

## بررسی و تحلیل برهان خلف در دو نظام منطقی قدیم و جدید

دکتر مرتضی حاج حسینی\*

### چکیده

در منطق جدید استلزام منطقی فیما بین مقدمات و نتیجه در هر برهان، همچنین استلزام فیما بین تقيض نتیجه و تناقض حاصل از آن در برهان‌های غیرمستقیم از نوع استلزام مادی است، اما در منطق قدیم از نوع لزومی است، علاوه بر این در برهان‌های غیرمستقیم، پس از فرض این رابطه لزومی، چنین فرض می‌شود که خود نتیجه به نحو اتفاقی به تقيض خود مشروط می‌شود و رابطه اخیر پایه و اساس برهان خلف تلقی می‌شود. در حالی که براساس این تحقیق این رابطه نه تنها اساس برهان خلف نیست، بلکه اولاً زاید است و نیازی به فرض آن نیست، ثانیاً دلیل آن مخدوش است. همچنین نشان خواهیم داد دامنه کاربرد برهان خلف در منطق قدیم فراخ‌تر از حد مجاز فرض شده است. علاوه بر این اولاً کاربرد آن در دستگاه‌های صوری مختلف تابع اثبات سازگاری و تمامیت آن دستگاه است. ثانیاً از آنجا که این برهان بر پایه اصل طرد شق ثالث استوار است در دستگاه‌های صوری چند ارزشی، کاربردی نخواهد داشت.

### واژه‌های کلیدی

استلزام منطقی، برهان، خلف، اصل طرد شق ثالث، دستگاه صوری چند ارزشی.

## مقدمه

برهان در منطق به دو نوع مستقیم (direct proof) و غیرمستقیم (indirect proof) تقسیم می‌شود. در روش مستقیم، برهان را با مقدمات، یعنی گزاره‌هایی که راستی آنها را پذیرفته‌ایم، آغاز می‌کنیم و سپس با کاربرد قواعد استنتاج به نتیجه مطلوب می‌رسیم. اما در روش غیرمستقیم، برهان را با نقیض مطلوب شروع می‌کنیم، سپس چنانچه از جمع نقیض مطلوب با مقدمات، که راستی آنها را پذیرفته‌ایم، تناقضی به دست آید درستی استدلال را به استناد این تناقض و بدهت بطلان آن نتیجه می‌گیریم. برهان غیرمستقیم را برهان یا قیاس خلف (به فتح خاء) یعنی برهان یا قیاسی که کلام را به محال سوق دهد نیز می‌نامند.

استفاده از برهان خلف به گذشته‌های بسیار دور برمی‌گردد. ارسطو اولین کاربرد آن را به زنون نسبت می‌دهد (8 / P. 15). بسیاری از استدلال‌های سقراط در مکالمات افلاطون بر این برهان استوار است و شاید نخستین مفهوم واژه دیالکتیک، احاله به محال باشد (9 / P. 15). منطق دانان مسلمان نیز در مواضع متعددی این برهان را با عنوان قیاس خلف مورد بحث قرار داده،<sup>(۱)</sup> در اثبات برخی مسائل نیز از آن بهره برده‌اند. ابن سینا تلفظ آن به ضم خاء را که صرفاً به مواعید اختصاص دارد اشتباه دانسته است (۲/ص ۱۱۴) و متأخران نیز آن را پذیرفته‌اند. در منطق جدید نیز این برهان صورت خاصی از احاله به محال (reductio ad impossibile یا reductio ad absurdum) تلقی شده است.

## رابطه مقدمات و نتیجه در صورت برهان‌های درست

در منطق جدید، درستی یک صورت برهان براساس روش مبتنی بر قواعد (syntactical method) بدین معنی است که نتیجه از مقدمه یا مقدمه‌ها به کمک قاعده‌های استنتاج به دست می‌آیند که در این صورت قضیه وابسته به آن نیز نمونه صادق خواهد بود. بنابراین اگر صورت برهان درست

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

را داشته باشیم می‌توان با n بار کاربرد، دلیل شرطی قضیه وابسته آن را، که در آن  $\supset$  معرف استلزام مادی (material implication) است، به شرح ذیل به دست آورد:

$$\vdash A_1 \supset (A_2 \supset \dots (A_n \supset B))$$

بنابراین روشن است که استلزام منطقی فیما بین مقدمات و نتیجه در صورت برهان‌های درست در منطق جدید از نوع استلزام مادی است، اما در منطق قدیم به نوع استلزام منطقی فیما بین مقدمات و نتیجه در استدلال‌های درست تصریح نشده است. لذا باید براساس دلایل و شواهد معتبر به تعیین نوع استلزام فیما بین مقدمات و نتیجه پردازیم. در منطق قدیم، گزاره شرطی به دو نوع اتفاقیه و لزومیه تقسیم شده است و بنابر تحقیقات انجام شده هیچ‌یک از این دو نوع بر استلزام مادی منطق جدید قابل تطبیق نیست (۳/ ش ۱۲)، بنابراین استلزام منطقی در منطق قدیم باید براساس یکی از دو نوع استلزام اتفاقی یا لزومی تحلیل شود:

اتفاقیه عامه دارای سمانتیکی ویژه است به گونه‌ای که صدق تالی آن تنها شرط صدق آن به شمار می‌آید، چه تالی در ارتباط با مقدم باشد و چه در ارتباط با مقدم نباشد؛ لذا قاعده‌های اثبات مقدم و رفع تالی در آن جریان ندارد و بهره‌گیری از آن در تبیین استلزام منطقی مفید نیست.

علاوه بر این شواهدی وجود دارد بر اینکه استلزام منطقی مذکور از نوع استلزام لزومی است:

۱- در منطق قدیم براساس رابطه تداخل، صدق هر گزاره کلی مستلزم صدق گزاره جزئی متداخل در آن است و کذب هر گزاره جزئی مستلزم کذب گزاره کلی متداخل در آن است و به لزومی بودن این استلزام تصریح شده است. (۲)

۲- در منطق قدیم رابطه بین نقیض نتیجه و تناقض حاصل از آن در برهان خلف به نحو لزومی تلقی شده است. (۳)

بنابراین استلزام منطقی فیما بین مقدمات و نتیجه در منطق قدیم از نوع لزومی است. لذا امر تحویل هر استدلال درست به ترکیب شرطی باید با بهره‌گیری از آن انجام شود.

رابطه نقیض نتیجه و تناقض حاصل از آن در صورت برهان‌های غیرمستقیم در منطق جدید، درستی یک صورت برهان براساس روش مبتنی بر صدق و کذب (semantical method) بدین معنی است که محال است مقدمه‌ها صادق و نتیجه کاذب باشد. این تعبیر، پایه و اساس برهان غیرمستقیم را تشکیل می‌دهد. به بیان دیگر برهان خلف اثبات حکم از طریق ابطال نقیض نتیجه است و بر پایه دو اصل الف) طرد شق

ثالث، ب) امتناع تناقض، استوار است. بنابراین اگر صورت برهان درست زیر را داشته باشیم:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$$

و خواهیم آن را به طریق خلف اثبات نماییم می‌گوییم: اگر استنتاج B از مقدمات  $A_1$  تا  $A_n$  درست نباشد، استنتاج نقیض آن به استناد اصل طرد شق ثالث باید درست باشد، آنگاه چنانچه نقیض نتیجه در ترکیب با مقدمات که صدق آنها مفروض است به تناقض بینجامد می‌توان به استناد اصل امتناع تناقض به صدق خود نتیجه حکم نمود و شکل کلی آن چنین خواهد بود:

(۱)	$A_1$	ف	
(۲)	$A_2$	ف	
(۳)	$A_3$	ف	
	⋮		
(n)	$A_n$	ف	
(n+۱)	$\sim B$	ف	
	⋮		
(m)	$C \& \sim C$		
(m+۱)	$\sim B \supset (C \& \sim C)$	د.ش	(n+۱) و m
(m+۲)	$\sim (C \& \sim C)$	م.ق	
(m+۳)	$\sim \sim B$	ر.ت	(m+۱) و (m+۲)
(m+۴)	B	ن.م	(m+۳)

چنانکه مشاهده می‌شود علامت  $\supset$  در سطر «(m+۱)» از نوع استلزام مادی است. اما در منطق قدیم برهان غیرمستقیم به‌عنوان یکی از قیاس‌های مرکب شناخته شده است که مشتمل بر دو قیاس اقترانی شرطی و استثنایی به شرح ذیل است:

#### \* قیاس اقترانی شرطی

صفری: (۱) اگر استنتاج نتیجه از مقدمات درست نباشد، استنتاج نقیض آن از همان مقدمات درست است.

کبری: (۲) اگر استنتاج نقیض نتیجه از همان مقدمات درست باشد به محال می‌انجامد. (۴)  
نتیجه: ۰/۰ اگر استنتاج نتیجه از مقدمات درست نباشد به محال می‌انجامد. که مبنای  
فرض صغری امتناع ارتفاع نقیضین یا همان اصل طرد شق ثالث است.

### \* قیاس استثنایی

مقدمه اول: اگر استنتاج نتیجه از مقدمات درست نباشد به محال (تناقض یا تضاد) می‌انجامد.  
مقدمه دوم: لکن محال (تناقض یا تضاد) صادق نیست.  
نتیجه: ۰/۰ چنین نیست که استنتاج نتیجه از مقدمات درست نباشد. که مبنای صدق  
مقدمه دوم امتناع اجتماع نقیضین یا متضادین است.

چنانکه ملاحظه می‌شود منطق دانان قدیم چگونگی استناد به اصل طرد شق ثالث  
برای فرض نقیض نتیجه و مفاد سطرهای « $n+1$ » تا « $m$ » و نیز سطر « $m+1$ » را به زبان  
طبیعی و در قالب قیاس اقترانی شرطی تبیین نموده‌اند و از آنجا که استلزام مادی در  
منطق قدیم شناخته شده نیست، استلزام در سطر « $m+1$ » را باید یکی از دو نوع اتفاقیه یا  
لزومیه تلقی نمود که اگر آن را از نوع اتفاقیه فرض نماییم و علامت « $\dashv$ » را برای متصله  
شرطی اتفاقی قرارداد نماییم، می‌توان آن را به صورت ذیل نشان داد:

$$(m+1) \quad \sim B \dashv (C \& \sim C)$$

اما باید به خاطر داشت که:

اولاً: اتفاقیه حاصل به دلیل کذب تالی کاذب خواهد بود.

ثانیاً: با توجه به عدم جریان قاعده اثبات مقدم و رفع تالی در اتفاقیه عامه، استنتاج  $B \sim \sim$   
نیز در سطر « $m+3$ » غیرممکن می‌گردد.

ثالثاً: چنانکه قبلاً بیان کردیم بوعلی بر لزومی بودن این استلزام تصریح نموده است.

بنابراین باید اذعان نمود که این استلزام از نوع لزومی است و چنانچه علامت « $\Rightarrow$ » را  
برای رابطه لزومی قرارداد نماییم می‌توان آن را به صورت ذیل نشان داد:

$$(m+1) \quad \sim B \Rightarrow (C \& \sim C)$$

صدرالمتألهین به این مطلب، با تأکید بر مفروض بودن نقیض نتیجه و استنتاج تناقض  
از آن به عنوان لازم آن، یعنی کاربرد برهان شرطی با توسل به شرطی لزومی و رفع نقیض  
نتیجه به دلیل بطلان تناقض حاصل، یعنی کاربرد قاعده رفع تالی تصریح نموده است. (۵)

تحلیل صوری سایر سطرهای برهان غیر مستقیم در منطق قدیم در مورد قیاس استثنایی یاد شده نیز روشن است که منطق دانان قدیم مفاد سطرهای « $m+1$ » تا « $m+4$ » را در مقایسه با منطق جدید، به زبان طبیعی و در قالب قیاس استثنایی بیان نموده‌اند. علاوه بر این، اولاً: با توجه به اینکه مبحث قضایا در منطق قدیم با منطق محمولات آغاز می‌شود و در منطق محمول‌ها، گزاره‌ها مسؤرنده استناد به اصل امتناع اجتماع متضادین را نیز جایز شمرده‌اند. در حالی که در منطق جدید، منطق گزاره‌ها پایه و اساس سایر بخش‌ها محسوب می‌شود و نیازی به فرض این اصل نیست.

ثانیاً: آنها در ادامه تحلیل خود از برهان خلف، یک بار دیگر دلیل شرطی را اعمال نموده‌اند و درستی نتیجه را از فرض نقیض آن استنتاج کرده‌اند و در مقام تحلیل چگونگی صدق «اگر  $B$  - آنگاه  $B$ » با توجه به اینکه در لزومیه، لازم کاذب جز کاذب نمی‌تواند باشد، آن را از نوع لزومی ندانسته‌اند.<sup>(۶)</sup> علاوه بر این در مواضع دیگری نیز گزاره «اگر  $B$  - آنگاه  $B$ » را در حالت لزومی متضمن خلف و کاذب دانسته‌اند.

الف) منطق دانان قدیم، برای حفظ کلیت متصله لزومیه، دو حالت را با قید «احوالی که با استلزام مقدم نسبت به تالی منافات ندارد» خارج کرده‌اند (۱/ ص ۲۷۳، ۲۷۴) و (۵/ ص ۱۱۵، ۱۱۶) و (۶/ ص ۲۱۴، ۲۱۵)، یکی حالتی که در آن مقدم فرض شده در حالی که تالی معدوم است، یعنی مقدم به شرط عدم تالی فرض شده و دیگری حالتی که مقدم در آن فرض شده در حالی که تالی موجود است، ولی مقدم مستلزم آن نیست. از اینجا به دست می‌آید که اگر به نحوی، نقیض تالی در موضع مقدم قرار گیرد و صورت  $B \Rightarrow (B \sim \& \dots)$  حاصل شود، متصله لزومیه کاذب خواهد بود. یعنی:  $B \Rightarrow B \sim B$  هرگز صادق نیست.

ب) اشتراط عدم جواز تناقض مقدم متصله لزومیه با تالی آن صریحاً بر کذب متصله لزومیه  $B \Rightarrow B \sim B$  دلالت دارد (۵/ ص ۲۰۶).

اما همین ترکیب «اگر  $B$  - آنگاه  $B$ » را در حالت اتفاقی « $B \sim B$ » به شرط صدق تالی صادق دانسته‌اند.<sup>(۷)</sup> و با اعتقاد به مشابهت ساختار متصله جزئیة اتفاقیة عامه با متصله کلیة اتفاقیة عامه، همین نظر را در مورد گزاره «قد یكون اذا كان ليس كل حمار ناهق فكل حمار ناهق» اظهار داشته و آن را صادق دانسته‌اند.<sup>(۸)</sup> بر این اساس منطق دانان قدیم در مقام تحلیل چگونگی استنتاج خود نتیجه از نقیض آن، نتیجه را به نحو اتفاقی به نقیض آن مشروط نموده‌اند و سپس نتیجه را براساس تعریف اتفاقیة عامه از آن استنتاج کرده‌اند.<sup>(۹)</sup> بوعلی این توضیح را اساس درستی کاربرد برهان خلف دانسته است.<sup>(۱۰)</sup>

بر این اساس ترتیب سطرهای برهان خلف از سطر « $m+1$ » به بعد بتأیر تعبیر منطق قدیم چنین می‌شود:

$(m+1)$	$\sim B \Rightarrow (C \& \sim C)$	د.ش	$(n+1), m$
$(m+2)$	$\sim (C \& \sim C)$	ق.م	
$(m+3)$	$\sim \sim B$	ر.ت	$(m+1), (m+2)$
$(m+4)$	$B$	ن.م	$(m+3)$
$(m+5)$	$\sim B \mid B$	د.ش	$(n+1), (m+4)$
$(m+6)$	$B$	ت.ع	$(m+5)$

### ارزیابی تحلیل منطق قدیم در مورد برهان خلف

۱- محال منطقی مشتمل بر تناقض و براساس شروط صدق استلزام مادی مستلزم هر گزاره‌ای است. (16 / P. 336) اما غفلت بوعلی و متأخران وی از محال منطقی و احکام ویژه آن و به تبع کاربرد واژه «محال» در معنی «خلاف واقع» و مبنا قرار دادن جهان کنونی (actual world)، همچنین غفلت از استلزام مادی و نیز استلزام اکید (strict implication) از یک طرف و بحثی که در باب کیفیت انعقاد قضایای لزومیه ارائه نموده‌اند و مثالهای لزومیه را در یکی از انواع استلزام معنایی (entailment)، شرطی علی (causal conditional) و شرطی خلاف واقع (counterfactual conditional) منحصر نموده‌اند (۳/ش ۱۲)، از طرف دیگر، موجب داوری آنان به کذب  $B \Rightarrow \sim B$  شده است. بر همین اساس منطق دانان قدیم با استناد به اینکه «از امر محال تنها محالی که رابطه لزومی با محال اول داشته باشد لازم می‌آید» در مقام تحلیل چگونگی استنتاج خود نتیجه از نقیض آن، در برهان خلف، نتیجه را به نحو اتفاقی به نقیض آن مشروط نموده‌اند و آن را از نوع لزومی نشمرده‌اند.

۲- حکم منطق قدیم به کذب  $B \Rightarrow \sim B$  که مبنای تلقی اشتراط در سطر « $m+5$ » به نحو اتفاقی گردید، حکمی ناصواب است، زیرا گزاره «عدد ۲ زوج نیست» نیز یکی از مصادیق محال در معنی خلاف واقع است که علاوه بر آن مشتمل بر تناقض نیز می‌باشد و گزاره متناقض هم براساس قواعد پذیرفته شده در منطق جدید و هم براساس قواعد پذیرفته شده در منطق قدیم مستلزم هر گزاره‌ای است.

بر این اساس اگر بگوییم «اگر این سینا درباره برهان خلف سخن نگفته است، این سینا درباره برهان خلف سخن گفته است» و آن را از نوع لزومی به حساب آوریم، کذب گفته‌ایم. اما اگر بگوییم «اگر عدد ۲ زوج نیست عدد ۲ زوج است» و آن را از نوع لزومی به حساب آوریم جمله صادقی اظهار داشته‌ایم، زیرا «در جمله اول مقدم کاذب صرف و خلاف واقع (و نه متناقض) است و هیچ جمله کاذب صرفی به نحو لزومی مستلزم جمله صادقی نیست. ولی در جمله دوم، مقدم نه تنها کاذب و خلاف واقع، بلکه متناقض است و گزاره متناقض مستلزم هر گزاره‌ای است. بنابراین هیچ حکم قطعی معینی درباره ارزش متصله لزومیه  $B \Rightarrow B$  نمی‌توانیم صادر کنیم.

۳- علاوه بر این باید توجه داشت که فرض  $B \sim$  در سطر « $m+1$ » با کاربرد دلیل شرطی حذف شده است، لذا سطر « $m+5$ » زاید است، چه رسد به اینکه یگانه اساس و پایه کاربرد برهان خلف تلقی شود.

۴- اگر استدلالی معتبر باشد، بدون شک برای اثبات آن می‌توان از برهان خلف استفاده نمود، اما اگر اعتبار آن استدلال مورد تردید باشد، برای سنجش درستی و اعتبار آن نمی‌توان از برهان خلف استفاده کرد و ادعا نمود که اگر نتیجه از مقدمات به دست نیاید باید به حکم اصل طرد شق ثالث، نقیض آن از آن مقدمات به دست آید، مگر اینکه به تناقض منتهی شود. چون ممکن است آن نتیجه اصلاً در ارتباط با آن مقدمات نباشد. بنابراین ارزش برهان خلف برای سنجش اعتبار استدلال‌ها مطلق نیست.

به بیان دیگر یکی از تفاوت‌های اساسی بین برهان مستقیم و غیرمستقیم این است که برهان مستقیم مستلزم این پیش‌فرض نیست که نتیجه‌ای که به دنبال آن هستیم معنی‌دار و محصول مقدمات است، در صورتی که در یک برهان غیرمستقیم، معنی‌دار بودن نتیجه و حصول آن از مقدمات را پیش‌فرض می‌کنیم و بر همین اساس با فرض نقیض آن براساس اصل طرد شق ثالث به جست‌وجوی تناقض می‌پردازیم.

این نکته در منطق قدیم مغفول مانده و گاهی برای سنجش درستی و اعتبار استدلال‌ها از برهان خلف استفاده شده است و در قالب زبان طبیعی (natural language) که در آن صورت منطقی گزاره‌ها از شفافیت و روشنی برخوردار نیست، آنچه حاوی تناقض نبوده تناقض شمرده شده و به استناد آن به اثبات مطلوب حکم شده است. مثلاً علامه حلی در مقام اثبات قاعده عکس در متصله موجه از برهان خلف استفاده نموده و



گزاره «قد لایکون اذا کان اب فاب» را متضمن تناقض دانسته است (۴/ ص ۹۶). البته ناگفته نماند که خواجه نصیرالدین طوسی در شرح اشارات به لزوم تعین نتیجه، با توجه به اینکه برهان خلف از فرض نقیض نتیجه آغاز می‌شود، تصریح کرده است، اما در صورت عدم تعین نتیجه فرض آنچه در مظان نتیجه است را برای جریان برهان خلف کافی شمرده است.<sup>(۱۱)</sup> فخر رازی نیز پس از بیان برخی شکوک برهان خلف، فرض قضیه‌ای اعم از آنچه در مظان نتیجه است را جایز شمرده، این شکوک را مردود دانسته است (۹/ ص ۱۶۰، ۱۵۹).

### دو ارزیابی دیگر از برهان خلف

۵- کاربرد برهان خلف در دستگاه‌های صوری مختلف تابع اثبات سازگاری و تمامیت آن دستگاه است. یعنی اگر در یک دستگاه صوری، امکان تناقض نفی نشده باشد، نمی‌توان با فرض نقیض نتیجه و حصول تناقض به درستی استنتاج حکم نمود، چراکه ممکن است تناقض حاصل، نه از فرض نقیض نتیجه، بلکه از خود آن دستگاه ناشی شده باشد، همچنین اگر تمامیت یک دستگاه صوری اثبات نشده باشد و امکان وجود مسائل غیرقابل حل در آن نفی نشده باشد، برهان خلف، کارایی خود را از دست می‌دهد. زیرا ممکن است مسأله‌ای از نوع مسائل غیرقابل حل در آن دستگاه صوری باشد. در این صورت پیش‌فرض درستی استنتاج و معنی‌دار بودن نتیجه در ارتباط با مقدمات، امکان‌پذیر نخواهد بود.

مطالعه تاریخی نشان می‌دهد که هرچند گوتلب فرگه در سال ۱۷۸۹ (برای اولین بار) پس از قالب‌ریزی ریاضیات با زبانهای صوری و منطوق‌های قیاسی و به‌کارگیری آن در کتاب اصول ریاضیات توسط راسل و وایتهد (در سالهای ۱۹۱۳-۱۹۱۰)، منطوق‌گرایی (logicism)، فرضیه‌ای که فرگه و راسل ارائه نمودند، مدعی شد تمامی ریاضیات قابل تحویل به منطوق است. یعنی می‌توان تمامی مفهوم‌های ریاضی را با تعریف‌های صریح از مفهوم‌های منطقی و نیز همه قضیه‌های ریاضی را با استنتاج منطقی محض از اصل‌های موضوع منطقی به دست آورد، اما در سال ۱۹۱۳، ل.ئی. جی. بروئر (Brouwer, L.E.J) ریاضیدان هلندی و پایه‌گذار عقیده شهودگرایی (intuitionism)<sup>(۱۲)</sup> تلاش نمود تا باره براینی که براساس اصل طرد شق ثالث، درستی صورت برهان‌ها را می‌سنجیدند،

برهان خلف را مورد تردید قرار دهد. (Hilbert, D.) پس از وی دیوید هیلبرت (Hilbert, D.) ریاضیدان آلمانی که با الهام از تفکرات فلسفی کانت، برنامه صورت‌گرایی (formalism) (۱۳) ریاضیات را تدوین نمود، تلاش کرد تا با اثبات اینکه «ریاضیات کلاسیک از تناقض مبرا است و شامل مسائل غیر قابل حل نیست» به دفاع از برهان خلف بپردازد و تردیدهایی را که در مورد برهان خلف ایجاد شده بود از میان بردارد. (۱۱/ص ۱۰۷) در سال ۱۹۳۱ گودل با اثبات ناتمامیت (incompleteness) دستگاه‌های صوری اصل موضوعی و نیز رد امکان صورت‌بندی (formalization) اثبات مطلق پایان‌پذیر (finitistic) سازگاری (consistency) علم حساب، نظریه هیلبرت را نقد کرد (۱۳/ص ۹۳-۹۱). این کشف گودل حاوی پیامی سلبی و مستلزم اثبات محدود بودن زبان صوری است. بدین معنی که تعقل و سیر اندیشه انسانی برای اثبات گزاره‌ای نمی‌تواند تماماً صورت‌بندی شود و استدلال‌هایی وجود دارند که به وسیله استنتاج صوری قابل اثبات نیستند در حالی که با استفاده از استدلال‌های فوق ریاضی غیر صوری (informal) قابل اثبات است.

۶- برهان خلف بر پایه اصل طرد شق ثالث استوار است و اعتبار آن تابع اعتبار این اصل می‌باشد. بنابراین، این برهان در دستگاه‌های صوری چندارزشی کاربردی نخواهد داشت. مطالعه تاریخی نشان می‌دهد که در سال ۱۹۲۰-۲۱ امیل پست (Post, E.L.) در آمریکا و لوکاسیویچ (Lukasiewicz, J.) در لهستان هر یک به‌طور مستقل به تأسیس منطق صوری چند ارزشی پرداختند. در منطق دو ارزشی هر یک از گزاره‌ها تنها دارای یکی از دو ارزش صدق (true) یا کذب (fals) هستند و ارزش هر یک از گزاره‌های:  $\sim p$ ،  $(p \& q)$ ،  $(p \vee \sim p)$ ،  $(p \vee q)$  به شرح زیر می‌باشد:

p	$\sim p$	q	$p \& q$	$p \vee q$	$p \vee \sim p$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F

اما در منطق سه ارزشی هر گزاره، صادق، کاذب و یا نامعین (indetermine) است. ماتریس‌های متقابل گزاره‌های فوق به این شرح است:

p	~P	q	p&q	p∨q	p∨~p	p⇒q
T	I	T	T	T	T	T
T	I	I	I	T	T	I
T	I	F	F	T	T	F
I	F	T	I	T	I	T
I	F	I	I	I	I	I
I	F	F	F	I	I	I
F	T	T	F	T	T	T
F	T	I	F	I	T	T
F	T	F	F	F	T	T

براساس منطق چند ارزشی  $p \sim \sim p$  با  $p$  تفاوت دارد. اما ارزش  $p \sim \sim \sim p$  یکی است و به جای اصل طرد شق ثالث، اصل طرد شق چهارم را داریم (۱۱/ص ۱۰۸، ۱۰۹):

$$(p \vee \sim p) \vee (\sim \sim p)$$

این موضوع در حوزه‌های گوناگونی قابل بحث است. مثلاً در بسیاری از پرسشنامه‌ها پاسخ سؤالات را چنین جدول‌بندی می‌کنند:  بله  نه  نمی‌دانم

همچنین مطالعه قوانین حقوقی نشان می‌دهد که قوانین حقوقی انگلستان اصل طرد شق ثالث را رعایت می‌کند. بدین ترتیب که بی‌گناهی متهم را مادامی که جرم وی اثبات نشده است می‌پذیرد، اما قوانین اسکاتلند به یکی از قضاوت‌های «بی‌گناه»، «گناهکار» و «جرم اثبات نشده» حکم می‌کند. یعنی در اسکاتلند تبری از گناه معادل اثبات بی‌گناهی نیست.

### نتیجه‌گیری

۱- بنابر تحلیل منطق قدیم، استلزام فیما بین نقیض نتیجه و تناقض حاصل از آن در برهان خلف از نوع لزومی و استلزام فیما بین نقیض نتیجه و خود نتیجه از نوع اتفاقی است. در این تحلیل براساس ملاکهای منطقی داوری نشده است.

۲- در منطق قدیم، استفاده از برهان خلف برای سنجش درستی و اعتبار استدلال‌ها مجاز شمرده شده است. در حالی که با توجه به امکان عدم ارتباط هر یک از دو طرف

نقیض با مقدمات یک استدلال، امکان استفاده از این برهان، که در آن معنی دار بودن نتیجه و حصول آن از مقدمات پیش فرض می‌شود، برای سنجش و اعتبار استدلال‌ها مجاز نیست.

۳- کاربرد برهان خلف در دستگاه‌های صوری مختلف تابع اثبات سازگاری و تمامیت آن دستگاه است.

۴- برهان خلف بر پایه اصل طرد شق ثالث استوار است و اعتبار آن تابع اعتبار این اصل می‌باشد. بنابراین، برهان خلف در دستگاه‌های چندارزشی کاربرد نخواهد داشت.

### پی‌نوشت

۱- از جمله می‌توان به بحث ابن‌سینا در فصل سوم از مقاله هشتم و فصل چهاردهم از مقاله نهم بخش قیاس کتاب شفا، همچنین بحث وی در کتاب دانشنامه علائی و کتاب نجات، بحث شیخ شهاب‌الدین سهروردی در کتاب تلویحات، بحث قطب‌الدین شیرازی در کتاب درةالتاج، بحث خواجه‌نصیرالدین طوسی در کتاب شرح اشارات و کتاب اساس الاقتباس، بحث سهلان ساوی در کتاب بصائرالنصیریة و بحث علامه حلّی در کتاب جوهرالنضید و بحث ملاصدرا در جلد اول اسفار و نیز در لمعة اول از اشراق سادس کتاب لمعات المشرقین اشاره نمود.

۲- و قد علمت فيما سلف ان الكلية اذا صدقت، صدقت الجزئية الداخلة معها و لازمها و اذا كذبت الجزئية كذبت الكلية و لازمها (۱/ ص ۳۷۲).

۳- فان الشرطيات ليس صدقها، صدق المقدم او التالي، بل صدقها حال اللزوم و اكثر الشرطيات المستعمله في العلوم اذا استعمل قياس الخلف بهذه الصنقه فان مقدماتها تكون محاله ثم لا يقال لكونها محالة المقدمات و التوالى انها كاذبة (۱/ ص ۲۷۳).

۴- شیخ اسماعیل کلنبوی در کتاب البرهان پس از بیان تألیف قیاس خلف از دو قیاس اقترانی و استثنایی، عبارت کاتبی در شمسیه مبنی بر تألیف قیاس اقترانی از دو گزاره متصله و حملیه را مورد انتقاد قرار داده، آن را مشتمل بر دو گزاره متصله دانسته است (۱۰ / ص ۳۷۶ و ۳۷۵).

۵- فیرجع ذلك الى الاستدلال بانتفاء اللازم على انتفاء الملزوم، فيجعل الشرطية بحسب الوضع الفرضي و نفی لازمه جميعاً موجباً لبطلان الفرض (۷/ ص ۳۸۶).

۶- و لانقول عسی انا اذا احدنا نقیض الحق، لم یصدق معه الصادق الاخر اذ یلزم عن كل كذب كذب ما (۱/ ص ۲۶۹).

۷- والاخر علی انّ الحق ان يكون موجوداً في نفسه مع كون الباطل مفروضاً و هذا دائم الصدق حتى انّ قولنا: كلما كان الانسان غيرناطق اي بالفرض، فالانسان ناطق اي في نفسه حق (۱/ص ۲۷۲).

۸- و يقال انه محال، فانما يقال حيث يلزم من شيء باطل و اما ان يكون باطل بوضع فيوجد الحق معه في نفسه حقاً، ليس انه يكون لازماً ان يكون حق عن فرض ذلك حقاً، فليس في ذلك بأس و لاالكلام بمحال (۱/ص ۲۶۹).

۹- فانما اتما نقيس قياس الخلف و نضيف الحق الذي كان موجوداً الى نقيضه (۱/ص ۲۶۹).

۱۰- و لولا هذا لكان لايمكننا ان نقيس قياس الخلف مع انفسنا (۱/ص ۲۶۹).

۱۱- والخلف في المطالب التي لم يتعين بعد لايفيد تعيين المطلوب لانه مبني على نقيض المطلوب و ذلك يقتضي تعيينه و ربما يتفق في هذا الموضوع ان يوضع بدل المطلوب غيره مما يظن انه هو و يبني الخلف عليه (۸/ص ۲۸۵).

۱۲- شهودگرایی عقیده‌ای است که ال.ای.جی. بروئر و پیروانش ابراز داشتند و حرف اساسی آنان این است که یک موجود ریاضی با خاصیت معین تنها هنگامی وجود دارد که برهانی ساختنی برای وجود آن بتوان ارائه کرد. در نتیجه با این عقیده «بی‌نهایت بالفعل» از ریاضیات حذف می‌شود و تنها مجموعه بی‌نهایت‌های شما را به‌عنوان بی‌نهایت بالقوه پذیرفته می‌شود. از این گذشته قانون طرد شق ثالث نیز طرد می‌شود، به این معنی که در مورد رده‌های بی‌نهایت، ابطال یک حکم کلی به‌خودی خود دلیل اثبات نقيض آن که قضیه‌ای وجودی است نمی‌شود (۱۲/ص ۵۴).

۱۳- صورت‌گرایی برنامه دیوید هیلبرت و پیروان اوست. مبني بر اینکه تنها مبانی لازم برای ریاضیات صورت‌بندی آن است و به‌دست دادن یک برهان با روشهای متناهی که نشان دهد نظام ساخته شده سازگار است (۱۲/ص ۴۲).

## منابع

- ۱- ابن سینا، الشفاء، المنطق، ج ۲، منشورات مکتبه آية‌الله مرعشی نجفی، قم، ۱۴۰۴ ق.
- ۲- ابن سینا، الشفاء، المنطق، ج ۴، منشورات مکتبه آية‌الله مرعشی نجفی، قم، ۱۴۰۴ ق.
- ۳- حاج حسینی، مرتضی. «بررسی و تحلیل گزاره‌های شرطی و شروط صدق آنها در منطق ابن سینا»، مجله پژوهشی دانشگاه اصفهان، شماره ۱۲.

- ۴- حلی. جوهرالنضید، انتشارات بیدار، قم، ۱۳۶۲.
- ۵- رازی، قطب‌الدین. شرح مطالع، انتشارات کتبی نجفی، بی تا.
- ۶- رازی، قطب‌الدین. *تحریر القواعد المنطقیه فی شرح رساله شمسیه*، منشورات الرضی زاهدی، قم، ۱۳۶۳ ق.
- ۷- صدرالمآلهین، الحکمة‌المتعالیه فی الاسفار الاربعه، داراحیاء التراث العربی، بیروت، ۱۹۸۱ م.
- ۸- طوسی، خواجه نصیرالدین. شرح اشارات و تنبیهات ابن‌سینا، ج اول، فی المنطق، دفتر نشر کتاب، ۱۴۰۳ ه ق.
- ۹- فخر رازی. شرح اشارات موجود در کتابخانه مجلس، شمارهٔ قفسه ۳۹۸۵.
- ۱۰- کلنبوی، شیخ اسماعیل. کتاب البرهان، تصحیح فرج‌الله زکی‌کردی، مطبعة السعاده، مصر، ۱۳۴۷ ه ق، موجود در کتابخانهٔ دانشکده الهیات دانشگاه تهران به شماره ۱۴۰۲۱.
- ۱۱- گوداستاین، آر.ال. «اثبات به وسیلهٔ برهان خلف»، ترجمهٔ بهمن هاشمی در کتاب *فلسفهٔ ریاضی با نظارت و مقدمهٔ حسین ضیائی*، مرکز ایرانی مطالعهٔ فرهنگ‌ها، تهران، ۱۳۵۹.
- ۱۲- موحد، ضیا. *واژه‌نامهٔ توصیفی منطق*، پژوهشهای علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، تهران، ۱۳۷۴.
- ۱۳- ناگل، نیوتن و تارسکی. *برهان گودل و حقیقت و برهان*، ترجمهٔ محمد اردشیر، انتشارات مولی، تهران، ۱۳۶۴.
- 14- Goodstein, R. L. (1965). *Essays in the philosophy of mathematics*, Leicester: Leicester university press.
- 15- Kneal W & G. (1962). *Development of logic*, oxford.
- 16- Lewis, C. L. (1918). *Survey of symbolic logic*, Berkely and Los Angeles, university of California press.
- 17- Mendelson, E. (1987). *Introduction to Mathematical logic*, third edition, Wadworth, California.