مجلّهٔ تاریخ علم، شماره دوم، پاییز۸۳، ص۱۳۷ـ۱۵۸

رساله‌ای در استدلال بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی[۱] منسوب به شرف الدین طوسی (متوفی ۶۱۰ ق)[۲]

فاطمه سوادی

چکیده

حساب شصتگانی که از ارکان حساب دورهٔ اسلامی به شمار می‌رود، علاوه بر محاسبات نجومی، در محاسبات دقیق، مانند به دست آوردن جذر و کعبِ اعداد صحیحِ غیر شصتگانی نیز کاربرد داشته است؛ و ریاضیدانان مسلمان، پیش از ابداع و رواج کسرهای اعشاری، برای نمایش قسمت کسری اعداد از کسرهای شصتگانی بهره می‌جستند.

نظام عددنویسی[۳] و حساب شصتگانی سابقه‌ای بس طولانی در تاریخ ریاضیات دارد. سومری‌ها در حدود ۲۰۰۰ ق.م این نظام عدد نویسی را ابداع کردند و حساب مبتنی بر آن را گسترش دادند.

حساب شصتگانی متشکل از چهار عمل اصلی و استخراج جذر و کعبِ اعداد شصتگانی است. رسالهٔ مورد بررسی در این مقاله -که منسوب به شرف‌الدین طوسی، ریاضیدان بزرگ ایرانی است- دربرگیرندهٔ استدلال بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی، برمبنای تناسب است.

کلید واژه‌ها: حساب شصتگانی، نظام عددنویسی، ارزش مکانی، واحد، مرتبه، ضرب، تقسیم، تناسب.

---

۱. معادل عربی/ انگلیسی: ستّینی/ sexagesimal

۲. نگارنده بر خود فرض می شمارد که غایت امتنان و سپاس خویش را از جناب دکتر عالم زاده، به لحاظ عنایت های مشفقانه و مسؤولانه از آغاز تا انجام نگارش این مقاله، از جناب دکتر جعفری نائینی، برای مطالعه و افزودن سه نکتهٔ مفید بر این نوشتار، و همیاری تمام کارگزاران مجله ابراز دارد.

3. numeration system

نظام عددنویسی شصتگانی

حساب شصتگانی به همراه حساب انگشتی[1] و حساب هندی، ارکان حساب دورهٔ اسلامی را تشکیل می‌دادند (سعیدان، ص ۴۴۳). این حساب مبتنی بر نظام عددنویسی با مبنای ۶۰ است. در نظام عددنویسی شصتگانی واحدِ هر مرتبه، ۶۰ برابرِ واحدِ مرتبهٔ پس از خود، و $۶۰^{-۱}$ برابرِ واحدِ مرتبهٔ پیش از خود است. یک عدد شصتگانیِ خالص را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\ldots a_i \ \ldots a_۱ \ a_۰ \ a_{-۱} \ldots , \ a_i < ۶۰$$

که i نمایانگر توان عدد ۶۰ در هر مرتبه است.

معادل دهگانی یک عدد شصتگانی خالص را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\sum_i a_i \times ۶۰^i$$

در متون حساب و نجوم دورهٔ اسلامی، در حساب شصتگانی، هر مرتبه با نام (واحد) خاص خود مشخص می گردید (برای نمونه نک: اقلیدسی؛ بغدادی؛ کرجی؛ کوشیار؛ و . . .، جاهای مختلف). جدول زیر نشان دهندهٔ نام و ارزش هر مرتبه، طبق آثار اسلامی به جای مانده، است:

. . .	دو بار مرفوع	یک بار مرفوع	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	. . .
. . .	$۶۰^{۲}$	$۶۰^{۱}$	$۶۰^{۰}$	$۶۰^{-۱}$	$۶۰^{-۲}$	$۶۰^{-۳}$	. . .

مطابق جدول بالا، نام مرتبه‌ها با نمای عدد ۶۰ در هر مرتبه (ارزش هر مرتبه) ارتباط معنایی دارد.

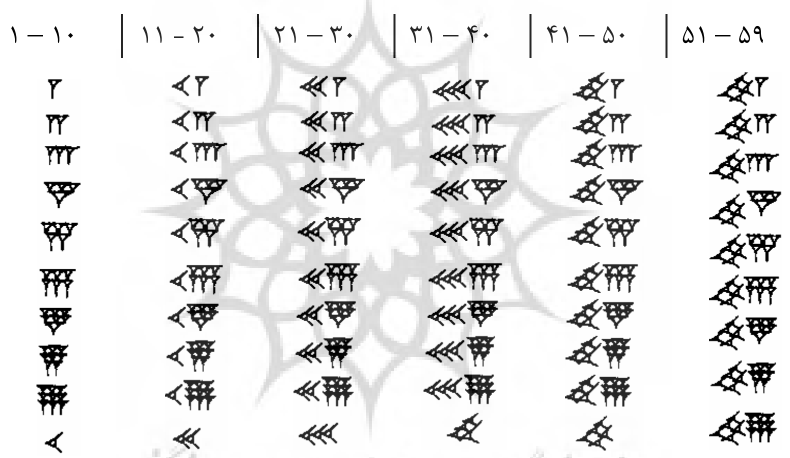
احتمالاً برای نخستین بار سومری‌ها مبنای ۶۰ را در نظام عددنویسی خود به کار

---

۱. الحساب الإصبعی (که آن را حساب الید یا الحساب الهوائی نیز می نامیدند).

برده‌اند (اسمیت، دیوید[۱]، ص ۵۱). شاید علت این امر، استفادهٔ سومری‌ها از عدد ۶۰ و مضارب آن به عنوان عامل تبدیل آحادِ اوزان و مقادیر بوده باشد؛ زیرا عدد ۶۰ شمارنده‌های بسیاری از جمله ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰ و ۳۰ دارد (رنان[۲]، ص ۵۲).

سومری‌ها در نظام عددنویسی متأخرتر خود، تنها از دو نشانه استفاده می کردند: 𒁹 برای یک و 𒌋 برای ده (همانجا). آن ها اعداد ۱ تا ۵۹ را با کنار هم قرار دادن این دو نشانه نمایش می‌دادند، و برای اعداد بزرگتر از ۶۰، از یک نظام ارزش مکانی[۳] پیروی می کردند (اسمیت، کارل جِی.[۴]، p. 104).



جدول نمایش ارقام شصتگانی در عددنویسی سومری (اکانر[۵] و رابرتسون[۶]، p. 1)

---

1. Smith, David
2. Ronan
3. place value system
4. Smith., Karl J.
5. O'Connor
6. Robertson

اکدی‌ها و بابلی‌ها نظام عددنویسی، و اوزان و مقادیر را از سـومری‌هـا اقتبـاس کردنـد (اسمیت، دیوید، ص ۵۱). اهتمام بابلی‌ها در توسعهٔ نظام عددنویسی شصتگانی، به ابـداع کسرهای شصتگانی انجامید (همو، ص ۵۴)؛ شـاید بـه همـین سـبب نظـام عددنویـسی شصتگانی را، نظام عددنویسی بابلی نیز می‌خوانند.

اقوام سومری و بابلی برای صفر نمادی به کار نمی‌بردنـد[1] (سـارتون[2]، p. 99)، و بـرای نمایش مرتبهٔ خالی ، به جای صفر، فاصله‌ای بزرگتر از فاصلهٔ معمول بین مرتبـه‌هـا قـرار می‌دادند (نویگه باور[3]، ص ۲۸)؛ برای مثال در لوح سفالین AO17264 که در موزهٔ لـوور، در پاریس، نگهداری می‌شود، مجذور عدد شصتگانی °۲۷ ; ۲ (۱۴۷=۲۷ + ۶۰ ×۲) بـه صورت زیر نمایش داده شده است (اکانر و رابرتسون، p. 2):

۹ ۰ ۶ = مجذور ۲۷ ۲

به رغم مزایای بسیار نظام عددنویسی سومری، ماننـد آسـان شـدن عملیـات حـسابی، سادگی نمایش کسرها و وجود نقاط ضعفی چون نحوهٔ نمایش اعـداد کوچـک تـر از ۶۰، عدم وجود علامتی برای صفر، و نیز فقدان نشانهٔ خاص برای مشخص نمـودن مرتبـه‌هـا، موجب گردیده تا این نظام فاقد ارزش مکانی کامل باشد؛ هر چند این مـسأله از اهمیـت تاریخی نظام عددنویسی سومری، و نقـش برجـستهٔ آن در گـسترش علـم حـساب نمـی کاهد.

یونانی‌ها ، نظام عددنویسی شصتگانی را فقط برای نمایش قسمت کسری اعداد به کـار می‌بردند. آنان بـرای نـشان دادن اعـداد صـحیح ، و یـا قـسمتِ صـحیح اعـداد، از نظـام

۱. دقیقاً مشخص نیست که علامت صفر از چه زمانی وارد عددنویسی بابلی شده، ولی طبق شواهد موجود، پیش از ۱۵۰۰ ق.م وجود نداشته، در حالی که در حدود ۳۰۰ ق.م کاملاً رایج بوده است. در کتیبهٔ به دست آمده از کیش که اس. لانگدون، آن را متعلق به دورهٔ داریوش کبیر (۵۰۰ ق.م) می داند، چهار بار علامت صفر به کار رفته و یک جا از قلم افتاده است(نویگه باور، ص۳۸).

2. Sarton

3. Neugebauer

عددنویسی دهگانی، به روش افزایشی[۱]، استفاده می کردند؛ یعنی ۲۷ حـرف الفبـا را کـه هر یک نمایندۀ یکی از اعداد ۱ - ۹ ، ۱۰ - ۹۰ و ۱۰۰ - ۹۰۰ بود، بـرای نمـایش اعـداد مختلف، کنار هم قرار می‌دادند. یونانی‌ها برای نمـایش کـسرهای شـصتگانی نیـز همـین نمادها را به کار می‌بردند(برگرن[۲]، ص ۵۳ - ۵۴).

A=۱	I=۱۰	P=۱۰۰
B=۲	K=۲۰	Σ=۲۰۰
Γ=۳	Λ=۳۰	T=۳۰۰
Δ=۴	M=۴۰	Y=۴۰۰
E=۵	N=۵۰	Φ=۵۰۰
Ϝ [ϛ]=۶	Ξ=۶۰	X=۶۰۰
Z=۷	O=۷۰	Ψ=۷۰۰
H=۸	Π=۸۰	Ω=۸۰۰
ϑ=۹	Ϙ=۹۰	Ͳ [ϡ]=۹۰۰

جدول نمایش ارقام شصتگانی در عددنویسی یونانی (هیث[۳]، ص ۲۰)

ریاضی دانان مسلمان نیز با به کارگیری حروف ابجد به عنـوان نمـاد، از همـان شـیوۀ یونانی استفاده می کردند. به طور کلی نظام های عددنویسی مـسلمانان را در سـده‌هـای میانه می‌توان به سه دسته تقسیم کرد (برای توضیح بیشتر، نکـ . همو، ص ۵۴ - ۵۵):

۱. نظـام عددنویـسی دهگـانی ـ شـصتگانی، کـه در آن اعـداد را بـا حـروف ابجـد می‌نوشتند و تنها برای نوشتن کسر ها از نظام شصتگانی تبعیت می شـد (بـرای نمونـه نکـ . اقلیدسی، ص۲۳۱، ۳۷۰-۳۷۹).

۲. نظام عددنویسی هندی، که برای اعداد صـحیح، دهگـانی و دارای ارزش مکـانی کامل بود، ولی در آن نیز برای نمایش قسمت کسری عـدد، از نظـام شـصتگانی تبعیـت می شد و مراتب اعداد شصتگانی با استفاده از ارقام هندی از بالا به پایین مـی نوشـتند

1. additive
2. Berggren
3. Heath

(برای نمونه نکـ . اقلیدسی؛ بغدادی؛ کرجی؛ کوشیار؛ و ...، جا های مختلف).

۳. نظام عددنویسی شصتگانی خالص، که در آن اعداد با حروف ابجد نوشته می شـد و مـورد استفادهٔ منجمان بود(برای نمونه نکـ. قربانی، *کاشـانی نامـه*، ص۸۶-۹۲؛ کینـگ، pp. 317 - 323, 405 - 417).

ظاهراً نخستین مسلمان کـه در موضـوع حـساب شـصتگانیِ خـالص مطـالبی نوشـته، کوشیار بن لبان گیلانی یا جیلی (قرن ۴ ق) است (قربـانی، *کاشـانی نامـه*، ص ۸۶). وی کتابی تحت عنوان *فی اصول حساب الهند* در حدود ۳۹۰ ق تألیف کرده (*دایـرةالمعـارف اسلام*، ذیل "ILM AL-HISAB")، که مقالهٔ دوم آن را بهاین نوع حساب اختـصاص داده است(قربانی، همانجا). از بین آثار مهم دیگر به جا مانـده از دورهٔ اسـلامی کـه بخـشی از آنها به حساب شصتگانی اختصاص دارد، می‌توان از *الفصول فی الحساب الهنـدی*، تـألیف اقلیدسی (حدود سال ۳۴۱ ق در دمشق)؛ *الکافی فی الحـساب*، از کرجـی (متـوفی ۴۱۹ ق)؛ *التکملة فی الحساب* از ابومنصور بغدادی (متوفی ۴۲۹ ق)؛ و *مفتـاح الحـساب* تـألیف غیاث الدین جمشید کاشانی (متوفی ۸۳۲ ق) نام برد.[۱]

ویژگی‌های *رسالة فی البرهان علی الضرب و القسمة*

رساله‌ای که ترجمهٔ فارسی و متن عربی آن در پی می آید، به عقیدهٔ اسـتاد ابوالقاسـم قربانی اثری است از شرف الدین طوسی[۲]، با عنوان *رسـالة فـی البرهـان علـی الـضرب و*

---

۱. لازم به ذکر است که کتاب حساب محمد بن موسی خوارزمی (متوفی ۲۱۰ق) نخستین اثر دورهٔ اسلامی در موضوع حساب هندی به شمار می‌رود. اصل این کتاب به دست ما نرسیده، ولی ترجمـه‌هـای لاتـین آن مربـوط بـه قرن۱۲ میلادی، موجود است و چاپ های متعددی از روی آن ها صورت گرفته است (*دائـره المعـارف اسـلام*، ذیـل "ILM AL-HISAB").بخشی از این کتاب نیز به حساب شصتگانی اختصاص دارد.

۲. این رساله را مرحوم ابوالقاسم قربانی از آنِ شرف الدین طوسی دانـسته و نـام آن را در کتـاب *زنـدگی نامـهٔ ریاضی دانان دورهٔ اسلامی*، ذیل شرح حال شرف الدین طوسی ذکر کرده است؛ با ایـن اسـتدلال کـه شـرف الـدین طوسی را گاه شرف الدین مسعودی نیز نامیده‌اند (قربانی، *زندگی نامه*، ص ۲۷۷)، و ایـن کـه نـام مؤلـف در ابتـدای نسخهٔ خطی " شرف الملة و الدین المسعودی " نوشته شده است (قربـانی، همـان، ص ۲۸۰ ، پانوشـت)؛ امّـا بـه نظـر نگارنده این دلیل کافی به نظر نمی رسد، زیرا در اولین رسالهٔ موجود در همین مجموعهٔ ۶۹۱۱ ، از چغمینـی، و بـه خطِ کاتب همین رسالهٔ مورد بررسی، چنین نوشته شده:

القسمة فی النوع الثالث المذکور فی هذا الکتاب که منظور از " النوع الثالث المذکور فی هذا الکتاب " ، بخش حساب شصتگانی از کتاب التکملة فی الحساب تألیف ابومنصور بغدادی است. این رساله، بخشی (چهار صفحه‌ای) از نسخهٔ خطی شماره ۶۹۱۱ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران را تشکیل می دهد. نسخهٔ مذکور، مجموعه‌ای است شامل هفت رساله، که سومینِ آن ها کتاب *التکملة فی الحساب*، و چهارمین، همین رسالهٔ مطرح در این مقاله است که در رجب سال ۶۷۲ ق کتابت شده است.

ترجمهٔ متن رساله

رساله‌ای دربارهٔ استدلال بر ضرب و تقسیم نوع سوم مذکور در این کتاب[۱]

این رساله را که در باب حساب درجه، دقیقه، ثانیه، . . . می‌باشد، پیشوا و استاد ارجمند و بزرگوار، شرف الملة و الدین مسعودی – خدا او را ببخشایاد – تصنیف نموده است.

بدان که نسبتِ یک به هریک از طرفین ضرب برابر با نسبت عدد دیگر به حاصل ضرب است؛ بنابراین اگر سه را در چهار ضرب کنیم دوازده به دست می آید، و نسبت یک به سه برابر با نسبت چهار به دوازده است. حال که‌این را دانستی می گوییم اگر یکی از طرفین ضرب از مرتبهٔ درجه باشد، مرتبهٔ حاصل ضرب همانند مرتبهٔ عدد دیگر خواهد بود؛ زیرا نسبت یک به درجه برابر است با نسبت هرچیز به مثل آن، که در این

« قال الإمام الأجل البارع، شرف الملة و الدین، مجد الإسلام، محمود بن محمد الچغمینی، رحمه الله . . . »

لذا به نظر می رسد که در این جا عنوان " شرف الملة و الدین " لقبی مشخص برای شرف الدین طوسی (مسعودی) نیست و کاتب آن را برای احترام به کار برده است.

به نظر داور دوم مقاله، این رساله به احتمال زیاد از آن شرف الدین است، چراکه در میان ریاضی دانان دورهٔ اسلامی شخص دیگری با نام مسعودی نمی شناسیم، ار این گذشته قرائن حاکی از آن است که مؤلف خود فرد صاحب نامی بوده که بخشی از اثر بغدادی را تحلیل کرده است.←

به هر حال فعلاً به دلیل موجود نبودن نسخه ی دیگری از این اثر، اثبات یا رد قطعی این انتساب امری دشوار است.

۱. منظور کتاب *التکملة فی الحساب* تألیف ابو منصور عبدالقاهر بن طاهر بغدادی است.

صورت نسبت عدد دیگر به حاصل ضرب برابر می‌شود با نسبت هرچیز به مثل آن، که لازمه اش یکسانی مرتبهٔ عدد دیگر با حاصل ضرب خواهد بود. بنابراین حاصل ضرب درجه در درجه از مرتبهٔ درجه می‌باشد، و [حاصل ضرب درجه] در دقیقه از مرتبهٔ دقیقه، و [حاصل ضرب درجه] در ثانیه از مرتبهٔ ثانیه است و سایر مراتب نیز بر همین قیاس خواهد بود. و [نیز] حاصل ضرب دقیقه در دقیقه، ثانیه خواهد شد؛ چون نسبت یک به دقیقه همانند نسبت دقیقه به حاصل ضرب است و بدین ترتیب حاصل ضرب از مرتبهٔ ثانیه می‌باشد. و [نیز] حاصل ضرب دقیقه در ثانیه از مرتبهٔ ثالثه می‌باشد؛ زیرا نسبت واحد، یعنی درجه، به دقیقه مثل نسبت ثانیه به ثالثه است. و نیز بنا بر قواعد نسبت، حاصل ضرب دقیقه در ثالثه از مرتبهٔ رابعه می‌باشد. و قاعده این است که هم نامِ [مرتبهٔ] مضروب را بر هم نامِ [مرتبهٔ] مضروب فیه بیفزاییم، تا همنامِ[1] مرتبهٔ حاصل ضرب به دست آید؛ و از طریق جدول زیر می‌توانیم همهٔ آن چه را گفتیم دریابیم:

عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	درجه
	عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه
		عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه	ثانیه
			عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه	ثالثه
				عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه	رابعه
					عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه	خامسه
						عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه	سادسه
							عاشره	تاسعه	ثامنه	سابعه
								عاشره	تاسعه	ثامنه
									عاشره	تاسعه
										عاشره

فصلی در تقسیم

بدان که نسبت مقسوم به مقسوم علیه برابر نسبت خارج قسمت به یک است. غرض از

۱. معادل عربی: سمیّ.

تقسیم، تعیین سهم یک شخص از مالِ مقسوم است؛ بنابراین اگر مالی که بناست تقسیم شود دوازده درهم و مقسوم علیه چهار نفر باشد، مراد از عمل تقسیم تعیین بهرهٔ هریک از چهار نفر، از دوازده درهم می‌باشد که عبارتست از سه درهم. پس نسبت دوازده به چهار برابر می‌شود با نسبت خارج قسمت، یعنی سه به یک ، و نسبت دوازده به سه برابر می گردد با نسبت چهار به یک . بدین ترتیب در تقسیم دوازده به چهار، چهار قسمت متساوی در نظر گرفته، به هریک بهره‌ای یکسان می دهیم که عبارتست از سه. حال که حقیقت تقسیم را دریافتیم، می گوییم خارج قسمتِ تقسیمِ درجه بر درجه، [از مرتبهٔ] درجه خواهد بود؛ زیرا نسبت درجه به درجه برابر است با نسبت هر چیز به مثل آن، بنابراین [مرتبهٔ] خارج قسمت همانند [مرتبهٔ] یک می‌شود. و آن [(یعنی خارج قسمت)] زمانی یک بار مرفوع [(یک مرتبه بالاتر از درجه)] می‌شود که مثلاً چهار درجه را بر دو دقیقه تقسیم کنیم؛که در این صورت شکلِ صوریِ تقسیم عبارتست از تقسیم چهار بر دو، و خارج قسمت صوری نیز عددِ دو خواهد بود، و لازم است بدانیم عددِ دو از چه مرتبه‌ای است. پس می گوییم مرتبهٔ مقسوم یک بار از مرتبهٔ مقسوم علیه بالاتر است، بنابراین مرتبهٔ خارج قسمت [نیز] یک بار بالاتر از مرتبهٔ یک می‌شود؛ که در این صورت خارج قسمت شصت برابرِ یک می گردد، بدین ترتیب اگر خارج قسمت را بر شصت تقسیم کنیم، حاصل [از مرتبهٔ] یک خواهد بود، و همین است معنای سخن ما مبنی بر این که در این جا خارج قسمت یک بار مرفوع می‌شود. و [نیز] خارج قسمتِ تقسیمِ درجه بر ثانیه، دو بار مرفوع می گردد؛ زیرا نسبت درجهٔ مقسوم به ثانیهٔ مقسوم علیه برابر است با نسبت خارج قسمت به یک ، بدین ترتیب [مرتبهٔ] خارج قسمت، دو بار بالاتر از [مرتبهٔ] یک، و به عبارت دیگر، دو بار مرفوع می‌شود. و بر همین قیاس خارج قسمتِ تقسیمِ دقیقه بر ثانیه، یک بار مرفوع می‌شود؛ زیرا نسبت دقیقه به ثانیه برابر است با نسبت خارج قسمت به یک ، پس خارج قسمت شصت برابرِ یک، و به عبارت دیگر، یک بار مرفوع می گردد. و قاعدهٔ آن [(یعنی تقسیم)] این است که اگر مقسوم و مقسوم علیه هم مرتبه باشند، خارج قسمت از مرتبهٔ درجه خواهد بود، زیرا آن [(یعنی خارج قسمت)] با یک، هم مرتبه است؛ و اگر مرتبهٔ مقسوم بالاتر از مرتبهٔ مقسوم علیه باشد، خارج قسمت در مرتبه‌ای بالاتر از یک قرار گرفته، مرفوع می گردد، پس اگر

[مرتبهٔ مقسوم] یک بار بالاتر از [مرتبهٔ] مقسوم علیه باشد، خارج قسمت [نیز] یک بار مرفوع می گردد؛ و اگر دو بار بالاتر باشد، خارج قسمت [نیز] دو بار مرفوع می‌شود. پس دفعات مرفوع شدن ها [(بالا رفتن مرتبه‌ها)] برابر است با عدد [اختلاف] مراتب [مقسوم و مقسوم علیه]؛ ولی اگر مرتبهٔ مقسوم پایین تر از مرتبهٔ مقسوم علیه باشد، خارج قسمت در مرتبه‌ای پایین تر از یک قرار می گیرد، حال اگر [مرتبهٔ مقسوم] یک بار [پایین تر باشد]، خارج قسمت [از مرتبهٔ] دقیقه خواهد بود، و اگر دو بار [پایین تر باشد]، خارج قسمت [از مرتبهٔ] ثانیه خواهد بود، و به همین ترتیب ادامه می یابد. هر مرتبه‌ای که بر درجه تقسیم گردد، خارج قسمت از همان مرتبه خواهد بود؛ و خارج قسمتِ تقسیمِ درجه بر درجه، [از مرتبهٔ] درجه؛ و [خارج قسمتِ] تقسیمِ درجه بر دقیقه، یک بار مرفوع؛ و [خارج قسمتِ تقسیمِ درجه] بر ثانیه، دو بار مرفوع می‌باشد، و به همین ترتیب خواهد بود سایر موارد.

[سطر اول و اولین ستون سمت راست جدول زیر به ترتیب نشانگر مرتبهٔ مقسوم و مقسوم علیه است، و محل تلاقی امتداد مرتبه‌های مقسوم و مقسوم علیه، مرتبهٔ خارج قسمت را مشخص می کند.]

مقسوم

مقسوم علیه

	دقیقه	ثانیه	ثالثه	رابعه	خامسه	سادسه	سابعه	ثامنه	تاسعه
دقیقه	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
ثانیه	یک بار مرفوع	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع
ثالثه	دو بار	یک بار مرفوع	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس
رابعه	سه بار	دو بار	یک بار مرفوع	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس
خامسه	چهار بار	سه بار	دو بار	یک بار	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع
سادسه	پنج بار	چهار بار	سه بار	دو بار	یک بار	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث
سابعه	شش بار	پنج بار	چهار بار	سه بار	دو بار	یک بار	درج	دقائق	ثوانی
ثامنه	هفت بار	شش بار	پنج بار	چهار بار	سه بار	دو بار	یک بار	درج	دقائق
تاسعه	هشت بار	هفت بار	شش بار	پنج بار	چهار بار	سه بار	دو بار	یک بار	درج

بررسی محتوای رساله

عنوان رساله به خوبی نشان می دهد که هدف از نگارش آن، بیان استدلالی بر روش ضرب و تقسیم شصتگانی بوده است. در این جا سعی شده با نوشتن مراحل اثبات به زبان ریاضی امروز، مبانی آن مورد بررسی قرار گیرد. در بخش ضرب، طوسی سعی کرده با تبیین مفهومِ تناسب[1] به کمک یک مثال عددی، از آن برای بیان لزوم هم ارز بودن

۱. برای به دست آوردن تصویری مناسب از مفهوم تناسب (نسبة) در آثار قدما، نک: کرجی، ص ۵۸-۹۸؛ کرجی در باب ۱۵، از فصل اول این کتاب که به حساب انگشتی اختصاص دارد، به تعریف مفهوم کلی" نسبة" می

طرفین یک تساوی از نظرِ واحد، بهره گیرد. مراحل اثبات را می‌توان به صورت زیر نـشان داد:

۱. بیان مفهوم تناسب در حالت کلی:

$$\forall a,b,c : a\times b = c \Rightarrow \frac{\square}{a}=\frac{b}{c} \vee \frac{\square}{b}=\frac{a}{c}$$

۲. مثال عددی

$$۳\times۴=۱۲\ \ \text{Ë}\ \ \frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}$$

۳. حکم فرعی اول

$$(a.\ ۶۰^{\circ})\times(b.\ ۶۰^{i}) = c.\ ۶۰^{i}$$

۴. اثبات حکم فرعی اول

$$\frac{۱}{\alpha\times ۶۰^{\circ}}=\frac{۱\times ۶۰^{\circ}}{\alpha\times ۶۰^{\circ}}=\frac{b\times ۶۰^{i}}{c\times ۶۰^{x}}\ \ \text{Ë}x=i$$

۵. حکم فرعی دوم

$$(a\cdot \square)\times(b\cdot \square)=c\cdot \square$$

۶. اثبات حکم فرعی دوم

$$\frac{۱}{a\times ۶۰^{-۱}}=\frac{۱\times ۶۰^{\circ}}{a\times ۶۰^{-۱}}=\frac{b\times ۶۰^{-۱}}{c\times ۶۰^{x}}\ \ \text{Ë}\ \ -۱-\ \ \ x=\circ-(-۱)\ \ \text{Ë}x=-۲$$

وی پس از طرح دو حکم فرعی دیگر و اثبات آن ها به روش فوق، قاعـدهٔ کلـی ضـرب

پردازد (کرجی، ص ۵۸). سپس در باب های متعددی انواع نسبت را شرح می دهد. در این جا برای نمونـه قـسمتی از باب ۲۵ را که با موضوع بحث مرتبط است، عیناً نقل می‌شود (کرجی، ص ۸۶):

«باب نسبة أجزاء الدرج إلیها، و هذا أیضاً فرع من فروع ذلک الأصل. اعلـم أن الدرجـة سـتون دقیقـة. و الدقیقـة ستون ثانیة. و الثانیة ستون ثالثة. و الثالثة ستون رابعة و ینقسم علی هذا إلی الخوامس و السوادس و الثوامن و التواسع و العواشر، و ما بعدها من حوادی عشر و ما یتلوها إلی ما نهایة له فعلی هذا تکون الدقیقة من الدرجة، سـدس عـشرها، و کذلک الثانیة من الدقیقة، و الثالثة من الثانیة، و کل جزء من مرتبة....»

شصتگانی را بیان می نماید؛ یعنی حکم کلی را با استفاده از تعمیم احکام فرعی نتیجه می گیرد.[1] این قاعدهٔ کلی، دقیقاً به همان صورت که بغدادی در بخش ضرب شصتگانی کتاب *التکملة* ذکر کرده، آمده است:

همنامِ مرتبهٔ حاصل ضرب = همنامِ مرتبهٔ مضروب فیه + همنامِ مرتبهٔ مضروب

همنامِ مرتبه‌های درجه، دقیقه، ثانیه، ثالثه و . . . ، به ترتیب ۰، ۱، ۲، ۳و . . . است، که به خوبی وجه تسمیهٔ "همنام"[2] را نشان می دهد.

این قاعده کمابیش به همین صورت در آثار ریاضیدانان مسلمان دیگری چون اقلیدسی (ص۱۲۴)، کرجی (ص ۱۱۳) و کاشانی (مفتاح الحساب، ص ۶۷، به نقل از قربانی، *کاشانی نامه*، ص ۹۶) بیان شده است. کوشیارگیلانی (ص ۵۳) نیز بدون ارائهٔ قاعده به صورت یک عبارت کلی، به کمک جدول به تفهیم قاعدهٔ ضرب شصتگانی پرداخته است.

قاعدهٔ ضرب شصتگانی، مشابه قاعدهٔ امروزی ضرب دو عدد با پایهٔ یکسان وتوان‌های متفاوت است:

$a^i \times a^j = a^{i+j}$: قاعدهٔ امروزی ضرب دو عدد توان دار

---

۱. ارسطو بر آن بود که تعمیم های راجع به صور، به وسیلهٔ استقراء از تجربهٔ حسی گرفته می شوند. او دو نوع استقراء را مورد بحث قرار داد. اولین نوع استقراء، شمارش ساده (simple enumeration) است. در یک استدلال استقرائی با روش شمارش ساده، مقدمات و نتیجه شامل عبارات توصیفی واحدی است. نمونهٔ یک استدلال استقرائی با روش شمارش ساده، چنین است(لازی، ص ۷-۸):

a_1 خاصهٔ P را داراست.

a_2 خاصهٔ P را داراست.

a_3خاصهٔ P را داراست.

∴ همهٔ a ها خاصهٔ P را دارا هستند.

مقایسهٔ مطلب فوق با روش استدلال طوسی، نشان می دهد که وی در استدلال خویش، روش استقراء ارسطوئی نوع اول را به کار بسته است.

۲. کرجی هم العددالسمی به کاربرده: «العدد السمی لمرتبة المضروب» (کرجی ص۱۱۳)

قاعدهٔ کلی ضرب شصتگانی : $(a \cdot \square\square^{i}) \times (b \cdot \square\square^{j}) = c \cdot \square\square^{(i+j)}$

که در رابطهٔ دوم، i و j، بیانگر همنامِ مرتبهٔ مضروب و مضروب فیه است.

نکتهٔ قابل توجه‌این که قاعدهٔ ضرب، برای مراتب بالاتر از درجه بیان نشده است؛ زیرا اگر بنا بود همین قاعده در مورد مراتب بالاتر از درجه نیز صدق کند، لازم می شد مثلاً تفاوت بین هم نام مرتبهٔ ثانیه با هم نام مرتبهٔ دو بار مرفوع مشخص گردد، که ما امروز می دانیم تفاوت آن دو در علامت آنهاست. در حالی که بیان همین قاعده به نحوی کامل تر در *مفتاح الحساب*، به وضوح نشان می دهد کاشانی این تفاوت را دریافته است؛ هرچند وی نیز همنامِ مراتب دقیقه و یک بار مرفوع را عددِ یک می داند(قربانی، *کاشانی نامه*، ص ۹۶). کاشانی می نویسد: «هنگام ضرب دو عدد مفرد[۱] در یکدیگر، اگر هر دو در یک طرفِ درجه واقع باشند، اعدادِ مراتبِ[۲] آن ها را با هم جمع می کنیم، که در این صورت، مجموع برابر است با عددِ مرتبه ی حاصل ضرب در همان طرف. و اگر در دو طرف درجه واقع باشند، تفاضل اعداد مراتب آن ها را حساب می کنیم، که مقدار آن برابر است با عددِ مرتبه ی حاصل ضرب، در طرفی که عدد مرتبهٔ بزرگتر قرار داشت» (همانجا).

شرف الدین در بخش تقسیم نیز، استدلال را با بیان مفهوم تناسب، ولی این بار مطابق با عمل تقسیم، پی می گیرد:

$$\forall a,b,c : a \div b = c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{\square}$$

سپس مؤلف مانند بخش قبل با ذکر یک مثال عددی، به تبیین مفهوم تقسیم و رابطهٔ فوق می پردازد. گام های بعدی وی، در این بخش نیز بیان احکام فرعی و اثبات آنها، و در نهایت قاعدهٔ کلی است. علت مفصل تر بودن این بخش نسبت به بخش قبل، احتمالاً دشوارتر بودن تقسیم در مقایسه با ضرب، و نیز وارد شدن مراتب بالاتر از درجه در عمل تقسیم باشد.

۱. عددی که فقط شامل یک مرتبه از مراتب شصتگانی باشد؛ در مقابل عدد مرکب (قربانی، *کاشانی نامه*، ص ۹۰).

۲. معادلِ دیگری برایِ "همنامِ مراتب"

مؤلف برای بیان تقسیم، سه حالت در نظر می گیرد:

۱. مقسوم و مقسوم علیه، هم مرتبه باشند. در این حالت، خارج قسمت از مرتبهٔ درجه خواهد بود.

۲. مرتبهٔ مقسوم بالاتر از مرتبهٔ مقسوم علیه باشد. در این صورت، خارج قسمت به اندازهٔ اختلاف مرتبهٔ مقسوم و مقسوم علیه، مرفوع می‌شود.

۳. مرتبهٔ مقسوم پایین تر از مرتبهٔ مقسوم علیه باشد، که در این حالت، خارج قسمت کوچک تر از یک می‌شود، و مرتبهٔ آن را اختلاف مرتبهٔ مقسوم و مقسوم علیه، مشخص می کند.

قاعدهٔ تقسیم در آثار دیگر ریاضی‌دانان مسلمان مانند کرجی (ص ۱۱۴) و اقلیدسی (ص۱۲۷) نیز آمده است. گیلانی (ص ۵۵) نیز با ارائهٔ جدول به طور ضمنی قاعده را بیان کرده است.

نتیجه‌گیری

چنین به نظر می رسد که اهتمام برخی از ریاضیدانان مسلمان از قبیل طوسی (مؤلف رسالهٔ مورد بررسی) در تبیین عقلی مفاهیمی چون روش ضرب و تقسیم شصتگانی، سهم بزرگی در ابداع و به کارگیری آگاهانهٔ کسرهای اعشاری در محاسبات ریاضی و نجوم توسط ریاضیدانان بعدی مانند کاشانی داشته است. بنابراین شایسته است که تأثیر این رساله در تکامل علم حساب به ویژه رواج کسرهای اعشاری به جای کسرهای شصتگانی، مطالعه و بررسی شود.

منابع

اسمیت، دیوید یوجین، *تاریخ ریاضیات*، ترجمهٔ غلام حسین صدری افشار، جلد اول، تهران، ۱۳۵۶ش.

اقلیدسی، ابوالحسن، احمد بن ابراهیم، *الفصول فی الحساب الهندی*، چاپ احمد سعیدان، عمان، ۱۹۷۳م.

بِرگرِن، جی. ال. ، *گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی*، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی و

علیرضا جمالی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۴ش.

بغدادی، ابومنصور، *التکملة فی الحساب*، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۶۹۱۱ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران.

رنان، کالین ا. ، *تاریخ علم کمبریج*، ترجمهٔ حسن افشار، تهران، چاپ سوم، سال۱۳۸۲ش.

سعیدان، احمد سعید، «الأعداد و علم الحساب»، *موسوعة تاریخ العلوم العربی*، الجزء الثانی، بیروت، چاپ اول، ۱۹۹۷م.

قربانی، ابوالقاسم، *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۵ش.

همو، *کاشانی نامه*، احوال و آثار غیاث الدین جمشید کاشانی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۸ش.

همو، *نسوی نامه*، تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۰ش.

کرجی، ابوبکر، محمد بن حسن، *الکافی فی الحساب*، شرح وتحقیق از سامی شلهوب، ۱۹۸۶م.

گیلانی، کوشیار، *اصول حساب هندی*، ترجمهٔ محمد باقری، تهران ۱۳۶۶ش.

لازی، جان، *درآمدی تاریخی به فلسفهٔ علم*، ترجمهٔ علی پایا، تهران، ۱۳۶۲ش.

نویگه باور، اوتو، *علوم دقیق در عصر عتیق*، ترجمهٔ همایون صنعتی زاده، تهران، چاپ اول، ۱۳۷۵ش.

هیث، تامس لیتل، *تاریخ ریاضیات یونان*، ترجمهٔ احمد آرام، تهران، چاپ اول، ۱۳۸۱ش.

King, D. A., *Islamic Mathematical Astronomy*, Hampshire, 1993.

Smith, Karl J., *Nature of Mathematics*, Clifornia, 2003.

Sarton, G., *A History of Science*, Harvard, 1952.

O'Connor, J. J. and Robertson, E. F., "*Babylonian numerals* ", http://www.gap.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Babylonian_numerals.html (Website of University of St. Andrews, Scotland), December 2000.

THE ENCYCLOPAEDIA OF ISLAM, 2nd edition, s.v. "ILM AL-

HISAB", By A. I. SABRA, Leiden, 1986

پیوست

رسالة فی البرهان علی الضرب و القسمة فی النوع الثالث المذکور فی هذا الکتاب[1] الذی هو فی حساب الدرج و الدقائق و الثوانی إلی آخره، أنشاها الإمام الأجل الکبیر الأستاد شرف الملة و الدین ***المسعودی*** **رحمه الله**

إعلم أن نسبة الواحد إلی أحد عددی الضرب کنسبة العدد الآخر إلی الحاصل، فإنا إذا ضربنا الثلاثة فی الأربعة حصل إثنی عشر، و نسبة الواحد إلی الثلاثة کنسبة الأربعة إلی إثنی عشر. و إذا عرفت هذا فنقول إذا کان أحد عددی الضرب درجاً، کان الحاصل من مرتبة العدد الآخر؛ لأن نسبة الواحد إلی الدرج نسبة الشیء إلی مثله، فیلزم أن یکون نسبة العدد الآخر إلی الحاصل نسبة الشیء إلی مثله، فیلزم أن یکون العدد الآخر مثل الحاصل. فضرب الدرج فی الدرج درج، و فی الدقائق دقائق، و فی الثوانی ثوانی و علی هذا القیاس. و ضرب الدقائق فی الدقائق ثوانی؛ لأن نسبة الواحد إلی الدقائق کنسبة الدقائق إلی الحاصل، فیکون الحاصل ثوانی. و ضرب الدقائق فی الثوانی ثوالث؛ لأن نسبة الواحد اعنی الدرجة إلی الدقیقة، کنسبة الثانیة إلی الثالثة. و کذلک ضرب الدقائق فی الثوالث روابع، لما عرف من النسبة. و الضابط أن نجمع سمیّ المضروب إلی سمیّ المضروب فیه، فما بلغ فهو سمیّ مرتبة الحاصل، و نعرف جمیع ما ذکرنا فی هذا الجدول.

فصل فی القسمة

إعلم أن نسبة المقسوم إلی المقسوم علیه کنسبة الخارج إلی الواحد. فإن المطلوب بالقسمة طلب نصیب الشخص الواحد من المال المقسوم، فإذا کان المال المقسوم اثنا عشر درهماً و المقسوم

---

۱. **کتاب التکملة فی الحساب**

عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية	دقيقة	درجة
	عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية	دقيقة
		عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة	ثانية
			عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة	ثالثة
				عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة	رابعة
					عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة	خامسة
						عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة	سادسة
							عاشرة	تاسعة	ثامنة	سابعة
								عاشرة	تاسعة	ثامنة
									عاشرة	تاسعة
										عاشرة

عليه أربعة اشخاص، فيطلب بالقسمة معرفة ما يخص كل واحد من الأربعة من الإثنى عشر، و هو ثلثة. فيكون نسبة إثنى عشر إلى الأربعة كنسبة الخارج و هو ثلاثة إلى الواحد، و يكون نسبة إثنى عشر إلى الثلاثة كنسبة الرابعة إلى الواحد. فإنا في قسمة الإثنى عشر على الأربعة نجعل أربعة اقسام متساوية، فيدفع إلى كل واحد قسماً واحداً، و هو ثلاثة. و إذا عرفنا حقيقة القسمة فنقول أن الخارج من القسمة الدرج على الدرج، درج؛ لأن نسبة الدرج إلى الدرج نسبة الشيء إلى مثله، فيكون الخارج من القسمة مثل الواحد. و هو درج مرفوع مرة واحدة مثل أن نقسم أربع درجات على دقيقتين فإن صورة القسمة هي قسمة أربعة على الإثنين و الخارج من قسمة الصورة إثنان، و نحتاج إلى أن نعلم إنهما من أي مرتبة. فنقول رتبة المقسوم فوق رتبة المقسوم عليه بمرة واحدة، فتكون رتبة الخارج فوق رتبة الواحد بمرة واحدة؛ فيكون الخارج ستين مرة مثل الواحد، فإذا قسمنا الخارج على ستين فنخرج من القسمة واحد، فهذا

معنى قولنا أن الخارج من القسمة هنا درج مرفوعة مرة. و يكون الخارج من القسمة الدرج على الثوانى درج مرفوعة مرتين؛ لأن نسبة الدرج المقسوم إلى الثوانى المقسوم عليه كنسبة الخارج إلى الواحد، فيكون الخارج فوق الواحد بمرتين، فيكون درجاً مرفوعاً بمرتين. و على هذا القياس يكون الخارج من قسمة الدقائق على الثوانى درج مرفوعة مرة واحدة؛ لأن نسبة الدقائق إلى الثوانى كنسبة الخارج إلى الواحد، فيكون الخارج فوق رتبة الواحد بستين مرة، فيكون درجاً مرفوعة مرة واحدة. و الضابط فيه أن المقسوم و المقسوم عليه إن كانا فى رتبة واحدة، كان الخارج درجاً لأنه فى رتبة الواحد؛ و إن كان المقسوم اعلى رتبة من المقسوم عليه فالخارج أعلى رتبة من الواحد، فيكون درجاً مرفوعة، فإن كان أعلى من المقسوم عليه بمرة واحدة فيكون الخارج مرفوعاً مرة واحدة، و إن كان بمرتين فالخارج مرفوع مرتين، فمرات[1] الرفع مثل مرات المراتب؛ و اما إن كان المقسوم أدنى رتبة من المقسوم عليه كان الخارج أدنى رتبة من الواحد، فإن كان بمرتبة واحدة فالخارج دقائق، و إن كان بمرتبتين فالخارج ثوانى و على هذا القياس. أى مرتبة قسمت على الدرج فالخارج من هكذا المرتبة؛ و الخارج من القسمة الدرج على الدرج درج، و من قسمة الدرج على الدقائق درج مرفوعة مرة واحدة، و على الثوانى مرفوع مرتين و على هذا القياس.

١. فى المخطوط : فمراد

مقسوم

مقسوم علیه

	دقيقة	ثانية	ثالثة	رابعة	خامسة	سادسة	سابعة	ثامنة	تاسعة
دقيقة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
ثانية	مرفوع مرة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع
ثالثة	مرتين	مرفوع مرة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس
رابعة	ثلاث مرات	مرتين	مرفوع مرة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس
خامسة	أربع مرات	ثلاث مرات	مرتين	مرة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث	روابع
سادسة	خمس مرات	أربع مرات	ثلاث مرات	مرتين	مرة	درج	دقائق	ثوانی	ثوالث
سابعة	ست مرات	خمس مرات	أربع مرات	ثلاث مرات	مرتين	مرة	درج	دقائق	ثوانی
ثامنة	سبع مرات	ست مرات	خمس مرات	أربع مرات	ثلاث مرات	مرتين	مرة	درج	دقائق
تاسعة	ثمان مرات	سبع مرات	ست مرات	خمس مرات	أربع مرات	ثلاث مرات	مرتين	مرة	درج


١٠٢