اشاره

تحدب خطوط تراز و طراحی هندسی قوس‌ها [۱]

(بخش اول)

مهدی مدیری

عضو هیأت علمی دانشکده نقشه‌برداری

mmodiri@ut.ac.ir

چکیده

طراحی قوس‌ها در تولید نقشه‌های توپوگرافی دقیق مانند طراحی هندسی راه، فتوگرامتری برد کوتاه و شبیه‌سازی‌های پزشکی براساس نوع قوس و متناسب با اهداف طراحی صورت می‌پذیرد. آنچه به برقراری مناسب ارتباط قوسی بین نقاط طراحی مرتبط است، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار می‌باشد.

الگوریتم ارتباط بین نقاط طراحی، اگر به صورت کوتاه‌ترین مسیر باشد به ترکیبی از خطوط شکسته می‌انجامد و اگر لازم است انحنایی داشته باشد به سمت بالا یا پایین و تا چه اندازه است، همواره مورد توجه خاص مهندسین کارتوگراف بوده و متناسب با انتظار کاربران، روش‌های TIN, Fitcurve, Spline راتوصیه کرده‌اند.

هر یک از تکنیکها سهمی هماهنگ با خواسته کاربر در شبیه‌سازی ناهمواری‌ها به عهده دارند.

این مقاله مزیت‌های کاربرد نشانه‌گذاری فاصله‌ی گره‌ای را برای منحنی‌های B-Spline مورد مطالعه وبررسی قرار می‌دهد و فرمول‌هایی را از نظر فاصله‌های گره‌ای برای عملیات متداول B-Spline نظیر درجه گره و مشتق‌گیری ارائه می‌کند.

با استفاده از نشانه‌گذاری فاصله‌ی گره‌ای، Spline چند درجه‌ای[۲] را معرفی می‌نمایدکه منحنی‌های شبیه B-Spline هستند و از قسمتهای چندجمله‌ای یا چند درجه تشکیل یافته‌اند. MD-Splines ژنرالیزاسیونی از منحنی B-Spline می‌باشند. به این مفهوم که اگر قسمتهای منحنی در یک MD-Splines از یک درجه یکسانی برخوردار باشند، MD-Spline به یک منحنی B-Spline تقلیل پیدا می‌کنند.

این بخش به MD-Splines از نوع درجه ۱، ۲، ۳ و همچنین درجه ۱ و n می‌پردازد. MD-Splines دارای پشتیبانی محلی است، از بدنه و ساختار محدبی و خاصیت تقلیلی وارسیون پیروی می‌کند وحداقل C^{n-1} هستند که در این عبارت n کوچکتر از درجات دو قسمت (پاره) منحنی مجاور است.

واژگان کلیدی: فاصله‌ی گره‌ای، درجه گره‌ای، MD-Splines

۱- مقدمه

میزان تحدب و تقعر خطوط ترازی که نقاط هم ارتفاع را بهم متصل می‌کنند، جهت نمایش مناسب ناهمواریها از جمله موارد و مسائلی است که در دانش کارتوگرافی همواره مورد کنکاش و ارائه مدلهای

مختلف است تا امکان بهترین شبیه‌سازی را برآورده سازد. بسیاری از تکنیکهایی که در جهت مشخص کردن میزان تحدب و تقعر بین دو نقطه و به تبع آن، تبدیل خطوط شکسته تراز به منحنی تراز به کارمی‌روند، دارای کاستی‌هایی می‌باشند.

منحنی‌های اسپلین B معمولاً از نظر مجموعه‌ای نقاط کنترل، یک بردار نقطه‌ای و یک درجه مشخص شده‌اند.

اطلاعات گره‌ای را می‌توان برروی یک منحنی اسپیلین B با استفاده از فاصله‌های گره‌ای به عنوان راهی جهت تعیین اطلاعات گره‌ای نسبت به تقسیم کوچکتر سطوح معرفی نمود. (Sederberg, 1998).

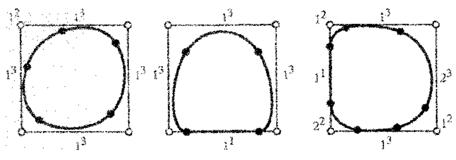
یک فاصله گره‌ای، عبارت است از اختلاف بین دو گره مجاور و یک بردار گره‌ای. یعنی در طول پارامتر یک قسمت منحنی اسپیلین B برای منحنی‌های اسپیلین B که دارای درجه زوج هستند، یک فاصله گره‌ای برای هر نقطه کنترل تخصیص می‌یابد و علت این امر، این است که هر نقطه کنترل در اسپیلین B با درجه زوج هر یک قسمت منحنی همخوانی دارد. برای منحنی‌های اسپیلین B که دارای درجه فرد هستند، یک فاصله گره‌ای برای هر بعد چندضلعی کنترل تعیین می‌گردد؛ زیرا در این مورد هر لبه از چند ضلعی نسبت به یک قسمت منحنی بازنمایی می‌گردد.

در حالی که فاصله‌های گره‌ای در حقیقت یک نشانه‌گذاری جایگزین برای نمایش بردارهای گره‌ای هستند، فاصله‌های گره‌ای امتیازات خوبی را ارائه می‌کنند. برای مثال، نشانه‌گذاری فاصله گره‌ای پیوند نزدیکتری با چند ضلعی دارد تا نشانه‌گذاری برداری گره‌ای. از این رو فاصله‌های گره‌ای مفهوم هندسی بیشتری از بردارهای گره‌ای دارد، زیرا اثر تغییر یک فاصله گره‌ای را می‌توان به آسانی بیشتری پیش‌بینی نمود.فاصله‌های گره‌ای به ویژه برای اسپیلین‌های تناوبی B کاملاً مناسب می‌باشد. (Sederberg, 2003)

استفاده از فاصله‌های گره‌ای برای پیوند دادن اطلاعات گره‌ای به چند ضلعی کنترل، شرایطی را فراهم می‌نماید تا امکانات نوینی، نظیر استفاده از یک چند ضلعی کنترل تکی برای تعیین یک منحنی مرکب که از قسمتهایی بیش از یک درجه به وجود آمده‌اند، را مورد بررسی قرار داد.

این مقاله چنین منحنی قطعه‌ای (قطعه، قطعه‌ای) را معرفی می‌کند و آن را به عنوان اسپیلین‌های چنددرجه‌ای می‌توان نامید.

نگاره (۱) سه نمونه از اسپیلین‌های چنددرجه‌ای را نشان می‌دهد. چند ضلعی کنترل با فاصله‌های گره‌ای عنوان شده است، با زیرنویسی که حاکی از درجه قسمت منحنی نظیر می‌باشد. اسپیلین چنددرجه‌ای در نگاره (1a) از چهار قسمت منحنی مکعبی و یک قسمت منحنی مربعی تشکیل یافته‌اند که مقادیر فاصله‌ای گره‌ای همه آن‌ها ۱ است.



نگاره (۱): مثالهای اسپیلین چند درجه‌ای

c)درجه‌های ۱ و ۲ و۳ b) درجه‌های ۱ و ۳ a) درجه‌های ۲ و ۳

نقطه‌های سیاه برروی منحنی نقاط اتصال بین قسمتهای منحنی را نشان می‌دهد و منحنی‌ها C^1 می‌باشند. نگاره (1b) یک اسپیلین چند درجه را نشان می‌دهد که از سه قسمت مکعبی و یک قسمت خطی تشکیل یافته است. در این مورد، قسمتهای مکعبی C^1 با قسمت خطی هستند.

نگاره (1c) یک اسپیلین چند درجه‌ای با قسمتهای درجه ۱، ۲ و ۳ را نشان می‌دهد، کلیه زوج‌های قسمتهای منحنی مجاور، به جز قسمتهای مکعبی مجاور که C^2 هستند، C^1 می‌باشند.

اسپیلین چند درجه‌ای، ژنرالیزاسیون‌هایی از اسپیلین‌های B هستند. چنانچه وقتی تمامی فاصله‌های نقطه‌ای از یک درجه باشند، اسپیلین چند درجه‌ای به یک اسپیلین B تخصیص می‌یابد. اسپیلین‌های چنددرجه‌ای خصوصیت مطلوب زیادی را، نظیر خاصیت ساختار محدبی و تقلیل‌دهی وارسیون، حفظ می‌کنند. آنها دارای پشتیبانی محلی هستند باهر درجه n قسمت به وسیله n+1 نقطه کنترل مورد پشتیبانی می‌شود. با این وجود، هر نقطه کنترل در یک اسپیلین چنددرجه‌ای از نوع درجه ۱، ۲ و ۳ قادر است که هفت قسمت منحنی را پشتیبانی کند.

ایده و نظریه ساخت اسپیلین‌های بدون درجه یکسان قبلاً پیشنهاده شده است که هدف آن درونیابی (انترپولاسیون) حفظ و نگهداری شکل است. (Costantini, 2000)

در آثار (2000) Costantini، اسپیلین از قسمتهای درجه $n\geq3$ تشکیل یافته است که چند جمله‌ای اساسی آن از یک چهار زیر فضای ابعادی فضای درجه n چند جمله‌ای گرفته است. چنین کاری شبیه یک اسپیلین B مکعبی است، به این معنی که پشتیبانی برای هر قسمت (جزء) چهار نقطه را شامل می‌گردد، در حالی که درجه متغیر به عنوان یک کشش پارامتر که می‌تواند شکل را تعدیل کند، به کار می‌رود.

بخش دوم رابطه بین بردارهای گره‌ای و فاصله‌های گره‌ای را مورد بحث قرار می‌دهد و بیان می‌کند که چگونه عملیات اسپیلین B نظیر درج گره، ضریب ۲ رساندن گره، ترفیع درجه و مشتق‌گیری را می‌توان با استفاده از فاصله‌های گره‌ای بیان داشت. بخش سوم معنی و مفهوم آن چیزی را بیان می‌کند وقتی که بیش از یک فاصله گره‌ای در امتداد یک لبه یا رأس یک چندضلعی کنترل قرار گرفته باشد. بخش چهارم اسپیلین‌های چنددرجه‌ای را بحث می‌کند و بخش پنجم ضمن ارائه چکیده‌ای از مقاله، پرسش‌هایی برای مطالعه بیشتر مطرح می‌سازد. در سراسر این مقاله، این توافق حاصل است که وقتی K فرد باشد، K/2 به مفهوم $[K/2] = (k-1)/2$ می‌باشد.

۲- فاصله‌های گره‌ای

یکی از اهداف مقاله این است که نشان دهد، فاصله‌های گره‌ای امتیازات چندی بر بردارهای گره‌ای برای طراحی منحنی دارد. فاصله‌های گره‌ای حاوی تمامی اطلاعاتی است که یک بردار گره‌ای، به استثنای یک مبداء گره‌ای، دارد. این یک مسئله نیست، زیرا ظاهر یک منحنی اسپیلین B - تحت تبدیل خطی بردار گره‌ای تغییرناپذیر است به عبارتی دیگر، چنانچه به هر گره‌ای ثابتی افزوده شود، ظاهر و نمای منحنی تغییر نمی‌کند. اسپیلین‌های B - در حوزه نظریه تقریبی به وجود آمده است و در ابتدا برای توابع تقریبی به کار برده شد. در این شرایط، مقادیر پارامتر مهم بوده و لذا مقادیر گره‌ای چشمگیر می‌باشند.

به هر حال، در طراحی منحنی و شکل سطح، نبایستی نگران مقادیر مطلق پارامتر بود.

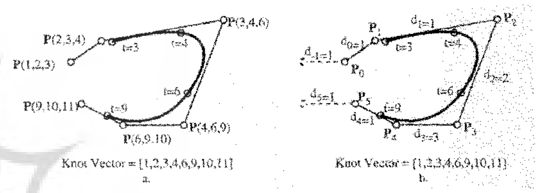
برای منحنی‌های اسپیلین B - با درجهٔ فرد، فاصله گره‌ای di به لبهٔ چندضلعی کنترل pi-pi+1 تخصیص می‌یابد. برای منحنی‌های اسپیلین B - با درجه زوج، فاصلهٔ گره‌ای di به نقطه کنترل pi اختصاص می‌یابد. هر رأس (برای درجه زوج) یا لبه (برای درجه فرد) دقیقاً دارای یک فاصلهٔ گره‌ای است. چنانچه اسپیلین B تناوبی نباشد، فواصل گره‌ای «شرط پایایی» $\frac{n-1}{2}$ باید به هر یک از دو نقطه کنترل پیشین اختصاص یابد. آنها را صرفاً می‌توان مجاور به لبه‌های «خیالی» با رئوسی که همجوار با نقاط کنترل پایانی ترسیم شده

است، نوشته شوند؛ موقعیت‌های هندسی این لبه‌های «خیالی» یا رئوس بی‌اهمیت و جزئی هستند.

نگاره (۲) یک منحنی اسپیلین B مکعبی را نشان می‌دهد. نقاط کنترل در نگاره (2a) با مقادیر قطبی‌نشان داده شده است و نگاره (2b) لبه‌های کنترل چندضلعی با فاصله‌های گره‌ای را نشان می‌دهد. گره‌ها برای شرط انتهایی نیاز دارد که یک فاصله‌ی گره‌ای را از هر انتهای چندضلعی کنترل در جای خود نگه دارد، به رابطه بین بردار گره‌ای و فاصله‌های گره‌ای توجه شود.

هر فاصله‌ی گره‌ای عبارت از اختلاف بین دو گره متوالی در بردار گره‌ای است. برای اسپیلین‌های B – تناوبی، کار ساده‌تر است زیرا نیاز به بررسی شرط انتهایی نیست.

نگاره (۲): نمونه‌ی اسپیلین – B مکعب

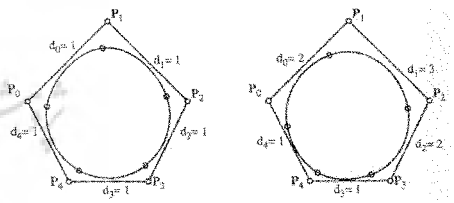


بردار گره‌ای = [1,2,3,4,6,9,10,11]
(a)

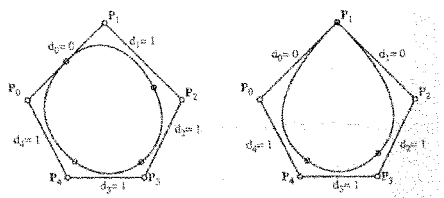
بردار گره‌ای = [1,2,3,4,6,9,10,11]
(b)

نگاره (۳) دو اسپیلین – B تناوبی را که با فاصله‌های گره‌ای مشخص شده، نشان می‌دهد. در این نمونه، توجه شود که وقتی فاصله‌های گره‌ای d1 از ۱ به ۳ تغییر می‌کند، طول قسمتهای منحنی نظیرش افزایش می‌یابد.

نگاره (۳): اسپیلین‌های – B تناوبی با فاصله‌های گره‌ای



نگاره (۴) دو اسپیلین – B تناوبی با یک گره دوگانه (که با تعیین $d_0=0$ بدست می‌آید) و یک گروه سه گانه (با استفاده از مجموعه $d_0 = d_1 = 0$ به دست می‌آید) را نشان می‌دهد.

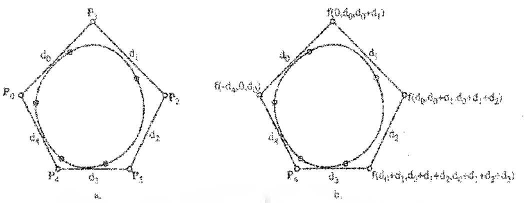


نگاره (۴): اسپیلین – B تناوبی با گره‌های دوگانه و سه گانه

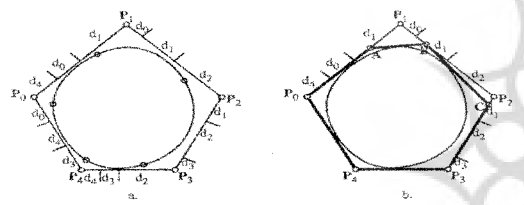
به منظور تعیین فرمول‌هایی برای عملیات نظیر درج گره از لحاظ فاصله‌های گره‌ای، مناسب است که از برچسب‌های قطبی برای نقاط کنترل استفاده کرد. آنگاه جبر قطبی را می‌توان برای ایجاد فرمول‌های مطلوب به کار برد (Ramshaw, 1989). شناسه‌های برچسب قطبی عبارت از حاصل جمع فاصله‌های گره‌ای است. انتخاب هر مبداء گره‌ای امکان‌پذیر می‌باشد. برای مثال در نگاره (۵)، مبداء گره‌ای را انتخاب نموده به گونه‌ای که با نقاط کنترل P_0 منطبق باشد.

تصاویر قطبی که درنگاره (5b) نشان داده شده می‌باشد.

زیربخش‌های زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان درجه گره‌ای و دو نیم کردن فاصله اجرا نمود و همچنین نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از فاصله‌های گره‌ای به محاسبه شتاب‌نما دست یافت.



نگاره (۵): پی بردن به برچسب‌های قطبی از فاصله‌های گره‌ای.



نگاره (۶): درجه گره‌ای برروی یک اسپیلین – B مکعبی.

این فرمول‌هارا می‌توان با استفاده از برچسب‌های قطبی مورد بررسی و اثبات قرار داد. عبارتهایی که برای این عملیات از نظر بردارهای گره‌ای نوشته شده است (Hoschek, Lasser, 1993).

۲-۱- درج گره‌ای

فاصله‌های گره‌ای، روشی برای اجرای درج گره ارائه می‌کند که به راحتی می‌توان آن را به یاد آورد. برای یک اسپیلین – B مکعبی، که با هر لبه P_i-P_{i+1} چند ضلعی کنترل به سه قسمت تقسیم می‌گردد که طول آن متناسب با d_i و d_{i-1} و d_{i+1} همانطور که در نگاره ۶a آمده است. برای یک B-Spline با درجه زوج 2n، هر لبه به 2n قسمت تقسیم می‌یابد که طول آنها متناسب با $d_{i-n},...,d_{i+n-1}$ است و برای یک B-Spline از نوع درجه فرد 2n+1، هر لبه به 2n+1 قسمت تقسیم می‌شود که طول آنها متناسب با $d_{i-n},...,d_{i+n}$ است.

درج گره از حیث فاصله‌های گره‌ای را می‌توان به عنوان یک فاصله گره‌ای در کسری $t\in[0,1]$ نشان داد. برای مثال، فرض کنید که خواسته شود فاصله گره‌ای d_1 در نگاره ۶a در $t = \frac{1}{3}$ تقسیم شود. ابتدا باید هر وقوع d_1 برروی لبه‌های کنترل چندضلعی را پیدا کرد، نقطه کنترلی با $\frac{۱}{۳}$ فاصله در امتداد هر قسمت با مشخصه d_1 درج نمود و نقاط P_1 و P_2 را با C,B,A همانطور که در نگاره ۶b به نمایش درآمده است، جایگزین می‌شود. حذف گره، عکس درج گره است. از این رو، با توجه به چندضلعی کنترل در نگاره ۷b، حذف گره چندضلعی کنترلی در نگاره ۷b را تولید می‌کند. حذف گره فقط وقتی امکان دارد که دو قسمت منحنی مجاور C^r در حالی که r>n-m باشد و در آن n درجه و m تکرار گره باشد. بدین نحو معمولاً امکان اجرای حذف گره وجود ندارد.

گفته می‌شود یک چندضلعی کنترل که توانایی آن را ندارد که به گره‌ای حذف کند در فرم و شکل کمینه است و این فرم کمینه یک چندضلعی کنترل B-Spline وقتی حاصل می‌گردد که کلیه گره‌هایی که امکان دارد، حذف شوند. (Sederberg, 2003)

۲-۲- نصف کردن فاصله

تقسیم مجدد سطوحی نظیر کاتمول - کلارک[۳] مبتنی بر نظریه درج یک گره در نیمه راه بین هر زوج‌گره موجود در یک بردار گره‌ای است. این روش معمولاً به بردارهای گره‌ای متحدالشکل محدود می‌گردد. فاصله‌های گره‌ای به تعمیم یک تکنیک به B-Spline غیر یکدست و متحدالشکل کمک می‌کند.

با استفاده از فاصله‌های گره‌ای می‌توان از این فرآیند به عنوان برش هر فاصلهٔ گره‌ای به نیمه در ذهن خود مجسم کرد. برای یک Spline درجه دوم غیریکنواخت، روش نصف کردن فاصله تعمیمی (ژنرالیزاسیون) از الگوریتم چایکین[۴] است. لیکن تعیین جای نقاط کنترل جدید تابعی از مقادیر فاصله‌ی گره‌ای می‌گردد. چنانچه هر فاصله‌ی گره‌ای به دو نیمه تقسیم گردد، چندضلعی کنترلی که حاصل می‌گردد، تعداد نقاط کنترل دو برابر خواهد بود و مختصات Q_k، همانطوری که در نگاره (۷) به نمایش آمده است به شرح زیر می‌باشد.

$$Q_{2i} = \frac{(d_i+2d_{i+1})\ P_i\ +\ d_i p_{i+1}}{2(d_i+d_{i+1})}$$

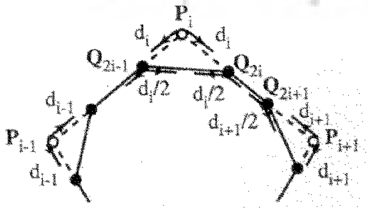
$$Q2_{i+1} = \frac{d_{i+1}\ P_i\ +\ (2d_i+d_{i+1})\ P_{i+1}}{2(d_i+d_{i+1})}$$

روش نصف کردن فاصله، برای منحنی‌های B-Spline تناوبی درجه سوم غیریکنواخت فقط کنترل جدیدی برابر با هر لبه و نقطهٔ کنترل جدیدی برابر با هر نقطه کنترل مبداء تولید می‌کند. معادلات برای نقاط کنترل Q_k که با نصف کردن فاصله به دست می‌آید، همان طور که در نگاره (۸) نشان داده شده به شرح ذیل است:

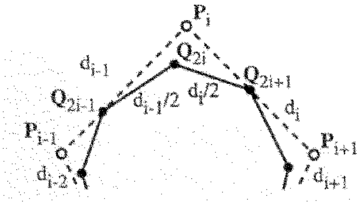
$$Q2_{i+1} = \frac{(d_i\ +\ 2d_{i+1})\ P_i\ +\ (d_i\ +\ 2d_{i-1})\ P_{i+1}}{2(d_{i-1}\ +\ d_i\ +\ d_{i+1})}$$

$$Q_{2i} = \frac{d_i Q_{2i-1}\ +\ (d_{i-1}\ +\ d_i)\ P_i +\ d_{i-1}\ Q2_{i+1}}{2(d_{i-1}\ +\ d_i)}$$

توجه شود که هر فاصله گره‌ای جدید، نصف فاصله اصلی خود است. (Sederberg, 2003)



نگاره (۷): طریقه نصف کردن فاصله برای منحنی B-Spline درجه دوم غیریکنواخت



نگاره (۸): روش نصف کردن برای منحنی B-Spline درجه سوم غیریکنواخت

شتاب‌نما[۵]

مشتق $P(t)$ یک B-Spline شتاب‌نمای آن خوانده می‌شود. شتاب‌نما درجه n، B-Spline $p(t)$ با

فاصله‌های گره‌ای d_i و نقاط کنترل P_i یک B-Spline درجه n-1 با همان فاصله‌های گره‌ای d_i و با نقاط کنترل Q_i می‌باشد که در آن $Q_i = C_i\ (P_{i+1} - P_i)$ خواهد بود.

عامل مقیاس C_i عکس مقدار میانگین فاصله‌های گره‌ای همجوار n است. به ویژه اگر منحنی درجه زوج n=2m باشد، آنگاه

$$C_i = \frac{n}{d_{i-m+1} + \dots + d_{i+m}}$$

خواهد بود و اگر منحنی درجه فرد n=2m+1 باشد، پس عبارت معادله زیر را خواهیم داشت:

$$C_i = \frac{n}{d_{i-m} + \dots + d_{i+m}}$$

افزایش درجه

رامشا[۶] در سال ۱۹۸۹ میلادی با استفاده از فرم قطبی، نظریه‌ای را در افزایش درجه ارائه کرده است. خاصیت تقارن عناوین قطبی نیاز دارند که:

$$g_2\ (a,b) = \frac{f_1(a) + f_1(b)}{2}\ ;$$

$$g_3\ (a,b,c) = \frac{f_2(a+b) + f_2(b,c) + f_2(b,c)}{3}$$

$$g_4(a,b,c,d) = \frac{f_3(a,b,c) + f_3\ (a,b,d) + f_3\ (a,c,d) = f_3\ (b,c,d)}{4}; \text{etc}\ ;$$

باشد که در آن $f_i(...)$ به فرم قطبی i دلالت دارد که از یک چندجمله‌ای یک تغییر یکنواخت درجه‌ای حاصل می‌گردد که بزرگتر از i نباشد و $g_{i+1}(...)$ به مفهوم فرم قطبی (i+1) از همان چندجمله‌ای است.

روش افزایش درجه برروی یک B-Spline تناوبی که بـا اسـتفاده از فـاصله‌های گـره‌ای نـامگذاری شده‌اند، منتهی به دو نتیجه می‌گردد.

– ابتدا، یک نقطه کنترل اضافی برای قسمت و منحنی حاصل می‌گردد.

– دوم، اگر توالی فاصله‌های گره‌ای در آغاز $d_1,d_2,d_3,...$ باشد به توالی فاصله‌های گره‌ای برروی افزایش درجه چندضلعی کنترل $d_1,0,d_2,0,d_3,0,...$ خواهد بود (Ramshaw, 1989).

صفرها باید افزوده گردد، زیرا افزایش درجه موجب می‌شود که درجه هر قسمت منحنی بدون بـالا رفتن پیوستگی بین قسمتهای منحنی افزایش یابد.

افزایش درجه B-Spline، درجه یک ساده است و تنها نیاز دارد که نقطه کنترل جدیدی برروی نقطه میانی چندضلعی کنترل درج گردد. فاصله‌های گره‌ای در نگاره‌های ۹b,۹a نشان داده شده‌اند.

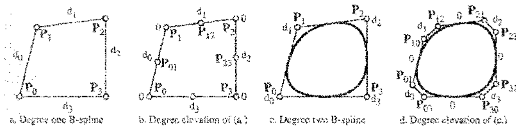
افزایش درجه برای Spline، درجه دوم در نگاره ۱۰c و ۱۰b نشان داده می‌شود.

نقاط کنترل جدید عبارتنداز:

$$P_{i,j} = \frac{(2d_i + 3d_j)P_i + d_iP_j}{3d_i + 3d_j}$$

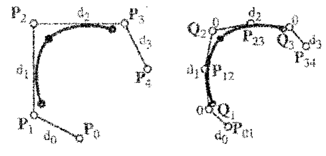
نگاره (۱۰) افزایش درجه را از درجه سوم به چهار را نشان می‌دهد. معادلات برای نقاط کنترل جدید عبارتنداز:

$$P_{i,i+1} = \frac{(d_i + 2d_{i+1})P_i + (2d_{i-1} + d_i)\ P_{i+1}}{2(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})}$$



نگاره (۹): درجه‌ای که B-Spline درجـه یک و درجـه دو راافـزایش می‌دهد.

a) B-spline درجه یک   b) افزایش درجه a   c) B-spline درجهٔ ۲   c) افزایش درجهٔ c



a. Cubic B-spline.   b. Degree elevated.

نگاره (۱۰): درجه‌ای که B-Spline درجه سوم را افزایش می‌دهد.

$$Q_i = \frac{d_i}{4(d_{i-2} + d_{i-1} + d_i)} P_{i-1} + \left(\frac{d_{i-2} + d_{i-1}}{4(d_{i-2} + d_{i-1}\ d_i)} + + \frac{d_i + d_{i+1}}{4(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})} + \frac{1}{2}\right) P_i + \frac{d_{i-1}}{4(d_{i-1} + d_i + d_{i+1})} P_{i+1}$$

ادامه در شماره‌های آینده سپهر

منابع و مآخذ

۱- مدیری، مهدی، خواجه، خسرو (۱۳۸۷) کارتوگرافی مدرن، چاپ پنجم، انتشارات سازمان جغرافیایی، تهران.

۲- مدیری، مهدی (۱۳۸۵)، کارتوگرافی و اینترنت، انتشارات سازمان جغرافیایی، تهران.

3) Costantini, p.(1997) Variable degree polynomial splines . in: Rabut, C., Le Mehaute, A., Schumaker, L.L. (Eds.), Curves and surfaces with applications in CAGD. Vanderbilt University press.

4) Costantini, p (2000) Curve and surface construction using variable degree polynomial splines. Computer Aided Geometric Design 17 (5) 419-446.

5) Hoschek, J., Lasser, D.G (1993) Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. AK peters.

6) Kaklis, P.D., pandelis, D.G(1990) Convexity - preserving polynomial splines of non-uniform degree. IMAJ. Numer Anal. 10, 223-234.

7) Ramshaw, L (1989) Blossoms are polar forms. Computer Aided Geometric Design 6, 323-358.

8) Sederberg, T.W.Zheng,J., Sewell, D., Sabin, M(1998) Non-uniform recursive subdivision surfaces. In: Proceedings of SIGGRAPH 98, pp.387-394.

9) Sederberg, T.W., zheng,J., Song, X (2003) Knot intervals and multi-degree splines, Computer Aided Geometric Design 20 (2003), 455-468.

پی‌نوشت

۱) به منظور نرم کردن خطوط شکسته تراز، که از اتصال نقاط هم ارتفاع، شکل می‌گیرد روشهای مختلف در کارتوگرافی متداول می‌باشد. یکی از آن روش‌ها، Spline می‌باشد که براساس دو محور، یکی استفاده از انترپولاسیون بین قطر مربعی که براساس آن خطوط تراز شکل یافته‌اند و دیگری با تعیین موقعیت ناهمواری از یک منطقه نمونه به تعمیم آن در سطح منطقه می‌پردازد.

2) Multi - Degree Splines (MD-Splines)

3) Catmull - Clark

4) Chaikin's algorithm

5) Hodograph

6) Ramshaw (1989)