«تحقیقات مالی»

سال سوم - شماره ۱۱ و ۱۲ - تابستان و پاییز ۱۳۷۵

ص ص ۱۷۶ - ۱۴۸

تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله

ترجمه: دکتر غلامرضا اسلامی بیدگلی [۱]

حسین سرافراز اردکانی [۲]

چکیده مقاله

گستردگی طیف ابزارهای در دسترس سرمایه‌گذاران با توجه به نیازهای آنها، یکی از مشخصات بازارهای سرمایه پیشرفته است. برخی از این ابزارها ضمن برآوردن سلیقه‌های گوناگون، سرمایه‌گذاران را یاری می‌کنند تا خود را در برابر ناملایمات بازارهای مالی که آینهٔ تمام نمایی از نوسانات اقتصادی‌اند ایمن سازند که از جمله آنها اوراق حق اختیار خرید و فروش می‌باشند.

بدیهی است ارائه قیمت منصفانه این اوراق از وظائف صاحبنظران مالی است. در این راستا تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله یکی از شیوه‌های مهم ارزشگذاری اوراق مزبور محسوب می‌شود که ضمن کمک به قیمت‌گذاری این اوراق شایستگی کاربرد خود را در حوزه‌های وسیعی از مدیریت مالی همچون بودجه‌بندی سرمایه‌ای، ایجاد بدره دینامیک و ... به اثبات رسانیده است. تئوری عمومی قیمت‌گذاری اختیار معامله که از طرف فیشر بلک و

۱- عضو هیأت علمی دانشگاه تهران

۲- کارشناس‌ارشد مدیریت مالی از دانشگاه امام صادق (ع)

میرون شولز ارائه شده است حاصل خوشه چینی این دو صاحبنظر خوش ذوق از خرمن تلاشهای صاحبنظران قبلی همچون کاسوف، بونس، لوئیس باچلیر و ... می‌باشد. بعد از ارائه تئوری مزبور توسط بلک و شولز عمده تلاش صاحبنظران مالی معطوف به گسترش کاربریهای این تئوری در حوزه علوم مالی بوده است.

واژه‌های کلیدی

تئوری قیمت‌گذاری، اختیار خرید، اختیار فروش، بورس اوراق بهادار، اوراق بهادار، ارزشگذاری.

مقدمه

قدمت قراردادهای مالی به قدمت تاریخ بشریت می‌رسد قانون حمورابی که در سال ۱۸۰۰ قبل از میلاد تدوین شده است، در خلال بیان سایر روابط اجتماعی، روابط تجاری را نیز مورد بحث قرار داده است. هر چند اختیار معامله برای سالیان متمادی توسط انسان مورد معامله قرار می‌گرفته است ولی کمتر از دو دهه است که بر اهمیت آن افزوده گشته و تحت این عنوان مورد توجه قرار گرفته است.

در سال ۱۹۷۳ میلادی بورس اختیار معامله شیکاگو در اطاق بازرگانی شیکاگو[۱] ایالات متحده آمریکا به منظور دادوستد اختیار معامله خرید[۲] تشکیل گردید. سپس بورسهای آمریکن[۳]، پاسی فیک[۴] و فیلادلفیا[۵] از بورس شیکاگو تبعیت نمودند به طوری که در سال

1- Chicago Board of - Trade

۲- در برخی موارد جهت اختصار، اختیار معامله خرید را اختصارا" اختیار خرید نامیده‌ایم. (مترجم)

3- American

4- Pacific

5- Philadelphia

۱۹۷۷ میلادی دادوستد اختیار معامله فروش[1] در این بورسها آغاز گردید.

تا اوائل دهه ۱۹۸۰ اختیار معامله‌های خرید و فروش صادره روی چهارصد سهم (در بازار آمریکا) و سایر ابزارهای مالی مورد معامله قرار می‌گرفتند.

در سال ۱۹۷۳ میلادی با انتشار مقاله آقایان فیشر بلک میرون شولز[2] در خصوص قیمت‌گذاری برگهای اختیار معامله خرید و فروش انقلابی تازه در مورد اینگونه اوراق بوقوع پیوست. بد نیست بدانید که تلاش در قیمت‌گذاری اختیار معامله و سایر اوراق بهادار مشتقه یکی از حوزه‌های مهم فعالیت صاحب‌نظران مالی در این زمینه‌ها به شمار می‌آید.

قراردادهای مربوط به اختیار معامله از اوراق بهادار مشتقه به شمار می‌روند. ارزش این اوراق به ارزش سایر اوراق (اوراقی که اوراق دسته اول روی آن صادر شده‌اند) بستگی دارد. بطور مثال اختیار خرید صادره روی سهام به دارنده آن، امکان می‌دهد تا مبادرت به خرید یک سهم از آن سهام طی یک دوره با قیمتی خاص نماید. بدیهی است که ارزش این اختیار معامله بستگی تام به ارزش سهم مزبور خواهد داشت.

تشریح اصطلاحات

قبل از ارائه بحثی آکادمیک در خصوص اختیار معامله، بد نیست تا برخی اصطلاحات بکار برده شده را بررسی نماییم.

از متداولترین انواع اختیار معامله، اختیار معامله خرید[3] و اختیار معامله فروش[4] می‌باشد. همانطوری که از اسم این اوراق برمی‌آید، اختیار معامله خرید در واقع جهت خرید و اختیار معامله فروش جهت فروش یک سهم به قیمت معین بکار برده می‌شود. این دو نوع اختیار

۱- در برخی موارد جهت اختصار، اختیار معامله فروش را اختصاراً" اختیار فروش" نامیده‌ایم. (مترجم)

2- Fisher Black and Myron Scholes

3- Call Option

4- Put Option

معامله در واقع قراردادهایی هستند که بین دو سرمایه‌گذار منعقد می‌گردند. خریدار اختیار معامله در واقع مالک آن می‌باشد. این فرد در اصطلاح دارای موقعیت خرید[1] است و بر عکس صادر کننده اختیار معامله دارای موقعیت فروش خواهد بود. دارنده اختیار معامله خرید می‌تواند (نه اینکه ملزم باشد) تعداد معینی سهم را در خلال مدتی معین و با قیمتی معین خریداری نماید. سررسید مدت ذکر شده را در اصطلاح تاریخ سررسید می‌نامند. همچنین قیمت معین ذکر شده را قیمت توافقی[2] و یا قیمت قرارداد[3] می‌نامند. دارنده اختیار خرید مادامی که اختیار معامله خود را اعمال نکرده است هیچگونه سودی دریافت نکرده و طبعاً حق مالکیتی نیز در بنگاه نخواهد داشت. دارنده اختیار معامله فروش، طبعاً دارای حق فروش ورقه بهادار مورد نظر خواهد بود.

در هنگام خرید اختیار معامله، مقدار پول پرداخت شده توسط خریدار به فروشنده را در اصطلاح صرف[4] می‌نامند. در صورتی که قیمت سهام در بازار بالاتر از قیمت توافقی آن باشد مابه التفاوت دو قیمت مزبور برابر با ارزش (قیمت) ذاتی اختیار معامله خرید می‌باشد. به عبارت دیگر چنانچه قیمت توافقی را با X و قیمت سهام در بازار را با S نشان دهیم ارزش اختیار خرید برابر با Max(S - X, .) خواهد گردید. به طریق مشابه قیمت (ارزش) ذاتی یک اختیار معامله فروش برابر با قیمت توافقی منهای قیمت سهم خواهد شد. به عبارت دیگر قیمت اختیار فروش برابر با Max(X - S, .) خواهد گردید. برخی مواقع قیمت ذاتی اختیار معامله را در اصطلاح «قیمت به هنگام اعمال»[5] می‌نامند. توجه داشته باشید که ارزش ذاتی یک اختیار معامله، قیمت بازاری آن را اندازه‌گیری نمی‌کند. به طور مشخص می توان گفت که یک اختیار معامله بالاتر از قیمت ذاتی آن به فروش می‌رود. معمولاً در زمانی که برای اولین بار

1- Long Position

2- Exercise Price

3- Contract Price

4- Premium

5- When - Exercise Price

مبادرت به صدور اختیار معامله می‌گردد، قیمت توافقی نزدیک به قیمت جاری سهام در بازار قرار داده می‌شود در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که اختیار معامله به پول نزدیک[۱] است. همچنانکه قیمتهای سهام در بازار تغییر می‌کند، اختیار معامله دارای ارزش پولی[۲] و یا فاقد ارزش پولی[۳] خواهد شد. بدین ترتیب زمانی که قیمت سهام در بازار بزرگتر از قیمت توافقی باشد، اختیار معامله مزبور دارای ارزش پولی بوده و زمانی که قیمت بازاری سهام از قیمت توافقی کوچکتر باشد، اختیار خرید فاقد ارزش پولی خواهد گردید.

اختیار معامله‌هایی که اخیراً مورد بحث قرار گرفت از نوع آمریکایی[۴] می‌باشد اعمال اختیار معامله‌های مزبور در تاریخ سررسید و در هر زمانی قبل از تاریخ مذکور بلامانع می‌باشد.اختیار معامله‌هایی که تنها امکان اعمال آن در تاریخ سررسید وجود دارد را اصطلاحاً اختیار معامله اروپایی[۵] می‌نامند. در واقع این اسم یک اسم بی‌مسمیٰ و نامناسب است در حالی که اختیار معامله‌های آمریکائی در بازارهای بورس ایالات متحده آمریکا و کانادا (و اروپا) مورد معامله قرار می‌گیرند، اختیار معامله‌های اروپایی در آن قاره مورد دادوستد واقع نمی‌شوند.

یک وارانت[۶] شبیه به اختیار معامله خرید می‌باشد. تفاوت این دو آن است که وارانت در برابر سهام خود کمپانی منتشر می‌گردد در حالی که این وضعیت در مورد اختیار معامله عنداللزوم برقرار نمی‌باشد. هنگامی که یک وارانت اعمال می‌گردد، کمپانی اقدام به اعطاء سهام جدید به دارنده آن خواهد کرد. مسئله دیگر آنکه وارانت‌ها دارای سررسید چند ساله و یا بیشتر می‌باشند. این نکته را ذکر کنیم که حتی وارانت‌هایی منتشر شده‌اند که حالت

1- At the Money

2- In the Money

3- Out of the Money

4- American Option

5- European Option

6- Warrant

دائمی[1] دارند. وارانت‌ها در هنگام انتشار معمولاً فاقد ارزش پولی می‌باشند.

حق تقدم[2] نیز همانند وارانت در قبال ارائه سهم جدید به سهامداران انتشار می‌یابد سررسید حق‌تقدم‌ها معمولاً چند هفته و یا چند ماه پس از انتشار در بورسها قابل معامله می‌باشند. بد نیست بدانید که حق‌تقدمها در هنگام انتشار در اکثر موارد دارای ارزش پولی هستند.

انواع مختلفی از سایر قراردادهای مالی دربردارندۀ اختیار معامله به صورت ضمنی و یا صریح هستند. مثلاً اوراق قرضه قابل تبدیل[3] به دارنده آن امکان تبدیل اوراق مزبور به سهام کمپانی را می‌دهند. اختیار معامله موجود در این اوراق همانند یک وارانت می‌باشد. اوراق قرضه قابل بازخرید دربردارنده حق‌تقدم بنگاه جهت بازخرید آنها با قیمت معینی هستند. بدنیست بدانید که پس از ارائه مدل بلک - شولز اکثر پیشرفتهای بدست آمده در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله، در ارتباط با کاربرد مدل مزبور تحت شرایط فوق‌الذکر (مثلاً اوراق قرضه قابل تبدیل) بوده است.

برخی ملاحظات اولیه

اختیار معامله خرید از متداول‌ترین و ساده‌ترین اوراق بهادار مشتقه می‌باشد. بنابر این در ابتدا کار خود را با بحث در مورد اینگونه اوراق شروع می‌کنیم چراکه اصول بیان شده در مورد اختیار خرید با تغییراتی جزیی در مورد سایر انواع اوراق بهادار مشتقه کاربرد دارد.

اختیار معامله خریدی که دارای قیمت توافقی X بوده و روی سهمی صادر شده باشد که قیمت بازاری آن در حال حاضر برابر با S است، به اندازه (S - X) ارزش دارد چراکه دارنده آن را قادر می‌سازد تا چیزی راکه به اندازه S (واحد پولی) ارزش دارد با قیمت X خریداری نماید. به منظور جلوگیری از بروز هرگونه آربیتراژی، اختیار معامله خرید باید حداقل به اندازه

1- Perpetuity

2- Right

3- Convertible Bonds

مابه‌التفاوت فوق‌الذکر [(S - X)] فروخته شود. مضاف بر این از آنجایی که اختیار خرید در بردارنده مسوولیت محدود است (بدین معنی که دارنده آن را نمی‌توان مجبور کرد تا اختیار معامله مزبور را اعمال نماید) حداقل ارزش آن باید صفر باشد. با توجه به آنچه گذشت در خواهید یافت که حداقل ارزش برگ اختیار معامله صفر بوده و منفی نخواهد بود. بنابر این می‌توان گفت که $c(s, x) \geq Max(s - x, .)$ خواهد گردید که در آن $c(s, t)$ قیمت بازاری اختیار خرید با زمان مانده تا سررسید t می‌باشد. به عنوان یک قاعده کلی نامعادله فوق‌الذکر دقیق بوده و اختیار معامله نسبت به زمانی که اعمال می‌گردد، با ارزش‌تر خواهد بود. تنها یک مورد استثناء آن هم در هنگام سررسید اختیار معامله وجود دارد. در این زمان دارنده اختیار معامله تنها دارای دو گزینه است : اختیار خرید خود را اعمال کند یا منتظر بماند تا اختیار معامله مزبور منقضی گردد. در این هنگام نامعادله اخیرالذکر را باید به صورت معادله زیر در آورد:

$$c(s, .) = max\ (s - x, .)$$

وجود همین رابطه بین ارزش اختیار معامله در زمان سررسید و قیمت جاری سهام در بازار است که اختیار خرید را به مثابه یک ورقه بهادار مشتقه‌ای در می‌آورد که قیمت آن به عنوان تابعی از قیمت سهام در بازار می‌گردد. در حالت عدم وجود فرصتهای آربیتراژ، وجود برخی محدودیتهای [1] کلی در مورد قیمت اختیار معامله را می‌توان استنتاج کرد. مثلاً، اختیار معامله‌ای که دارای قیمت توافقی اندکی است، باید حداقل به اندازه اختیار خریدی که دارای قیمت اعمال بالاتر است ارزش داشته باشد. درک این مسأله نیز چندان مشکل نمی‌باشد. دارنده اختیار معامله خریدی که دارای قیمت توافقی کمتری است در هر زمانی که سایر دارندگان اختیار معامله (با قیمت توافقی بالاتر) مبادرت به اعمال اختیار معامله خود بنمایند، می‌تواند اختیار معامله خود را با هزینه‌ای کمتر اعمال کند. دو نوع از این محدودیت‌ها را می‌توان از قرار زیر دانست:

۱- رابطه برابری ارزش اختیار خرید - اختیار فروش [2] که توسط استول [3] در سال ۱۹۶۹

1- Restrictions

2- Put - Call Parity

بیان شد.

۲- احراز این مسئله که از اعمال زودتر از موعد[۴] اختیار خرید صادره روی سهمی که هیچگونه سودی نمی‌پردازد، باید شدیداً اجتناب نمود.

رابطه برابری اختیار خرید - اختیار فروش در مورد اختیار معامله‌های خرید و فروش اروپایی وجود داشته و از قرار $p(s, t) + s = c(s, t) + x / (1 + r)t$ (1) می‌باشد.

جهت اثبات این رابطه اجازه دهید تا دو پرتفوی را در نظر بگیریم: در اولین پرتفوی یک سهم و یک اختیار معامله فروش وجود داشته و در دومین پرتفوی نیز یک اختیار خرید و یک ورقه قرضه با کوپن صفر و ارزش اسمی X که دارای زمان سررسیدی برابر با زمان سررسید اختیار معامله است، می‌باشد، چنانچه S_t برابر با قیمت سهم در تاریخ سررسید اختیار معامله باشد، اولین پرتفوی، به اندازه :

$$\mathrm{Max}(x - s_t, .) + s_t = \mathrm{Max}(s_t, x)$$

ارزش خواهد داشت در همین هنگام دومین پرتفوی نیز ارزشی معادل :

$$\mathrm{Max}(s_t - x, .) + x = \mathrm{Max}(s_t, x)$$

خواهد داشت. دو مقدار بدست آمده فوق مشابه یکدیگر بوده و هیچ یک از دو پرتفوی مزبور در بردارنده هزینه‌ای در این هنگام نخواهد بود. بنابر این، عدم وجود فرصت آربیتراژ بیانگر ضرورت برابری این دو پرتفوی می‌باشد. معادله (۱) فوق‌الذکر نشان دهنده برابری دو مقدار مزبور است. یکی از کاربردهای مهم رابطه برابری اختیار خرید و اختیار فروش در این است که با معلوم شدن ارزش یکی از دو اختیار معامله مزبور، می‌توان به فوریت ارزش اختیار معامله دیگر را محاسبه نمود.

حال اجازه دهید تا به ذکر محدودیت دوم که قبلاً از آن سخن به میان رفت بپردازیم. به منظور اثبات بهینگی نگهداری اختیار معامله خرید تا زمان سررسید، اجازه دهید که دو پرتفوی زیر را در نظر بگیریم : اولین پرتفوی فقط شامل یک ورقه سهم بوده و دومین پرتفوی

3- Stoll

4- Early Exercise

نیز شامل یک اختیار خرید و یک ورقه قرضه با کوپن صفر و قیمت اسمی X می‌باشد. در زمان سررسید، ارزش اولین پرتفوی برابر با S_t بوده و دومین پرتفوی نیز به مقدار $Max(s_t, x)$ خواهد ارزید. از آنجایی که ارزش پرتفوی اول هیچ وقت بزرگتر از S_t نمی‌شود ارزش جاری این پرتفوی نمی‌تواند از ارزش جاری دومین پرتفوی بزرگتر گردد و یا:

$$c(s, t) \geq s - x / (1 + r)^t > s - x \quad (۲)$$

واضح‌تر بگوییم: $Max(s_t, x)$ همواره از S_t بزرگتر خواهد بود. این مسئله ثابت می‌کند که اختیار معامله مادامی که اعمال نگردیده است، با ارزش‌تر می‌باشد. بدین ترتیب سرمایه‌گذاری که مایل نیست تا اختیار معامله خرید را نگهداری کند، می‌تواند به جای اعمال آن، مبادرت به فروش اختیار معامله نموده و عایدی بیشتری داشته باشد.

دو رابطه ذکر شده در بالا، به هیچ عنوان قواعد کلی بیان شده در مورد قیمت اختیار معامله را نقض نمی‌کنند. سایر قضایای اعلام شده توسط مرتون در سال ۱۹۷۳ و «کاکس وراس»[1] در سال ۱۹۷۶ تنها در صورت عدم وجود آربیتراژ صادق هستند به منظور پرهیز از کلی گویی و بدست آوردن فرمولی دقیق جهت محاسبه ارزش اختیار خرید و سایر اوراق بهادار مشتقه لازم است تا به مفروضات بیشتری توسل جوییم.

تاکنون تلاشهای زیادی جهت ارائه مدلی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله انجام شده است. کلیه مدلهای مزبور دارای مفروضاتی در مورد توزیع بازده سهام (مثلاً یکی از مفروضاتی که بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد این است که توزیع بازده سهام بصورت لگاریتم طبیعی است)، عدم وجود موانع بازار[2] همچون مالیات، هزینه‌های معاملاتی و محدودیتهای وضع شده بر فروش استقراضی[3] می‌باشند. اکثر مدلهای مزبور دارای پارامترهای نامعین هستند که باید در ابتدا اندازه‌گیری شده و سپس در مدل مورد استفاده قرار گیرند. سرانجام در سال ۱۹۷۳ انتشار مقاله بلک - شولز در مورد قیمت‌گذاری اختیار معامله

1- Cox and Ross

2- Market Frictions

3- Short Selling

انقلابی در این زمینه بوجود آورد.[1] فرمول ارائه شده در مورد قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط این دو، دارای پنج پارامتر مشاهده شدنی بود. این پنج پارامتر عبارتند از: قیمت سهام در بازار (s)، قیمت اعمال (x)، زمان مانده تا سررسید اختیار معامله (t)، نرخ بهره بدون ریسک (r) و واریانس تغییرات روی داده در لگاریتم قیمتهای سهام (δ^2).

مدلهای قیمت‌گذاری اختیار معامله قبل از معادله بلک - شولز

تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله با مدل ارائه شده توسط بلک و شولز شروع نشده است. قبل از این دو بسیاری از اقتصاددانان تلاش کردند تا این مسئله را به نوعی حل کنند. هر چند که مبنای معیارهای موجود برخی از این تلاشها ناقص جلوه می‌کنند ولی باید تأکید کرد که پیشرفتهای فعلی بدون اتکاء بر تلاشهای اولیه غیر ممکن بود. در اینجا به برخی از مهمترین مدلهای ارائه شده که در نهایت منجر به بدست آوردن مدل دیفرانسیلی توسط بلک و شولز گردید، بصورتی گذرا اشاره می‌کنیم.

احتمالاً اولین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط لوئیس با چلیر[2] در سال ۱۹۰۰ ارائه شده است. وی در هنگام کاربرد روی نوسانات قیمت سهام به برخی جنبه‌های ریاضی تئوری حرکت براونی قیمت سهام دست یافت. این اتفاق درست پنج سال قبل از ارائه مقاله کلاسیک در این زمینه توسط اینستین[3] بود.[4] با فرض حرکت براونی بدون نرخ

۱- شاید از بزرگترین مزایای مدل بلک - شولز بتوان عاری بودن فرمول آنها از ترجیحات ریسکی سرمایه‌گذاران را نام برد. استفاده از فرض ارزشگذاری در شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک (Rjk Neutral) به کار این دو برجستگی خاصی می‌دهد. (مترجم)

2- Lois Bachelier

3- Einstin

۴- درک مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بدون داشتن درک صحیحی از نحوه رفتار قیمت سهام، تقریباً" غیرممکن است. انشاءالله در فرصتهای آتی این مبحث را بصورتی مفصل مورد بررسی قرار خواهیم داد. (مترجم)

افزایش[1] (نرخ افزایش برابر با صفر) و واریانس δ^2 در هر لحظه زمانی در مورد فرایند قیمت سهام، وی نتیجه گرفت که ارزش مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید باید برابر با

$$c = s - \phi\left(\frac{s - x}{\delta\sqrt{t}}\right) - x\,\phi\left(\frac{s - x}{\delta\sqrt{t}}\right) + \delta\sqrt{t} + \phi\left(\frac{s - x}{\delta\sqrt{t}}\right)$$

باشد که در آن (۰) ϕ و (۰) ϕ توزیع نرمال استاندارد تجمعی[2] و تابع چگالی نرمال[3] می‌باشند. وی ارزش مورد انتظار تغییر در قیمت سهام را صفر فرض نمود. بنابر این با توجه به این فرض وی اقدامی در جهت تنزیل مقدار مورد انتظار مزبور به منظور یافتن ارزش فعلی به عمل نیاورد. این مدل، با گذشت بیش از پنجاه سال مجدداً توسط کروایـزیتگا[4] در سال ۱۹۵۶ میلادی، کشف گردید.

با در نظر گرفتن استانداردهای آن زمان، مدل مزبور باید خیلی پیشرفته می‌بود. این مدل فقط در دو زمینه اولیه کمبود دارد. استفاده از حرکت براونی محض[5] به قیمت سهم امکان می‌دهد تا منفی شود، این حالت با فرض بدهی محدود در تعارض است.

از طرف دیگر وجود فرض صفر بودن میانگین (مقدار مورد انتظار) تغییر مقدار ارزش زمانی مثبت پول، مشخصات ریسک مختلف اختیار معامله و سهام مربوط (سهمی که اختیار معامله روی آن صادر شده است) و همینطور ریسک‌گریزی را نادیده می‌انگارد. علیرغم وجود این نارسایی‌ها باید اعتراف کرد که فرمول مزبور در پیش‌بینی قیمت اختیارهای خرید کوتاه مدت، فرمولی کارآ و مفید است. با وجود اینکه کاربرد مدل مزبور مستلزم وجود تناسب بین رشد قیمت سهام و ریشه دوم سررسید و ($\sqrt{t}$)، است، این فرمول در پیش‌بینی قیمت اختیار

1- Drift Rate

2- Standard Cumulutive Normal

3- Normal Density Function

4- Kruisenga

5- Absolute Brownian Motion

معامله‌های بلند مدت با شکست روبرو می‌شود.

اکثر پیشرفتهای بدست آمده در خصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله برای نصف و یا بیش از نیم قرن مدلهای اقتصادسنجی موردی[1] بودند. مدل ارائه شده توسط کاسوف[2] در سال ۱۹۶۹ نمونه‌ای از این دست مدلها می‌باشد. کاسوف قیمت اختیار معامله را با فرمول زیر برآورد نمود:

$$c = x \{[(s / x)^{Y} + 1]\}^{1/Y} - 1],\ 1 \leq Y < \infty \quad (4)$$

طبق این فرمول حد بالای قیمت اختیار خرید برابر با قیمت سهام و حد پایینی قیمت اختیار خرید برابر با ارزش ذاتی آن یعنی $Max(S - x, .)$ می‌باشد. نکته دیگر آنکه زمانی که پارامتر Y برابر با بی‌نهایت قرار داده شود، این مدل قیمت صحیح اختیارهای خرید در زمان سررسید را بدست خواهد داد. کاسوف با تخمین پارامتر Y با استفاده از زمان مانده تا سررسید، بازده سود سهام و سایر متغیرها مدل را قابل استفاده می‌نماید.

پیشرفتهای عمده در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله در دهه ۱۹۶۰ میلادی به وقوع پیوست. اسپرنکل[3] در سال ۱۹۶۱ میلادی فرض کرد که قیمت سهام دارای توزیع لگاریتم طبیعی با میانگین و واریانس ثابت می‌باشد. وی همچنین نرخ افزایش قیمت مثبت[4] در قیمت سهام را با α نشان داد. فرمول پیشنهادی وی برای قیمت گذاری ارزش اختیار معامله را می‌توان از قرار زیر نشان داد:

$$c = c^{\alpha\tau}.\ \phi \left[\frac{Ln(s/x)+(\alpha+\frac{1}{2}\delta^{2})\tau}{6\sqrt{t}}\right]-(1-\pi)\cdot$$

$$x\ \phi \left[\frac{Ln(s/x)-(\alpha-\frac{1}{2}\delta^{2})\tau}{\delta\sqrt{T}}\right] \quad (5)$$

1- Adhoc Econometric Models

2- Kassouf

3- Sprenkle

4- Positive Drift Rate

پـارامـتـر π بـرابـر بـا تـعدیل قـیمت بـازار صـورت پـذیرفته بـابت قـیمت اهـرم می‌باشد.[1] اسپرنکل جهت تعیین ارزش اختیار معامله، این مقدار مورد انتظار را تنزیل ننمود. (توجه داشته باشید در صورتی که π برابر با صفر قرارداده شود، معادله (۵) فوق مقدار نهایی مورد انتظار اختیار معادله را بدست خواهد داد.)

مدل ارائه شده توسط بونس[2] در سال ۱۹۱۴ خیلی به مدل فوق شباهت داشت. وی نیز فرض کرد که بازده سهام دارای توزیع لگاریتمی نرمال ثـابت[3] مـی‌باشد. او اهـمیت صـرف ریسک را نیز تشخیص داد. بونس جهت سهولت کار فرض کرد که سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک بی‌تفاوت‌اند. ولی از فرض آخری به منظور توجیه تنزیل قیمت پایانی مورد انـتظار اختیار معامله با α یعنی نرخ بازده مورد انتظار روی سهام استفاده کرد. مدل ارائه شده توسط وی از قرار زیر می‌باشد:

(۶)

$$C= S.\ \phi \left[\frac{\mathrm{Ln}(S/x)+ (\alpha+\frac{1}{2}\ \delta^{2})\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right]\text{-}e^{-\alpha\tau}$$

$$x\text{-}\ \phi \left[\frac{\mathrm{Ln}(S/x)+ (\alpha+\frac{1}{2}\ \delta^{2})\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right]$$

فرمول فوق‌الذکر مشابه فرمول ارائه شده توسط بلک - شولز است. تنها تفاوت بـین دو مدل، استفاده فرمول بونس از α (نرخ بازده مورد انتظار روی سهام) به جای نرخ بهره بدون ریسک می‌باشد. چنانچه بونس در نتیجه‌گیری منطقی خود مبنی بر برابری $\alpha = r$، فرض کرده بود، سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک بی‌تفاوت‌اند، به همان مدلی دست یافته بود که بلک

1- Price for Leverage

2- Boness

3- Stationary Lognormal Distribution

و شولز بدان رسیده بودند. البته استنتاج وی همچنان بر مبنای فرض بی‌تفاوتی نسبت به ریسک به قوت خود باقی می‌ماند.

ساموئل سون[1] در سال ۱۹۶۵ این نکته را تشخیص داد که نرخ بازده مورد انتظار برگ اختیار معامله و همینطور سهام با توجه به مشخصات ریسک آنها متفاوت می‌باشد. وی علیرغم اینکه معتقد بود می‌توان براساس یک تئوری عمیق‌تر مقدار نرخ مورد انتظار را بدست آورد، به استفاده از نرخ بازده مورد انتظار (ثابت) بزرگتری به نام β مبادرت ورزید. ساموئل سون همچنین این مسئله را تشخیص داد که از این فرض این نتیجه گرفته می‌شود که امکان بهینگی اعمال زودتر از موعد اختیار معامله وجود دارد.

نکته دیگری که توسط وی مشخص شد این بود که مدل ارائه شده توسط وی به جز حالتی که اختیار معامله به صورت دائمی[2] است، امکان بدست آوردن سیاست اعمال بهینه وجود ندارد.

فرمول ارائه شده توسط او بدین قرار است:

$$C= e^{(\alpha-\beta)\tau} S.\ \phi \left[\frac{\ln(S/x)+ (\alpha+\frac{1}{2}\ \delta^{2})\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right]$$

$$-e^{-\beta\tau} X\ \phi \left[\frac{\ln(S/x)+ (\alpha - \frac{1}{2}\ \delta^{2})\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right] \qquad (۷)$$

نکته قابل ذکر در این است که معادله ارائه شده توسط بونس حالت خاصی از مدل ساموئل سون است که در آن $\alpha = \beta$ می‌باشد.

ساموئل سون و مرتون در سال ۱۹۶۹ قیمت‌گذاری اختیار معامله را با استفاده از مدل تعادلی ساده جهت انتخاب پرتفوی که به آنها اجازه می‌داد تا بازده مورد انتظار روی سهام و

1- Somuelson

2- Perpetuity Call

اختیار معامله را به صورت داخلی[1] (درونزا) بدست آورند، به بوته آزمایش گذاشتند. این دو ثابت کردند که همانطوری که امکان بیان مسأله در ارتباط با احتمالات واقعی وجود دارد، امکان بیان مسأله اختیار معامله در قالب احتمالات[2] مربوط به مطلوبیت نیز بر قوت خود باقی است. در این حالت نرخهای تعدیل شده مورد انتظار روی سهام و اختیار معامله برابر می‌شدند. این روش در بهبود و توسعه روش ارزشگذاری اختیار معامله تحت شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک و یا عاری از ترجیح[3] (سرمایه‌گذاران) نقش مؤثری ایفا نموده است.

مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک - شولز

مدل بلک شولز بر اساس فرض عدم فرصت آربیتراژ در بازار بنا نهاده شده است. از مدل ساده زیر (در مقایسه با مدل کاردکس، والس و رابینستین ارائه شده در سال ۱۹۷۹) می‌توان به منظور درک اصول و مبانی مدل بلک - شوی استفاده کرد.

فرض کنید که طی یک دوره زمانی، قیمت سهام می‌تواند به یکی از دو حالت زیر تغییر کند. از مقدار S به hs رسیده و یا به اصطلاح افزایش یابد و یا از S به Ks برسد و کاهش یابد. اجازه دهید تا C(S,h) را به عنوان قیمت اختیار معامله خرید صادره روی سهام در زمانی که قیمت سهام برابر با S بوده باشد و n تا از این گامها (افزایش یا کاهش قیمت) تا زمان سررسید اختیار معامله باقی مانده باشد تعریف کنیم. پرتفوی را در نظر بگیرید که دارای دو جزء موقعیت خرید و موقعیت فروش است. در جزء موقعیت خرید N سهم و در جزء موقعیت فروش نیز یک اختیار خرید وجود دارد. ارزش این پرتفوی در زمان حاضر برابر با NS-C(S, n) است. پس از گذشت یک دوره (از n دوره) ارزش پرتفوی یکی از دو مقدار Nhs-C(hs, n -۱) و یا NKS - C(ks, n - ۱) خواهد بود فرض کنید N را طوری انتخاب

1- Endogenously

2- Utili- Probability

3- Preference - Free Approach

کنیم که این دو مقدار برابر باشند. به عبارت دیگر در این حالت N برابر خواهد بود با:

$$N = \frac{C(hs, n-1) - C(ks, ns-1)}{(h-k)s} \qquad (۸)$$

بنا بر این پس از گذشت یک دوره ارزش پرتفوی مورد نظر با اطمینان کامل برابر خواهد شد با:

$$\frac{Kc(hs, n-1)-hc\ (ks, n-1)}{(h-k)} \qquad (۹)$$

به منظور اجتناب از فرصت آربیتراژ، ارزش جاری پرتفوی باید برابر با مقدار فوق که با نرخ (1+R) تنزیل شده است باشد. در این حالت R نرخ بهره بدون ریسک است. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$c(S.\ n)= \frac{1}{1+R}\left[\frac{1+R-k}{h-k}\ c(hs,\ n-1) + \frac{h-1-R}{h-k}\ c(ks,\ n-1)\right] \qquad (۱۰)$$

این معادله قیمت اختیار خرید n مرحله‌ای (که در آن قیمت سهام مربوطه n بار کاهش و افزایش دارد) را به قیمت اختیار خریدی با n-1 مرحله مرتبط می‌سازد. در زمان سررسید، اختیار معامله با قیمت توافقی x دارای ارزشی معادل $c(s, 0) = \max(s - x, 0)$ خواهد گردید. از آنجایی که این حالت برای ما دانسته شده است، از معادله (۱۰) می‌توانیم جهت بدست آوردن ارزش اختیار معامله یک مرحله‌ای بازاء قیمتهای مختلف سهام استفاده نماییم. با استفاده از معادله (۱۰) قادریم تا ارزش هر نوع اختیار خریدی را محاسبه کنیم. فرمول بدست آمده جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ای که دارای n مرحله است از قرار زیر می‌باشد:

$$C(S, n)= (1+R)^{-n}\ X \sum_{i=I}^{n} \frac{n!}{iI(n-i)!}\ q^{i}\ (1-q)^{n-i}\ (sh^{i}\ k^{n-i} - x) \qquad (۱۱)$$

در معادله (۱۱) فوق، $q = (1+R-k)/(h-k)$ بوده و I نیز کوچکترین عدد صحیحی است که بازاء آن $x \geq sh^i\ k^{n-i}$ می‌گردد. جزء دوم معادله فوق که در بردارنده q است را می‌توان به عنوان i تا موفقیت از n تا آزمایش با احتمال موفقیت q) در یک توزیع دو جمله‌ای به حساب آورد. بنا براین فرمول (۱۱) فوق را می‌توان از قرار زیر نوشت:

$$c(s, n) = (1 + R)^{-n}\ E^* [Max (Sn - X, .] \qquad (۱۲)$$

که در آن Sn قیمت تصادفی سهام پس از n مرحله بوده و $E^*[]$ نیز بیانگر انتظار با استفاده از احتمالات ساختگی[۱] q و q - ۱ بابت مراحل افزایش و یا کاهش قیمت سهام هستند. به طریق مشابه می‌توانیم معادله (۱۰) را به صورت زیر بنویسیم:

$$c(s, n)= \frac{1}{1 + R} [qc (hs, n-1) + (1 - q) c (ks, n-1)] = \frac{1}{1 + R} E^* [c (s, n-1)] \qquad (۱۳)$$

در معادله فوق یک بار دیگر از یک انتظار ساختگی[۲] استفاده کرده‌ایم. توجه داشته باشید که q احتمال واقعی[۳] تغییر قیمت سهام از s به hs نبوده و در واقع از این احتمال واقعی هرگز استفاده نکرده‌ایم.

بلک و شولز در بدست آوردن مدلشان فرض کردند که قیمت سهام از فرایند احتمال دو جمله‌ای استفاده می‌کند. این دو به جای استفاده از فرایند احتمال دو جمله‌ای از حرکت براونی هندسی و یا لگاریتم طبیعی استفاده نمودند. حرکت براونی هندسی را می‌توان با عملیات حدگیری از فرایند دو جمله‌ای بدست آورد. در این حالت در فرایندهای دو جمله‌ای اندازهای h-1 و k-1 به صفر تمایل پیدا کرده و تعداد مراحل (n) نیز به سمت بی‌نهایت سوق داده می‌شود. با حدگیری از معادله (۱۰) و رعایت موارد فوق‌الذکر به معادله دیفرانسیلی جزیی[۴] بلک و شولز می‌رسیم.

1- Artificial Probability

2- Artificial expectation

3- Actual Probability

4- Partical Differential Equation

$$\text{rscs} + \text{Ct} + \frac{1}{2}\text{Css}\ \delta^2 S^2 - \text{rC} = 0 \qquad (۱۴)$$ [1]

که در آن r برابر است با نرخ بهره بدون ریسک سالیانه‌ای است که پیوسته مرکب می‌شود و δ^2 نیز واریانس تغییر در لگاریتم قیمت سهام در هر لحظه زمانی و اندیس‌های روی c نیز معرف دیفرانسیل جزیی می‌باشند. با حدگیری از فرمول (۱۱) فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله خرید بلک و شولز بدست آورده می‌شود:

$$C(s,t) = s.\,\phi\left[\frac{\text{Ln}(s/x)\ (r + \frac{1}{2}\delta^2)\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right] - e^{-r\tau}\,x\ \phi\left[\frac{\text{Ln}(s/x) + r - \frac{1}{2}\delta^2)\tau}{\delta\sqrt{\tau}}\right] \qquad (۱۵)$$

که در آن $\phi(\cdot)$ توزیع نرمال استاندارده شده تجمعی و $t=T-t$ نیز زمان مانده تا سررسید می‌باشد. بلک و شولز معادله دیفرانسیلی فوق و راه حل آن را مستقیماً با استفاده از جریان زمان پیوسته[2] و بدون حدگیری بدست آورند.

مدل بلک و شولز مشابه فرمول ساموئل سون با $\alpha=\beta=r$ و همین طور بونس با $\alpha=r$ می‌باشد. در واقع مهمترین مشخصه مدل بلک - شولز نسبت به فرمولهای ارائه شده توسط ساموئل سون و بونس در این است که فرمول بدست آمده تحت تأثیر نرخهای مورد انتظار از اختیار معامله و یا سهام و یا هر نوع سنجه دیگری که منعکس‌کننده ریسک گریزی است،قرار

۱- ساده‌تر بگوییم معادله دیفرانسیلی بلک و شولز را می‌توان از قرار زیر نشان داد:

$$\frac{\delta f}{\delta \sigma}\text{rs} + \frac{\delta f}{\delta_t} + \frac{\delta^2 f}{\delta^2 s}\sigma^2 s^2 . \frac{1}{2} = rf \qquad (۱۵')$$

که در آن f قیمت ورقه بهادار مورد نظر می‌باشد. در صورتی که خواهان بدست آوردن معادله قیمت‌گذاری اختیار خرید باشیم شرط حدی در نظر گرفته شده برابر با max (s-x, 0) و در صورتی که خواهان قیمت گذاری اختیار فروش باشیم شرط حطی مورد نظر برابر با max(x-s, 0) خواهد شد. در صورت حل این معادله به معادله‌ای مشابه معادله ۱۵ که در واقع پاسخ معادله معادله (۱۵') است دست خواهیم یافت. (مترجم)

2- Continuous Time Diffusion

نمی‌گیرند. در این مدل تنها با پنج متغیر می‌توان قیمت اختیار معامله را بدست آورد. این پنج متغیر عبارت از s، t ، r ، x ، δ^2 می‌باشند. باستثنای واریانس، هر یک از این متغیرها معلوم بوده و واریانس را نیز می‌توان با درجه اطمینان بالایی بدست آورد.

عدم وجود نرخ بازده مورد انتظار و یا هر نوع سنجه دیگر منعکس‌کننده ریسک گریزی در ابتدا مشکل‌ساز بود. این معما توسط کاکس و راس به صورت توأم و مرتون در سال ۱۹۷۶ حل گردید. این سه برای حل این معما ارزشگذاری تحت شرایط غیر متأثر از ریسک را ارائه نمودند. این ایده بعداً توسط هاریسون و کرپس [1] در سال ۱۹۷۹ گسترش یافت.

این حقیقت که می‌توان در استنتاج معادله (۱۰) از یک متغیر وابسته پوششی [2] که بوضوح شامل نرخهای بازده مورد انتظار، ترجیحات سرمایه‌گذاران و یا احتمالات نباشد، استفاده کرد، بدین معنی خواهد بود که با شرط وجود قیمت سهام و نرخهای بهره، ارزش اختیار معامله به صورت مستقیم نمی‌تواند متکی بر اینها باشد. پس برای بدست آوردن قیمت اختیار معامله، تنها نیاز به یافتن پاسخ تعادلی [3] در حالتی که بازده، ترجیحات (سرمایه‌گذاران) و احتمالات با فرایند قیمت واقعی سهام و نرخ بهره مطابق، خواهیم داشت. بدین ترتیب پاسخ بدست آمده به صورت کلی قابل استفاده خواهد بود.

یکی از مهمترین تسهیلاتی که در پس کاربرد حالت تعادلی فوق‌الذکر وجود دارد این است که منتهی به وجود سرمایه‌گذارانی می‌گردد که نسبت به ریسک بی‌تفاوت‌اند. در یک چنین اقتصادی کلیه نرخهای بازده مورد انتظار برابر با نرخ بهره بدون ریسک خواهد گردید. چنانچه قیمت سهام دارای توزیع لگاریتم طبیعی باشد، در این صورت کاربرد مدل بونس با α=r عاری از اشکال خواهد گردید.

تحلیل ارائه شده توسط مدل بلک و شولز در حالت بی‌تفاوتی نسبت به ریسک مشابه با تحلیل ارائه شده در مورد معادله (۱۲) می‌باشد. توزیع نرمال تجمعی در دومین قسمت معادله

1- Harrison and Kreps

2- Hedging Argument

3- Equilibrium Solution

(۱۴) احتمال در عالم بی‌تفاوت نسبت به ریسک[1] است که بر حسب آن اختیار معامله مورد نظر در حالی که دارای ارزش پولی است سررسید خواهد گردید. واضح‌تر بگوییم: این قسمت برابر با احتمال ارزش پولی داشتن اختیار معامله در حالت بی‌تفاوتی نسبت به ریسک در زمان سررسید می‌باشد.

بنا براین می‌توان گفت که این قسمت همان عامل تنزیل ضربدر پرداخت انجام شده مورد انتظار بابت اعمال اختیار معامله می‌باشد. اولین بخش از فرمول مزبور مقدار تنزیل شده قیمت مورد انتظار سهام در زمان سررسید و با شرط بزرگتر بودن S_T از X ‏(ST>X) است.

گسترش مدل بلک و شولز

استنتاج مدل بلک و شولز بر اساس شش فرض صورت پذیرفته است که عبارتند از:

۱ - هیچگونه هزینه معاملاتی، مالیات و یا محدودیت بر سر فروش استقراضی وجود ندارد.

۲ - نرخ بهره بدون ریسک ثابت است.

۳ - سهم مورد نظر سود پرداخت نمی‌کند.

۴ - قیمت سهام دارای فرایند حرکت براونی هندسی می‌باشد.

۵ - بازار به صورت پیوسته برای انجام معامله باز است.

۶ - اختیار معامله مورد بررسی، اختیار معامله اروپایی است.

اصلاحات بعدی انجام گرفته روی مدل اصلی نشان داده‌اند که با کنار گذاشتن مفروضات شش‌گانه فوق‌الذکر، این مدل همچنان به قوت خود باقی است.

توروپ[2] در سال ۱۹۷۳ محدودیت فروش استقراضی را به بوته آزمایش گذاشت. در سال ۱۹۸۵ لی‌لند[3] شرط عدم وجود محدودیت هزینه‌های معاملاتی را برداشت. اینگرسون[4] و

1- Risk Neutral Probability

2- Thorpe

3- Leland

شولز هر یک به صورت جداگانه در سال ۱۹۷۶ اثرات نرخهای مختلف مالیات بر روی افزایش ارزش سرمایه[5] و سود سهام را مورد بررسی قرار دادند. مرتون در سال ۱۹۷۳ مدل مورد نظر را طوری تعدیل کرد که فرض عدم پرداخت سود سهام و نرخهای بهره غیراستوکاستیک به کنار گذاشته شدند. وی نتیجه گرفت در صورتی که سهم مورد نظر سودی نپردازد، وجود فرض ششم ضرورتی نخواهد داشت. کاکس و راس توأماً و مرتون به صورت جداگانه در سال ۱۹۷۶ سایر فرایندهای استوکاستیک (در مورد قیمت سهام) را به بوته آزمایش گذاشتند. این سه نفر در همان سال حالتی را در نظر گرفتند که رفتار قیمت سهام دارای مسیر نمونه پیوسته[آ] نبود. رابینستین و برنان در سال ۱۹۷۶ مدل بلک و شولز متناسب با انجام معامله به صورت گسسته با تحمیل شرایطی بر تابع مطلوبیت سرمایه‌گذاران را ارائه دادند.

سایر انواع اختیار معامله نیز با استفاده از مدل اصلی بلک و شولز یا مدلهای تعدیل یافته بلک و شولز به فراخور حال مورد قیمت گذاری قرار گرفتند. مثلاً بلک و شولز در سال ۱۹۷۳ اختیار فروش اروپایی و خود بلک در سال ۱۹۷۶ به تنهایی اختیار معامله صادره روی کالاها را ارزشگذاری نمودند. در کلیه موارد ذکر شده و سایر موارد، به منظور ارزشگذاری اختیار معامله‌های مزبور از معادله (۱۴) استفاده گردیده است. به هنگام استفاده از معادلات (۱۰) و بالتبع (۱۴) ذکر شده برای قیمت گذاری اختیار خرید، مشخصات اختیار خرید به صورتی کامل با در نظر گرفتن شرط $c(s,\cdot)= \max (s-x,\cdot)$ در زمان سررسید رعایت شده‌اند. بدین ترتیب این معادله یک معادله کلی بوده و می‌تواند برای قیمت گذاری انواع اختیار معامله خرید، اختیار فروش و هرگونه ورقه بهادار مشتقه‌ای که قیمت آن تنها بستگی به دارایی

4- Ingersoll

5- Capital Gain

CC- Continuous Sample Path

6- Rabinstionanel Bennn

اولیه[1] دارد، مورد استفاده قرار گیرد.

به منظور حل این معادله (معادله ۱۴) در هنگام استفاده برای قیمت گذاری سایر اوراق بهادار مشتقه و همین طور اختیار معامله فروش، کاربرد شرط حدی[2] صحیح زیر مورد نیاز است:

$$c(s, t) = H(s) \qquad (۱۶)$$

$H(\cdot)$ بیانگر هر گونه پرداخت انجام شده بابت ورقه بهادار مشتقه (مثل سود سهام، بهره و ...) برحسب قرارداد اولی می‌باشد. در صورتی که ارزش دارایی مشتقه فقط به خاطر پرداخت این مبلغ در زمان سررسید افزایش یابد، پاسخ معادله (۱۴) با اعمال شرط حدی ذکر شده در معادله (۱۶) از قرار زیر خواهد گردید:

$$c(s, t) = e^{-r(T-t)} E^{*} [H(s)] \qquad (۱۷)$$

نکته دیگر آنکه ماهیت برخی قراردادها طوری است، که وجوه دریافتی در زمانهای مختلف و به صورت تصادفی به دارنده آن می‌رسد. در این حالت معادله (۱۷) ارزش ورقه بهادار را به طور کامل بدست نمی‌دهد.

قیمت گذاری اختیار معامله فروش آمریکایی را در نظر بگیرید. در این حالت مقدار دریافتی در هنگام اعمال اختیار معامله (x-s) برخلاف زمان دریافت آن، برای ما معلوم می‌باشد. مضاف بر این، زمان بعدی اعمال اختیار معامله برای ما نامعلوم است چرا که زمان اعمال اختیار فروش توسط دارنده آن تعیین می‌گردد. فرض کنید که دارنده اختیار معامله فروش قاعده‌ای را جهت اعمال آن انتخاب می‌کند. این قاعده زمان تصادفی u را بوجود می‌آورد که در آن اعمال اختیار معامله صورت می‌پذیرد. متغیر تصادفی u باید به صورت زمان مارکو باشد، بدین معنی که هر گونه پاسخی در مورد اتفاق افتادن یا نیفتادن اعمال اختیار معامله در یک زمان مشخص تنها متکی به اطلاعات موجود در آن زمان بوده و امکان پیش بینی آن در زمان آینده وجود نداشته باشد. بازاء یک مقدار مشخص u ، ارزش اختیار فروش

1- Primitive Asset

2- Buyndory Condition

برابر خواهد بود با:

$$E^{*}\left[e^{-r(T-t)}\ (x - su)\right] \qquad (۱۸)$$

از آنجایی که دارنده اختیار فروش دارای حق انتخاب است، قاعده انتخاب شده توسط وی طوری خواهد بود که ارزش اختیار معامله را به حداکثر می‌رساند:

$$P(s, t) = \sup E^{*}\left[e^{-r(T-t)}\ (x - su)\right] \qquad (۱۹)$$

در عمل می‌توان اختیار فروش آمریکایی را با استفاده از معادله (۱۸) با توجه به قواعد انتخاب شده توسط سرمایه‌گذار در راستای حداکثر نمودن قیمت، ارزشگذاری نمود. ساموئل سون در سال ۱۹۶۵ حدس زد که در یک چنین مواردی می‌توان ارزش و همین طور شیوه اعمال بهینه را با اعمال شرط قرار داد با درجه عالی[1] به طور همزمان تعیین نمود. مرتون در سال ۱۹۷۶ این مسأله را به اثبات رسانید.

می‌توان معادله دیفرانسیلی جزئی (۱۴) را با توجه به شرط محدودیت

$$P(s, t) = \max(x - s, ۰)$$

و

$$P[k(t), t] = x - k(t) \qquad (۲۰ - a)$$

$$\left.\frac{\sigma P(s,t)}{\sigma s}\right|_{s=k(t)} = -۱ \qquad (۲۰\text{-}b)$$

حل نمود. در معادله فوق‌الذکر k(t) بیانگر سیاست اعمال بهینه اختیار معامله می‌باشد، یعنی در صورتی که قیمت سهام به k(t) در زمان t تنزل کند، اختیار معامله فروش اعمال خواهد گردید.

معادله (۲۰-a) شرط استاندارد در هنگام اعمال نمودن اختیار معامله می‌باشد. به همین ترتیب معادله (۲۰-b) نیز معرف شرط «قرارداد با درجه عالی» خواهد بود. شرط مزبور ما را مطمئن می‌کند که در راستای سیاست اعمال بهینه اختیار معامله، شیب تابع قیمت گذاری p(۰) برابر با شیب تابع عواید دریافتی می‌باشد (۱- در ناحیه مربوط به اعمال). این شرط،

1- High Contract

نقط مماس بودن معمولی [1] در نقطه بهینه است.

تا به حال برای ارزشگذاری اختیار فروش آمریکایی مدل تحلیلی بدست آورده نشده است. برنان واسکوارتز با یکدیگر و پارکینسون [2] به تنهایی در سال ۱۹۷۷ تکنیکهای ریاضی جهت ارزشگذاری اختیار فروش آمریکایی و سایر اوراق بهاداری که برای آنها مدلی تحلیلی در دسترس نمی‌باشد، پیشنهاد کرده‌اند.

کاربرد تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله در ارزشگذاری سایر اوراق بهادار بنگاه

بلک و شولز پس از ارائه مدل دیفرانسیلی خود جهت ارزشگذاری اختیار خرید و فروش، مشاهده‌ای انجام دادند که از مهمترین مشاهدات انجام شده در حوزه مالی به شمار می‌آید. این دو مدعی شدند که از همان روشها می‌توان جهت ارزشگذاری اوراق بهادار مخصوصاً اجزاء بافت سرمایه بنگاه استفاده نمود. این مشاهده منجر به انجام تحقیقات زیادی گردید. تکنیکهای قیمت گذاری اختیار معامله جهت ارزشگذاری انواع مختلف ابزارهای مالی و قراردادهای مالی از جمله اوراق قرضه شرکتها، قراردادهای آتی، رهن با نرخ متغیر [3]، بیمه، توصیه در مورد زمان‌بندی سرمایه‌گذاری [4] و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. از فرمول ارزشگذاری اختیار خرید می‌توان برای قیمت گذاری موارد ساده و پیش پا افتاده‌تر نیز استفاده نمود.

بنگاهی را در نظر بگیرید که ارزش داراییهای آن (V) دارای فرایند براونی هندسی می‌باشد. بافت سرمایه این بنگاه شامل سهام عادی و اوراق قرضه با کوپن صفر و ارزش

1- Usual tangency condition

2- Parkinson

3- Voriable Rate Mortgages

4- Investment Timing Advice

اسمی کل β که در زمان T سررسید می‌شوند است. در زمان (T) بنگاه منحل خواهد شد.[۱] درخواهد آمد. چنانچه $V_T \geq \beta$ باشد، دارندگان اوراق قرضه سهم خود را دریافت کرده و ارزش ویژه معادل $V_T - \beta$ خواهد بود. در صورتی که $V_T \leq \beta$ باشد، مقدار داراییهای بنگاه جهت تأدیه کلیه دیون ناشی از اوراق قرضه کفایت نکرده و در نتیجه چیزی عاید سرمایه‌گذاران نخواهد شد. بدین ترتیب ملاحظه می‌کنید که عایدی سهامداران برابر با $Max(V_T-\beta,\cdot)$ خواهد گردید. این مسأله دقیقاً مثل یک اختیار معامله خرید می‌باشد و بنابر این قیمت جاری سهام باید برابر با $C(V,T-t\ ,\ \beta)$ باشد. با عنایت به تئوری بی ارتباطی مودیلیانی و میلر،[۲] ارزش بدهی باضافه ارزش ویژه باید برابر با V باشد. بدین ترتیب ارزش بدهی برابر خواهد بود با:

$$D(V,t\text{-}x,\beta) = V - C\ (V,\ T\text{-}t,\ \beta) \qquad (۲۱)$$

این شیوه ارزشگذاری حتی در صورتی که بنگاه به حالت توقف درنیاید، کاربرد دارد. هر بنگاه برای اینکه بتواند دیون خود را به طلب کاران (دارندگان اوراق قرضه در اینجا) تأدیه کند باید به اندازه β تأمین مالی نماید. فروش داراییها جهت انجام این کار مشابه حالت توقف می‌باشد. تنها راهی که پیش روی بنگاه قرار دارد این است که اوراق بهادار جدید انتشار دهد. بدین ترتیب بنگاه برای اینکه مقدار β را پرداخت کند باید به اندازه β اوراق بهادار جدید منتشر نماید. در صورتی که ارزش داراییهای بنگاه حداقل به اندازه β بوده، باز هم بنا بر تئوری مودیلیانی و میلر ارزش سهام اولیه[۳] برابر؛ $V_T-\beta$ خواهد بود.

اوراق قرضه قابل تبدیل با کوپن صفر را نیز می‌توان به همین طریق قیمت گذاری نمود. فرض کنید که بنگاه دارای N سهم عادی منتشر شده بوده و اوراق قرضه قابل تبدیل نیز در مجموع با n سهم عادی قابل تعویض باشند. در صورتی که کلیه اوراق قرضه مزبور تبدیل گردند، دارندگان این اوراق به اندازه $y=n/(N+n)$ از ارزش ویژه بنگاه را مالک خواهند گردید.

1- Liquidated Corp

2- Modiglliani - Miller Irrelevency Theory

3- Original Equity

پر واضح است که در صورتی دارندگان اوراق قرضه اقدام به تبدیل اوراق خود به سهام خواهند نمود که $yV_T>\beta$ باشد. در غیر این صورت مادامی که بنگاه به حالت توقف در نیامده باشد این افراد مقدار β دریافت کرده و در صورتی که توقف اتفاق افتاده باشد، باندازه V_T دریافت خواهند نمود. بنابر این مقدار دریافتی توسط دارندگان اوراق قرضه از قرار زیر خواهد بود:

$$\max[YV,\min(V,\beta)] = \max(Yv-\beta, \cdot) + [V-\max(V-\beta, \cdot)] \qquad (۲۲)$$

این مقدار برابر عایدی یک اختیار معامله به اضافه یک ورقه معمولی با کوپن صفر می‌باشد. لذا ارزش اوراق قرضه قابل تبدیل باید برابر باشد با:

$$C(YV,T-t;\beta)+D(V,T-t;\beta)$$

اکثر اوراق بهادار کمپانیها برای دارندگانشان کوپن یا سود دوره‌ای در بردارند. یک ورقه نکول نشدنی را که بهره می‌پردازد را می‌توان به منزله یک پرتفوی از اوراق قرضه با کوپن صفر در نظر گرفت و ارزشگذاری نمود. البته ناگفته پیداست که در زمانی که ریسک نکول وجود دارد، این متد قابل کاربرد نخواهد بود چرا که عدم پرداخت یک کوپن بهره، کل ورقه قرضه را در معرض نکول قرار می‌دهد. با وجود این اوراق بهادار مزبور را می‌توان به عنوان سریهائی از اختیار معامله در نظر گرفت و ارزشگذاری نمود.

بنگاهی را در نظر بگیرید که روی سهام عادی‌اش سودی پرداخت نمی‌کند و دارای اوراق قرضه منتشر شده‌ای است که در زمانهای $T_1,...,T_n$ مجموع کوپنهای ادواری C را پرداخت می‌نماید. مضاف بر این ارزش اسمی کل اوراق قرضه مزبور برابر با β است که در زمان T_n قابل بازپرداخت می‌باشد. در حالتی که کوپن بهره ما قبل آخر پرداخت شده است، تنها مقداری که باید دریافت گردد برابر با β+C خواهد شد. بنابر این پس از پرداخت کوپن ما قبل آخر، می‌توان این اوراق قرضه را مشابه اوراق قرضه با کوپن صفر تلقی نمود. ارزش این اوراق در آن زمان (ما قبل آخر) برابر خواهد شد با:

$$D_{n-1}(N,T_{n-1}) = D(V,T_n - T_{n-1} ; \beta+C) \qquad (۲۳)$$

بین ادوار زمانی T_{n-2} و T_{n-1} کمپانی تحت بررسی به دارندگان اوراق بهادارش (اعم از سهام و قرضه) پرداختی انجام نمی‌دهد و بنابر این می‌توان از مدل استاندارد بلک و شولز یعنی معادله

(۱۴) ذکر شده استفاده نمود. ارزش اوراق قرضه مورد بحث در زمان T_{n-2} برابر است با:

$$D_{n-2}(V,T_{n-2}) = e^{-r(Tn-1-Tn-2)}E^{*}\ [D_{n-1}\ (VT_{n-1},\ T_{n-1})] \quad (۲۴)$$

که مشابه معادله (۱۷) ذکر شده می‌باشد. قیمت اوراق قرضه مورد نظر در زمانهای آغازین (اعمال زودتر از موعد) را می‌توان با استفاده از معادله (۲۴) به صورت برگشتی[1] بدست آورد. جسک[2] در سال ۱۹۷۷ این مسئله را ارائه و حل نموده است. راه دیگری که برای برآورد قیمت اوراق بهاداری که سود یا کوپن می‌پردازند این است که مقادیر پرداخت شده را به عنوان یک جریان پیوسته در نظر بگیریم. شکل کلی در قیمت گذاری یک نوع خاص از ورقه بهادار $[F(s,t)]$ در حالتی که ارزش بنگاه از فرایندی به صورت:

$$dv = [\alpha\ v- \Delta(v,t)]\ dt\ +\ \sigma\ vd\ \omega \quad (۲۵)$$

برخوردار است، می‌باشد.

در معادله بالا $\Delta(v,t)$ کل جریان نقدینگی حاصل از عواید پرداختنی (سود سهام، کوپن بهره و ...) توسط بنگاه بوده و $d\omega$ نیز افزایش فرایند وینر می‌باشد.[3] قیمت تعادلی ورقه بهادار از قرار زیر است:

$$df\ (v,t)\ =\ [\beta(v,t)F\ -\ \delta\ (v,t)]\ dt\ =\ (Fv\ /\ F)\ \sigma\ vd\ \omega \quad (۲۶)$$

که در آن $\beta(\cdot)$ نرخ بازده مورد انتظار (داخلی) ورقه بهادار مشتقه بوده و $\delta(\cdot)$ نیز کل عواید دریافتی توسط دارندگان ورقه بهادار مزبور می‌باشد.

به منظور تعیین نرخ افزایش مورد انتظار در قیمت (ورقه بهادار) که با نرخ افزایش در

1- Recursive

2- Geske

۳- فرایند وینر نوع خاصی از فرایند مارکو می‌باشد. در فرایند مارکو، اطلاعات گذشته را نمی‌توان چراغ راه آینده قرار داد. ضمناً متغیر Z در صورتی دارای فرایند وینر است که دارای حالت زیر باشد: $\Delta Z\ =\ \in \sqrt{\Delta t}$

نرخ افزایش و واریانس ΔZ به ترتیب برابر با صفر و Δt می‌باشد. ضمناً $\in$ نیز معرف انتخاب از توزیع نرمال استاندارد شده (Z) می‌باشد. (مترجم)

سرمایه در حالت تعادلی به منظور کسب β قرار داده شده است، از قضیه ITo استفاده می‌گردد یعنی:[۱]

$$\frac{1}{2}\sigma^{2}V^{2}F_{V} + [\alpha V - \Delta(V,t)]F_{v} + F_{\tau} = \beta(V,t)\,F(V,t) - \delta(V,t) \qquad (۲۷)$$

معادله (۲۷) فوق‌الذکر معادله اساسی ارزشیابی کلیه بدهیهای مالی بنگاه می‌باشد. از این معادله می‌توان در کلیه مواردی که شرایط برقراری مدل بلک و شولز وجود داشته و ارزش بدهی مزبور تنها به زمان و ارزش داراییهای بنگاه وابسته است، استفاده نمود. لازمه برقراری شرط دوم این است که منبع عدم اطمینان دیگری غیر از آنچه که ارزش داراییهای بنگاه را تحت تأثیر قرار می‌دهد، وجود نداشته باشد. بنابر این نرخ بهره نباید به صورت استوکاستیک باشد. سیاست پرداخت سود سهام باید تابعی از ارزش بنگاه و زمان باشد و سرانجام اینکه بنگاه نمی‌تواند سیاستهای سرمایه‌گذاری و یا تأمین مالی خود را طوری تغییر دهد که غیر قابل پیش بینی باشد. در صورتی که شرط دوم برقرار نباشد ارزش بدهی تحت بررسی به متغیرهای دیگری همچون متغیرهایی که حالت کلی اقتصاد را اندازه‌گیری می‌کند، خواهد داشت. کاکس، اینگرسول و راس در سال ۱۹۸۵ زمینه تئوریکی را بنا نهاده‌اند که در آن می‌توان کلیه مشکلات فوق‌الذکر را حل نمود. در این روش شیوه دیفرانسیلی بلک و شولز همچنان به قوت خود باقی بوده، ضمن اینکه در مدل قیمت گذاری مورد نظر متغیرهای وضعیتی اضافه[۲] گنجانده شده است.

سایر کاربردهای تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله

در سالیان اخیر از تکنیکهای قیمت گذاری اختیار معامله در زمینه‌های گوناگونی استفاده

۱- طبق قضیه ITo، G به عنوان تابعی از x و t از فرایند زیر تبعیت می‌کند:

$$dG = \underbrace{\left(\frac{\delta G}{\delta x}a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^{2}G}{\delta^{2}x}b^{2}\right)dt}_{\text{نرخ افزایش در G}} + \underbrace{\frac{\delta G}{\delta x}\,b\,dZ}_{\text{انحراف معیاری}}$$

(مترجم).

2- State Variable

می‌گردد. مثلاً از این فنون جهت قیمت گذاری توصیه در زمان‌بندی بازار[1] و آزمایش کارآیی استراتژیهای بدره‌های دینامیک[2] همچون ایمن سازی تصادفی[3] استفاده می‌گردد. جهت اطلاع بیشتر از کاربرد تئوری قیمت گذاری اختیار معامله می‌توانید به مقالات تحقیقی ارائه شده توسط ماسون و مرتون[4] در سال ۱۹۸۵، اسمیت[5] در سال ۱۹۷۶ و در مورد کاربردهای مالیاتی تئوری مزبور به کارهای انجام شده توسط کاکس و رابینستین[6] در سال ۱۹۸۵ و همین طور اینگرسول در سال ۱۹۸۷ و منابع مقالات آنها مراجعه نمایید. نکته آخر اینکه تئوری قیمت گذاری اختیار معامله یکی از عناصر اساسی در درک قراردادهای مالی بوده و به عنوان ابزاری کاربردی در زمینه‌های وسیعی مبدل شده است.

منبع ترجمه

1- Jonathan E. Ingersoll , JR, "The New Palgrave Dictionary of Maney and Finace", by Peter Newman, Murray Milgate, John Eatwell; The McMillan Press Limited, 1992.

1- Market Timing Advice

2- Dynamic Portfolio Strategies

3- Contingent Immunization

4- Mason & Metron

5- Smith

6- Cox and Robistion