تئوری موسیقی وکیهان‌شناسی باستانی

ارنست جی مک کلین (Ernest G. Mc Clain)

ترجمه: ابوالفضل حُری

ویرایش و بازنویسی و توضیح اصطلاحات موسیقایی: دکتر مصطفی کمال پورتراب

[تلخیص]

در بین‌النهرین باستان، موسیقی، ریاضیات، هنر، علم، مذهب و فانتزی شاعرانه (poetic fantasy) همگی به صورت مجموعه‌ای از معارف درهم تنیده شده بودند. در حدود سه هزار سال پیش از میلاد، سومریان، خط میخی را، که با آن به ثبت ادعیه در معابد خدایان می‌پرداختند، همراه با نظام اعدادی که بر مبنای شصت بود تکمیل کردند. خدایان سومری هر یک با عددی شناخته می‌شدند و همچنین نخستین نسبت‌های فاصله‌های موسیقی در آن زمان با این اعداد مشخص می‌شد، به طوری که نقش و عملکرد خدایان و اعداد مربوط به آنها با تئوری آکوستیکی (acoustical theory) مطابقت می‌کرد. بدین ترتیب می‌توان گفت که سومریان الگوی صوتی ریاضی (tonal arithmetical) گسترده‌ای را برای جهان ابداع نمودند.

در این تمثیل (allegory) گسترده که دارای پیامدهای با اهمیت است، جهان فیزیکی توسط همانندی (analogy) شناخته می‌شود و خدایان نه فقط به قدرت‌های طبیعی، بلکه به درک شهودی غیر دنیوی الگوهای ریاضی و نیروهای روان شناختی نیز الوهیت می‌بخشند. نشانه‌گذاری نمادهای ریاضی به خط میخی که به وسیله سومریان ابداع شد، به صورت کامل در محاسبات استادانه بابلی‌ها که در هزاره دوم دارای قدرت سیاسی بودند مورد استفاده قرار گرفت.

تعداد نشانه‌های نت نویسی (notation) که در طرح‌های آشنا برای چشم توزیع شده است چندان زیاد نبود، به همین علت عمل به یادسپاری آن نشانه یا نمادها چندان مشکل‌آفرین نیست. در بین‌النهرین اسطوره، نمودی عینی و ذاتی داشت، به عنوان مثال وظایف مهم خدایان را به عنوان «رویدادها» در جدول ضربی که به عنوان یک ماتریکس (matrix) روی خشت‌های سومری نشانه‌گذاری شده است می‌توان مشاهده کرد. یونانیان باستان بر اساس این تمثیل دو هزار ساله سومری/بابلی دست به تلخیص تمام مفاهیم صوتی گویا زدند. فقط آن چه که باقی می‌ماند این است که از این تمثیل اسطوره‌زدایی می‌شود. وانگهی چون اساطیر مذهبی هندی، چینی، بابلی، یونانی، عبری و اروپایی از منابع و شمارش اعداد سومری استفاده می‌کنند، لازم می‌آید که الهیات نیز از دیدگاه علم موسیقی مورد مطالعه قرار گیرد. اگر علم را به مثابه دانش و فلسفه را خرد و خردمند دوستی در نظر بگیریم، آنگاه ابداع تئوری موسیقی آشکارا از جمله عظیم‌ترین ره‌آوردهای علمی و فلسفی محسوب می‌شود.

تئوری موسیقی چه وقت، کجا و چگونه به وجود آمد؟

اگر فرض کنیم که انسان کرومانیون[1] (Cro - Magnon) صدا را با همان بیولوژی (biology) ایجاد می‌کرد که ما واجد آن هستیم، ابنای بشر در برخورداری از حس شنوایی باید دارای پیشینه پنجاه هزار ساله باشد. تئوری موسیقی به

عنوان علم صوتی (acoustic) همگام با تعریف فاصله‌ها یا فاصله میان اصوات زیر و بم بر اساس نسبت اعداد صحیح یا اعداد شمارشی - که به طور سنتی ابداع آن را به فیثاغورس در قرن ششم قبل از میلاد نسبت می‌دهند - پا به عرصه وجود می‌گذارد.

تا قرن شانزدهم بعد از میلاد - یعنی زمانی که وین‌چن‌زو گالیله (Vincenzo Gailei) پدر گالیله، موسیقی‌دان معروف - درصدد برآمد که بعضی از تجربیات منتسب به فیثاغورس را آزمایش کند، کسی متوجه نشد که این تجربیات بی‌اساس بوده یا نتایج اشتباه داشته است. امروزه به برکت مطالعات باستان شناختی (archaeological) و زبان شناختی، آگاهی و دانش ما درباره فرهنگ‌های کهن‌تر از فرهنگ یونان به صورت چشمگیری فزونی یافته است؛ این امر سبب می‌شود که ابداعات خسته‌کننده فیثاغورس را کنار گذاشته و به نقل داستانی باورپذیرتر که قهرمانانی ناشناخته دارد و حوادث آن در میان ملل دیگر روی داده است بپردازیم. داستان من درّ بین‌النهرین به وقوع می‌پیوندد. به این ترتیب که در حداقل هزار سال و شاید دو هزار سال قبل - پیش از آن که خردمندان یونانی از میان اسطوره‌های خود به تکوین آن چه که امروزه علم نامیده می‌شود بپردازند - تئوری سیستم فیثاغورسی در ریاضیات و اسطوره‌شناسی در بین‌النهرین شناخته شده بود.

آن چه که در بین‌النهرین باستان بسیار شگفت‌آور است در هم ذوب شدن همه جانبه‌ای است که امروزه آن را به صورت چند موضوع مختلف: موسیقی، ریاضیات، هنر، مذهب، و فانتزی شاعرانه تفکیک می‌کنیم. به این ذوب شدگی و درهم تنیدگی کسی جز افلاطون که وارث آن بود توجهی نکرد. اظهار نظر سقراط درباره اصول کلی تحقیقات علمی در کتاب هفتم جمهوری افلاطون به همراه تمثیل‌های هارمونیک (harmonical allegories) که دقیقاً در کتاب‌های هشتم و نهم ادامه می‌یابد، منظور مرا از این درهم تنیدگی روشن می‌کند. نخستین نمونه‌های به دست آمده از بین‌النهرین که کلید راه گشایی برای شناخت این سرزمین است نحوه برخورد سقراط را از قصه‌اش به نام مایهٔ خنده الهگان[۲] هنر باستان (ancient muses 'jest) که او آن را از تمدن باشکوه گذشته به ارث برده است توجیه می‌کند. محققانی که گوش موسیقایی خود را آنقدر از دست داده‌اند که مشارکت بشر را در الوهیت درک نمی‌کنند، برای درک مفاهیم، متکی به افلاطون هستند زیرا نوشته‌های زیادی از او درباره علم هارمونیک‌ها[۳] harmonics و موسیقی به جای مانده است. موسیقی در هند، مصر، و چین باستان اهمیتی مانند اهمیت موسیقی در بین‌النهرین و یونان داشت. این فرهنگ‌ها همه دارای تصورات اسطورهٔ مشابهی بودند به طوری که تأکیدشان بر اعدادی یکسان بود. این اعداد برای تعیین فاصله‌های موسیقایی نقشی برجسته دارند و به همین دلیل این شک را به وجود می‌آورند که کدام یک از ملت‌ها تئوری آکوستیک (acoustical theory) را ابداع کرده‌اند.

برای نمونه در هر فرهنگی که ساز چنگ (harp) را - همان طور که در مصر و بین‌النهرین می‌شناسند - مورد استفاده قرار می‌دهند، تنوع طول سیم‌ها و صرفه‌جویی در مواد، سازندگان آن را وامی‌دارد که به خاطر دوام آن، به همبستگی میان طول سیم و زیربمی (pitch) حاصل از آن دقت بیشتری مبذول دارند، چون ساختن سیم‌ها نیازمند وقت و زحمت فراوان است. به همین ترتیب، وقتی در کشور چین در پنج هزار سال قبل از میلاد روی استخوان پای پرندگان بزرگ به منظور ایجاد صداهای گام (scale) سوراخ‌های صوتی تعبیه شد و به عنوان فلوت‌های مضاعف (paired flutes) در مراسم خاک سپاری آئینی مورد استفاده قرار گرفت، لزوم استفاده از مواد و مصالح مناسب، سازندگان این ساز را واداشت تا در مورد طول آن نهایت دقت را به کار برند. به نظر می‌رسد که در واقع، این صنعتگران و متخصصان دل سوخته بودند که در اعصار و مکان‌های مختلف بیش از و پیش از فلاسفه، به نسبت‌های اساسی

سازندگی دست یافته و آنها را کشف کرده‌اند. آن چه که قطعی به نظر می‌رسد این است که دسترسی به این نسبت‌ها در هزاره چهارم پیش از میلاد، حتی قبل از آن که نخستین سلسله حکومت در مصر ایجاد شود یا پای یونانیان به سواحل مدیترانه برسد، میسر گردید.

ظهور دیدگاهی جدید

در هزاره چهارم پیش از میلاد، سومری‌ها که مردمانی غیر سامی و از نژادی نامعلوم بودند در بین‌النهرین - قسمت جنوبی کشور عراق امروزی - اساس تمدن پیشرفته‌ای را بنیاد کردند. این مردمان به دلایلی که قاطعانه مورد بحث واقع شده ولی هم‌چنان بدون پاسخ مانده است، ابداع کننده نظام مبتنی بر عدد شصت به حساب می‌آیند. نظام فوق در هند و بابل و یونان بعداً مبنای اصلی تئوری هارمونیک (harmonical theory) قرار می‌گیرد. مقابر سومری‌های اولیه به تعداد زیادی از سازهای چنگ، نی، (pipe) لیر (Lyre) منقوش است و نوشته‌هایی نقر شده روی لوح‌های گلی حاوی سرودهای مذهبی (hymns) است.

در نوشته‌های به صورت خط میخی سومری‌ها که همزمان با نظام عددی بر مبنای شصت ابداع گردیده ساختن معابد الهگان با توجه به نسبت‌های این اعداد با خدایان طراز اول، به صورت امری منطقی و عاقلانه درآمده و از طرف دیگر اعداد یاد شده نخستین نسبت‌های فاصله‌های موسیقایی را پایه‌گذاری کرده‌اند. گلیف (glyph) یا نماد ملکوت (heaven) یا ستاره (star) به همراه عددی متناسب در حکم لقب خدا (god nickname) به شمار می‌رود.

(نمودار شماره یک، ارزش عددی خدایان سومری را نشان می‌دهد.) شماره سنگریزه‌ها به صورت آرایش مثلث گونه، مبین اهمیتِ اعداد مربوط به خدایان است.

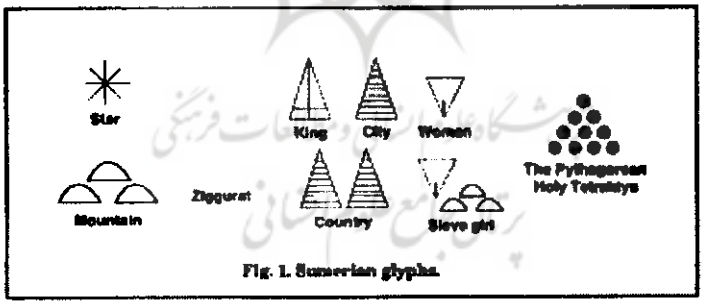

Fig. 1. Sumerian glyphs.

علاوه بر این، در اساطیر دینی سومری‌ها، مسؤولیت و رفتار خدایان، با نقش شماره ویژهٔ خدا در مبنای شصت مربوط به صوت‌شناسی (acoustics) مطابقت دارد. کیهان‌شناسی یا جهان‌آفرینی سومری، مبتنی بر جفت‌گیری استعاری آرایش عددی مذکر A و مونث V می‌باشد. تتراکتیس مقدس یونانی - مربوط به مکتب فیثاغورس - از این کیهان‌شناسی منتج می‌شود. برای نمونه، خدای آسمان، «آن» (AN) دارای عدد ۶۰ - که در خط میخی به صورت عدد یکِ بزرگ نوشته می‌شود (نمودار ۵) در رأس پرستشگاه قرار داشته و پدر خدایان به شمار می‌رود. از آنجا که اعداد با مبنای شصت به لحاظ ارزش معنایی، مضرب یا زیر مضرب عدد شصت هستند (مانند واحد در حساب اعشاری)، خدای «آن» (An) که معرف عدد شصت است و به صورت عدد یک معرفی می‌شود، در مرکز اعداد گویا (rational

(numbers) نوشته می‌شود. به زبان ریاضی «آن» میانگین هندسی خودش محسوب می‌شود که در میان عدد و متقابل عدد قرار می‌گیرد. بنابراین «آن|آن» در اصل خدایی است که هیچ کاری انجام نمی‌دهد، همان گونه که بعدها متهم می‌شود که او به عنوان نقطه مرجع در میانه آسمان، یعنی مرکز حوزهٔ عدد (number field) جای دارد و نیز صدای مرجع میانی (در زبان یونانی «مز» Mese) در نظام کامل موسیقی (Greater perfect system) به شمار می‌رود. سرنوشت او این بود که به وسیله قدرتمندترین فرزندان خود از میان برداشته شود، به همان ترتیب که منطق هارمونیک مبتنی بر ساختار و مهارت صرف، در محاسبه، به صورت تابع و زیردست بینش عمیق‌تر ریاضی درآمد.

الهیات که از ابتدای تولد خود به عنوان گفتار عقلی درباره خدایان و در بسیاری از فرهنگ‌های بعدی زیر نفوذ سومری‌ها بود، تمثیلی ریاضی با پشتوانه غنی موسیقی به شمار می‌آید، در صورتی که تئوری موسیقی امروزی را که هیچگونه تغییری در شاخص (parameter)های اصلی آن - با توجه به عواملی که در قالب عدد از زمان پیدایش سومری‌ها در ۳۳۰۰ سال قبل از میلاد که به وسیله خدایان پی‌ریزی شده بود - داده نشده دانشی فسیل شده می‌دانند.

برای درک این دیدگاه جدید، شایسته است که جبر (algebra)، کامپیوتر و افتخار به برتر بودن عقل خود را کنار گذاشته و اعداد را همان گونه که در دوران باستان به کار گرفته می‌شدند - به صورت عینی و ملموس - مورد توجه قرار دهیم. باید بدانیم که مجبوریم تئوری اعداد مربوط به موسیقی را به صورت سنگریزه‌های مثلث شکل یا «چارگان مقدس» درآورده و اجرا کنیم و برای رسیدن به این منظور - بنا به عقیده فیثاغورسی‌ها - لازم است که از الگوهای خشتی موجود در نماد سومری «کوه» تبعیت نماییم و سپس مانند سقراط دلالت‌های هارمونیک تئوری اعداد مربوط به موسیقی را به صورت دایره‌ای بر روی شن (sand) به تصویر درآوریم. این دایره همان جهان یاکیهان است که همانند صداهای گام (scale) ۱۲ درجه‌ای تا ابد به صورت دایره‌ای خواهند بود.

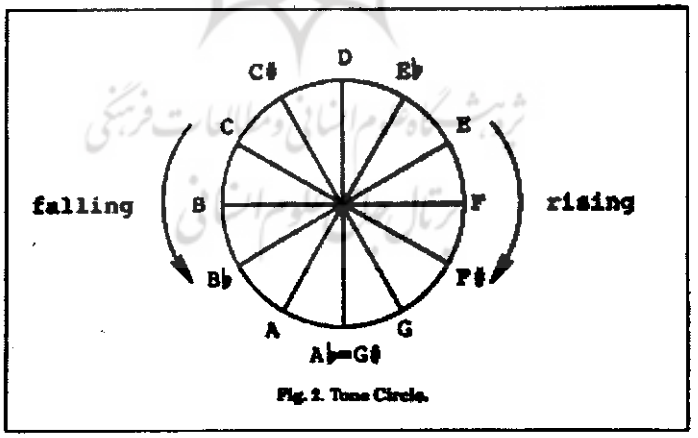

Fig. 2. Tone Circle.

من در ادامه بحث، به بررسی جایگاه علم ریاضی در بین‌النهرین - به همان صورتی که در قرن چهارم پیش از میلاد مورد استفاده افلاطون بود - پرداخته و تمثیل‌های ریاضی‌گونه او را درباره نمونه‌هایی که قبلاً ذکر شد، مورد مداقه قرار می‌دهم. افلاطون آخرین اسطوره‌نگار هارمونیک برجسته اروپا محسوب می‌شود که تاکنون هیچ فیلسوفی نتوانسته است به جایگاه فکری او در هنر موسیقی به طور کامل دست یابد. با نظری به گذشته متوجه می‌شویم که رمزگشایی

هارمونیک سومری - افلاطونی بی‌نهایت ساده و پیش افتاده جلوه می‌کند. به طوری که هر کسی - حتی یک کودک که بتواند تا عدد ده بشمارد و بخواند یا یک «گام» (scale) موسیقایی را بنوازد به سهولت می‌تواند ساز و کار ساختمانی گام را که زمانی الگوی کیهانی به شمار می‌رفت درک کند. چون عدد ۶۰ از نظر انتگرال (integral) به اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰ قابل تقسیم است، اعداد مبنای ۶۰ می‌توانند با زیر مجموعه‌های بسیاری مرتبط شده و کسرهای زیادی را به وجود آورد. این استادی صرف در ایجاد کسرها، مبنای ارائه تعریف ریاضی مناسب، از نسبت‌های بسامدی مربوط به زیر و بمی (pitch) و طول سیم روی سازهای چنگ اولیه و احتمالاً طول فلوت‌های پان[۴] (panpipes) و فاصله بین سوراخ‌ها در فلوت‌های آولس[۵] (Aulos) یونانی - قرار می‌گیرد، ولی تعداد صداها و جهت بالارونده یا پایین رونده بودن آنها اهمیت زیادی ندارد. حدود ۱۸۰۰ سال قبل از میلاد، بابلی‌ها از نظر سیاسی قدرت را در دست گرفته و به بازسازی پرستشگاه سومریان مبادرت کرده و از اعداد مربوط به خدایان و اصطلاحات ریاضی مربوط به آنها نهایت دقت و مراقبت را به عمل آوردند. بابلی‌ها محاسبه بر مبنای عدد ۶۰ را که تا حدود ۱۶۰۰ بعد از میلاد همتایی در اروپا نداشت - و حتی تا اواسط قرن بیستم نیز مردم عصر جدید آن را درک نکردند - تا سطح مهارت در ریاضیات ارتقاء دادند، تا اینکه «نویگه باور» (Neugebauer) و «زاکس» (sachs) در سال ۱۹۴۵، از مجموعه دانشگاه «ییل» (Yale) ترجمه لوح میخی YBC ۷۲۸۹ ارائه کردند. بنابراین تا آن زمان جهانیان نمی‌دانستند که فرمول اعداد بر مبنای ۶۰ برای محاسبه ریشه دوم عدد دو با ۵ رقم اعشاری معادل این عدد «۱/۴۱۴۲۱» می‌باشد. همان طور که از فرمول سه گان‌ها (triples)ی فیثاغورسی، مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ نیز بی‌اطلاع بودند. هزار سال پیش از آن که فیثاغورسی‌ها فرمول اعداد بر مبنای ۶۰ را تبیین کنند در بابل باستان (۱۸۰۰ - تا ۱۶۰۰ قبل از میلاد) مورد استفاده بوده است.

یونانی‌ها که هنوز هم از کسرهای واحد مصری بهره می‌گیرند (به عنوان مثال نسبت فاصلهٔ دوم بزرگ با نسبت بسامدی $\frac{9}{8}$ را از اضافه کردن نسبت $\frac{1}{8}$ به طول اصلی سیم یعنی $\frac{8}{8}$ به دست می‌آورند) از این که می‌دیدند مصریان - که مورد احترام آنها بودند - در تسریع امر محاسبه از همسایه قدیمی خود فراتر رفته‌اند دچار تعجب می‌شدند.

کمبود متون ریاضی به جای مانده از دوران سومریان محققین را وادار ساخته که از دیگر آثار به جای مانده از بابلیان، دست به استنتاجات زیادی بزنند، به طوری که هنوز هم بخش اعظم ادبیات سومری، یا ترجمه نشده و یا دور از دسترس مانده است، بنابراین با روی کار آمدن ابزارهای زبان‌شناختی (linguistic) گسترده‌تر، داستان من نیز از بازنگری و ارائه اطلاعات دقیق‌تر، معنای روشن‌تر و در دسترس گذاشتن آسان‌تر جزئیات بی‌نیاز نیست.

در قرن دوم بعد از میلاد بطلمیوس در کتاب «هارمونیکا» با بررسی تاریخ و پی بردن به ماندگاری روش‌های سومری/بابلی به ثبت و ضبط بیست صدای موجود در موسیقی یونان که او آنها را با کسرهای اعداد مبنای شصت می‌شناخت همت گماشت. در حدود سال ۵۰۰ پیش از میلاد تا سال ۱۵۰ بعد از میلاد، اخترشناسی بابلی و یونانی نیز بر اساس اعداد مبنای شصت از رونق فراوانی برخوردار بود. همچنین در قرن پانزدهم میلادی کوپرنیک این مبنا را مورد استفاده قرار داد به طوری که تا عصر حاضر نیز از این سیستم استفاده می‌شود. تقویم کشور چین نیز هم‌چنان با این سیستم محاسبه و اندازه‌گیری می‌شود. با این حال، اخترشناسی همان گونه که بعداً به «علم اندازه‌گیری دقیق ملقب شد» به صورت عملی در سومر باستان مورد استفاده قرار نمی‌گرفت زیرا بنا به نظر کرامر (Kramer) امروزه ما جز فهرستی از حدود ۲۵ ستاره خبر دیگری در اختیار نداریم. نحوهٔ بقای سیستم مبنای ۶۰ در اندازه‌گیری زمان ساعت‌های عقربه‌دار مجهز به عقربه‌های ساعت شمار، دقیقه شمار و ثانیه شمار از فسیل‌های موجود به جامانده از ریاضیات سومری به شمار می‌روند:

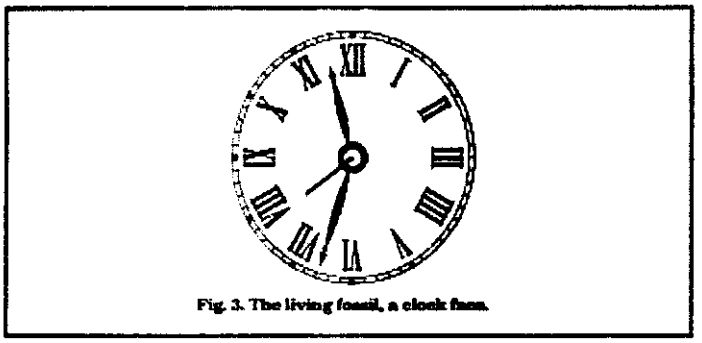

Fig. 3. The living fossil, a clock face.

الف – اعداد روی صفحه ساعت مبین ثابت بودن چرخه متناوب زمانی است. این اعداد عمل به خاطر سپردن زمان را آسان می‌کند و همچنین عملکرد ساعت از طریق محاسبه و جمع کردن اعداد مشخص می‌شود.

ب – هر یکبار گردش عقربهٔ ثانیه شمار یا دقیقه شمار، روی صفحهٔ ساعت مبین عدد ۶۰ به عنوان واحد بزرگ و هر حرکت کوچک عقربه، مبین واحد کوچک یا $\frac{۱}{۶۰}$ است.

ج – به همین ترتیب، واحد بزرگ مبین قدرت بالاتر یعنی عدد ۶۰ است که با گردش عقربه‌های ثانیه شمار و دقیقه شمار همبسته است زیرا ضرب عدد ۶۰ در عدد ۶۰، معادل ۳۶۰۰ ثانیه یعنی همان یک ساعت خواهد بود که عکس آن ارزش $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ است.

د – دوازده ساعت هم‌چنان یک واحد بزرگ یا یک بار گردش عقربه ساعت شمار بر روی صفحه ساعت یا ۷۲۰ دقیقه یا ۴۳۲۰۰ ثانیه است که عکس آن کوچک‌ترین واحد یا $\frac{۱}{۴۳۲۰۰}$ خواهد بود.

هـ – ما نیز مانند سومریان در درک معنای ریاضی این اعداد دچار اشتباه نخواهیم شد.

و – وجود نحوهٔ متفاوت دیگری برای بیان واحد، نشان‌دهنده و تأکیدکنندهٔ معکوس‌ها است. موسیقی‌دانان به تبعیت از افلاطون، اصوات موسیقی را – به منظور حذف اکتاو (octave)های تکراری بالا یا پایین‌رونده، بر روی یک دایره رسم می‌کنند (افلاطون در رساله تیمایوس (Timaeus) بر این نکته پافشاری دارد که خداوند از هر چیز فقط یک نمونه می‌آفریند.)

بنابراین، امروزه ما می‌توانیم، به عنوان غبطه خوردن به تقویم نویسانی که به علت سر و کار داشتن با روزها، ماه‌ها، سال‌های نامساوی و بی‌نظم خود به گام دوازده درجه‌ای ما رشگ می‌برند، با استفاده از «نظام اعتدال مساوی[۶]» (Equal temperament system)، هر فاصلهٔ موسیقایی را به راحتی محاسبه و شناسایی کنیم ولی در نظر داشته باشیم که علت وجودی این دوازده فاصله مساوی در میان اکتاو (octave) همان محاسبه بر مبنای ۶۰ است.

اعداد سومری

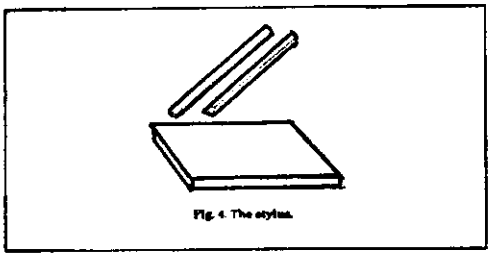

Fig. 4. The stylus.

این اعداد به وسیله یک قلم آهنی -که در ابتدا گرد بود و بعدها به شکل مثلث درآمد- (نمودار ۴) بر روی لوح‌های سفالی کوچک حک می‌شد. طرز نگاهداشتن این قلم برای بعضی اعداد، مایل و برای برخی عمودی بود. به این ترتیب که اعداد از دو تا نه به وسیله نوک قلم و عدد ده به وسیله انتهای آن که گرد بود بر روی لوح حک می‌شد. عدد ۶۰ به عنوان یکِ بزرگ، با فشار بیشتر قلم، به وجود می‌آمد. برای نوشتن اعداد، فقط به تعداد محدودی از نمادها نیاز داشتند. در نتیجه، تکرار نمادها کار رمزگشایی آنها را ساده و به خاطر سپردن آنها را آسان می‌نمود (نمودار ۵).

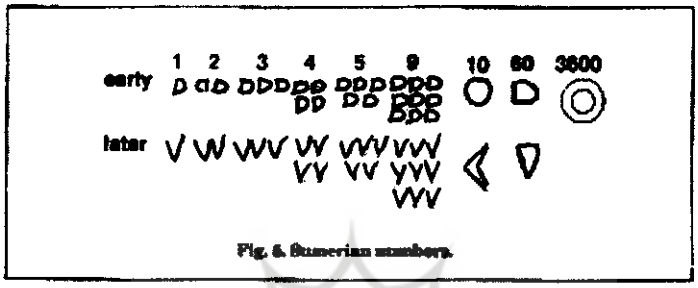

Fig. 6. Sumerian numbers.

به عقیده کرامر (Kramer) جدول‌های مربوط به اعداد مستقابل (reciprocals) ضرب‌ها (multiplications)، توان‌های دوم (Squares)، ریشه‌های دوم (square roots)، مکعب‌ها (cubs)، ریشه‌های سوم (cub roots)، توابع نمایی (exponential functions)، ضرایب مخصوص محاسبات عملی و روش‌های بی‌شمار در اندازه‌گیری مستطیل‌ها و دایره‌ها کار اندازه‌گیری را بسیار آسان کرده است. بسیاری از این فهرست‌ها یا جداول به ما نیز به ارث رسیده است. جدول ضرب‌های استاندارد هر عدد که با متقابل آن به صورت جفت قرار دارد به زیر مجموعهٔ اعداد صحیح که عامل نخست آنها به ۲، ۳ و ۵ ختم می‌شود ارزش ویژه‌ای می‌بخشد. در نمودار ۶ اعداد صحیح تا ۶۰ به همراه متقابل آنها به نمایش درآمده است بنابراین متقابل $\frac{۴۰}{۶۰}$ برابر $\frac{۲}{۳}$ و... بوده و به صورت ۱/۳۰ خوانده می‌شود که به معنای $\frac{۹۰}{۶۰}$ معادل $\frac{۳}{۲}$ است. لازم به یادآوری است که فقط مهم‌ترین کسرهای عدد ۶۰ $\frac{۱}{۶۰}$ $\frac{۱}{۵}$ $\frac{۱}{۴}$ $\frac{۱}{۳}$ $\frac{۱}{۲}$ $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۶}$ مورد تقدیس قرار می‌گیرند.

Gods	*Sexagesimal reciprocals*		*Tonal reciprocals*		(in modern notation, nearest tonal approximation)
All from 1 to 60	2	30	c♯	c♭	string length versus
	3	20	f♯	b♭	frequency as viewed from
	4	15	c♯	e♭	the perspective of
	5	12	A	G	60 = 1 = D:
	6	10	f♯	b♭	
	8	7.30	c♯	e♭	
	9	6.40	b	f	
Marduk	10	6	A	G	
	12	5	f♯	b♭	
Ishtar	15	4	D	D	
	16	3.45	c♯	e♭	
	18	3.20	b	f	
	20	3	A	G	
	24	2.30	f♯	b♭	
	25	2.24	f	b	
	27	2.13.20	c	c	
Sin	30	2	D	D	
	32	1.52.30	c♯	e♭	
	36	1.40	b	f	diatonic and
Ea-Enki	40	1.30	A	G	chromatic octave
	45	1.20	G	A	
	48	1.15	f♯	b♭	
Bel-Enlil	50	1.12	f	b♭	
	54	1.06.40	c	c	
Anu-An	1	1	D	D	

Fig. 6. Tonal interpretation of the sexagesimal system.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

تقارن متضادهای سومری

کلید راهگشای روان سومریان، افلاطون و خود ما، گرایش و تمایل به تقارن متضادهاست. تقارن معکوس مبنای محاسبهٔ نظام شصت تایی (مبنای ۶۰) به شمار می‌رود، به طوری که مبنای دیالکتیک افلاطون نیز محسوب می‌شود. بعضی چیزها محرک ذهن‌اند و برخی نیستند. چیزهای محرک به همراه متضادهای خود، وارد حریم حواس ما می‌شوند (جمهوری ۵۲۴d). وقتی ما در مقابل آینه می‌ایستیم، تصویر خود را به صورت تقارن متضادهای راست/چپ می‌بینیم.

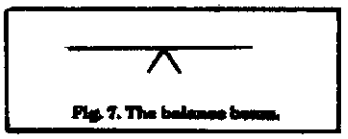

Fig. 7. The balance beam.

ترازوی قدیمی یا شاهین ترازو مبین این نکته است. عملکرد ترازو بسته به نیروی گرانش دارد اما جذابیت ترازو برای ما به سبب وجود اندامی به نام گوش است. زیرا علاوه بر آنکه این عضو در احساس شنیدن دخالت دارد، عضو متعادل‌کنندهٔ بدن ما نیز هست.

توجه به تعادل شاهین ترازو از این نظر حائز اهمیت است که بدن انسان نیز به نوعی این تعادل را تجربه می‌کند، تعادلی که چشم در آن دخالتی ندارد و فقط به وسیله اندام گوش ایجاد می‌شود. کلیهٔ محاسباتی که بعداً ابداع می‌شوند با این تقارن بنیادی همسو هستند و در این همسو بودن «آنو|آن (Anu/An) برابر ۶۰ (و به معنای یک) در نقطه تعادل جای دارد. هنر سومری به صورتی وسیع و گسترده به تبیین و توجیه تقارن متضادها می‌پردازد.

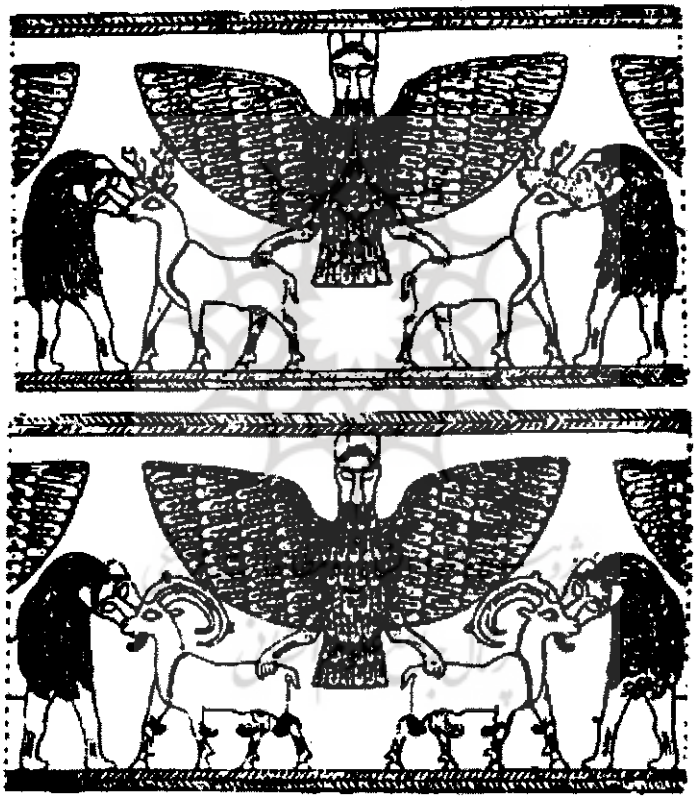

Fig. 8. Inverse symmetry in Sumerian art.

"Of all ancient peoples, the Sumerians seem to have been particularly fond of strict bilateral or heraldic symmetry. A typical design on the famous silver vase of King Entemena, who ruled in the city of Lagash around 2700 B.C., shows a lion-headed eagle with spread wings en face, each of whose claws grips a stag in side view, which in its turn is frontally attacked by a lion (the stags in the upper design are replaced by goats in the lower). Extension of the exact symmetry of the eagle to the other beasts obviously enforces their duplication. Not much later the eagle is given two heads facing in each direction, the formal principle of symmetry thus completely overwhelming the imitative principle of truth to nature." (Hermann Weyl, *Symmetry*, 1952)

به نظر می‌رسد که در میان جوامع باستانی، سومریان به تقارن دقیق دوطرفه مربوط به نشان و نسب خانوادگی علاقه زیادی داشتند. یک طرح نمونه روی یک گلدان نقره مربوط به اِنتِه‌مِنا (Entemena) پادشاه شهر لاگاش (Lagash) که در حدود سال ۲۷۰۰ پیش از میلاد در آن شهر حکومت می‌کرد، عقابی به شکل سرِ شیر و بال‌های گسترده دیده می‌شود که با پنجه‌هایش دو گوزن را به چنگ دارد که به صورت متقارن دو طرفه مشاهده می‌شوند. این دو گوزن نیز از دو طرف مورد حمله دو شیر قرار گرفته‌اند. به‌طوری که در تصویر دیده می‌شود دو بز جانشین دو گوزن شده است.

خداوارگی یا خداگونگی اعداد مربوط به صوت

اعداد خداگونهٔ سومری که بابلی‌ها آنها را به عاریت گرفتند اعداد ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ هستند که همگی قسمت‌های کسری «پدر» آنو/آن (معادل ۶۰) سرپرست و رئیس معبد خدایان به شمار می‌روند. در اینجا به ارزش کسری و اسامی خدایان با شرح کوتاهی از نقش‌های اسطوره‌ای آنها می‌پردازیم: آنو/آن با رازش عددی ۶۰ که به صورت عدد یکِ بزرگ نوشته می‌شود، خدای خدایان و نخستین سرپرست پرستشگاه، با عنوان واحد مرجع محسوب می‌شود.

در نمادگذاری امروزی «آنو» به صورت ۱= $\frac{۶۰}{۶۰}$ در نظر گرفته می‌شود. در این نمادگذاری «آنو» در مقام «میانگین هندسی در حوزهٔ اعداد گویا» انجام وظیفه می‌کند. «ان لیل» (Enlil) با عدد ۵۰ ($\frac{۵}{۶}$)، خدای ساکن کوهستان، دارای ۵۰ نام، محافظ ویژه ابنای بشر محسوب شده و در حدود سال ۲۵۰۰ پیش از میلاد به سرپرستی معبد ارتقاء یافت. «ان لیل» آن چه را که یونانیان در هارمونیک‌های با مبنای ۱۰ به عنوان عامل نخست (یعنی عدد ۵) می‌شناسند در نظام مبنای ۶۰ به صورت مقدس درمی‌آورد. «ان لیل» با ابداع فاصلهٔ موسیقایی سوم بزرگ (Major third) با نسبت $\frac{۴}{۵}$ و سوم کوچک (minor third) با نسبت $\frac{۵}{۶}$ سخت‌کوشی عظیم در ریاضیات سومری را حفظ کرد.

«ایا/انکی» (Ea/Enki) نماینده عدد ۴۰ ($\frac{۲}{۳}$ عدد ۶۰) خدای آب‌های شیرین و شاید مشغول‌ترین خدای سومری، کره زمین و از جمله «گام موسیقی» (musical scale) را سامان بخشید و ضمناً «عدد اول» سه را با استفاده از نسبت $\frac{۲}{۳}$ یعنی فاصله پنجم درست (perfect fifth) که قدرتمندترین فاصله‌ها پس از اکتاو است به صورت خداگونه درآورد. لازم به تذکر است که عدد سه[۷] پس از نسبت «اکتاو» نیرومندترین نیروی موجد موسیقی به شمار می‌رود و در ضمن سه خدای طراز اول که با اعداد ۴۰، ۵۰، ۶۰ معرفی می‌شوند نمایندهٔ سه گان‌های اصلی در اصوات فرعی یعنی هارمونیک‌های ۴ و ۵ و ۶ (که تشکیل دهندهٔ آکورد دو، می، سل در حالت بالارونده و می، دو، لا، در حالت پایین رونده می‌باشند) هستند. نسبت $\frac{۴}{۵}$ معرف فاصله سوم بزرگ (Major third) و نسبت $\frac{۵}{۶}$ معرف سوم کوچک (minor third) است که در جدول فاصله‌های میان فاصله اکتاو (هشته) به صورت فاصلهٔ بالارونده یا پایین رونده وجود دارد. «سین» (Sin) معرف عدد ۳۰ ($\frac{۱}{۲}$ عدد ۶۰) خدا – ماه جدول فاصله اکتاو سومری $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۳۰}{۶۰}$ را پی‌ریزی کرده است. «شاماش» (Shamash) خدا – خورشید معرف عدد ۲۰ (یا $\frac{۱}{۳}$ عدد ۶۰) داور خدایان به شمار می‌رود. «ایشتار» (Ishtar) معرف عدد ۱۵ ($\frac{۱}{۴}$ عدد ۶۰) مظهر زنانگی مانند دوشیزگی، همسر و کدبانو بودن است. «نرگال» (Nergal) معرف عدد ۱۲ ($\frac{۱}{۵}$ عدد ۶۰) خدای عالم ارواح بود. بل/مردوک (Bel/Marduk) معرف عدد ۱۰ ($\frac{۱}{۶}$) بعل (Baal) کتاب مقدس است که در اصل خدایی کم اهمیت به شمار می‌رفت ولی به ناگاه در هزاره دوم پیش از میلاد به ریاست معبد بابلی ارتقاء یافته و وارث قدرت خدایان دیگر به انضمام ۵۰ نام «ان لیل» (که قدم بزرگی به سوی یکتاپرستی فیثاغورسی بر مبنای اعداد یک تا ده در نظام دهدهی است) گردید.

اصول هارمونیک یونانی در ریاضیات سومری

در اینجا به بعضی از تقارن‌های بنیادی ریاضی بر مبنای ۶۰هارمونیک‌های سومری که قبلاً در قالب تقارن نشان‌دار (heraldic) معکوس به طور خلاصه ذکر شد اشاره می‌کنیم. این تقارن‌ها را امروزه به نام کسرهای جدید می‌شناسند به طوری که هر صدا در گام موسیقایی با نسبت‌های بی‌شمار مربوط به خدایان ظاهر می‌شود و نسبت‌های دیگر به منزله مشتقات این نسبت‌ها به شمار می‌روند که از طریق عمل ضرب به دست می‌آیند. (و این همان موردی است که افلاطون در کتاب جمهوری با استعارهٔ استادانه به صورت ازدواج از آن نام می‌برد). باید خاطر نشان کنم که کلیهٔ مفاهیم هارمونیک مورد استفادهٔ من در این مقاله یونانی هستند. افلاطون در کتاب هشتم جمهوری، دستورالعملی را برای این ساختار بخصوص ارائه داده است بنابراین بحث درباره اصول هارمونیک او را می‌توان در رساله تیمایوس (Timaeus) مشاهده نمود.

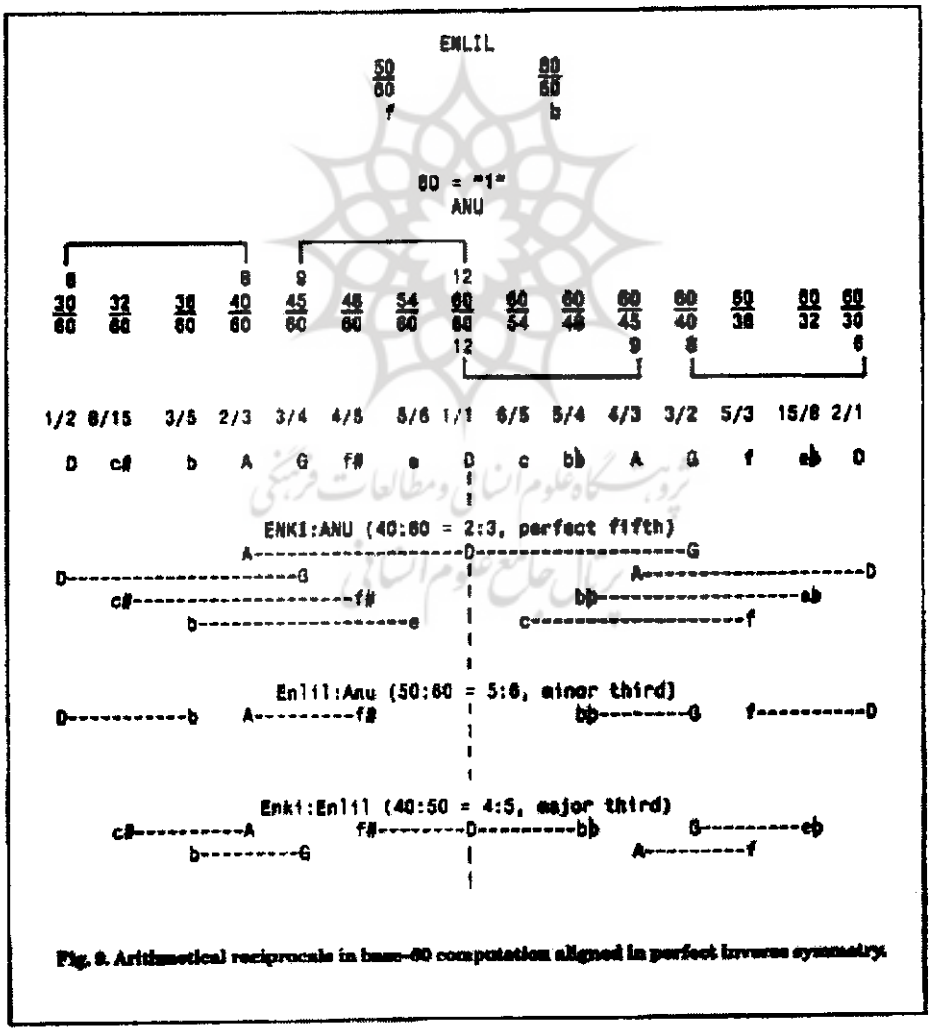

Fig. 8. Arithmetical reciprocals in base-60 computation aligned in perfect inverse symmetry.

کلیهٔ رده‌های زیرایی (pitch classes) یا زیر و بمی که به وسیلهٔ اعداد اول ۲، ۳، ۵ و غیره تا عدد شصت ایجاد شده، در نمودار ۹ آمده است. باید توجه داشت که دوگان‌ها (doubles) با یکدیگر قرینه و هم‌ارز هستند، به طوری که اعداد ۳، ۶، ۱۲ و ۲۴ (به عنوان مثال) زیرایی ۴۸ را دارند، بنابراین: الف - صداها به وسیلهٔ اعداد تعریف می‌شوند. ب - اهمیت هر عدد بستگی به نسبت آن با اعداد دیگر دارد. ج - عددگذاری از نوعی اقتصاد اکید ریاضی تبعیت می‌کند و از آنجا که معانی دوگانهٔ سومری در اینجا مدنظر است، اعداد ۳۰، ۳۲، ۳۶ و... کوچک‌ترین اعداد صحیح به شمار می‌روند و چنان‌چه نسبت‌هایی را به صورت کسر بنویسیم، این اقتصاد تا حدودی به هم می‌خورد.

د - هر عدد به دو شکل عدد بزرگ و عدد کوچک مورد استفاده قرار می‌گیرد. این دو شکل در اینجا به صورت کسرهای متقابل نمایش داده شده است. هـ - معانی دوگانهٔ عدد بزرگ و کوچک اقتضا می‌کند که الگوی اصلی اکتاو، در میان فاصله اکتاو مضاعف (double octave) از $\frac{۱}{۲} = \frac{۳۰}{۶۰}$ به $۲ = \frac{۶۰}{۳۰}$ گسترش یابد. و - صداها به وسیله «دانگ» (tetrachord)ها دسته‌بندی می‌شوند یعنی به صورت دسته‌های چهارتایی درمی‌آیند) که محدودهٔ ثابت آنها در میان نسبت‌های موسیقایی 9:12 = 6:8 است همان‌طور که فاصلهٔ اکتاو 1:2 = 6:12 و پنجم درست 8:12 = 6:9 = 2:3 و چهارم درست 9:12 = 6:8 = 3:4 است.

باید توجه داشت که چگونه (در نمودار ۱۰) عدد ۹ با هارمونیک هشتم تقارن معکوس ایجاد کرده و فاصله استاندارد یک پرده (standard whole tone)ای (8:9) را مشخص می‌کند.

در تئوری فیثاغورس این نسبت‌ها فقط مشخص‌کنندهٔ پرده‌های ثابت است که بدون تغییر باقی می‌مانند. فیثاغورس این نسبت را از بابلیان قرن ششم قبل از میلاد به عاریت گرفته بود. در نظام اعدادی که بر مبنای ۶۰ هستند این اعداد ساختاری لزوماً در عدد پنج ضرب شده و به صورت 45:60 = 30:40 درمی‌آیند:

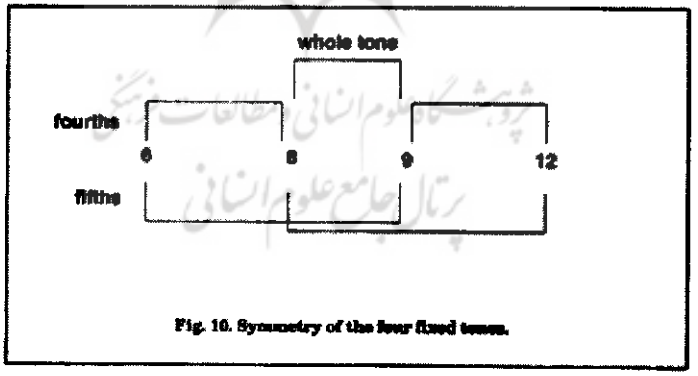

Fig. 10. Symmetry of the four fixed tones.

توجه کنید که ایا/انکی (Ea/Enki) خدای ۴۰ با نقش دوگانه 40:60 و 60:40 خود نسبت‌های پنجم درست بالارونده مانند «سل ور» و پایین رونده مانند «رولا» را مشخص نمود، بنابراین او کرهٔ زمین را مجازاً به صورت مبناهای هارمونیک دو ← فا و سل دوی گام مدرن (با استفاده از سیم) سر و سامان بخشید.

ز - ان لیل خدای ۵۰ صداهای رده‌های زیرایی سی و فا را متعلق به «گام متقابل» (opposite scale) می‌داند، به همین جهت نظارت او بر این امر تذکری به تقارن متقابل برای ما به شمار می‌رود و ارتقاء او به سرپرستی پرستشگاه احتمالاً به

دیز (۵۱۲ = g - sharp) پدیدار می‌شود. این تقریب، فقط اندکی با ارزش ایده‌آلی مورد نظر ما (و از نسبت خدایی ۵ ÷ ۴ که میان صداهای دو (e) و می (E) وجود دارد) تفاوت است.

در نمودار ۱۲ پوزیدون و ده پسرش به همراه جفت متقارن جدید دو (C) و می (E) و جفت متناوب لابمل (ab) و سُل دیز (G#) (در نسبت $\frac{۳۶۰}{۷۲۰}$ اکتاو) به نمایش در آمده است (که همیشه یکی از این دو جفت غایب است). همان‌گونه که اعداد در جهت بالارونده (ascending) و پایین رونده (descending) گام به‌طور متناوب خوانده می‌شود، آونگ ساعت مورد نظر من نیز به آرامی به این سو و آن سوی ساعت شش در نوسان است.

مردمان دوران باستان، در مورد مکان هندسی ۵۱۲ که در آنجا لابمل (a flat) کاملاً با سل دیز (g sharp) برابر نیست، از آزادی عمل چندانی برخوردار نبودند. با این حال می‌توان این اتحاد ریاضی را با وجود تقارن معکوس کامل پذیرفت. زیرا با در نظر داشتن همبستگی‌های کاملاً دیرینهٔ میان گام و تقویم و استفاده از تخیل خود می‌توان فهمید که مردمان نخستین، چگونه چنین تقارن معکوس و پیچیده‌ای را معقولانه جلوه می‌دادند. این الگوی بر مبنای ۶۰ می‌تواند همبسته مناسبی برای تقویم قمری سومری و بابلی در نظر گرفته شود، همان‌گونه که بعداً نیز این الگو در قوانین افلاطون به صورت نقشهٔ آرمانی شهر مدور درآمد. ثانیاً فرض می‌کنیم که تقویم و گام موسیقایی، از کیهان‌شناسی مشابهی برخوردارند.

برای دریافت بهتر موضوع، اکنون بهتر است به مطابقت‌های زیر توجه کنیم:

الف: لازمهٔ گام اصلی هفت درجه‌ای (heptatonal) این است که عکس نسبت بسامد (frequency) فاصله اکتاو ۶۰ ÷ ۳۰ باشد و همان‌گونه که می‌دانیم، عدد ۳۰ متعلق به «سین» (Sin) (خدا ـ ماه) است.

ب ـ دو گام متقابل هفت درجه‌ای و دایره صوتی (tone circle) متقارن، با دو فصل کشاورزی تابستانی سومریان مطابقت دارد. در این دو فصل آبیاری در تابستان خشک مکمل برداشت محصول در زمستان بارانی به شمار می‌آید.

ج ـ در فاصلهٔ اکتاو، دو برابر شدن ۳۶۰ به ۷۲۰ که جمع متقابل‌ها به شما می‌رود، ۳۶۰ واحد وجود دارد که این عدد از شمارش تقویم قیاسی یعنی ۱۲ ماه ۳۰ روزه حاصل می‌شود. متعاقباً، اخترشناسان بابلی و هندی این واحدها را «تی‌ثیس» (Tithis) به معنای $\frac{۱}{۳۶۰}$ متوسط سال قمری سیصد و پنجاه روزه (چند روز کمتر از سال شمسی) می‌نامند. اخترشناسان یونانی همین ۳۶۰ واحد را به صورت درجات هندسی به شمار می‌آورند ولی هیچیک از این پیشرفت‌ها ربطی به سومر باستان ندارد.

د ـ نیم‌پرده‌های کوچک[۹] با نسبت ۲۵ ÷ ۲۴ و بزرگ[۱۰] ۱۶ ÷ ۱۵ که از نظر آکوستیکی غیر دقیق هستند و از نظر تُنال (tonal) قابل قبولند، به ترتیب با ماه‌های قمری آئینی که بین ۲۹ تا ۳۰ روز در تغییرند مطابقت دارند.

هـ ـ اختلاف فاصله میان لابمل (A flat) معادل ۵۱۲ و سُل دیز (G Sharp)، در جهت مقابل آن با چند روز اضافه بودن سال شمسی (۳۶۵ روز) از عدد ۳۶۰ و با چند روز کم بودن سال قمری ۳۵۴ روز از عدد ۳۶۰ نیز مطابقت دارد چون پنج و یک چهارم روز اضافی سال شمسی حدود $\frac{۱}{۶۹}$ عدد ۳۶۰، است در حالی که در کُوما (comma)ی تعدیل‌شده[۱۱] (reduced comma) این فاصله دقیقاً یک شصتم یک اکتاو می‌شود.

از آنجاکه هر جامعهٔ کشاورزی موفق باید به نحوی ادوار قمری، شمسی، آئینی و کلی خود را با ادوار افزون شونده تطبیق دهد، تصور این که سومریان یا دیگران سال را ۳۶۰ روز در نظر می‌گرفتند لزومی ندارد و فقط در موسیقی است که سال با دقت و ایجاز عددی به ۳۶۰ روز و ۳۶۰ شب تقسیم می‌شود و در کیهان‌شناسی تقسیم‌بندی درستی به شمار می‌آید.

حساب ماتریسی (Matrix Arithmetic)

کلیه روابط صوتی ریاضی و تقویمی که قبلاً به آنها اشاره شد روابطی اتفاقی و تصادفی هستند و با آگاه بودن یا نبودن افراد، به هر صورت در میان اعداد بر مبنای ۶۰ به چشم می‌خورند زیرا عدد ۶۰ فقط به سه عدد اول ۲ و ۳ و ۵ قابل تقسیم است و در ضمن این عدد همانند آنکه نظام اعشاری ممیز شناور (floating - point decimal system) را به کار می‌بریم مورد استفاده بوده است. اگر در اسطوره‌شناسی سومری، به دلائل قاطعی برخورد نمی‌کنیم که مبین آگاه بودن سومریان از درگیری‌های صوتی باشد، پس ایجاد نظام شصتی که محوری برای الگوهای کامل برای فرهنگ قمری و اصوات هارمونیک فیثاغورسی در دو هزار سال بعد می‌شد، باید نوعی خوش شانسی بیش نباشد، به این معنا که وجود این نظام، جایزه جستجوی موارد با ارزشی است که هیچ‌گونه تلاشی برای آنها به عمل نیامده است. اما روشن‌ترین دلائلی که نشان می‌دهد سومریان از علم هارمونی آگاهی داشته‌اند به وسیله نوع ماتریس‌های مثلثی مورد استفادهٔ افلاطون معلوم و مشخص می‌شود. این ماتریس‌ها در ریاضیات هارمونیک نقش‌های اصلی را به عنوان منبع و سرچشمه عهده‌دار هستند. در یونان زمان افلاطون، خِرد هارمونیک بابلی و هندی به صورت نظریه سیاسی درمی‌آید. هم اکنون مردان در نقش‌هایی ظاهر می‌شوند که زمانی از آن خدایان بود. چهار شهر نمونه مورد نظر افلاطون یعنی شهرهای کالی‌پلیس (Callipolis) [در جمهوری] آتن باستان و آتلانتیس (Atlantis) [هر دو در رساله کری‌تیاس (Critias)] و ماگنسیا (Magnesia) [در رساله قوانین] هر کدام با یک الگوی موسیقایی ریاضی ویژه در ارتباط بودند. همه این شهرها از نخستین ده عدد صحیح ناشی می‌شوند و نیز این چهار شهر تا حد بررسی چهار عدد اول ۲، ۳، ۵ و ۷ در ریاضیات تحویل‌پذیر هستند.

در «جمهوری» و «قوانین» افلاطون، شهروندان آرمانی (که با اعداد مشخص می‌شوند) فقط از نخستین عدد اول حیات (the prime of life) به وجود می‌آیند. در نظر افلاطون این به آن معناست که از عدد ۲ به جز اکتاو (۲÷۱) الگوی دیگری ناشی نمی‌شود، زیرا عدد باکره و مؤنث دو با تمام نیرویی که در اختیار دارد ردهٔ زیر و بمی (Pitch Class) را همانند یک مرجع تعیین می‌کند که حاصل ضرب‌های آن به خودش به صورت ۴، ۸، ۱۶،.... فقط به ایجاد اتحادهای دوری یا اکتاوهای گوناگونی منجر می‌شود که هم اکنون در موسیقی مورد استفاده هستند. این اتحادها به منزلهٔ «پرستاران کودک» افلاطون به شمار می‌روند که آنقدر کنار بچه‌ها (صداها) می‌مانند تا آنها بتوانند مانند اعداد صحیح روی پای خود به ایستند؛ و البته همان‌طور که افلاطون نیز می‌گوید، پرستاران مورد نظر او نیاز به برخورداری از بنیهٔ قوی فیزیکی دارند. با وجود این، تضریب عدد سه در پنج که هر دو از اعداد فرد و مذکر هستند، مارپیچ (spiral)های پایان‌ناپذیری متشکل از فاصله‌های موسیقایی پنجم پایین رونده یا چهارم بالارونده و سوم‌ها تولید می‌کند؛ اصوات زیر و بم جدید نیز با همان نسبت‌های تغییرناپذیر از بطن اکتاو مؤنث با نسبت ۲÷۱ متولد می‌شوند.

در زبان یونانی تقارن به معنای تناسب آمده است. بنابر این تناسب هندسی اعدادی مانند ۱، ۳، ۹، ۲۷ و... یا ۱، ۵، ۲۵، و... بهترین کُند و زنجیر یا قید و بندهای جهان (World's best bonds) به‌شمار آمده و میزان تقارن را افزایش می‌دهند.

جدل ضرب ۵×۳ مجموعه‌های چندگانه‌ای از تقارن‌های صوتی هندسی را ترسیم می‌کند. یونان راه و رسم حساب خود از قبیل کسرهای واحد، برای تعریف نسبت فاصله‌های موسیقایی مانند نسبت $\frac{9}{8}$ (یعنی $\frac{1}{8}+1$) و غیره را از مصر به عاریت گرفت و فقط آنگاه از تئوری اعداد آگاه گردید که با راه و رسم روش‌های بین‌النهرینی آشنا شد. بنابر این سفرهای فیثاغورس چه صورت افسانه‌ای داشته یا نداشته باشد در اینجا اهمیت زیادی پیدا می‌کند. این روش‌ها برای

خاطر این بینش است. ان‌ایل خدایی پر جنب و جوش به شمار می‌رفته که علاوه بر موارد بالا فاصله‌های متعددی را نیز تولید کرده است که در واقع باعث کاهش شمارش اعداد می‌شود، حال آنکه خدای اصلی یعنی آنوآن با عدد ۶۰ خدایی است که هیچ کاری از او برنمی‌آید و در بابل و سومر خدایی کم اهمیت جلوه می‌کند.

ح - نسخهٔ حالت بالارونده و پایین‌روندهٔ این گام به صورت مقام بزرگ (Major mode) نوشته می‌شود که برای ما مقامی آشنا به شمار می‌رود. (نمودار ۹) این گام معمولاً یک پرده پایین‌تر، یعنی روی شستی‌های سفید پیانو میان فاصلهٔ اکتاو از دو تا دو نت‌نویسی می‌شود. در نتیجه گام بالارونده مربوط به دست راست، گام متقابل و متقارن گام اصلی یونان، هند و بابل باستان به شمار می‌رود. این گام معمولاً به صورت یک پرده بالاتر، روی شستی‌های سفید، در میان فاصلهٔ اکتاو از می تا می مانند مقام فریژین (phrygian) نت‌نویسی می‌شود.

نگاهی به تقویم و گام

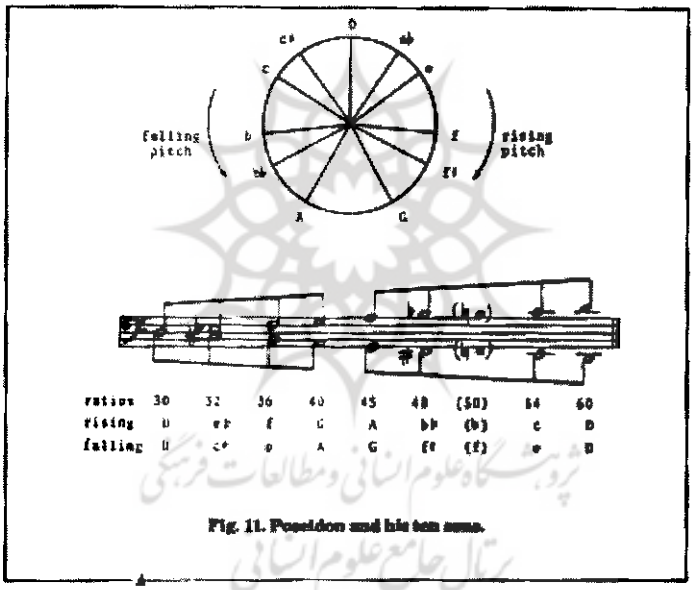

Fig. 11. Poseidon and his ten sons.

برای آنکه تقابل‌هایی را که در نمودار بالا نشان داده شده است به صورت دیدگاه یک پارچهٔ سومری/افلاطونی در هم ادغام کنیم فقط باید این صداها را روی همان دایرهٔ صوتی (tone circle) به نمایش بگذاریم.

در اسطوره‌شناسی افلاطون، در رساله کریتیاس (Critias) به «پوزیدون» (Poseidon) و پنج جفت پسران دو قلوی او (نمودار ۱۱) اشاره شده است. تقابل متقارن کامل سومری هم ردیف تقارن عمودی و مرکزی قرار دارد. «پوزیدون» در ساعت ۱۲ با سلف یونانی خود ائا/انکی (Ea/Enki) (خدا - آب) متقارن بوده به طوری که آنها هم شروع و هم پایان اکتاو به شمار می‌روند. این یازده صدا تنها ردیف زیر و بمی متقارن تا شاخص ۶۰ محسوب می‌شوند.

برای آنکه کسرهای متقابل را طوری با هم ادغام کنیم که اعداد، نسبت‌های یکسانی را از هر طرف به نمایش بگذارند باید نسبت فاصله اکتاو پایین‌تر یعنی ۲ ÷ ۱ را تا ۷۲۰ ÷ ۳۶۰ (نمودار ۱۲) گسترش دهیم.

اگر ما خود را به اعداد سه رقمی محدود کنیم، علاوه بر اعداد مربوط به ده پسر «پوزیدون» یک جفت دیگر از اعداد متقارن یعنی ۴۰۵ و ۶۴۰ باقی می‌ماند و با توجه به اینکه نسبت ۶۴۰:۳۶۰ با نسبت ۷۲۰ ÷ ۴۰۵ برابر است، اعداد ۴۰۵ و ۶۴۰ روی نمودار ۱۲ به صورت صداهای C (دو) و E (می) نمایش داده شده‌اند. در ضمن اعداد دیگری نیز در کنار آنها به صورت صداهای c(دو) و e (می) دیده می‌شوند که نسبت میان این اعداد با اعداد قبلی تفاوت چندانی ندارد. این تفاوت که کومای میکروتنال[۸] (microtonal comma) نام دارد، دارای نسبت $\frac{۸۱}{۸۰}$ است و فقط در آزمایشگاه یا به وسیلهٔ گوش‌های بسیار حساس و تربیت شده قابل احساس است، نسبت $\frac{۸۱}{۸۰}$ از نظر یونانیان کوچک‌ترین واحد اندازه‌گیری فاصله‌ها از نظر زیر و بمی به شمار رفته و مقدار آن $\frac{۱}{۹}$ پردهٔ $\frac{۸}{۹}$ است که فقط از نظر تئوریک، واحد قابل استفاده شناخته شده است.

فاصلهٔ یک پرده‌ای میان لا (A) و سُل (G) در نمودارهای ۱۱ و ۱۲ تقسیم فرعی مشابهی پدید می‌آورد و لازمه تقارن آن این است که نقطه تقارن، درست نقطه مقابل مرجع مورد نظر ما یعنی صدای «ر» (D) قرار بگیرد. با استفاده از ریشهٔ دوم عدد ۲ می‌توان این مکان هندسی یعنی نقطهٔ تقارن میان لا (A) و سل (G) را مشخص کرد که در میان مجموعه اعداد باستانی جایی ندارد.

بنابر این لازم است که ما درصدد دستیابی به یک تقریب برآییم.

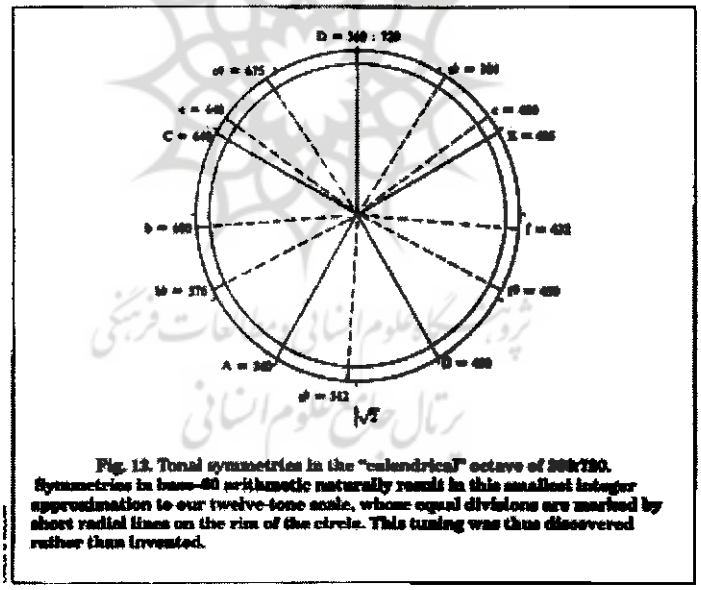

Fig. 12. Tonal symmetries in the "calendrical" octave of 360:720. Symmetries in base-60 arithmetic naturally result in this smallest integer approximation to our twelve-tone scale, whose equal divisions are marked by short radial lines on the rim of the circle. This tuning was thus discovered rather than invented.

نمودار ۱۲. تقارن‌های تُنال در اکتاو تقویمی ۷۲۰ ÷ ۳۶۰. در ریاضیات بر مبنای ۶۰. تقارن‌ها به‌طور طبیعی از کوچک‌ترین عدد صحیح حاصل می‌شود که قرابت آن با گام ۱۲ درجه‌ای ما (که تقسیمات مساوی آن به وسیله خطوط شعاعی بریده نشان داده شده) مشخص می‌شود. این نوع تقسیم‌بندی کوک، ابداع نشده، بلکه کشف شده است.

چنان‌چه درصدد یافتن تقریب برای مکان هندسی (نقطه تقارن لا (A) و سُل (G) برآئیم، درمی‌یابیم که تقریب قابل قبول موسیقایی که درصد خطای آن از یک کوما (Comma) کمتر باشد، میان صدای لابمل (a - flat = ۵۱۲) و سل

افلاطون قرن چهارم پیش از میلاد به‌قدری جدید و بدیع جلوه می‌کند که او به کمک آنها دست به اشاعهٔ مباحث خود می‌زند. اما همین روش‌های تازه و بدیع پنجاه سال بعد از طرف **آریستوکِسن** (Aristoxéne) مورد انکار قرار می‌گیرد. تعمیم موسیقایی فرمول کوک شصتی (۳÷۴ ممزوج با ۵) را به افلاطون نسبت می‌دهند. اعداد ۳، ۴ و ۵ افلاطون با اعداد سی یعنی سین = خدا ـ ماه، چهل (ا آ) و پنجاه (**اِن لیل**) متناظر بوده و به ما یادآوری می‌کند که تمام اصوات موسیقایی به وسیله فاصله چهارم درست (perfect fourth) با نسبت بسامدی $\frac{۴}{۳}$ که مبین چارچوب و قالب «دانگ» (tetrachord)های احتمالی است و فاصله سوم بزرگ با نسبت ۵÷۴ به هم مرتبط می‌شوند. آخرین بازمانده از پیروان فیثاغورس **نیکوماخوس** (Nicomachus) است که در قرن دوم پیش از میلاد به درستی معنای ازدواج‌های افلاطونی را درک کرد و پی‌گیری توضیحات لازم را به عهده گرفت ولی متأسفانه عمرش وفا نکرد.

بازسازی پرستشگاه بابلی‌ها

در هزارهٔ دوم قبل از میلاد، بابلی‌ها دست به بازسازی پرستشگاه به جا مانده از سومریان، به طریقی که به سختی اشاره به امید موفقیت فیثاغورسی داشته باشد زدند.

خدایان نیز به منظور جلوگیری از تخریب پرستشگاه به دست **اِن‌لیل** بازسازی پرستشگاه را به فرماندهی **مردوک** (Marduk)[] که دیگر خدایان قدرت خود را به او واگذار کرده بودند] بر عهده گرفتند.

در اینجا مهارت سومریان در ساده کردن کاربرد کسرهای متقابل، با دیدگاهی فلسفی‌تر دربارهٔ علم هارمونی که به وسیله اولین ده عدد صحیح تولید می‌شود، (با توجه به کودکان تا ده سال مورد نظر سقراط در کتاب جمهوری) قابل درک است. چون سقراط شک دارد که شهروندان بیشتر از ده سال اصلاً مناسب جوامع آرمانی باشند.

پس از آن‌که **مردوک** اژدهای مؤنث یعنی **تیامات** (Tiamat) را شکست داد خدایان برای گرامیداشت پیروزی خود، معبدی به نام او ساختند که کار ساخت و ساز خشت‌های آن در سال (۷۲۰ = ۳۶۰ × ۲) به طول انجامید از این‌رو است که عدد ۷۲۰ یعنی واحد سومری برای اندازه‌گیری خشت و کوچک‌ترین شاخص صوتی که قادر است گام‌های هفت درجه‌ای را با استفاده از اکتاو تقویمی به صورت ۱۲ درجه‌ای درآورد حالتی اسطوره‌ای یافته است. می‌گویند چنان‌چه خشت‌های صوتی /حسابی معبد **مردوک** در نظم ماتریسی ردیف شوند، طرح کلی آن معبد (با شاخص ۷۲۰) به شکل توسعه یافته معبد **اِن لیل** (با شاخص ۶۰) درمی‌آید و همچنین **اِن لیل** پنجاه نام خود را به **مردوک** می‌بخشد. در این معبد صورت **مردوک** دیده می‌شود که از شادی می‌درخشد.

«تنظیم کوک اژدهای چیره دست» (Great Dragon Tuning)

صداهای مربوط به گام پنج درجه‌ای (pentatonic)

E می (A) لا (D) ر (G) سُل (C) دو

صداهای مربوط به گام هفت درجه‌ای (Heptatonic)

(B) سی (E) می (A) لا (D) ر (G) سل (C) دو (F) فا

صداهای مربوط به گام ۱۲ درجه‌ای یا کروماتیک (Twelve - tone chromatic)

(G#)سل دیز (C#)دو دیز (F#)فا دیز (B)سی (E)می (A)لا (D)ر (G)سل (C)دو (F)فا (Bb)سی بمل (Eb)می بمل (Ab) بمل لا

(Ab)لا بمل (Eb)بمل سی (Bb)سی بمل (F)فا (C)دو (G)سل (D)ر (A)لا (E)می (B)سی (F#)فا دیز (C#)دو دیز (C#)سل دیز

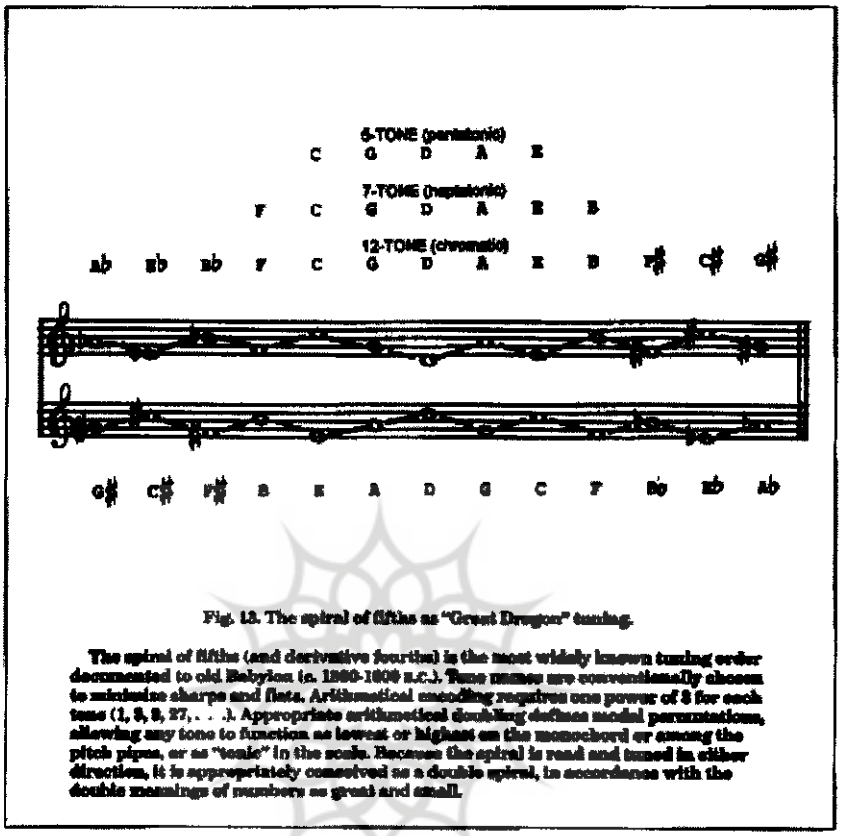

Fig. 13. The spiral of fifths as "Great Dragon" tuning.

The spiral of fifths (and derivative fourths) is the most widely known tuning order documented to old Babylon (c. 1800-1600 B.C.). Tone names are conventionally chosen to minimize sharps and flats. Arithmetical encoding requires one power of 3 for each tone (1, 3, 9, 27, . . .). Appropriate arithmetical doubling defines modal permutations, allowing any tone to function as lowest or highest on the monochord or among the pitch pipes, or as "tonic" in the scale. Because the spiral is read and tuned in either direction, it is appropriately conceived as a double spiral, in accordance with the double meanings of numbers as great and small.

نمودار ۱۳ ـ فاصله‌های موسیقایی پنجم درست به صورت مارپیچ در سیستم کوک اژدهای چیره‌دست

مارپیچ فاصله‌های پنجم درست و چهارم‌های درست مربوط به آنها به صورت وسیعی به عنوان ردیف کوکی (tuning order) در بابل باستان (۱۶۰۰ ـ ۱۸۰۰ قبل از میلاد) شناخته شده است در گام اصوات به‌منظور صرفه‌جویی، از حروف، و همچنین از نمادهای مربوط به دیز (diése) و بمل (bémol) استفاده شده است. رمزگذاری ریاضی برای اعداد ۱، ۳، ۹، ۲۷ و... نیاز به توان‌هایی از عدد ۳ دارد. اختصاص دادن مضاعف‌های حسابی مشخص کننده جایگشت (factorial) مقامی به‌منظور در نظر گرفتن هر صدا و نقش دادن به آن، به عنوان پایین‌ترین یا بالاترین اکتاو بر روی مونوکورد (monochord) یا لوله‌های صوتی یا به عنوان «بن‌مایه» (Tonic) در گام است. از آنجا که صداهای هر مارپیچ از هر یک از جهات خوانده یا کوک می‌شود، برحسب معنای دوگانه اعداد بزرگ و کوچک، به‌طور مشخص به عنوان مارپیچ مضاعف طرح‌ریزی شده است.

هم اکنون، یکی از برنامه‌های معمول در آموزش موسیقی به کودک، شناخت روش اسطوره‌ای مار عظیم و اژدهاست. او در این برنامه آموزشی یاد می‌گیرد که گام را به صورت فاصله‌های موسیقایی پنجم و چهارم درست مارپیچ در نظر بگیرد. این امر شنیدن موسیقی را برای کودک آسان می‌کند. به نظر من دایره پنجم (Circle of fifth)های بالارونده و پایین رونده یادآور دانش مارغول پیکر و اژدهای اساطیر باستان است. نمودار ۱۳ را به بینید.

تموج مارپیچ در طول سیم‌های متوالی در زمان کوک‌کردن ساز، (همان‌طور که هنوز لزوماً وجود دارند) قابل مشاهده است و در هر مجموعه از ردیف لوله‌های صوتی نیز (به عنوان مثال در چین) می‌توان شاهد این تموج‌ها بود. از آنجا که اعداد یکسان مربوط به صوت، به‌طور متقابل، نقش مضرب‌های بسامد و طول موج را دارند، امروزه این اعداد نیز همچون زمان سومریان دارای معانی مضاعف مشابه هستند. بنابر این کاملاً جا دارد که مارپیچ بالارونده و پایین رونده را به صورت توأمان به شکل مارهای درهم پیچیده نمایش دهیم.

در روایت اسطوره‌ای، **مردوک**، **تیامات** راکشته و او را به دو نیم کرده و فاصلهٔ اکتاو ۲÷۱ را ایجاد می‌کند. وانگهی دو نیم شدن اژدها احتمالاً باعث ایجاد صداهای زیر و بم دیگر نیز می‌شود. اعداد بزرگتر از عدد **مردوک** یعنی عدد ۱۰ در تقسیم‌بندی هندسی سیم هیچ نقشی را ندارند. این معنای مضاعف مارپیچ فاصله‌های پنجم و چهارم درست بالارونده و پایین روندهٔ موسیقایی، اساس آگاهی ما دربارهٔ ساختار موسیقی محسوب می‌شود. در این که سومری‌ها مارپیچ مضاعف را در مرکز تقارن جای دهند، هیچ شک و تردیدی ندارند. همان‌طور که روی گلدان گودا (Gudea) در نمونه ۱۴ که متعلق به کاهن ـ پادشاه لاگاش [(Lagash)حدود ۲۴۵۰ قبل از میلاد] است، مارپیچ مضاعف به شکل متقارن در کنار دو گریفون (griphon) ایستاده است.

Fig. 14. Sumerian double-serpent symmetry, from the steatite vase of Gudea in the Louvre, Paris.

نمودار ۱۴ ـ تصویر مارپیچ مضاعف متقارن سومری از «گلدان گودا» که در موزه لوور در پاریس است.

در صورت کاربرد نسبت‌های ۴:۵ و ۶÷۵ فاصله‌های موسیقایی (که به دست **ان لیل** ابداع شده‌اند) برای تعریف گام هفت درجه‌ای (که در این صورت همهٔ اعداد دو رقمی خواهند بود) می‌توان از کاربرد اعداد بزرگ و دست و پاگیر

احتراز نمود. اعداد **ان لیل** که برای گام ۱۲ درجه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، فقط به سه رقم نیاز دارد. بنابراین در سومر که **ان لیل** معادل عدد ۵۰ است و اعداد با مبنای شصت یا عدد اول و مذکر ۵، خداانگاری انسان به‌شمار می‌رود. اعمال محاسباتی ما را (که در آن صدای دوازدهم شامل عدد ۳۱۱ می‌شود و و این عدد خود با ۱۷۷ و ۱۴۷ برابر است) به شمارش اعداد رسانده و از تقلیل ثمربخشی ملودیک جلوگیری می‌کند.(نمودار ۱۵). فقط ۵ صدای مرکزی ("E"می "A"لا "D" ر "G" سل "C" دو) متعلق به مار غول پیکر در نمودار ۱۲ پدیدار می‌شود. در نمودار ۱۲ خطوط شعاعی ضخیم مبین این پنج صدای مرکزی هستند و همه صداهای دیگر متعلق به «**ان لیل**» می‌باشد.

پایین رونده (E)می (F)فا (G)سل (A)لا (B)سی (C)دو (D)ر (E)می

۳۸۴ ۴۳۲ ۴۸۶ ۵۱۲ ۵۴۰ ۵۷۶ ۷۲۹ ۷۶۸

بالارونده (E)می (D)ر (C)دو (B)سی (A)لا (G)سل (F)فا (E)می

۳۰ ۳۲ ۳۶ ۴۰ ۴۵ ۴۸ ۵۴ ۶۰

مقایسه گام‌های بابلی، یونانی، هندی، دارای اعداد سه رقمی، نیاز به کوک فیثاغورسی دارد، زیرا محاسبه هر یک از صداهای: فا، دو، سل، ر، لا، می، سی در این سیستم که مارپیچ فاصله‌های پنجم نامیده می‌شود با استفاده از توان‌های سه است. مثلاً گسترده‌ترین عدد اصلی سه به توان شش معادل ۷۲۹ می‌باشد، در حالی که پایهٔ شصت رقیب آن فقط نیاز به دو رقم دارد که هر دوی آنها در مقتصدانه‌ترین روش ریاضی نشان داده شده‌اند. به‌طوری که چون معکوس‌ها به اعداد وسیع‌تر نیاز دارند، اولی پائین رونده و دومی بالا رونده است.

E	D	C	B	A	G	F	E	(falling)
384	432	486	512	540	648	729	768	
E	f	g	A	B	c	d	E	(rising)
30	32	36	40	45	48	54	60	

Fig. 15. A comparison of the Babylonian, Greek, and Hindu scales in the three-digit numerosity required for "Pythagorean tuning" because the arithmetic requires a power of 3 for each tone in the spiral of fifths, F C G D A E B, the largest sexagesimal number is 3^6 = 729. In contrast, its base-60 competitor needs only two digits. Both are shown in their most economical arithmetic, the first falling and the second rising (because reversals require even larger numbers).

به لحاظ تاریخی، در قرن پانزدهم میلادی، موسیقی اروپایی، به‌خاطر حفظ آکوردهای سه‌صدایی (Triads) با نسبت‌های ۶÷۵÷۴ برای ایجاد هارمونی‌های جدید، بدون تجاوز کردن از دوازده صدا، این «نظام کوک دقیق» (Just Tuning system) را مجدداً مورد استفاده قرار داد.

مردمان باستان شاید این نظام را بیشتر به خاطر ایجاز محاسباتی، تا سادگی و خلوص سه صدایی بودن آن دوست می‌داشتند ولی طرفداران فاصله‌های کوچکتر از نیم‌پرده یا میکرو تنالیست‌ها (microtonalists)ی امروز که مجهز به فن‌آوری‌های کار آمد و جدید هستند، در صدد برآمده‌اند که دوباره از نسبت‌های خدایان سومریان باستان به صورتی ثمربخش و مؤثر بهره‌مند شوند.

برخی از نتیجه‌گیری‌های شخصی

اصول نهایی تئوری موسیقی برخلاف کدگذاری سومری، جایی در گذشته‌های دور مفقود شده است. این منابع مبتنی بر میراث زیست‌شناختی شفاهی مشترک هستند که ما در برخی از این میراث‌های شفاهی، با حیوانات فصل مشترک داریم. این میراث‌ها به گفتهٔ ارسطو متکی به تعریف عدد دقیقی نیستند. به زعم ویلیام تامسون (William Thompson) موسیقی‌شناس (musicologist) برجسته معاصر به منظور سازگاری با محیط پیچیدهٔ سیستم‌های حسی ما مانند فیلترهای با گذشت و بخشنده عمل کرده و به ما قدرت تعمیم‌بخشی می‌دهند. «به نظر من این امر نتیجه رفتار سازشی دوران اولیه زندگی انسان است. بخشی که از خوش اقبالی ما هم‌چنان به حیات خود ادامه می‌دهد. در این بخش، نظام نرونی، هزاران هزار شبکه ایجاد کرده است که برای انجام برخی کارهای ساده در دسترس و اختیار ما قرار دارند.» سقراط هرگز به امکان برقراری عدالت کامل معتقد نبود. هدف اصلی افلاطون از نگارش کتاب جمهوری این بود که خوانندگان را در برابر هنجارهای فرهنگی متناوب به صافی‌های با گذشت تبدیل کنند، همان‌گونه که درباره تعریف روز، شب، ماه و سال در کتاب جمهوری جای بحث است، درباره تعریف علمی فواصل موسیقایی نیز ابهاماتی وجود دارد. البته، هنر، این فاصله‌ها را به چیزی بدل کرد که ما از آن خرسند و خوشحالیم. سومریان، این «مردمان سرسیاه» (black- headed people) ـ به اصطلاح خودشان ـ از نظر تاریخی نشان دادند که همانند قهرمانان بزرگی که می‌شناختند یا خلق می‌کردند، مردمانی جسورند که به ترکیب و تلفیق ارزش‌های فرهنگی دست یافته بودند. سومریان ما را نیز دعوت به چالش می‌کنند تا چنین باشیم.

پی‌نوشت‌ها:

۱ - نژادی از انسان‌های ماقبل تاریخ که اسکلت آنان در ۱۸۶۸ میلادی در ناحیه کرومانیون فرانسه کشف شد.

۲ - دختران زئوس که هر یک از آنها - بنابر اسطوره‌های یونانی - الهه یکی از هنرها بودند.

۳ - همان طور که نور خورشید در برخورد با قطرات باران تجزیه می‌شود و با رنگ‌های مرئی قوس‌قزح را به وجود می‌آورد، هر یک از صداهای موسیقی نیز در شرایط معینی تجزیه شده و اصواتی رابه نام هارمونیک‌ها یا فراهنگ‌ها به وجود می‌آورند.

۴ - در مکتب فیثاغورسی فاصله‌های موسیقایی مطبوع کامل (perfect consonance) از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ حاصل می‌شود که آنها را «چارگان مقدس» (holy tetractys) می‌نامیدند، زیرا از طرفی این اعداد پایه سایر اعداد به شمار می‌روند و از طرف دیگر مجموع آنها عدد ده را به وجود می‌آورد که پایه اعداد اعشاری (decimal) در ریاضیات است. در ضمن این اعداد تعیین‌کنندهٔ ابعاد مکان، فضا، زمان و ادراک می‌باشند.

۵ - سازی باستانی مربوط به یونان و رم متشکل از تعدادی نی با طول‌های متفاوت که به ترتیب کوتاهی و بلندی در کنار یکدیگر قرار دارند. سوراخ‌های یک طرف آنها که برای نواختن به کار می‌رود، در یک سطح است. این ساز که نام دیگر آن «سیرنکس» (syrinx) است منتسب به یکی از خدایان یونانی به نام «پان»(Pan) است.

۶ - آولس (Aulos) یا «کالامس» (Kalamos) مهم‌ترین ساز بادی یونان باستان بین سال‌های ۶۰۰ تا ۳۰۰ قبل از میلاد است.

۷ - چون در این گام که از تقسیم فاصلهٔ اکتاو به دوازده قسمت مساوی حاصل شده است، هر نیم پرده دارای یک واحد (Prony) و هر پرده دو پرونی صد سنتی می‌باشد، نویسنده آن را به اعداد مربوط به مبنای ۶۰ نسبت داده است.

۸ - امروزه نیز دانشمندانی مانند هلمهولتز (Helmholtz) پس از تجارب فراوان، اکتاو، با نسبت بسامدی $\frac{2}{1}$ دوازدهم درست با

نسبت $\frac{۳}{۱}$ و پنجم درست با نسبت $\frac{۳}{۲}$ و چهارم درست با نسبت $\frac{۴}{۳}$ را به ترتیب خوش صداترین فاصله‌های موسیقایی شناخته‌اند. لازم به یادآوری است که نسبت عددی مربوط به فاصله‌های موسیقایی، در زمان‌های گذشته به نسبت طول سیم بوده است ولی امروزه بنا به اصل فیزیکی: «بسامد، (frequency) صوت اصلی یک سیم با طول آن نسبت معکوس دارد.» برای تطبیق اعداد قدیمی مربوط به این فاصله‌ها باید کسر مربوط به آنها را به صورت معکوس (صورت به جای مخرج و مخرج به جای صورت) به کار برد. به عنوان مثال $\frac{۲}{۳}$ طول سیم با بسامد $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ طول سیم با بسامد $\frac{۴}{۳}$ نشان داده می‌شود.

۹ ـ این فاصله بعدها به نام دیزیس (diesis) یا سنتونیک (syntonique) نامیده شد که معادل ۵/۳۹۵ ساوار (savart) است و در قرن بیستم آن را حد حساسیت گوش دانسته‌اند. نسبت $\frac{۸۱}{۸۰}$ از اختلاف چهار فاصله پنجم درست (دارای نسبت $\frac{۸۱}{۱۶}$ با فاصله هفدهم بزرگ گام زارلن (zarlin) به وجود می‌آید و همچنین این نسبت از اختلاف فاصله پرده بزرگ (با نسبت $\frac{۹}{۸}$) و پردهٔ کوچک با نسبت $\frac{۱۰}{۹}$ ($\frac{۸۱}{۸۰} = \frac{۱۰}{۹} \div \frac{۹}{۸}$) نیز حاصل می‌شود که آن را کوما (comma)ی دیدیمیک (dydimique) و کومای طبیعی نیز می‌نامند.

۱۰ ـ این فاصله (یعنی نسبت $\frac{۲۴}{۲۵}$) که از نسبت طولی سیم حاصل می‌شود، امروزه به صورت $\frac{۲۵}{۲۴}$ (یعنی نسبت بسامد (frequency) بین دو صدا) کاربرد دارد، و از اختلاف زیر و بمی مجموع دو فاصلهٔ سوم بزرگ با نسبت $\frac{۵}{۴}$ و فاصلهٔ پنجم درست با نسبت $\frac{۳}{۲}$ (به این صورت: $\frac{۲۵}{۲۴} = \frac{۳}{۲} \div \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۵}{۴} \times \frac{۵}{۴}$) حاصل می‌شود، که مقدار آن حدود ۱۸ ساوار (Savart) است.

۱۱ ـ فاصله نیم پرده بزرگ با نسبت ۱۶ ÷ ۱۵ از نسبت بسامد هارمونیک‌های پانزدهم و شانزدهم در گام طبیعی حاصل شده است که مقدار آن حدود ۲۸ ساوار می‌باشد.

۱۲ ـ اگر با توجه به نظام گام تعدیل شده مساوی (equal temperoment system) که در آن فاصله اکتاو به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده است، این فاصله یعنی اکتاو را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، کومای تعدیل شده به این صورت: ۱/۰۱۱۶۱۹۴۴ = ۲ √ ۶۰ حاصل می‌شود که لگاریتم (logarithm) آن معادل حدود پنج ساوار (Savart) خواهد بود.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی