***پیام مدیریت***
شماره ۲۶ ـ بهار ۱۳۸۷
ص‌ص ۳۸ ـ ۲۱

# تحلیل مدل کنترل موجودی "مقدار اقتصادی تولید" با دریافت‌های چندگانه

**سید حمیدرضا پسندیده*** - **علی‌اکبر عالم تبریز****

**چکیده**

مدل "مقدار اقتصادی تولید[۱]" (EPQ)، یکی از مدل‌های کلاسیک کنترل موجودی است که به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل EPQ فرضیات متفاوتی دارد که استفادهٔ آن را در شرایط واقعی محدود می‌کند. مقالهٔ حاضر به توسعهٔ این مدل می‌پردازد و فرض تحویل سفارش با نرخ ثابت و پیوسته را در نظر نمی‌گیرد و فرض می‌کند که سفارش را می‌توان به صورت بسته‌های چندتایی تحویل گرفت. در شرایط جدید، هزینه‌های EPQ محاسبه و مدل‌سازی جدید ارائه می‌شود. هم‌چنین برای محاسبهٔ مقدار بهینهٔ سفارش نیز یک الگوریتم ارائه می‌شود.

**کلید واژه‌ها: مدل EPQ، تحویل چندگانه، بهینه‌سازی.**

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۵/۰۹/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۰۱/۱۵

* استادیار دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه شهید بهشتی

** دانشیار دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه شهید بهشتی

1. Economic Production Quantity:EPQ

## مقدمه

مدل‌های کلاسیک "مقدار سفارش اقتصادی "[1] (EOQ) و "مقدار اقتصادی تولید " (EPQ) به طور گسترده در زمینه‌های متفاوت برای کنترل موجودی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از طرف دیگر، این مدل‌ها شرایط و فرضیاتی دارند که در شرایط واقعی کمتر قابل قبول هستند. به همین دلیل برای استفادهٔ بهتر از نتایج مدل‌های کلاسیک، باید این مدل‌ها را از جنبه‌های متفاوت توسعه داد.

در سال‌های اخیر محققان از جنبه‌های گوناگون مدل EPQ را توسعه داده‌اند. برای مثال، "بایندیر"[2] و همکارانش، مدل EPQ را با شرایط نرخ تولید متغیر در نظر گرفتند. در تحقیقات آن‌ها، هزینهٔ تولید به صورت تابع خطی چند مرحله‌ای از تولید درنظر گرفته شد و با این شرایط، مقدار اقتصادی سفارش را به دست آوردند.

در مدل EPQ فرض می‌شود که فرایند تولید دارای نرخ ثابت و بدون ضایعات است و مسائل کنترل کیفیت در آن در نظر گرفته نمی‌شوند. کولانگ‌هو[3] مدل را در شرایطی بررسی می‌کند که فرایند تولید، فرایند بدون نقص نیست و می‌تواند تولیدات معیوب هم داشته باشد. او هزینه‌های کنترل کیفیت را نیز در مدل تأثیر می‌دهد.

جین‌لی[4] و همکارانش، مدل EPQ را با سفارشات تأخیر شده تحلیل کردند. آنها انواع راهبردهای تأخیر را در مورد یک تولید کننده در یک زنجیرهٔ عرضه تحلیل و تأثیر آن‌ها را در هزینه‌ها بررسی کردند.

سینگاوانگ‌چیو[5] و همکارانش، مدت زمان بهینهٔ یک سیکل را با توجه به ضایعات، دوباره‌کاری و توقف‌های تصادفی فرایند تولید به دست آوردند.

1. Economic Order Quantity: EOQ
2. Bayindir
3. Kuo-Lung Hou
4. Jain-Lee
5. Singa Wang Chiu

آن‌ها مدت زمان بهینه را در یک محدودهٔ دوطرفه ارائه کردند. هم‌چنین، یونگ- فوهانگ[1] وکون- جن‌چانگ[2] مدت زمان بهینهٔ یک سیکل را تحت شرایط مجاز بودن تأخیر در پرداخت‌ها به دست آوردند. در شرایط عادی، در مدل EPQ به محض دریافت سفارش، هزینهٔ خرید آن پرداخت می‌شود. ولی در شرایط واقعی، در پرداخت‌ها امکان تأخیر وجود دارد که به آن "پریود اعتبار" گفته می‌شود. آن‌ها در مقالهٔ خود، تأثیر پریود اعتبار را در مقدار بهینهٔ سفارش بررسی کردند.
دریک‌بیسکوپ[3] و همکارانش و جوی-جونگ‌لیا[4] نیز بر مبنای پریود اعتبار مدل را توسعه داده‌اند.

یکی دیگر از جنبه‌هایی که در توسعهٔ مدل EPQ مورد توجه قرار گرفته است، فازی کردن برخی از پارامترهای آن است. هوی مینگ‌لی[5] و جینگ- شینگ‌یاأ[6] مدل را با شرایط تقاضا و تولید فازی تحلیل کردند. فرض آن‌ها این بود که در وضعیت‌های واقعی، نمی‌توان نرخ تولید و تقاضا را ثابت در نظر گرفت و این پارامترها معمولاً حالت فازی دارند. آن‌ها در مقالهٔ خود به این نتیجه رسیدند که کل هزینه‌های مدل EPQ تحت شرایط فازی، کمی بیش از کل هزینه‌ها در شرایط قطعی است. پینگ- تنگ چانگ[7] و چینگ هسیناگ چانگ[8] نیز مدل را با رویکرد فازی توسعه دادند. آن‌ها هزینهٔ هر واحد تولید را یک پارامتر فازی فرض کردند و به بهینه‌سازی مدل پرداختند. تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامترهای متفاوت نیز در تحقیقات آن‌ها انجام شد. ساهیدال ایسلام[9] و تاپن کومارروی[10] مدل را به صورت

1. Yung-Fu Huang
2. Kun-Jen Chung
3. Drik Biskup
4. Jui-Jung Liao
5. Huey-Ming Lee
6. Jing-Shing Yao
7. Ping-Teng Chang
8. Ching-Hsinag Chang
9. Sahidal Islam
10. Tapan Kumar Roy

برنامه‌ریزی هندسی فازی تحلیل کردند. آن‌ها در مطالعات خود، فضای انبار و پایایی فرایند را به عنوان محدودیت‌های مدل در نظر گرفتند.

## ۱. تعریف مسئله

یکی از مسائل بسیار مهم در شرکت‌هایی که از خدمات پیمانکاران بهره می‌برند، تعیین چگونگی سفارش‌دهی، شامل مقدار سفارش و نقطهٔ سفارش محصولات است. چارچوب اصلی مسئله مورد بررسی در این مقاله عبارت است از این‌که شرکتی برای تولید یکی از محصولات خود با یک پیمانکار ارتباط دارد. شرایط این ارتباط تولیدی بین دو طرف به صورت زیر است:

- پیمانکار محصول را با نرخ ثابت و مشخصی تولید می‌کند؛
- تقاضا برای محصول با نرخ ثابت و مشخصی است؛
- هر سفارش برای محصول، در قالب چند پالت به شرکت ارسال می‌شود؛
- هزینهٔ حمل هر پالت محصول، بر عهدهٔ شرکت است؛
- ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات حمل آن‌ها باید توسط شرکت تعیین شود؛
- هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی و نگه‌داری مقادیر، معلوم و مشخص هستند؛
- کمبود و تأخیر در ارسال مجاز نیست.

هدف از تحلیل مسئله، تعیین مقدار سفارش، نقطهٔ سفارش، ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات حمل برای محصول موردنظر است؛ به طوری‌که کل هزینه‌های مدل موجودی به حداقل برسد و محدودیت‌های مدل نیز ارضا شوند.



## ۳. مدل‌سازی مسئله

با توجه به چارچوب مسئله و ویژگی‌های آن، می‌توان برای مدل‌سازی آن از توسعهٔ مدل EPQ استفاده کرد [Richard, 1993]؛ چون هر دو مدل در شرایط تولیدی قرار دارند، با این تفاوت که در مدل کلاسیک EPQ، سفارش با نرخ ثابت

تولید و سپس تحویل شرکت مورد نظر تحویل می‌شود، ولی در مسئلهٔ مورد بررسی، پیمانکار پس از تولید سفارش، آن را در چند محموله و پالت متفاوت به شرکت تحویل می‌دهد.

برای مدل‌سازی مسئله، پس از تعریف پارامترهای مسئله، نمودار موجودی آن ارائه و سپس با محاسبهٔ هزینه‌ها، مدل مسئله فرموله می‌شود.

**الف) پارامترها**

با توجه به تعریف مسئله و هم‌چنین شرایط مدل EPQ، می‌توان پارامترها را به شکل زیر تعریف کرد:

$Q$: مقدار سفارش محصول

$r_h$: نقطهٔ سفارش محصول

$p$: نرخ تولید محصول

$D$: نرخ تقاضای محصول

$T$: مدت زمان هر سیکل محصول

$T_p$: مدت زمان تولید در هر سیکل محصول

$T_d$: مدت زمان مصرف خالص در هر سیکل محصول

$t$: مدت زمان بین دو حمل متوالی پالت محصول

$L$: مدت زمان تدارک یا تحویل محصول

$k$: ظرفیت پالت محصول

$m$: تعداد دفعات حمل محصول در هر سیکل

$b$: هزینهٔ هر نوبت حمل پالت محصول

$A$: هزینهٔ ثابت سفارش‌دهی هر سفارش محصول

$h$: هزینهٔ نگه‌داری هر واحد محصول در سال

$c$: هزینهٔ تهیه هر واحد محصول

$TH$:کل هزینهٔ نگه‌داری سالانهٔ محصول

$TT$ : کل هزینهٔ حمل سالانهٔ محصول

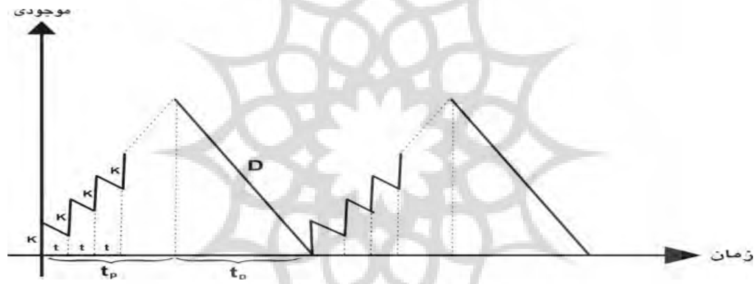
$TB$: کل هزینهٔ تهیهٔ سالانهٔ محصول

$TS$: کل هزینهٔ ثابت سفارش‌دهی محصول

$TC$: هزینهٔ کل سالانهٔ محصول

## ب) نمودار موجودی

با توجه به شرایط مسئله، مدل مسئله تحت بررسی به مدل EPQ نزدیک است. به همین دلیل، شرایط کلی نمودار موجودی با شرایط این مدل یکسان است؛ با این تفاوت که پس از تولید، محصول در هر نوبت در قالب پالت‌های k تایی و m دفعه تحویل داده می‌شود. شکل کلی نمودار موجودی برای محصول در نمودار ۱ ارائه شده است.




شکل ۱. نمودار موجودی مدل

با توجه به نمودار ۱ می‌توان نتیجه گرفت، تنها تفاوت مدل ارائه شده با مدل کلاسیک EPQ، در مدت زمان $T_d$ است. هریک از جهش‌ها در این قسمت، نشان دهندهٔ یک بار تحویل پالت با ظرفیت $k$ می باشد. بدیهی است، تعداد جهش‌ها نشان دهندهٔ تعداد تحویل‌های پالت‌ها در هر سیکل یا $m$ است. برای مثال، چنان‌چه چهار تحویل( $m=4$ ) در هر سیکل وجود داشته باشد، در این‌صورت مقدار سفارش

محصول به اندازهٔ $4k$ خواهد بود. بنابراین، در مدل برای محصول رابطهٔ $Q = mk$ همواره برقرار است.

## محاسبهٔ هزینه‌ها

برای محاسبهٔ هزینه کل سالانه یا TC ، باید اجزای تشکیل دهندهٔ آن را محاسبه کرد. با توجه به مؤلفه‌های هزینه، یک سیستم موجودی TC را می‌توان مطابق رابط زیر بدست آورد:

$$TC = TB + TT + TS + TH \qquad (1)$$

شایان ذکر است، با توجه به این‌که در مدل، هزینه‌های کمبود وجود ندارد، لذا از آن صرف‌نظر شده است. از آن‌جا که نرخ تقاضای سالانه برای محصول کاملاً مشخص است، لذا برای محاسبهٔ $TB$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$TB = cD \qquad (2)$$

بدیهی است، هزینهٔ حمل به تعداد دفعات حمل بستگی دارد. بنابراین، هزینهٔ حمل در هر سیکل به اندازهٔ $mb$ خواهد شد. از طرف دیگر، چون تعداد سیکل‌ها برای هر محصول از رابطهٔ $\frac{D}{Q}$ به دست می‌آید [Richard, 1993]، لذا $TT$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$TT = mb\frac{D}{Q} = \frac{Q}{k}b\frac{D}{Q} = b\frac{D}{k} \qquad (3)$$

چون هزینهٔ ثابت سفارش دهی یک نوبت سفارش محصول $A$ است، لذا به دلیل مشابه رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی به دست می‌آید:

$$TS = A\frac{D}{Q} \tag{4}$$

محاسبهٔ هزینهٔ نگه‌داری مدل نسبت به سایر هزینه‌ها پیچیده‌تر است. با توجه به نمودار ۱، هر سیکل از دو قسمت $T_p$ و $T_d$ تشکیل می‌شود. در قسمت $T_p$، شکل از یک دسته ذوزنقه تشکیل می‌شود که تعداد آن‌ها برای هر محصول به اندازهٔ $m-1$ است. اگر $ls(j)$ نشان دهندهٔ مساحت ذوزنقهٔ شمارهٔ j در این ناحیه باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$ls(1) = (\frac{k+(k-Dt)}{2})t = (\frac{2k-Dt}{2})t \tag{5}$$

$$ls(2) = (\frac{(k-Dt+k)+(2k-2Dt)}{2})t = (\frac{4k-3Dt}{2})t \tag{6}$$

با توجه به الگوی مساحت‌های ذوزنقه، می‌توان رابطهٔ عمومی زیر را برای $ls(j)$ به دست آورد:

$$ls(j) = (\frac{2jk-(2j-1)Dt}{2})t \quad , \; j=1,...,m-1 \tag{7}$$

چنان‌چه ls نشان دهندهٔ کل مساحت ذوزنقه‌ها در سمت چپ سیکل‌ها باشد، در این‌صورت ls مطابق محاسبات زیر به دست می‌آید:

$$ls = \sum_{j=1}^{m-1} ls(j) = (m-1)\frac{Dt^2}{2} + (kt-Dt^2)m\frac{m-1}{2} \tag{8}$$

هم‌چنین، اگر rs نشان دهندهٔ مساحت مثلث سمت راست سیکل باشد، در این‌صورت با توجه به نمودار ۱ رابطهٔ زیر برای rs به دست می‌آید:

$$rs = \frac{1}{2}(Q-(m-1)Dt)(\frac{Q}{D}-(m-1)t) \qquad (9)$$

اگر s نشان دهندهٔ مساحت یک سیکل باشد، در این‌صورت با توجه به روابط ( ۸) و (۹)، s مطابق رابطهٔ (۱۰) به دست می‌آید:

$$s = ls + rs = \frac{1}{2}(\frac{Q^2}{D}-(m-1)mkt) \qquad (10)$$

با محاسبهٔ s به راحتی می‌توان هزینهٔ نگه‌داری مدل را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$TH = \frac{D}{Q}hs = \frac{h}{2}(Q-(Q-k)\frac{D}{P}) \qquad (11)$$

لازم به ذکر است، در محاسبهٔ هزینهٔ نگه‌داری $TH$ ، از روابط $k = pt$ و $Q = mk$ استفاده شده است. باید توجه داشت، چنان‌چه مدل در حالت‌های خاص قرار بگیرد، رابطهٔ ( ۱۱) به نتایج صحیح منجر می‌شود. برای مثال، اگر $Q = k$ باشد، در این‌صورت چون فقط یک دریافت وجود دارد، مدل باید به مدل کلاسیک EOQ تبدیل شود. بنابراین، هزینهٔ نگه‌داری باید مشابه هزینهٔ نگه‌داری مدل EOQ شود که این نتیجه با رابطهٔ (۱۱) سازگار است.

با توجه به روابط (۲)، (۳)، (۴) و (۱۱)، رابطهٔ (۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$TC = cD + b\frac{D}{k} + A\frac{D}{Q} + \frac{h}{2}(Q-(Q-k)\frac{D}{P}) \qquad (12)$$

### د) فرموله کردن مسئله

برای فرموله کردن مسئله باید توجه داشت، پرسش اساسی آن است که مقادیر سفارش و ظرفیت پالت و تعداد دفعات حمل پالت‌ها چگونه باشد تا هزینۀ کل ( ۱۲) حداقل شود و هم‌چنین محدودیت‌های مسئله ارضا شوند. با توجه به ماهیت متغیرهای تصمیم، بدیهی است آن‌ها از نوع عدد صحیح خواهند بود. از طرف دیگر باید توجه داشت که حداقل یک پالت باید تحویل داده شود. بنابراین می‌توان مسئله را به صورت زیر فرموله کرد:

$$\min\ TC = cD + b\frac{D}{k} + A\frac{D}{Q} + \frac{h}{2}(Q-(Q-k)\frac{D}{P}) \tag{13}$$

$$s.t.:$$
$$Q = mk$$
$$m \geq 1$$
$$m,k,Q \quad \text{عدد صحیح}$$

در بخش‌های بعدی مقاله، الگوریتمی برای حل مدل (۱۳) ارائه می‌شود.

### ٤. الگوریتم حل

با توجه به این‌که متغیرهای تصمیم در تابع هدف مدل (۱۳)،متغیرهای Q و k هستند، لذا بدون توجه به محدودیت‌های مدل، مقادیر بهینۀ آن‌ها را می‌توان با مشتق‌گیری به دست آورد. نتایج حاصل از مشتق‌گیری به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h(1-\frac{D}{P})}} \tag{14}$$

$$\frac{\partial TC}{\partial k}=0 \Rightarrow k^{*}=\sqrt{\frac{2bP}{h}} \qquad (15)$$

با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵)، مقادیر بحرانی Q و k به دست می‌آیند. برای اثبات این‌که مقادیر به دست آمده دارای شرایط بهینگی از نوع حداقل برای تابع TC هستند، می‌توان از "ماتریس هشین" استفاده کرد. ماتریس هشین تابع TC که با H(TC) نشان داده می‌شود، به صورت ماتریس زیر خواهد بود:

$$H(TC)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 TC}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 TC}{\partial Q\partial k} \\ \frac{\partial^2 TC}{\partial k\partial Q} & \frac{\partial^2 TC}{\partial k^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2DA}{Q^3} & 0 \\ 0 & \frac{2bD}{k^3} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

با توجه به عناصر ماتریس (۱۶) می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس H(TC) یک ماتریس معین مثبت است و بنابراین، تابع TC تابعی کاملاً محدب خواهد بود. بدین ترتیب، مقادیر روابط (۱۴) و (۱۵) مقادیر حداقل مطلق خواهند بود.

چون مقادیر $Q^*$ و $k^*$ با فرض پیوسته بودن آن‌ها به دست آمده‌اند، لذا نمی‌توانند به عنوان جواب‌های مدل(۱۳) مورد استفاده قرار بگیرند. مطابق مدل ارائه شده، k باید عدد صحیح و Q نیز باید مضرب صحیحی از k باشد. از طرف دیگر، چون تابع هزینه‌ها تابعی کاملاً محدب است، لذا می‌توان انتظار داشت که جواب‌های عدد صحیح در اطراف نقطهٔ بهینه $Q^*$ و $k^*$ متمرکز باشند. بنابراین، جواب‌های عدد صحیح مناسب برای k مقادیر $[k^*]$ و $[k^*]+1$ هستند. $[k^*]$ نسبت به تمام اعداد صحیح کوچک‌تر از $k^*$ در اولویت بالاتری است، چون به $k^*$ نزدیک‌تر است و $[k^*]+1$ نیز از میان تمام جواب‌های عدد صحیح بزرگ‌تر از $k^*$ در شرایط بهتری

قرار دارد. به طور مشابه، در مورد m نیز با توجه به رابطهٔ Q=mk می‌توان مقادیر عدد صحیح $\left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor$ و $\left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor + 1$ را درنظر گرفت.

با توجه به توضیحات ارائه شده، جواب بهینهٔ مدل که با $Q_I^*$ و $k_I^*$ نشان داده می‌شوند، با استفاده از جدول ۱ تعیین می‌شوند.

*جدول ۱. محاسبات برای تعیین نقطهٔ بهینه*

| k | Q | TC |
|---|---|---|
| $\lfloor k^* \rfloor$ | $\lfloor k^* \rfloor \times \left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor$ | $TC_1$ |
| $\lfloor k^* \rfloor$ | $\lfloor k^* \rfloor \times (\left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor + 1)$ | $TC_2$ |
| $\lfloor k^* \rfloor + 1$ | $(\lfloor k^* \rfloor + 1) \times \left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor$ | $TC_3$ |
| $\lfloor k^* \rfloor + 1$ | $(\lfloor k^* \rfloor + 1) \times (\left\lfloor \frac{Q^*}{k^*} \right\rfloor + 1)$ | $TC_4$ |

ستون سوم جدول با استفاده از رابطهٔ (۱۲) به دست می‌آید. بدیهی است، جواب بهینهٔ $Q_I^*$ و $k_I^*$ یکی از چهار سطر جدول ۱ خواهد بود که با مقایسهٔ هزینه‌ها انتخاب می‌شود. چنان‌چه مقدار Q از k کمتر باشد، در این‌صورت برای جلوگیری از کمبود، مقدار m باید برابر یک باشد. به عبارت دیگر، Q برابر k انتخاب می‌شود و گزینهٔ صفر برای m حذف می‌شود. بدین ترتیب، از چهار حالت جدول ۱ تنها دو حالت باقی می‌ماند. با مراجعه به این جدول نیز مشخص می‌شود که تنها سطرهای دوم و چهارم برای بررسی باقی می‌مانند.

لازم به تذکر است که در تحلیل یک مدل کنترل موجودی، علاوه بر تعیین مقدار سفارش، نقطهٔ سفارش نیز باید مشخص شود. یعنی باید تعیین کرد که سفارش براساس چه مقدار موجودی باید انجام شود. برای تعیین نقطهٔ سفارش در هر مدلی باید به مدت زمان تحویل[1] یا پارامتر L توجه کرد. با توجه به نمودار ۱ مشخص است است که چنان‌چه مدت زمان تحویل از مدت زمان $T_d$ کمتر باشد، شرایط نقطهٔ سفارش مشابه مدل‌های EOQ و EPQ خواهد بود [Richard; 1993]. بنابراین، اگر n به صورت $\left[\frac{L}{T}\right]$ تعریف شود، نقطهٔ سفارش به صورت $r_h = D(L-nT)$ خواهد بود.

چنان‌چه باقی‌ماندهٔ مدت زمان تحویل در ذوزنقهٔ آخر از سمت چپ سیکل‌ها یا m-1 باشد، در این‌صورت نقطهٔ سفارش، مشابه مدل EOQ است؛ با این تفاوت که از آن باید به اندازهٔ k کسر کرد. هم‌چنین، اگر باقی‌ماندهٔ مدت زمان تحویل در ذوزنقهٔ ماقبل آخر یا m-2 قرار بگیرد، در این‌صورت از نقطهٔ سفارش باید به اندازهٔ 2k کسر کرد. بنابراین در حالت کلی، اگر باقی‌ماندهٔ مدت زمان تحویل در ذوزنقه j قرار بگیرد، باید از نقطهٔ سفارش به اندازهٔ (m-j)k کسر نمود. بدین ترتیب، با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان نقطهٔ سفارش مدل را تعیین کرد:

$$r_h = \begin{cases} D(L-nT) & , \quad L-nt \le T_d \\ D(L-nT)-(m-j)k & , \quad T_d+(m-1-j)t \le L-nT \le T_d+(m-j)t \ , \ j=1,..,m-1 \end{cases} \qquad (17)$$

در رابطهٔ (۱۷)، t نشان دهندهٔ قاعدهٔ هر ذوزنقه است.

1. Lead Time

## ۱. مثال عددی

برای تشریح حل، فرض کنید اطلاعات عددی مدل به صورت جدول ۲ باشد.

*جدول ۲. اطلاعات عددی مثال*

| پارامتر | A | D | h | P | b | L |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مقدار | ۲۰۰۰ | ۱۰۰۰ | ۲۰۰ | ۲۰۰۰ | ۱۰ | 1 |

تحت چنین شرایطی، مقادیر عددی $Q^*$ و $k^*$ با استفاده از روابط(۱۴) و (۱۵) به ترتیب ۶۳۲/۴۶ و ۴۴/۷۲۱ خواهند بود. بدین ترتیب، برای بدست آوردن مقادیر بهینهٔ $Q_I^*$ و $k_I^*$، جدول ۱ به صورت جدول ۳ خواهد شد.

*جدول ۳. محاسبات برای تعیین مقدار بهینه سفارش*

| k | Q | TC |
|---|---|---|
| ۴۴ | ۶۱۶ | ۶۷۷۴/۰۲۶ |
| ۴۴ | ۶۶۰ | ۶۷۷۷/۵۷۶ |
| ۴۵ | ۶۳۰ | ۶۷۷۱/۵۷۶ |
| ۴۵ | ۶۷۵ | ۶۷۸۵/۱۸۵ |

لازم به ذکر است که در محاسبات مربوط به TC، به دلیل ثابت بودن مقدار CD از آن صرف‌نظر شده است. سطر سوم جدول، با توجه به مقادیر TC، انتخاب شده است و در نتیجه، مقادیر بهینهٔ $Q_I^*$ و $k_I^*$ به ترتیب ۶۳۰ و ۴۵ خواهند بود. بدین ترتیب، سیاست بهینه آن است که در هر نوبت، ۶۳۰ واحد سفارش داده شود که در ۱۴ پالت با ظرفیت ۴۵ تایی تحویل گرفته می شود. با

اتخاذ این سیاست توسط شرکت، انتظار می‌رود که هزینهٔ کل موجودی حداقل شود.

برای تعیین نقطهٔ سفارش نیز با توجه به رابطهٔ ( ۱۷) ، خلاصهٔ محاسبات به صورت جدول ۴ خواهد بود.

*جدول ۴. محاسبات برای تعیین نقطهٔ سفارش*

| T | n | t | $T_d$ | L-nT | D(L-nT) |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۶۳۱ | ۱ | ۰/۰۲۲۵ | ۰/۳۱۵ | ۰/۳۶۹ | ۳۶۹ |

با توجه به مقادیر L-nT و $T_d$ نتیجه گرفته می‌شود که باید از ضابطهٔ دوم نقطهٔ سفارش استفاده کرد. که در صورت استفاده از این رابطه مشخص می‌شود نقطهٔ سفارش در ذوزنقهٔ یازدهم قرار دارد و از D(L-nT) باید 3k کسر کرد. بنابراین نقطهٔ سفارش **۲۳۴** خواهد بود.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، به توسعهٔ مدل EPQ پرداخته شد و علاوه بر مدل‌سازی مدل توسعه یافته، الگوریتمی برای حل آن ارائه شد. این الگوریتم با فرض پیوسته بودن جواب‌ها آغاز می‌شود و سپس با رویکرد جدول ۱، از چهار نقطهٔ براکتی برای به دست آوردن جواب بهینه استفاده می‌شود. یک مثال عددی نیز برای توضیح الگوریتم ارائه شد. برای تحقیقات آینده نیز به می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مدل ارائه شده را می‌توان برای حالت‌های چند محصولی و با وجود محدودیت‌های متفاوت، از قبیل ظرفیت انبار و سرمایه، نیز توسعه داد. در چنین شرایطی، برای به دست آوردن مقدار بهینهٔ سفارش می‌توان از الگوریتم‌های تکاملی استفاده کرد.

- علاوه بر تحویل چندگانهٔ سفارش در قالب پالت‌های متفاوت، می‌توان این شرایط را برای تقاضا نیز در نظر گرفت. یعنی محصول به صورت پالت‌ها و جعبه‌های بسته‌بندی شده در اختیار مشتریان قرار می‌گیرد و ظرفیت هر پالت و تعداد دفعات تحویل در هر سیکل، پرسش‌های مدل هستند.
- در مدل می‌توان ظرفیت پالت را ثابت در نظر نگرفت، بدین ترتیب، پارامتر k با پارامتر $k_i$ جایگزین می‌شود و مدل‌سازی مدل نیز تغییر خواهد کرد.
- تعداد دفعات تحویل را می‌توان متغیر در نظر گرفت، بدین ترتیب، پارامتر m با پارمتر $m_i$ جای‌گزین می‌شود و مدل‌سازی مدل نیز دچار تغییر خواهد شد.

## منابع


1. Biskup, Drik; Simons, Drik, and Jahnke, Hermann (2003), "The Effect of Capital Lockup and Customer Trade Credits on the Optimal Lot Size - A Confirmation of the EPQ". *Journal of Computers and operations research*, Vol. 30, pp. 1509-1524.
2. Lee, Huey-Ming, and Yao, Jing_Shing (1998), "Economic Production Quantity for Fuzzy Demand Quantity and Fuzzy Production Quantity". *Europrean Journal Of Operational Research*, Vol. 109, pp. 203-211.
3. Li, Jain; Wang, Shouyang, and Cheng, T. C. Edwin (2006), "Analysis of Postponement Strategy by EPQ Based Models with Planned Backorders", *The International Journal of Management Science*, Vol. 35, pp. 777-788.
4. Liao, Jui-Jung (2005), " On an EPQ Model for Deteriorating Items Under Permissible Delay in Payments". *Journal of Applied Mathematical Modeling*, Vol**.** 31**,** pp. 393-403.
5. Chung, Kun-Jen, and Huang, Yung-Fu (2003), "The Optimal Cycle Time for EPQ Inventory Model under Permissible Delay in Payments", *International Journal of Production Economics*, Vol. 84, pp. 307-318.
6. Hou, Kuo-Lung (2006), "An EPQ Model with Setup Cost and Process Quality as Functions of Capital Expenditure", *Journal of Applied Mathematical Modeling*, Vol. 31, pp. 10-17.
7. Chang, Ping-Teng, and Chang, Ching-Hsiang (2006), "An Elaborative Unit Cost Structure-Based Fuzzy Economic Production Quantity Model". *Journal of Mathematical And Computer Modeling.,* Vol. 43, pp. 1337-1356.
8. Tersine, Richard J. (1993), *"Principles of Inventory and Materials Management"*, 4th ed., USA: PTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
9. Sahidul Islam, and Roy, Tapan Kumar (2006), "A fuzzy EPQ Model with Flexibility and Reliability Consideration and Demand Dependent Unit Production Cost under a Space Constraint: A Fuzzy Geometric Programming Approach",

*Journal of Applied Mathematics And Computation,*Vol. 176, pp. 531-544.

10. Wang Chiu, Singa; Wang, ,Shan-Ling, and Chiu ,Yuan-Shyi Peter (2006), " Determining the optimal Run Time for EPQ Model with Scrap, Rework, and Stochastic Breakdowns", *European Journal Of Operational Research,* Vol. 180, pp. 664-676.
11. Bayindir, Z. P., Birbil, S.I., and Frenk, J. B. G. (2006), "A Deterministic Inventory/Production Model with General Inventory Cost Rate Function and Piecewise linear Concave Production Costs",*Europrean Journal Of Operational Research*, Vol. 179, pp. 114-123.