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij}$ را ممکن است به صورت تابع عضویت تقریبی، طبق شکل ۱۰-۱ فوق، ارائه نماید.

$$\mu_j\left(\sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij}\right) = \begin{cases} 0 & \text{باشد} \quad \sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} < e_j - \underline{r} \quad \text{اگر} \\ 1 - \dfrac{e_j - \sum_{i=1}^{n} d_j x_{ij}}{\underline{r}} & \text{باشد} \quad e_j - \underline{r} \le \sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} < e_j \quad \text{اگر} \\ 1 & \text{باشد} \quad \sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} = e_j \quad \text{اگر} \\ 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} - e_j}{\overline{r}} & \text{باشد} \quad e_j < \sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} \le e_j + \overline{r} \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{باشد} \quad \sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} > e_j + \overline{r} \quad \text{اگر} \end{cases} \quad (۲۰)$$

اکنون فرض کنید که به جای حداقل سازی[۵۳] هزینهٔ کل توسعه در معادلهٔ (۷)، برنامه‌ریز ترجیح دهد که مقدار مشخصی مانند c را به عنوان هدف در فرآیند کمینه‌یابی به کار گیرد، در نتیجه هدف مسأله مقداری مبهم می‌نماید و شاید بتوان آن را به صورت زیر تصریح نمود:

(۲۱) «کل هزینهٔ توسعه باید کمتر از c یا نه خیلی بیشتر از c باشد»

لذا، هدف فازی ممکن است که به صورت زیر بیان شود:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \lessapprox c \, , \, c + \iota \qquad (۲۲)$$

درجه رضامندی برنامه‌ریز در مورد مقدار $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ می‌تواند به صورت رابطهٔ زیر تقریب گردد:

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\right) = \begin{cases} 1 & \text{باشد} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \le c \quad \text{اگر} \\ 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - c}{\iota} & \text{باشد} \quad c < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \le c+\iota \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{باشد} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} > c + \iota \quad \text{اگر} \end{cases}$$

(۲۳)

حال، چون هر دو قسمت ـ هدف و قیود مسأله ـ به صورت زیرمجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند، در فرآیند بهینه‌سازی متقارن هستند. جوابهای ممکن[۵۴] آنهایی هستند که جواب هر دو قسمت ـ هدف فازی و قیود فازی ـ را فراهم نمایند. بنابراین، محتمل است که فضای تصمیم به صورت اشتراکی از زیر مجموعه‌های

53 - Minimizing

54 - Feasible

فازی، که شامل تعریف هدف فازی و قیود فازی است، ساخته شود. در به فرمول درآوردن مسأله در فضای تصمیم D ، اشتراک زیر مجموعه‌های فازی در معادلات (۱۴)، (۱۷)، (۲۰) و (۲۳)، تابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_D(x_{ij}) = \min \left\{ \mu\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}\right) ; \quad \mu_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \quad \text{برای تمام } i \text{ ها} \right.$$

$$\left. \mu_j\left(\sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij}\right), \quad \text{برای تمام } j \text{ ها} ; \quad \mu\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \right\} \qquad (۲۴)$$

لذا، مسأله بهینه‌یابی به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\max_{x_{ij} \geq 0} \quad \mu_D(x_{ij}) \qquad (۲۵)$$

از طریق یک جایگزینی ساده و حذف تمام «1» ها در معادلات (۱۴)، (۱۷)، (۲۰) و (۲۳)، مسألهٔ بهینه‌یابی در معادله (۲۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\max\text{-}\min_{x_{ij} \geq 0} \left\{ \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} - \frac{p}{t} ; \quad \frac{f_i}{d_i} - \frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \text{برای تمام } i\text{ها} ; \right.$$

$$\frac{e_j}{r} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} \quad \text{و} \quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} - \frac{e_j}{r} \quad \text{برای تمام } j\text{ها} ;$$

$$\left. \frac{c}{\iota} - \frac{1}{\iota}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \right\} \qquad (۲۶)$$

به طور مشابه، می‌توان آن را به صورت برنامه‌ریزی خطی مرسوم زیر ساده نمود:

$$\max \lambda \qquad (۲۷)$$

$$\text{S.t.} \quad \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} - \frac{p}{t} \geq \lambda \qquad (۲۸)$$

$$\frac{f_i}{d_i} - \frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq \lambda \qquad j = 1, 2, ..., m \text{ برای تمام مقادیر} \qquad (۲۹)$$

$$\frac{e_j}{r} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} d_j x_{ij} \geq \lambda \qquad j = 1, 2, ..., n$$ برای تمام مقادیر (۳۰)

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} - \frac{e_j}{r} \geq \lambda \qquad j = 1, 2, ..., n$$ برای تمام مقادیر (۳۱)

$$\frac{c}{t} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq \lambda$$ (۳۲)

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., m \; ; \; j = 1, 2, ..., n$$ برای تمام مقادیر (۳۳)

بنابراین، با فرض خطی بودن مسأله، برنامه‌ریز می‌تواند به واسطه هدف و قیود فازی، مسأله را به صورت برنامه‌ریزی خطی مرسوم به فرمول درآورد و با الگوریتمهای موجود حل کند.

با استفاده از اطلاعات دقیق در بعضی از پدیده‌های فوق، برنامه‌ریزان شاید بتوانند بعضی از قیود را با دقت مشخص کنند. برای مثال علاوه بر قیود فازی بحث شده قبل، ممکن است که برنامه‌ریزان بخواهند قیود تراکم[55] زیر را اعمال نمایند:

$$x_{ij} \leq g_{jk} x_{ik} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., m \; ; \; j = 1, 2, ..., k, ..., n$$ (۳۴)

$$x_{ij} \leq h_{jk} x_{hk} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., h, ..., m \; ; \; j = 1, 2, ..., k, ..., n$$ (۳۵)

که در آن:

g_{jk} نرخ طبقه کاربری زمین j مجاز نسبت به طبقهٔ کاربری زمین k، با دسته کاربری زمین j و k در همان ناحیه، و

h_{jk} نرخ طبقه کاربری زمین j مجاز نسبت به طبقهٔ کاربری زمین k، با طبقهٔ کاربری زمین j و k در ناحیه‌های متفاوت است.

یک چنین قیود دقیق را می‌توان به برنامه‌ریزی خطی معادلات ۳۳ - ۲۷ تبدیل کرد و مسأله را برای x_{ij} همزمان حل نمود.

در نتیجه، در چارچوب تحلیلی طرحها (مانند ضمیمهٔ «ج») که دارای اطلاعات دقیقی نیستند، به سادگی می‌توان آن را از طریق تئوری مجموعه‌های فازی تعریف و با نرم‌افزارهای آماده حل نمود. به نظر می‌رسد

55 - Density constraints

برنامه‌ریزی خطی فازی در حل مسایل تخصیص بهینه با هدف و قیود فازی، بخصوص در جوامعی که محققان و برنامه‌ریزان پایگاههای اطلاعاتی جامعی در اختیار ندارند، می‌تواند مناسب‌تر و واقعی‌تر عملی شود[۵۶]، باید نیز توجه داشت که :

۱ - اگرچه تابع عضویت به تابع خطی تقریب شده است، ولی توابع یکنواخت افزایشی و کاهشی را بدون تقریباً هیچ اشکالی نیز می‌توان به کار گرفت؛

۲ - قیود به علت محدودیت منابع و امکانات و عدم اطلاعات کافی (مانند میزان بارندگی در سال) تبدیل به فازی می‌شود، ولی به دلیل مشابه می‌توان اهداف را با معرفی مقدار مشخصی در جهت نیل به آن فازی کرد. گرچه این روش تنها راه تبدیل به فازی نیست. به هرحال، ضرایب تابع هدف و ضرایب فنی قیود را نیز می‌توان به فازی تبدیل نموده و به سادگی آنها را به برنامه‌ریزی خطی ساده تبدیل نمود.

۳ - برای مقابله با پدیده‌های پویایی در برنامه‌ریزی، چارچوب فوق را می‌توان برای بهینه‌یابی فازی در طول زمان تعمیم و توسعه داد[۵۷]. بخصوص می‌توان برنامه‌ریزی خطی فازی را بسادگی به حل مسأله چند مرحله‌ای وابسته[۵۸] و اهداف فازی را بر حسب زمان توسعه و تعمیم بخشید.

۴ - اگرچه در بخش قبل، برنامه‌ریزی خطی فقط با یک هدف بررسی گردید ولی چارچوب فوق را بسادگی می‌توان به بهینه‌یابی با اهداف چندگانه که مسایل واقع‌بینانه‌تر برنامه‌ریزی در آن مطرح شود، تبدیل کرد[۵۹].

---

56 - Negotia, C.V. and Sularia, M., "On Fuzzy Mathematical Programming and Toleramnces in Planning",

Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 1, 1976, pp. 3-14.

And, Nijkamp, P., "Conflict Patterns and Compromise Solutions in Fuzzy Choice Theory",

Journal of Peace Science, 4, 1979, pp. 67-90.

57 - Bellman, R.E., and Zadeh, L.A., "Decision-Making in a Fuzzy Environment",

Management Science, 17, 1970, B141 - B164.

58 - Multistage Planning

59 - Zimmermann, H.J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several

ضمیمه الف

در بحث فازی، دلیلی برای اینکه چرا باید خودمان را فقط به دو مقدار صفر و یک محدود کنیم، وجود ندارد. می‌توانیم مجموعه‌های بسیار بزرگتری از مقادیر مانند $[a_1, a_2]$ در چند سطح، از جمله رابطه زیر، را انتخاب کنیم[۶۰].

$$\forall a_1, a_2 \in [0,1]: \qquad \text{(a-1)}$$
$$(a_1 < a_2) \Rightarrow ([a_1^{(a_2)}, a_2^{(a_2)}] \subset [a_1^{(a_1)}, a_2^{(a_1)}])$$

این بدان معنی است که اگر a افزایش یابد، فاصله اعتماد هرگز افزایش نمی‌یابد.

شایان گفتن است که با انتخاب یک فاصله اعتماد[۶۱]، یعنی فاصله‌ای از حد بالا و پایین $[a_1, a_2]$، می‌توان نایقینی یا عدم اطمینان[۶۲] را کاهش داد. این دو حدّ ممکن است که به طور عینی (از طریق اندازه‌گیری) یا ذهنی (از طریق تجربه یا عقیده و سلیقه فرد متخصص) در سیستم (با دیتای غیر دقیق) تعریف شود. مفهوم فاصله اعتماد، با مفهوم دیگری موسوم به میزان تصور ما مانند a در آن سطح (طبق فروض ذهنی و احتمالی[۶۳]) ارتباط دارد که این نیز یک عدد فازی بوده و آن را می‌توان به صورت $a \in [0, 1]$ (یا $0 \leq a \leq 1$) بیان کرد، که اغلب، به‌طور فطری، سازوکار تفکر انسان در تخمینهای ذهنی در یک سطح است[۶۴].

... ادامه از صفحهٔ قبل ...

Objective Fuctions",

Fuzzy Sets and Systems,, 1, 1978, pp. 45-56.

۶۰ - در یک فاصله اطمینان $A_a = [a_1^{(a)}, a_2^{(a)}]$ است.

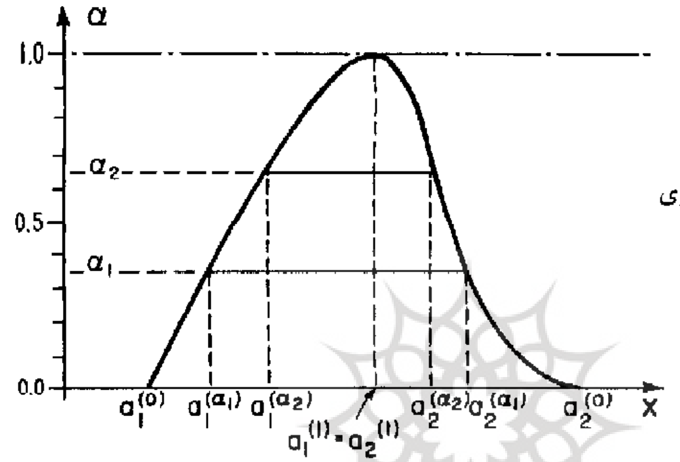
61 - Interval of confidence 62 - Uncertainty

63 - Level of Presumption

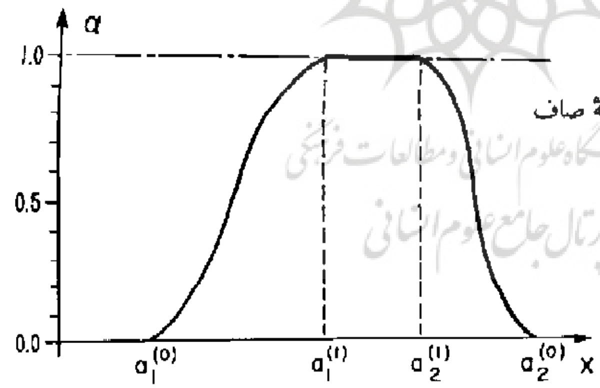
64 - Kaufmann, A. and Gupta, M. M., Introduction to Fuzzy Arithmatic: Theoy and

ادامه در صفحهٔ بعد ...

منحنی تعدیل فاصله اعتماد از صفر تا یک می‌تواند به یکی از دو طریق زیر باشد: اول ممکن است به شکل A-۳ یک منحنی ملایم باشد. دوم احتمال دارد توأم با کج شدن شیب و یک ناحیه صاف مانند شکل A-۴ باشد. در نتیجه، مفهوم فازی را با استفاده از میزان تصور و فاصله اعتماد به تئوری مجموعه‌های فازی به صورت زیر معرفی و تبدیل شود:



شکل A-۳ تعریف اعداد فازی



شکل A-۴ : عدد فازی با یک ناحیهٔ صاف

... ادامه از صفحهٔ قبل ...

Applications,

VAR, 1991 PP. 9-10

اگر E یک مجموعه مرجع [مانند R (مجموعهٔ اعداد حقیقی[65]) یا Z (مجموعهٔ اعداد صحیح)] باشد، یک زیرمجموعهٔ عادی، A، از این مجموعه مرجع را می‌توان با تابع ویژه[66] آن تعریف نمود:

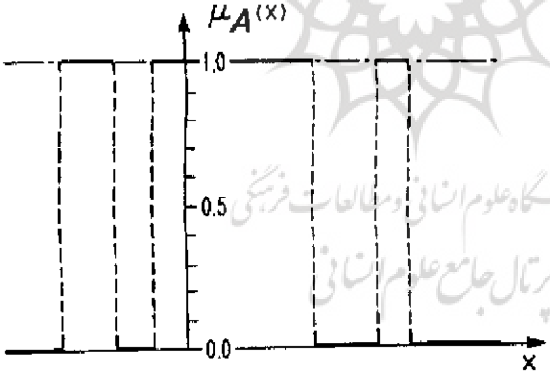
$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in \{0 , 1\} \tag{a-2}$$

که حاکی از تعلق یا عدم تعلق یک عنصر E بر حسب مقدار تابع ویژه (0,1) آن به A است. برای همان مجموعه مرجع E یک زیرمجموعهٔ فازی A توسط تابع ویژه خود که موسوم به تابع عضویت است و مقادیری در فاصله [0, 1] را بجای مجموعه دو دویی {0 , 1} قبول می‌کند.

$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in [0 , 1] \tag{a-3}$$

یعنی اینکه، عناصر E در سطحی از [0 , 1] متعلق به A (با رنگ پر برای فازی) قرار دارند. شکل ۵ ـ A یک زیرمجموعه عادی در R و شکل ۶ ـ A یک زیرمجموعه فازی در R را نشان می‌دهند.

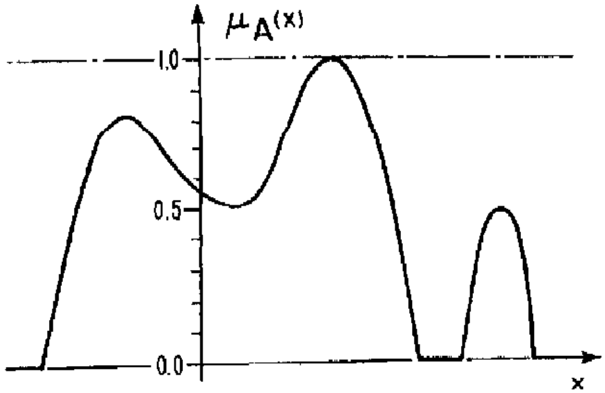
شکل ۵ ـ A یک زیرمجموعه عادی در R



65 - Real

66 - Characterstic function

شکل ۶ـA یک زیرمجموعه فازی در R



ضمیمه ب

بعضی از مفاهیم اصلی تئوری مجموعه‌های فازی

اگرچه در این قسمت ارائهٔ مشروح و کامل مفاهیم ذیربط مجموعه‌های فازی میسر نیست[۶۷]، ولی برای تفهیم بهتر بعضی از مطالب، ارائه خلاصه‌ای از تعاریف پایه ضروری. ایدهٔ اصلی تئوری، مفهوم زیرمجموعهٔ فازی است. در بیان تئوری مجموعه‌های مرسوم، بین عضویت و غیر عضویت عنصری یک مجموعه، کران یا مرز و حد مشخص[۶۸] است. اما تحت تئوری مجموعه‌های فازی (همچنانکه قبلاً از نظر گذشت) انتقال تدریجی از عضویت به غیر عضویت عدم وجود کران و، در واقع، در طبیعت (مانند سایه و روشن) به حقیقت

---

۶۷ - برای بررسی کامل و فراگیری اصول تئوریک، به منابع ذیر رجوع شود:

Kaufmann, A., Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Vol. 1, Academic Press, New York, 1975.

Zadeh, L. A., 'Fuzzy Sets', Information and Control, 8, 1965, PP. 338-353.

68 - Clear-cut boundary

نزدیکتر است.

تعریف ۱ : اگر U کل جامعه مرجوع و x عنصری از U باشد، پس زیرمجموعهٔ فازی A در U یک مجموعه زوج مرتب[۶۹] است

$x \in U$ برای تمام مقادیر $\{x, \mu_A(x)\}$ (b-1)

که در آن $\mu_A : U \rightarrow M$ تابع عضویتی است که مقادیرش تماماً به صورت مجموعه مرتب M، مجموعهٔ عضویت است. $\mu_A(x)$ بیانگر درجه عضویت x در A است. مجموعه عضویت M می‌تواند یک فاصلهٔ بسته [0 , 1] (یا به شکل ساختار کلی‌تر از مجموعه شبکه) باشد.

توجه شود، همچنان که قبلاً گفتیم، مجموعه عضویت محدود به فاصله بسته [0, 1] است که در آن 0 و 1 به ترتیب معرف درجات کمترین و بیشترین عضویت هستند.

تعریف ۲ (اشتمال[۷۰]) : زیرمجموعهٔ فازی A که شامل[۷۱] زیر مجموعهٔ فازی B (یا $A \subset B$) است، فقط اگر $\mu_A(x) \leqq \mu_B(x)$ برای تمام مقادیر $x \in U$ باشد.

تعریف ۳ (تساوی[۷۲]) : زیرمجموعه‌های A و B مساوی (یا $A = B$) هستند، البته اگر $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ برای تمام $x \in U$ باشد.

تعریف ۴ (مکمل‌گیری[۷۳]) : زیرمجموعهٔ فازی B مکمل زیرمجموعهٔ فازی A است اگر که $\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$ برای تمام مقادیر $x \in U$ باشد.

---

۶۹ - اگر یک جفت (Ordered Pair) عدد مفروض باشد و بخواهیم که همواره یکی از آنها بر دیگری مقدم باشد، در این صورت دارای یک زوج مرتب هستیم، که معمولاً با نماد (x, y) نمایش داده می‌شوند. توجه شود که برای اجتناب از اشتباه، به دلیل تشابه با نمادهای فاصله‌های باز (a, b)، زوجهای مرتب را با نماد (x, y) نمایش می‌دهیم، و x را مؤلفهٔ اول و y را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم.

70 - Inclusion

71 - A is inclusion in B

72 - Equality

73 - Complementation

تعریف ۵ (اشتراک[۷۴]**)** : اشتراک زیرمجموعهٔ A و B (یا $A \cap B$) به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min [\mu_A(x) , \mu_B(x)] \quad \text{برای تمام } x \in U \tag{b-2}$$

یا با استفاده از نماد رابطه‌ای «∧» یا رابطهٔ منطقی «و» مثلاً در فرآیند یک اتخاذ تصمیم مانند خط مشی سیاسی ـ اقتصادی : «بودجه در حدود α و درآمد خالص باید خیلی بیشتر از β باشد»، قابل تعریف و تفسیر است.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-3}$$

تعریف ۶ (اجتماع[۷۵]**)** : اجتماع زیر مجموعهٔ فازی A و B (یا $A \cup B$) قابل تعریف به صورت زیر:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max [\mu_A(x) , \mu_B(x)] \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-4}$$

و با استفاده از نماد رابطه‌ای «∨» یا رابطهٔ منطقی «یا» به صورت زیر است:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-5}$$

تعریف ۷ (ضرب جبری) : حاصل ضرب جبری زیر مجموعه‌های A و B (یا A.B) به صورت زیر تعریف‌پذیر است :

$$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)] \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-6}$$

در اشتراک زیرمجموعه‌های فازی، ضرب جبری معمولاً به عنوان رابط «و» تعبیر می‌شود که وقتی وابستگی دو زیرمجموعهٔ فازی تعریف می‌شود، به کار می‌رود. رابطه بین دو عملیات عبارت از:

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \geqq \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-7}$$

تعریف ۸ (جمع جبری) : حاصل جمع جبری دو زیرمجموعه فازی A و B یا $A \hat{+} B$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\mu_{A\hat{+}B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \tag{b-8}$$

---

74 - Intersection

75 - Union

در اجتماع زیر مجموعه‌های فازی، جمع جبری معمولاً به عنوان رابط « یا » تعبیر می‌شود که نتیجه فوری آن عبارت است از [۷۶] :

$$\mu_{A\hat{+}B}(x) \geqq \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \text{برای تمام مقادیر } x \in U \qquad (b\text{-}9)$$

در انتخاب یا ساختن نوع خاصی از عملیات محاسباتی باید به تعدیلات ریاضی مانند (-min و -max) و ارتباط آن در یک محتوی خاص توجه داشت. بعضی اوقات، یک عمل از نظر ریاضی امکان‌پذیر اما از نظر تفسیر بی‌معنی است.

تعریف ۹ (رابطهٔ فازی) : هر رابطهٔ فازی n ـ بعدی[۷۷] ، یک زیرمجموعهٔ فازی در $U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ است که به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0, 1], \; x_i \in U_i \quad \text{برای تمام مقادیر } i = 1, 2, ..., n \qquad (b\text{-}10)$$

بخصوص که هر رابطهٔ فازی دو دویی[۷۸] ، یک زیرمجموعهٔ فازی در $U_1 \times U_2$ است. لذا چون رابطهٔ فازی، یک زیرمجموعهٔ فازی است، تمام عملیات بررسی شده فوق نیز می‌تواند به طور مشابه در عملیات رابطه‌های فازی به کار رود.

---

۷٦ - برای توضیح بیشتر به منبع زیر مراجعه شود :

Giles, R., "Lukasiewicz Logic and Fuzzy Theory", International Journal of Man-Machine Studies-
8, 1976, PP. 313 - 327.

77 - " n - array "

78 - binary

ضمیمه ج

کاربرد عملی فازی در برنامه‌ریزی خطی (تخصیص منابع)

مثال زیر نمونه‌ای از یک برنامه‌ریزی خطی فازی[79] در تخصیص منابع است که در آن اعضای تعاونیهای کشاورزی روستایی منطقه با هم برای استفادهٔ بهینه از امکانات و تولید بیشتر، همکاری می‌نمایند. هدف از برنامه، تهیهٔ برنامهٔ تولید محصولات کشاورزی سال آتی تعاونیهاست که مقدار زمینهای قابل کشت هر یک باید زیر نظر ادارهٔ کشاورزی مرکزی منطقه، برنامه‌ریزی، مشخص و واگذار شود. ولی مقدار آب آبیاری (برای زمینهای زیر کشت)، به دلیل مشخص نبودن میزان بارندگی در سال، فقط می‌تواند به صورت بسیار تقریبی محدود بیان گردد.

جدول شماره (۱) - اطلاعات مربوط به منابع تعاونیها در منطقه

شماره تعاونی	زمین قابل کشت (هکتار)	فاصلهٔ فازی مربوط به هر یک (Fuzzy Interval)	مقدار تخصیص آب آبیاری (هکتار متر) شرح فازی (Fuzzy Specification)
1	400	[600 , 660]	باید کمتر از ۶۰۰ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۶۰۰ باشد
2	600	[800 , 840]	باید کمتر از ۸۰۰ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۸۰۰ باشد
3	300	[375 , 450]	باید کمتر از ۳۷۵ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۳۷۵ باشد

محصولات کشاورزی تعاونیها شامل سه محصول : چغندر قند، پنبه و ذرت است که عایدی (تولید) مورد انتظار و مصرف آب آنها با هم فرق دارد. سهمیهٔ حداکثر(ماکزیمم) فازی مقدار زمین هر یک از طریق برنامه‌ریزان ادارهٔ کشاورزی مرکزی به صورت جدول شماره (۲) زیر تعیین مشخص می‌شود.

---

79 - Hillier, F. S. and Lieberman, G. J., Intrduction to Operations Research, 3rd Editin, Holden -

Day, Inc., San Fransisco, 1980, PP. 27-29.

چون تعاونیها توافق نموده‌اند که هر تعاونی نسبت مساوی مشخص شده‌ای راکشت و زرع نمایند، بنابراین، هر ترکیبی از محصولات شاید در هر یک از تعاونیها دیده شود. برای سال آتی، ادارهٔ کشاورزی مرکزی باید مقدار زمین اختصاص داده شده برای هر محصول را در هر تعاونی طوری معین کند که محدودیتهای مشروحه بالا قابل اجرا و اعمال باشند.

جدول شماره (۲) - اطلاعات مربوط به محصولات تعاونیها در منطقه

نوع محصول	عایدی خالص (میلیون ریال در هکتار)	مصرف آب (هکتار متر در هکتار)	سهم (هکتار)	مقدار حداکثر
			فاصلهٔ فازی ذیربط	شرح فازی
چغندر قند	400	3	[600 , 650]	باید کمتر از ۶۰۰ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۶۰۰ باشد
پنبه	300	2	[500 , 540]	باید کمتر از ۵۰۰ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۵۰۰ باشد
ذرت	100	1	[325 , 350]	باید کمتر از ۳۲۵ یا نه خیلی زیاد بیشتر از ۳۲۵ باشد

اداره مرکزی تصمیم دارد که به جای بیشینه‌کردن (یا بیشینه‌یابی) کل عایدی خالص (تولید) در تابع هدف، مقدار مطلوبی مثلاً 260,000 (میلیون) ریال را به عنوان هدف درنظر بگیرد و سعی نماید که کل عایدی خالص بیشتر از مقدار مطلوب گردد ولی کمتر از آن نشود. بنابراین، هدف را می‌توان به صورت زیر بیان کرد[۸۰]:

---

۸۰ - تخصیص زمین (هکتار)

محصول / تعاونی	1	2	3
چغندرقند	x11	x12	x13

ادامه در صفحهٔ بعد ...

«کل عایدی درآمد خالص باید بیشتر از ۲۶۰،۰۰۰ (میلیون) ریال
یا نه خیلی زیاد کمتر از ۲۶۰،۰۰۰ (میلیون) ریال باشد»

با توجه به فاصله‌های ذیربط فازی [26,000 ، 250,600] و برحسب اطلاعات فوق، مسألهٔ تخصیص منابع تعاونیها می‌تواند به صورت مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی فازی زیر به فرمول درآورده شود:

هدف : $400\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 300\,(x_{21} + x_{22} + x_{23}) +$

$$100\,(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \;\geq\; 260{,}000 \;;\; 250{,}000 \qquad \text{(c-1)}$$

قیود (محدودیتها) :

قید (فازی) آب :

$$3\,x_{11} + 2\,x_{21} + x_{31} \;\leq\; 600 \;;\; 660 \qquad \text{(c-2)}$$

$$3\,x_{12} + 2\,x_{22} + x_{31} \;\leq\; 800 \;;\; 840 \qquad \text{(c-3)}$$

$$3\,x_{13} + 2\,x_{23} + x_{33} \;\leq\; 375 \;;\; 450 \qquad \text{(c-4)}$$

قید (فازی) محصول :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \;\leq\; 600 \;;\; 650 \qquad \text{(c-5)}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{31} \;\leq\; 500 \;;\; 540 \qquad \text{(c-6)}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \;\leq\; 325 \;;\; 350 \qquad \text{(c-7)}$$

قید (غیر فازی) زمین :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \;\leq\; 400 \qquad \text{(c-8)}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{31} \;\leq\; 600 \qquad \text{(c-9)}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \;\leq\; 300 \qquad \text{(c-10)}$$

نسبت قابلیت استفاده (غیر فازی) :

... ادامه از صفحهٔ قبل ...

پنبه	x21	x22	x23
ذرت	x31	x32	x33

$$\frac{1}{400}(x_{11} + x_{21} + x_{31}) = \frac{1}{600}(x_{12} + x_{22} + x_{31}) \quad \text{(c-11)}$$
$$\frac{1}{600}(x_{12} + x_{22} + x_{32}) = \frac{1}{300}(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \quad \text{(c-12)}$$
$$\frac{1}{300}(x_{13} + x_{23} + x_{33}) = \frac{1}{400}(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \quad \text{(c-13)}$$

متغیرهای غیر منفی :

$x_{ij} \geq 0$ برای تمام مقادیر $i=1, 2, 3$ و $j=1, 2, 3$ (c-14)

که در آن x_{ij} مقدار هکتار زمین در تعاونی j که برای کشت محصول i (1 = چغندر قند، 2 = پنبه و 3 = ذرت) است.

با توجه به بحث بخش قبل، مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی فازی فوق را می‌توان باردیگر به صورت برنامه‌ریزی خطی معمولی زیر فرمولی و با بسته نرم افزارهای عادی حل کرد :

$\max \lambda$

S.t. $-26 + .04\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 0.3\,(x_{21} + x_{22} + x_{23}) +$

$$0.1\,(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \geq \lambda \quad \text{(c-15)}$$
$$10 - .05\,x_{11} - 0.03\,x_{21} - 0.02\,x_{31} \geq \lambda \quad \text{(c-16)}$$
$$20 - .08\,x_{12} - 0.05\,x_{22} - 0.03\,x_{32} \geq \lambda \quad \text{(c-17)}$$
$$5 - .04\,x_{13} - 0.03\,x_{23} - 0.01\,x_{33} \geq \lambda \quad \text{(c-18)}$$
$$12 - .02\,x_{11} - 0.02\,x_{12} - 0.02\,x_{31} \geq \lambda \quad \text{(c-19)}$$
$$12.5 - .03\,x_{21} - 0.03\,x_{22} - 0.03\,x_{23} \geq \lambda \quad \text{(c-20)}$$
$$13 - .04\,x_{31} - 0.04\,x_{32} - 0.04\,x_{33} \geq \lambda \quad \text{(c-21)}$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 400 \quad \text{(c-22)}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 600 \quad \text{(c-23)}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 300 \quad \text{(c-24)}$$
$$3\,(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 2\,(x_{12} + x_{22} + x_{31}) = 0 \quad \text{(c-25)}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 2\,(x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 0 \quad \text{(c-26)}$$
$$4\,(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 3\,(x_{11} + x_{21} + x_{31}) = 0 \quad \text{(c-27)}$$

$x_{ij} \geq 0$ برای تمام مقادیر $i=1, 2, 3$ و $j=1, 2, 3$ (c-28)

و جوابهای بهینه فازی :

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})$$

$$(140, 155, 112.5, 107.778, 316.667, 0, 0, 0, 73.333) \quad \text{(c-29)}$$

و جوابهای بهینه غیر فازی (با استفاده از روش برنامه ریزی خطی) :

$$(133.3, 100, 25, 100, 250, 150, 0, 0, 0) \quad \text{(c-30)}$$