عمر خیام و معماری

آلپای اوزدورال
استاد دانشگاه ملک فیصل عربستان
ترجمهٔ ناصر کنعانی
استاد دانشگاه صنعتی برلن

خیام علاوه بر رسالهٔ معروف خود در جبر و مقابله، رسالهٔ مختصر بدون عنوانی نیز در این علم دارد که شادروان دکتر غلامحسین مصاحب از روی نسخهٔ خطی منحصر به فرد موجود در ایران، آن را به زبان فارسی ترجمه کرده است.

دکتر اوزدورال، استاد دانشگاه ملک فیصل عربستان سعودی همین رسالهٔ خیام را از چشم‌انداز دیگری مورد بررسی قرار داده و دو مقالهٔ مهم در رابطه با این رساله به زبان انگلیسی نوشته است که ما از آقای دکتر ناصر کنعانی خواهش کردیم که این دو مقاله را به زبان فارسی ترجمه نمایند. ایشان نیز درخواست ما را اجابت نمودند و مقالات مزبور را ترجمه کردند که ما آنها را در دو بخش از مقالهٔ واحدی تحت عنوان خیام و معماری به صورت زیر قرار داده‌ایم و امیدواریم که مورد توجه خوانندگان قرار گیرد.

بخش اول ــ خیام و مجالس گفت و شنود با هنرورزان

طرح‌های پیچیدهٔ هندسی که زینت‌بخش بناهای تاریخی دنیای اسلام هستند، همواره شگفتی مورخان معماری را برانگیخته‌اند. این طرح‌ها به‌گونه‌ای به‌هم پیوست داده شده‌اند، تا ترکیب‌های بی‌شماری روی دیوارها و نقش و نگارهای دلفریب مقرنس‌ها را به‌وجود آورند. به عقیدهٔ بسیاری از مورخان، این طرح‌ها توسط معماران و هنرورزانی

فرهنگ، ۳۹و۴۰، پاییز و زمستان ۸۰، ص‌ص ۱۸۹-۲۵۴

آفریده شده‌اند که نه‌تنها در شغل خود استادانی مسلم به‌شمار می‌رفتند، بلکه در هندسه نیز دست داشتند. البته همان‌طور که انتظار می‌رود، این معماران هنرورز نیز، مانند بسیاری از افرادی که خود را با کارهای عملی مشغول می‌دارند، علاقه‌ای نداشتند که آثاری مکتوب از خود باقی بگذارند. از این‌رو، کارهای بدیع آنان را می‌باید به‌مثابه تنها اثر و مدرک مهارت ایشان در علم هندسه تلقی نمود.

اما اظهار نظری که از جانب یک هندسه‌دان جوان عثمانی صورت گرفته است، سایه بر روی این گمان می‌اندازد. وی هنگام قرائت یک کتاب هندسه و توضیح آن برای صدف‌پردازان (یعنی نجاران متخصص) در محل کار آنان در قصر توپقاپو، می‌گوید:

> هر گاه به آنچه که ما امروزه (یعنی سال ۱۵۷۰) آن را علم هندسه می‌نامیم توجه کنیم، درمی‌یابیم که هر وقت بحثی دربارهٔ این علم بین معماران و علما درمی‌گیرد، معماران می‌گویند: آری ما چیزهایی دربارهٔ این علم شنیده‌ایم ولی هنوز نفهمیده‌ایم که عملکرد هندسه چیست و سر و کار آن با چه مقولاتی است. اما این کتاب اصیل، علم ظریف هندسه را کاملاً تشریح می‌کند و تا زمانی که فردی این علم مطبوع طبع و کم‌نظیر را درک نکرده باشد، نه قادر است که به کار ظریف صدف‌پردازی بپردازد و نه می‌تواند کارشناس و متخصصی ماهر در هنر معماری باشد.[1]

با توجه به این نکته که هندسه‌دان جوان ما چنین نظری را در زمانی ابراز داشته است که معماری عثمانی تحت رهبری معمار بزرگ عصر یعنی سنان (Sinan)، به اوج دوران طلایی خود رسیده بود، استنباط ما از گفتهٔ وی می‌تواند تکان‌دهنده باشد. البته به‌راحتی می‌توان اظهار نظر این هندسه‌دان را به این جهت که اغراق‌آمیز است، به‌کلی رد نمود. لیکن باید اذعان داشت که استدلالی که اساس این گفتهٔ اغراق‌آمیز را تشکیل می‌دهد، می‌تواند نقیض این فرض باشد که می‌توان به معماران هنرورز نوعی نبوغ هندسی نسبت داد.

---

1. Cafer Efendi, *On Early-Seventh-Century Ottoman Treatise on Architecture*, Leiden, New York, Copenhagen, and Cologne, 1987, 28.
seel also Orham Şerif Gökyay "Risale-i Mimariyye-Mimar Mehmed Agha-eserleri (Treatise on architecture, the architect Mehmed Agha and his work), in *Ismail Hakkī Uzuncarsali Armagan* (Ankara 1976) pp. 11-215.

ریاضیدان و اخترشناس مشهور، ابوالوفا بوزجانی (۹۹۸-۹۴۰) اثری دربارهٔ هندسه به نام کتاب فی ما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه (راجع به آنچه که یک صنعتگر باید دربارهٔ ساختمان‌های هندسی بداند) دارد که آن را به‌ویژه برای هنرورزان به رشتهٔ تحریر درآورده است و ما از این پس به آن تحت عنوان اعمال هندسی اشاره خواهیم کرد. او نیز در این کتاب عدم رضایت خود را از اینکه هنرورزان آن دوران آگاهی کافی و وافی از هندسه نداشته‌اند ابراز کرده و می‌گوید:

> می‌دانم که هنرورزان [صُنّاع] بدون رعایت اسلوب خاصی صورت‌ها و پیکره‌های دایره‌واری به‌وجود می‌آورند... لیکن هر هنرورزی برای اینکه بتواند اثری ظریف و زیبا خلق کند، باید اندازه‌گیری با چشم را کنار گذارده و در عوض، ترسیم پنج‌ضلعی‌ها، شش‌ضلعی‌ها، ده‌ضلعی‌ها و یا هر شکل دیگری را به شیوه‌ای که ما در این کتاب تشریح کرده‌ایم، انجام دهد.[۲]

ابوالوفا برای اینکه مقصود خود را روشن‌تر بیان کند، مطلب را ادامه داده و می‌گوید:

> آنچه که یک هنرورز ترسیم و تصویر می‌کند، در واقع تقریب و تخمینی است از یک ساختار هندسی، که وی آن را از طریق حواس و مشاهدات خود دریافته و چون آن را درست و صحیح می‌پندارد چندان در بند اثبات هندسی مسئله نیست. [در حالی‌که] وقتی یک هندسه‌دان [مهندس] از طریق برهان مسئله‌ای را اثبات می‌کند، دیگر نمی‌پرسد که آیا صحت و درستی کار او قابل رؤیت است یا خیر. البته روا نیست که ما صحت هر چیزی را که یک هنرورز درست می‌داند، منکر شویم زیرا او این چیزها را معمولاً از ساختارها و ترکیب‌هایی کسب کرده که قبلاً توسط هندسه‌دانان به اثبات رسیده‌اند. هنرورزان و مسّاحان فقط محصول نهایی یک مسئله را در نظر گرفته و به اینکه درستی و صحت آن چگونه تعیین شده است، توجهی نمی‌کنند و از این رو ممکن است که دچار اشتباه و خطا شوند. در حالی‌که یک هندسه‌دان زمانی به‌درستی و صحت قضیه‌ای اعتقاد پیدا می‌کند که بتواند از طریق شیوه‌های اثباتی، معنایی برای چگونگی ساختمان یک هنرورز یا مسّاح به‌دست آورد.

اکنون بیش از شش قرن است که از تفسیرهای این دو ریاضیدان می‌گذرد. در طول این

---

۲. رجوع شود به آثار علمی ابوالوفای بوزجانی:

L'œuvre scientifique d'Abū al-Wafā al-Buzjānī

جلد دوم تز دکتری جعفر آقایانی چاوشی در دانشگاه پاریس ۷ به تاریخ ۱۹۹۷ ص ۴۴

مدت علوم ریاضی در جهان اسلام به پیشرفت‌های بزرگی نایل آمده و تعداد بی‌شماری آثار و ابنیهٔ تاریخی با استفادهٔ روزافزون از علم هندسه در حوزهٔ معماری به‌وجود آمده‌اند. گفته‌های این دو ریاضیدان دلالت بر این دارند که ظاهراً همکاری‌های تنگاتنگی بین هندسه‌دانان و معماران هنرورز صورت می‌گرفته‌اند و از سوی دیگر این فکر را القا می‌کنند که باید رابطهٔ مشترکی بین تکامل این هندسه و معماری وجود داشته باشد. از این رو، جای شگفتی است که هندسه‌دان عثمانی ادعا می‌کرده که در آن دوران معماران هنرورز هیچ‌گونه اطلاعی از هندسه نداشته‌اند. آخر چگونه ممکن است که دستاوردهای ریاضی که ما انعکاس آنها را عیناً در آثار و بناهای تاریخی مشاهده می‌کنیم، تأثیری در پیشرفت آگاهی و دانش هنرورزان نداشته باشند.

به نظر می‌رسد که یک نقطهٔ مشترک دیگر بین دو مأخذ فوق‌الذکر وجود دارد که می‌تواند پاسخی معقول برای این پرسش باشد. هندسه‌دان عثمانی متذکر می‌شود که علم هندسه بین معماران و علما مورد بحث بوده است. پس می‌توان از این گفته چنین نتیجه گرفت که در استانبول قرن شانزدهم، معماران و ریاضیدانان را رسم بر این بوده که در مجالس خاصی گرد هم آمده و دربارهٔ چگونگی کاربرد هندسه در معماری به بحث بپردازند. ابوالوفا دقیقاً به این‌گونه گردهمایی‌ها (که از این پس از آنها به عنوان مجالس گفت‌وشنود (Conversazione) [3] نام خواهیم برد) اشاره کرده و می‌گوید:

> من در چندین مجلس که گروهی از هنرورزان و هندسه‌دانان در آنها حضور داشتند، شرکت کرده‌ام.

و سپس گزارشی دربارهٔ یکی از این جلسات گفت‌وشنود می‌دهد که طی آن شرکت‌کنندگان دربارهٔ مسئلهٔ «چگونه می‌توان مربعی از ترکیب سه مربع دیگر ساخت» و یا به عبارت دیگر چگونگی ترسیم یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$ به بحث پرداخته بودند.

چنین به نظر می‌رسد که در بغداد قرن دهم نیز معمول و مرسوم بوده است که هنرورزان به دیدار ریاضیدانان می‌رفته تا از آنها پاسخ‌هایی برای مسائل مربوط به کاربرد هندسه در معماری و هنرهای وابسته به آن طلب کنند حال اگر چنین گفت‌وشنودهایی در

---

۳. منظور از Conversazione نوعی گردهمایی بین علما و دانشمندان است برای گفت‌وگو و مباحثه به‌ویژه در زمینهٔ ادبیات و علوم، رجوع کنید به فرهنگ لانگمن انگلیسی معاصر
Longman Dictionary of Contemporary English, Bath, 1978

دو شهر بزرگ بغداد و استانبول صورت می‌گرفته‌اند که بیش از شش قرن فاصلهٔ زمانی با یکدیگر داشته و از دو فرهنگ مختلف برخوردار و دارای اوضاع سیاسی گوناگونی بوده‌اند، پس می‌توان نتیجه گرفت که این‌گونه گردهمایی‌ها، باید پدیدهٔ گسترده‌ای در جهان اسلامی بوده باشند. بنابراین می‌توان گفت هر زمان که فعالیت‌های معماری و علمی در مراکز شهری متمرکز می‌شده‌اند، گفت‌وگوهای مدام بین معماران هنرورز و ریاضیدانان در مجالس گفت‌وشنود صورت می‌گرفته‌اند و این‌گونه گفت‌وشنودها محملی برای تبادل نظر بین این دو گروه بوده‌اند. بدین ترتیب، از طریق این مجالس آنهایی که با کارهای عملی سر و کار داشتند، با پیشرفت‌های ریاضی آشنایی پیدا می‌کردند و دانشمندانی که در کارهای عملی چندان مجرب و آزموده نبودند، موقعیتی به‌دست می‌آوردند تا با هنر معماری آشنا شوند، هنری که تجلی و تظاهر آن را بسیار مطبوع طبع می‌یافتند. البته برای هنرورزان کاری بس آسان و بی‌دردسر بود که از طریق این‌گونه مجالس راه‌حل‌هایی برای مسائل فوری خود به‌دست آورند، ولی درست همین نکته است که روشن می‌سازد که چرا آنها در طی شش قرن هیچ‌گونه پیشرفت واقعی در علم هندسه به‌دست نیاوردند، زیرا که تنها به‌کار بستن نسخه‌های حاضر و آماده بسنده می‌کردند.

بر خلاف ریاضیدانان یونانی که علوم ریاضی را بیش‌تر به خاطر نیاز به تفکر دقیق و ارزش‌های استدلالی این علوم به‌کار می‌گرفتند، ریاضیدانان مسلمان غالباً به نتایج عملی و فوری ریاضیات توجه داشتند و نه به جنبه‌های نظری آن. از این‌رو به‌خوبی می‌توان تصور نمود که در طی قرون متمادی که علوم ریاضی در حال شکوفایی بودند، برخی از ریاضیدانان بزرگ مانند ابوالوفا، از اینکه بتوانند از طریق مجالس گفت‌وشنود با معماری و هنرهای مربوط به آن سر و کار پیدا کنند، مشعوف و شادمان بودند. بنابراین می‌توان برخی از نوآوری‌های زیباشناختی و ساختمانی و فضایابی را که ما امروزه در آثار تاریخی مراکز معماری جهان اسلامی مشاهده می‌کنیم، نتیجهٔ دخالت بعضی از ریاضیدانان در این کارها دانست.

این ادعا که مجالس گفت‌وشنود محملی برای تبادل دانش‌های هندسی و معماری در مراکز عمدهٔ جهان اسلام بوده‌اند، توسط مآخذ و منابع دیگری نیز تقویت می‌شود. از جمله می‌توان از غیاث‌الدین جمشید کاشانی (ف. ۱۴۲۹) نام برد که یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدانان و اخترشناسان به‌شمار می‌رود. وی در نامه‌ای به پدر خود، از مباحثه‌ای که

بین او و یک استاد معمار و چند ریاضیدان دربارهٔ چگونگی استفاده از دستگاه‌های تراز در ساختمان رصدخانهٔ سمرقند درگرفته بوده حکایت کرده و اضافه می‌نماید که در این مباحثه ریاضیدانان از استادِ بنّا حمایت می‌کردند. آنچه را که کاشانی در این نامه بیان می‌کند، می‌توان از آن‌گونه مجالس گفت‌وشنودها دانست که به‌ویژه در خراسان قرن پانزدهم بسیار معمول و مرسوم بوده‌اند. در منابع مکتوبی که به چگونگی شروع پی‌ریزی ساختمان و عملیات معماری اشاره می‌شود، همواره ذکر از این است که هندسه‌دانان (مهندسان) نیز به اتفاق معماران و بنایان و دیگر هنرورزان در آنجا حضور داشته‌اند.[۴] از قراین نیز چنین برمی‌آید که در این‌گونه گردهمایی‌ها که در آغاز کارهای ساختمانی برگزار می‌شدند، استفاده از تخصص هندسه‌دانان امری واجب به‌شمار می‌آمده است.

یک سند مهم دیگر در این رابطه، رسالهٔ بدون عنوانی است که توسط فیلسوف و ریاضیدان و اخترشناس مشهور، عمر خیام (۱۱۳۱-۱۰۴۸) دربارهٔ یک مسئلهٔ هندسی نوشته شده است.[۵] راه‌حلی که خیام در این رساله برای مسئلهٔ مزبور ارائه کرده است، بعدها در یک رسالهٔ دیگر که مصنّف آن نامعلوم است، به صورت یک طرح تزئینی صرفاً برای هنرورزان آورده شده است. عنوان این رساله فی تداخل الاشکال المتشابه و متوافقه (چگونگی به‌هم پیوستگی اشکال متشابه و متقارن) می‌باشد و ما از این پس از آن به عنوان اشکال به‌هم پیوسته نام خواهیم برد.[۶]

عمر خیام در پایان این رسالهٔ بدون عنوان خود اشاره می‌کند که به چه دلیل و انگیزه‌ای دست به نگارش آن زده است و می‌نویسد:

> اگر به خاطر رفعت و بلندبالایی مقام آن مجلس نبود... و اگر طرح‌کنندهٔ سؤال چنان دین گرانی بر گردن من نمی‌داشت،... من اکنون از این وادی بسیار به‌دور می‌بودم.

هدف مقالهٔ حاضر این است که به بسط و گسترش رسالهٔ بدون عنوان خیام پرداخته و

---

۴. رجوع کنید به کتاب معماری تیموری در خراسان *Timurid Architecture in Khurasan* نوشتهٔ برنارد اوکین Bernard O'Kane (چاپ کوستا مزا Costa Mesa، ۱۹۸۷).

۵. علیرضا امیر معز: رساله‌ای از عمر خیام (*A Paper of Omar Khayyam*) در مجلهٔ *Scripta Mathematica 26 (1963) 323-327*

۶. تنها نسخه‌ای که از این رساله موجود است، در پاریس و در کتابخانهٔ ملی Bibliothèque Nationale تحت عنوان ancien fonds persan manuscript 169 نگهداری می‌شود.

ثابت کند که آن مجلسی هم که وی در آن حضور داشته، در واقع یکی از همان مجالس گفت‌وشنود با هنرورزان بوده و طراح آن سؤال نیز به احتمال زیاد یک معمار هنرورز بوده است. در نتیجه «وادی»ای (Wilderness) که خیام از آن نام می‌برد، چیزی جز حوزهٔ معماری نمی‌تواند باشد. برای اثبات این نکات، در نوشتار حاضر تاریخچهٔ یک طرح تزئینی که از اصل اثباتی ابوالوفا در کتاب اعمال هندسی او منشأ گرفته و بعداً توسط خیام به تحقق رسیده و چند نمونهٔ عملی آن در رسالهٔ اشکال به‌هم پیوسته آورده شده‌اند، به‌اجمال ذکر می‌شود. با مطالعهٔ این تاریخچه که در نوع خود بی‌نظیر است، پی می‌بریم که چگونه ریاضیدانان و معماران آن دوران با یکدیگر همکاری می‌کرده‌اند و در نتیجه از ماهیت واقعی نتایج این‌گونه همکاری‌ها نیز مطلع می‌شویم. تحقیق ما ابتدا با بررسی کتاب اعمال هندسی آغاز می‌شود که در آن ابوالوفا گزارشی از یک مجلس گفت‌وشنود که در شهر بغداد برگزار شده و وی در آن حضور داشته است، ارائه می‌دهد.

کتاب ابوالوفا

کتاب اعمال هندسی ترکیبی است بی‌نظیر از هندسهٔ عملی و هندسهٔ نظری. این کتاب اثری بسیار جامع و آموزنده دربارهٔ هندسهٔ کاربردی و یکی از بهترین کتبی است که در زمینهٔ هندسهٔ ناب و نظری، به دست یک ریاضیدان مسلمان به رشتهٔ تحریر درآمده است. کتاب اعمال هندسی دارای ساختاری منسجم بوده و تقریباً همهٔ معلومات هندسی را که هنرورزان به آنها نیازمند هستند، دربر دارد. ظاهراً غرض و مقصود ابوالوفا از نگارش این کتاب این بوده است که هنرورزان را در مسیر روشمندانهٔ هندسی رهنمود دهد تا آنان تعالی و کمال لازم را در کار خود به‌دست آورند. ابوالوفا در آغاز فصلی که در آن به بحث دربارهٔ مجلس گفت‌وشنود می‌پردازد، متذکر می‌شود که تقسیم اشکال هندسی، فنی بوده است بسیار رایج در بین هنرورزان و اضافه می‌کند:

> ما در این فصل قواعدی را وضع خواهیم کرد که هنرورزان باید آنها را بدون استثنا به‌کار گیرند، وگرنه هنگام تقسیم و ترکیب [مربع‌ها] مرتکب اشتباهات بزرگی خواهند شد.

ابوالوفا در این کتاب که برای هنرورزان نوشته است، فصل مزبور را مجزا کرده و آن را منحصراً به هنرورزان اختصاص داده است، زیرا شیوهٔ خاصی را دنبال می‌کند. در آن

زمان هر وقت که هندسه‌دانی یک روش جبری برای حل مسئلهٔ «ترکیب یک مربع از سه مربع دیگر» ارائه می‌داد، هنرورزان چندان اظهار رضایت نمی‌کردند زیرا بیش‌تر مایل بودند پی ببرند که چگونه می‌توان سه مربع را به اجزاء خود تجزیه نموده و سپس آنها را طوری ترکیب کرد که یک مربع دیگر به‌وجود آید. با درک این نکته که تنها راه برای اینکه هنرورزان نحوهٔ اثبات یک قضیه را پذیرا شوند، این است که آنها را با اشکال قابل لمسی مواجه کرد، ابوالوفا موفق شد که راه‌حلی نبوغ‌آسا ارائه نماید. چنین پیدا است که وی وظیفه‌ای را که در این رهگذر برای خود قایل شده بود، در این نمی‌دید که آخرین دستاوردهای ریاضی را به هنرورزان بیاموزد، بلکه بر این باور بود که در خاطر آنها درکی سالم و استوار از هندسه به‌وجود آورد.

در اثنای همین مجلس گفت‌وشنود بود که ابوالوفا راه‌حل نوینی برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث به هنرورزان ارائه داد. برای انجام این مقصود، او نه مانند خوارزمی به ضرب کردن اضلاع مثلث در یکدیگر پرداخت و نه مانند اقلیدس دست به ترسیم مربع‌هایی روی اضلاع مثلث زد، زیرا به‌خوبی می‌دانست که این راه‌حل‌ها برای هنرورزان آنچنان انتزاعی هستند که نمی‌توانستند سر از آنها درآورند. در عوض ابوالوفا یک مربع فرضی را طوری به چهار مثلث قائم‌الزاویه مساوی تقسیم کرد که بتوان آنها را حول یک مربع مرکزی به گردش درآورده و بعد هم آنها را چنان در کنار هم قرار داد که تبدیل به دو مربعی شوند که با اضلاع مثلث مطابقت داشته باشند. در نتیجه چنانچه یک ضلع معلوم می‌بود، وی می‌توانست اضلاع دیگر را به‌دست آورد (شکل ۱ الف).

روشی که ابوالوفا ارائه نمود، در واقع انعکاسی بود از ابتکارات او برای یافتن طریقی تا بتواند قضیهٔ مطلقاً انتزاعی و نظری را به هنرورزانی که بالطبع با کارهای عملی سر و کار داشتند، تفهیم نماید نه اینکه آنها را وادار کند تا کلیات ریاضیات دنیای اسلام آن عهد را فراگیرند.[۷]

۷. برخی از دانشمندان بر این عقیده‌اند که ابوالوفا این روش را از ریاضیدانان هندی به عاریت گرفته است. رجوع کنید به کتاب درس‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات

Vorlesungen ueber die Geschichte der Mathematik

اثر موریتز کانتور (Moritz Cantor) که در ۴ جلد در سال ۱۹۶۵ در نیویورک و اشتوتگارت تجدید چاپ شده است (جلد ۱ صفحات ۷۴۵-۷۴۴) و همچنین به کتاب ریاضیات عرب (*Les mathematiques*

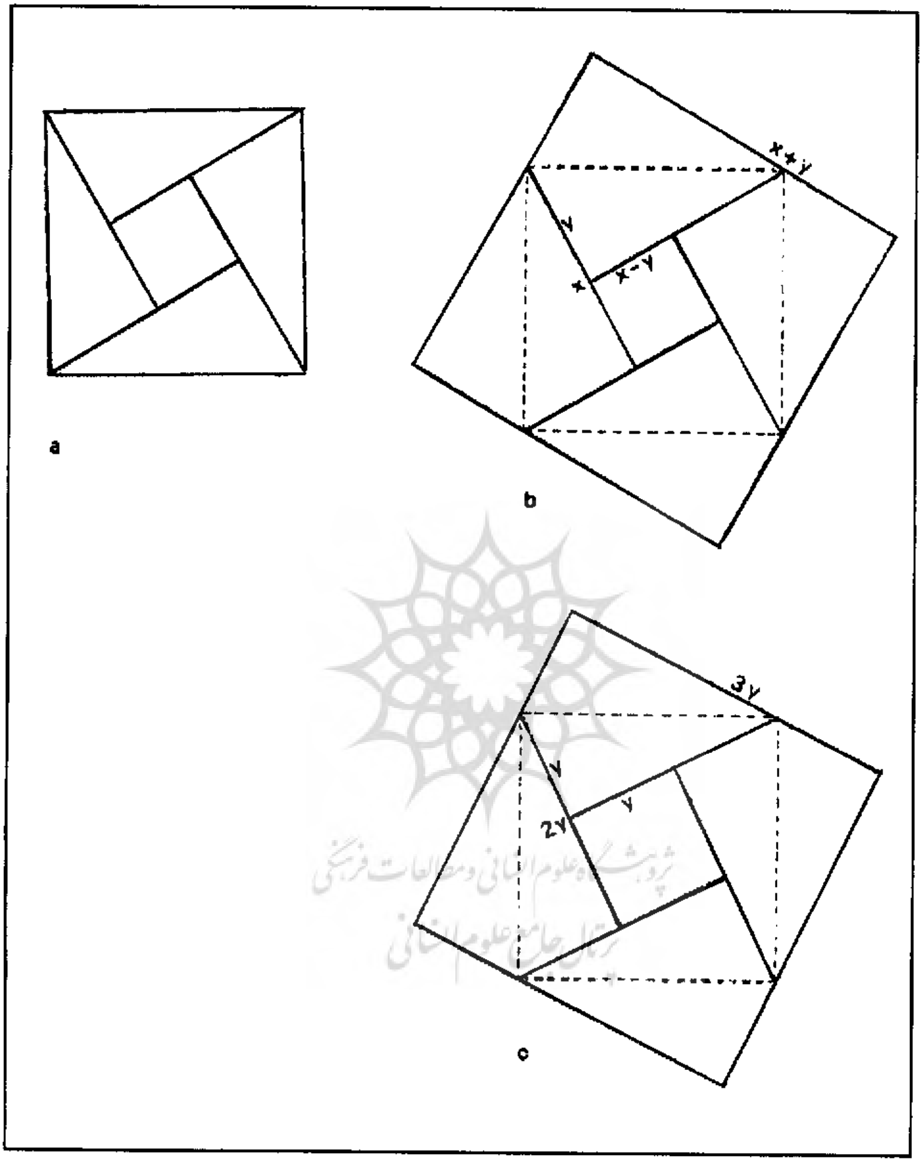
←

روش اثباتی که در این مجلس گفت‌وشنود ارائه گردیده، سرآغاز آفرینش طرحی بود که اکنون مورد بحث ما است. این طرح بعدها و پس از یک مجلس گفت‌وشنود دیگر، به کوشش عمر خیام جامهٔ عمل به خود پوشید و این مجلس است که مورد توجه مقالهٔ حاضر می‌باشد. برای اینکه بتوان پلی بر روی این شکاف زمانی برقرار کرد، می‌کوشیم تا آنچه را که در طول این مدت گذشته است، پندارمانند در نظر تجسم نماییم، پنداری که استوار باشد بر شواهد عینی و تعبیرات ریاضی که ذکر آنها از این پس در این نوشتار خواهد آمد.

کیفیت ذاتی این طرح تزئینی که در واقع برای مقاصد آموزشی به خاطر ابوالوفا خطور کرده بود، توجه هنرورزان را به خود جلب نمود. آنها به‌زودی دریافتند که حالات قرینگی و تقارن دوّاری این طرح را به‌آسانی می‌توانند تبدیل به یک شکل آذینی و پوینده نمایند، چرا که با افزودن چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی در امتداد وترهایشان به یک مربع مرکزی، می‌توان یک مربع بزرگ که از چهار چهارضلعی لوزی‌شکل تشکیل شده است، به‌دست آورد (شکل ۱ ب).

→

arabes) نوشتهٔ آدولف یوشکویچ (Adolf P. Youschkevitch) چاپ پاریس ۱۹۷۶ ص ۱۱۰. لیکن بیش‌تر احتمال می‌رود که ابوالوفا از روش ثابت ابن قرة (۹۰۱-۸۳۶) تأثیر گرفته باشد (رجوع کنید به اصول اقلیدس (*Euclid's Elements*) اثر تامس هیث (Thomas L. Heath) در ۵ ج، چاپ نیویورک ۱۹۵۶ ج ۱، ص ۳۶۵.



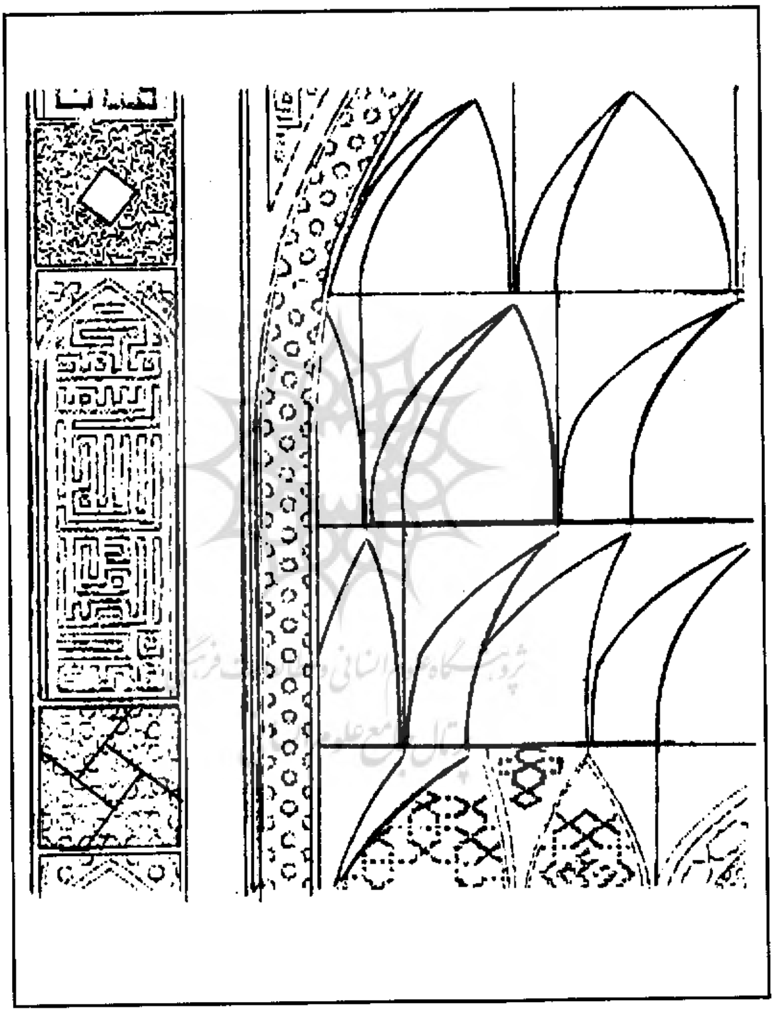
شکل ۱

الف) نمایه‌ای (figure) که ابوالوفا برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث از آن استفاده کرده است.

ب) طرح تزیینی ابوالوفا

ج) شیوه‌ای که ابوالوفا برای اثبات طرح تزیینی با نسبت ۱:۲ به‌کار می‌برد.

بر اساس چنین تبدیلی، نمایهٔ ارائه‌شده از سوی ابوالوفا مبدل به یکی از درونمایه‌های آذینی شد که ما اینک آن را در بسیاری از آثار بزرگ معماری مانند ایوان غربی (motif) مسجد جامع اصفهان مشاهده می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲

دو نوع درونمایه از شیوهٔ اثباتی ابوالوفا (ایوان غربی مسجد جامع اصفهان)

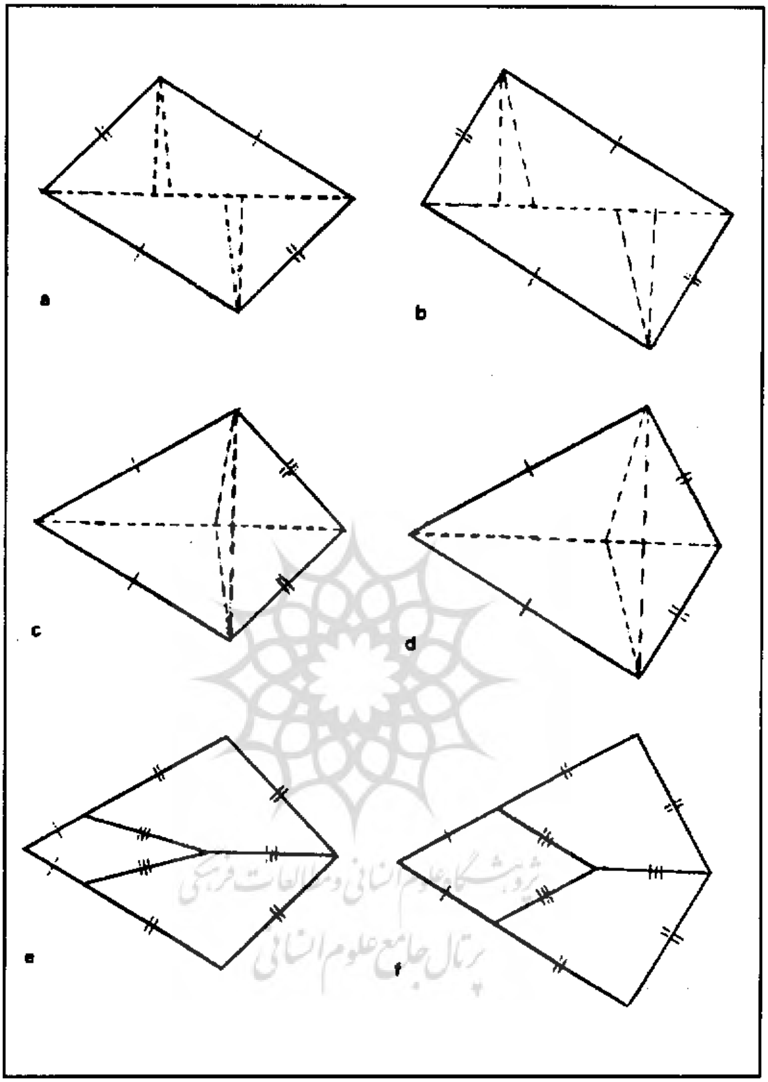
چهارضلعی لوزی‌شکل یکی از عناصر مشترک طرح‌های تزیینی هندسی در سراسر جهان اسلامی می‌باشد و از این‌رو در دنبالهٔ بحث ما نقش مهمی بازی خواهد کرد. بنابراین لازم است که در ابتدا توضیحاتی دربارهٔ آن داده شود. این شکل را که شباهتی به یک بادبادک دارد، هنرورزان هم در گذشته و هم در حال حاضر به زبان‌های مختلف بادام (almond) می‌نامیده‌اند.[۸] ما نیز از این پس از آن به همین نام یاد خواهیم کرد. هر گاه دو مثلث متقارن را که متساوی‌الاضلاع نباشند در امتداد ضلع بزرگ‌ترشان (مثلاً در امتداد وترها، در صورتی‌که این دو مثلث قائم‌الزاویه باشند) به یکدیگر وصل کنیم، شکلی به‌دست می‌آید که یا یک متوازی‌الاضلاع است (شکل ۳ الف، ۳ ب) و یا یک بادام (شکل ۳ ج، ۳ د). در آن زمان، خواص کلی متوازی‌الاضلاع‌ها کاملاً معلوم بودند زیرا در هندسهٔ یونانی به‌کرّات مورد بحث قرار گرفته بودند، لیکن در ادبیات ریاضی چندان توجهی به شکل بادامی نشده بود.[۹] از سوی دیگر، معماران و هنرورزان به اندازهٔ کافی با خواص اصلی شکل بادامی آشنایی داشته و از آن استفاده‌های فراوان در طرح‌های معماری خود می‌کردند. این خواص را می‌توان به طور خلاصه چنین بیان کرد:

- ضلعی که در امتداد آن دو مثلث متقارن به یکدیگر متصل می‌شوند، قطر اصلی و محور تقارن شکل بادامی می‌باشد.
- دو قطر اصلی و فرعی یک شکل بادامی بر یکدیگر عمود هستند.
- نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل، یکدیگر را روی محور تقارن قطع می‌کنند.
- چنانچه خطوطی به اندازهٔ اضلاع کوتاه، روی اضلاع بزرگ شکل بادامی آن جدا کنیم، نقاط تقاطع نیمسازها دارای فواصل مساوی از گوشه‌ای خواهند بود که محدود در اضلاع کوتاه‌تر می‌باشد.

---

۸. بنا بر اطلاعاتی که کاشانی در کتاب خود و در فصل مربوط به معماری به دست می‌دهد، این شکل را در قرن ۱۵ در ایران لوزه (یعنی بادام) می‌نامیده‌اند (رجوع کنید به مفتاح الحساب اثر غیاث‌الدین جمشید کاشانی که به ویراستاری نابولسی نادر، چاپ دمشق، ۱۹۷۷، ص‌ص ۲۲۰ و ۳۸۲).

۹. کاشانی توضیح می‌دهد که چگونه می‌توان مساحت شکل بادامی را محاسبه کرد و از آن به مثابه یکی از عناصر اصلی مقرنس نام می‌برد (رجوع کنید به مفتاح‌الحساب کاشانی، ص‌ص ۲۲۵-۲۲۲ و ۳۹۰-۳۸۱).



شکل ۳

الف، ب) خواص کلی متوازی‌الاضلاع

ج، د) خواص کلی شکل هندسی بادام

هـ و) تقسیم شکل بادامی به اشکال بادامی کوچک‌تر

• با ترسیم دو فاصلهٔ مساوی از نقطهٔ تقاطع نیمسازها، می‌توان شکل بادامی را به سه بادام کوچک‌تر تقسیم نمود که دو تای آنها با یکدیگر متقارن می‌باشند (شکل ۳ و، ۳ الف).

تقسیم شکل بادامی به‌نحوی که در بالا گفته شد، یکی از کارهای معمول بین هنرورزان بود برای اینکه بتوانند انواع طرح‌های به‌هم‌پیوستهٔ بادامی‌شکل را به‌وجود آورده و همچنین چندضلعی‌ها و ستاره‌های پُرپرّه را به‌وجود آورند.

نمایهٔ ارائه‌شده توسط ابوالوفا بیانگر یک قضیهٔ کلی دیگر نیز می‌باشد که می‌توان آن را در رابطه با هر نسبتِ دلخواه بین دو ضلع غیر متساوی شکل بادامی به‌کار گرفت و این نسبت با تانژانت زاویهٔ چرخش مطابقت دارد. طبق تعریف، شرایط زیر همواره حاکم هستند:

هر گاه ضلع بزرگ‌تر شکل بادامی را x و ضلع کوچک‌تر آن را y بنامیم، در آن‌صورت ضلع مربع محاطی برابر خواهد بود با x-y و ضلع مربع محیطی برابر خواهد بود با x+y (شکل ۱ ب).

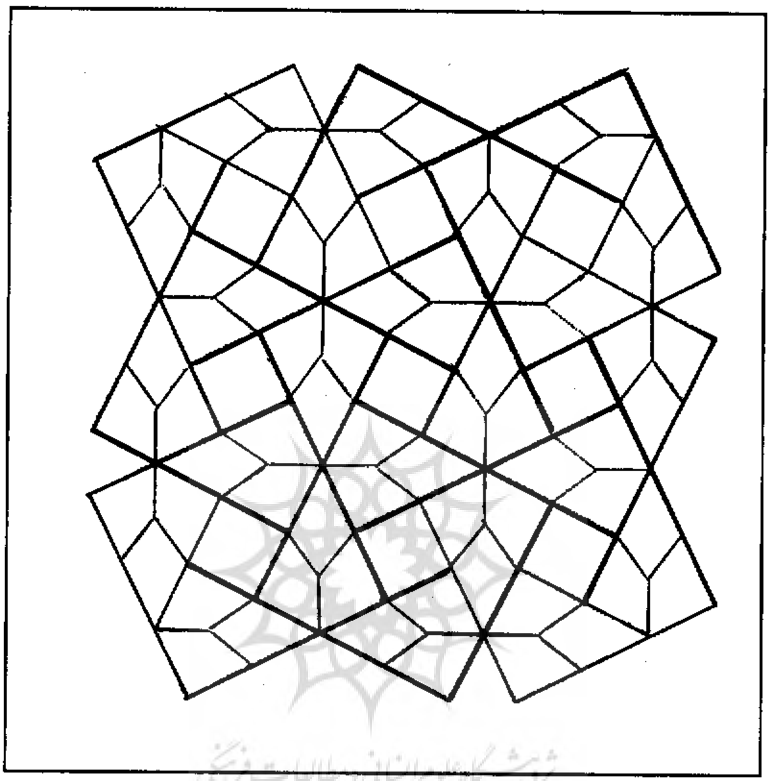
به نظر می‌رسد که دقت و آراستگی این خاصیت بوده است که هنرورزان را بر آن داشته تا انواع گوناگون نمایهٔ ارائه‌شده توسط ابوالوفا را مورد مطالعه قرار دهند. زیرا آنها می‌توانستند با انتخاب هر نسبتِ دلخواه این نمایه را به مثابه درونمایه‌ای به‌کار گیرند. این خاصیت و ویژگی به هنرورزان این امکان را می‌داد که با انتخاب نسبت‌های مناسب، ترکیب‌های مختلفی از آن طرح به‌وجود آورند. باید توجه داشت که مهم‌ترین نقطه‌نظر هنرورزان هنگام انتخاب یک تناسب، انعطاف‌پذیری و محدودیت‌های خواص هندسی آن بود نه برتری و تفوق این یا آن دستگاه.[۱۰]

تا آنجاکه در تصاویر منتشرشده مشاهده می‌شود، بیش‌تر نمونه‌های این طرح دارای تناسبی به میزان ۱:۲ بین اضلاع شکل بادامی بوده‌اند. برای مثال در شکل ۲ می‌توان انواع موتیف‌های تکی را مشاهده کرد، ولی علت اینکه چرا هنرورزان این نسبت را به نسبت‌های دیگر ترجیح می‌دادند، به احتمال قوی به این خاطر بود که هر گاه اضلاع شکل بادامی دارای نسبت ۱:۲ باشند، ضلع مربع محاطی برابر با طول کامل ضلع کوچک بادام یعنی y و ضلع مربع محیطی برابر با ۳y خواهد بود (شکل ۱ ج). این‌گونه تقسیم‌بندی بادام‌ها این امکان را به هنرورزان می‌داد تا ترکیبی از مربع‌های مرتبط با اشکال بادامی را

---

۱۰. برای اطلاعات بیش‌تر در این مورد رجوع کنید به کتاب معماری تیموری در ایران و توران (*The Timurid Architecture of Iran and Turan*) نوشتهٔ لیزا گولومبک (Lisa Golombek) و دونالد ویلبر (Donal Wilber) چاپ پرینستون، ۱۹۸۸، صص ۱۳۸-۱۳۷.

از طریق تکرار مربع اصلی در جهات مختلف زاویهٔ چرخش بیافرینند (شکل ۴).



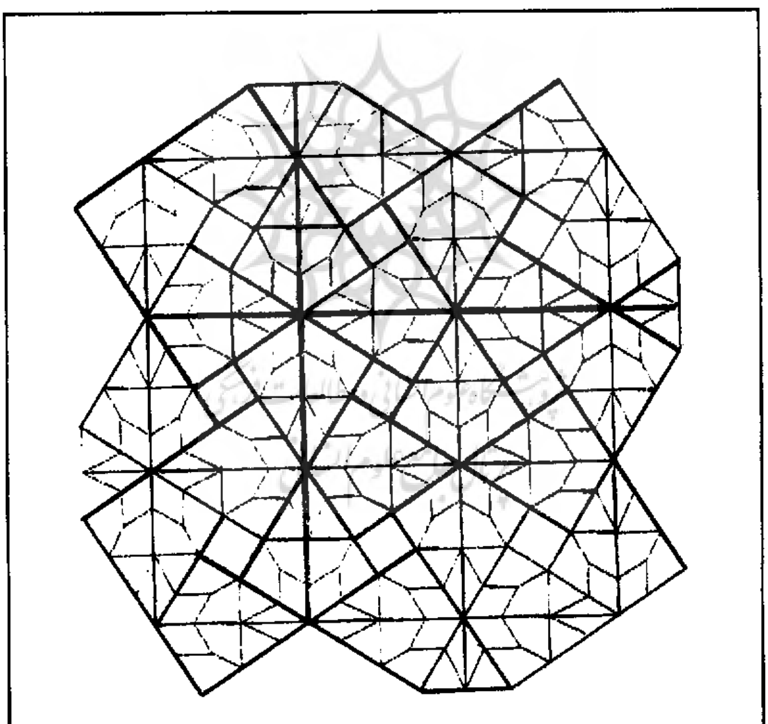
شکل ۴

ترکیب حاصله از طرح تزیینی به شیوهٔ اثباتی ابوالوفا که بر اساس نسبت ۱:۲ تقسیم شده است.

گرچه ماحصل نسبت ۱:۲ بسیار عالی بود، ولی هنرورزان هیچ دستاوردی را به مثابه آخرین نتیجهٔ دلخواه خود تلقی نمی‌کردند و هر زمان که طرح نوینی کشف می‌شد، نسل‌های بعدی هنرورزان شروع به بهره‌گیری از آن می‌نمودند. لیکن تا آنجا که ما می‌دانیم، هیچ‌گاه یک ترکیب خاص تکرار نمی‌شد زیرا هنرورزان همواره به طرح‌های نوینی نیاز داشتند تا بتوانند آنها را به اندوخته‌های خود بیافزایند. از این جهت راه اثبات ابوالوفا برای آنها منبع فیضی بود که می‌توانستند از آن بهره گرفته و انواع جدیدی از

طرح‌ها را کشف کنند. اکثر نمونه‌هایی که اکنون در آثار تاریخی موجود مشاهده می‌کنیم، در ایران و منطقهٔ خراسان هستند و چنین به‌نظر می‌رسد که شیوهٔ اثباتی ابوالوفا به‌ویژه نزد هنرورزان آن دیار بسیار معمول و متداول بوده است. به همین جهت است که بیش‌تر نسخه‌های موجود از کتاب اعمال هندسی ابوالوفا، ترجمه‌هایی از آن به زبان فارسی می‌باشند.

می‌توان پندارمآبانه چنین در نظر مجسم کرد که روزی یکی از هنرورزان زیرک و زبردست اصفهان به این فکر افتاد که نسبت خاص و بالقوه‌ای را بین اضلاع شکل بادامی برقرار کند تا بتواند ترکیب بسیار پیچیده‌ای را به‌وجود آورد (شکل ۵).



شکل ۵

ترکیب حاصله از طرح تزیینی به شیوهٔ اثباتی ابوالوفا که بر اساس نسبت‌های خاصی تقسیم شده است.

طرحی که در این شکل آمده است، در واقع نوع دیگری از نمایهٔ ابوالوفا می‌باشد. البته به رؤیت درآوردن چنین طرحی چندان دشوار نیست، فقط کافی است که تقسیم اشکال بادامی اولیه را از طریق ترسیم خط عمودی از محور تقارن انجام داد به طوری‌که اضلاع بزرگ‌تر بادام‌های ثانوی برابر با اضلاع کوچک‌تر بادام اولیه یعنی y و اضلاع کوچک‌تر بادام‌های ثانوی برابر با ضلع مربع محاطی یعنی x-y باشند. می‌توان حدس زد که تحقق بخشیدن به چنین طرحی خارج از حد توانایی یک هنرورز بوده است، زیرا وی برای اینکه بتواند چنین مشکلی را از پیش پای بردارد می‌بایستی مجهز به دانش جدید ریاضیات باشد. با توجه به دانش محدود او در هندسهٔ کاربردی، تنها راهی را که او می‌توانست انتخاب کند، این بود که با ریاضیدانان در این مورد رایزنی کند. حال می‌توان تصور کرد که هنرورز ما حقیقتاً از طریق یکی از آن مجالس گفت‌وشنود دست به چنین کاری زده و عمر خیام نیز در پاسخ او چنین گفته است (شکل ۶):

آنچه که تو هنرورز را بدان نیاز است این است که مثلث قائم‌الزاویه ERT را طوری ترسیم کنی که اگر آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه و یک شکل بادامی تقسیم نمایی، تناسبات زیر برقرار باشند:

$$RI = BI\ ;\ ER = EB = TI$$

و برای این‌کار باید عمود HB را بر قطر ET ترسیم کنی. حال درمی‌یابی که مثلث REH با مثلث TIB مساوی است زیرا که زوایای متقابل با هم برابرند و $TI = ER$ می‌باشد. در نتیجه خواهی داشت

$$EH = IB\ ;\ KH = TB$$

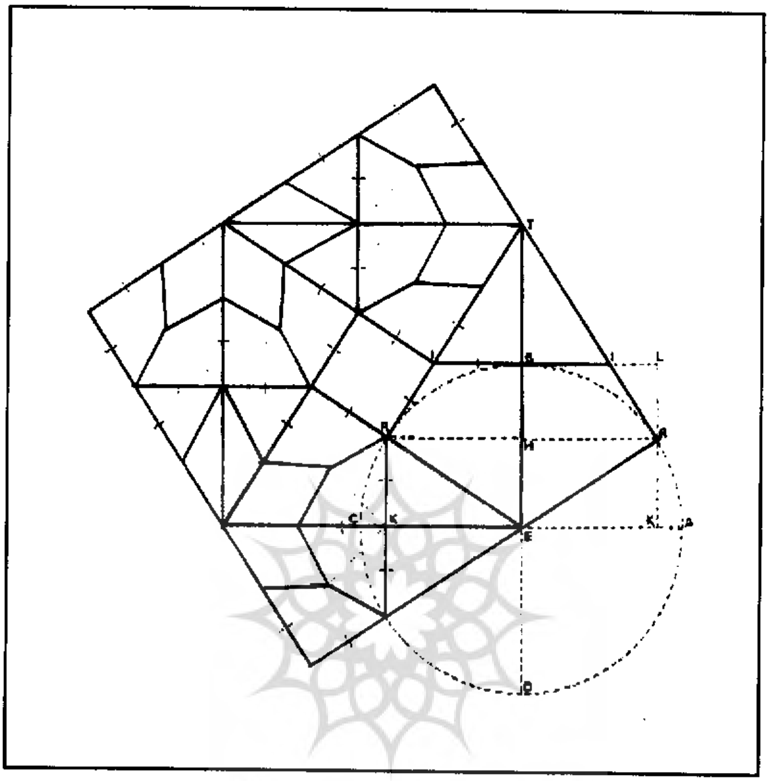
اما مثلث REK متشابه است با مثلث RIL زیرا که زوایای متقابل با هم برابرند، در نتیجه $ER : EK = RI : RL$ خواهد بود و از آنجا که

$$RI = EH\ ;\ RL = HB\ ;\ EK = HR$$

پس $ER : HR = EH : HB$ حال دایرهٔ ADCBR را به مرکز E و شعاع AE ترسیم کن. پس به این‌ترتیب می‌توان سؤال تو را به صورت یک مسئلهٔ کلی تناسب‌ها بیان کرد و آن این است که: یک‌چهارم AB از دایرهٔ ABCD را توسط نقطهٔ R طوری به دو بخش تقسیم کن که اگر RH عمود بر قطر BD ترسیم شود، نسبت AE به RH برابر باشد با نسبت EH به HB.[11]

---

11. Ali R. Amir Moéz, "A paper of Omar Khayyam" *op.cit.* p. 323.



شکل ۶

ترسیم نظری مسئلهٔ مورد توجهٔ هنرورزان

با این دستور عمل نهایی برای این مسئله که خیام آن را در رسالهٔ بدون عنوان خود مطرح ساخته، تصورات پندارمآبانهٔ ما به پایان می‌رسد. از شواهد و قراین چنین برمی‌آید که خیام پس از شرکت در این مجلس است که به حل این مسئله پرداخته و به این فکر می‌افتد که رساله‌ای دربارهٔ آن به رشتهٔ تحریر درآورد. حال برای اینکه بتوانیم به تجدید بنایی که تاکنون دربارهٔ این مسئله ارائه داده‌ایم، اعتبار لازم را ببخشیم، رسالهٔ فوق‌الذکر را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم، آن هم به این منظور که ثابت کنیم که خیام این رساله را برای هنرورزان و دانشمندان نظیر خود نوشته است.

رسالهٔ عمر خیام

رسالهٔ بدون عنوان خیام که در حوالی سال ۱۹۶۰ کشف شد و اینک ترجمه‌هایی از آن به زبان‌های مختلف در دست می‌باشند، تاکنون فقط توجه مورخان ریاضی را به خود جلب کرده است. این رساله دربارهٔ مسئله‌ای نوشته شده که مؤلف برای حل آن، راه‌های گوناگونی ارائه داده است. این راه‌حل‌ها عبارت‌اند از یک معادلهٔ درجه سه، دو راه‌حل هندسی از طریق مقاطع مخروطی و یک راه‌حل عددی بر اساس جداول مثلثاتی.

چنین به‌نظر می‌رسد که مسئله‌ای که در بالا ذکر شد، مورد توجه خاص خیام بوده است چه اگر چنین نمی‌بود، وی دست به تحریر یک رسالهٔ مفصل دربارهٔ آن نمی‌زد. مسئلهٔ مزبور از نقطه‌نظر تاریخ ریاضیات نیز دارای اهمیت خاصی است زیرا که خیام را بر آن داشته است تا دستاوردهای چشمگیری را به دنیای جبر و تئوری اعداد اهدا کند.[۱۲] رسالهٔ مورد بحث ما همچنین برای تاریخ هنر و معماری اسلامی حایز اهمیت بسیار است زیرا که نشان‌دهندهٔ اشتغال خیام با هنرهای تزیینی و به عبارت دیگر آشنایی او با مسائل مربوط به معماری می‌باشد. به گفتهٔ یکی از مورخان به نام داوید کازیر:

> عمر خیام سنت حکمای مسلمان را دنبال می‌کرد بدین معنا که فقط تا آنجا به جست‌وجو و تحقیق دربارهٔ مسائل ریاضی می‌پرداخت که برای تبیین و تفسیر مشکلات اخترشناسی و مسّاحی و یا معاملات تجاری و قوانین ارث و میراث لازم بودند.[۱۳]

این رسالهٔ خیام این امکان را به ما می‌دهد که معماری و هنرهای مربوط به آن را نیز به حوزهٔ تحقیقاتی وی اضافه کنیم. تاریخچهٔ طرحی که در اینجا مورد بحث ما است، همچنان ادامه پیدا می‌کند تا آنجا که خیام در پایان رسالهٔ خود ملاحظاتی را دربارهٔ آن مجلس کذایی بیان می‌دارد:

> این است آنچه که به خاطر من خطور کرده است، البته با توجه به پراکندگی افکار و آشفتگی ذهن من و این نکته که من در آن زمان آنچنان با مسائل دیگر مشغول بودم که توجهی به این‌گونه پنداشت‌های ساده نداشتم. اگر به خاطر بلندپایگی و رفعت آن مجلس نبود که افسوس اینک برای همیشه از دست رفته است... و اگر طراح آن سؤال که رحمت الهی بر او باد، دینی گران بر گردن من نمی‌داشت، من

---

12. Ibid. 323

13. D.S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam*, New York 1931, pp.18-19.

اینک از این بادیه بسیار به‌دور می‌بودم زیرا سعی و کوشش من همواره روی واقعیاتی متمرکز بوده‌اند که برای من از اهمیتی زیاد برخوردار بوده و من جدّ و جهد خود را مصرف آنها می‌کردم و نه برای این‌گونه پنداشت‌های ساده.[۱۴]

این جملات خیام سرنخی را دربارهٔ ماهیت آن مجلس به دست ما می‌دهد. ستایشی که وی از این همایش کرده، این نکته را به ذهن ما القا می‌کند که می‌بایستی یکی از درباریان در آنجا حضور داشته باشد، زیرا احساسی که به ما دست می‌دهد این است که طراح آن سؤال شخص متشخصی بوده است. جای تأسف است که خیام ذکری از مقام و منصب وی نمی‌کند. اما تأکید دارد که دین و تعهد اخلاقی نسبت به او احساس می‌کرده و این امر او را بر آن داشته تا آن رساله را به رشتهٔ تحریر درآورد. مشکل می‌توان تصور کرد که طرح آن سؤال فنی که سرانجام منجر به مسئلهٔ مورد بحث شد، از جانب یک فرد درباری صورت گرفته باشد، مگر اینکه ــ همان‌طور که در گذشته گهگاهی پیش آمده است ــ آن شخص درباری، یا فردی دانشمند و یا عضوی از اصناف حرفه‌ای بوده باشد.[۱۵]

همان‌طور که می‌بینیم خیام با کمی تأثر اضافه می‌کند که وی خود را قبل از چنین جلساتی همواره با «واقعیات» (fact) مشغول می‌داشته و توجهی به «پنداشت‌های ساده» (simple ideas) نمی‌کرده است. برای فیلسوف و دانشمندی چون او «واقعیات» عبارت بودند از حقایقی که از طریق تحقیقات فلسفی و نظری حاصل می‌شدند و «پنداشت‌های ساده» صرفاً جنبه‌های تجربی و عملی داشته و کارهای معمولی به‌شمار می‌رفتند. در نتیجه می‌توان گفت که خیام در این مجلس با یکی از رشته‌های عملی آشنا شده که شوق و ذوق خاصی را در او برانگیخته است. همان‌طور که از واژهٔ «وادی» (wilderness) برمی‌آید، خیام باید آنچه را که بر او در این مجلس معلوم ساخته‌اند، به مثابه حوزه‌ای نوین تلقی کرده باشد که می‌بایستی آن را مورد آزمون و بررسی قرار دهد، و چنین به نظر

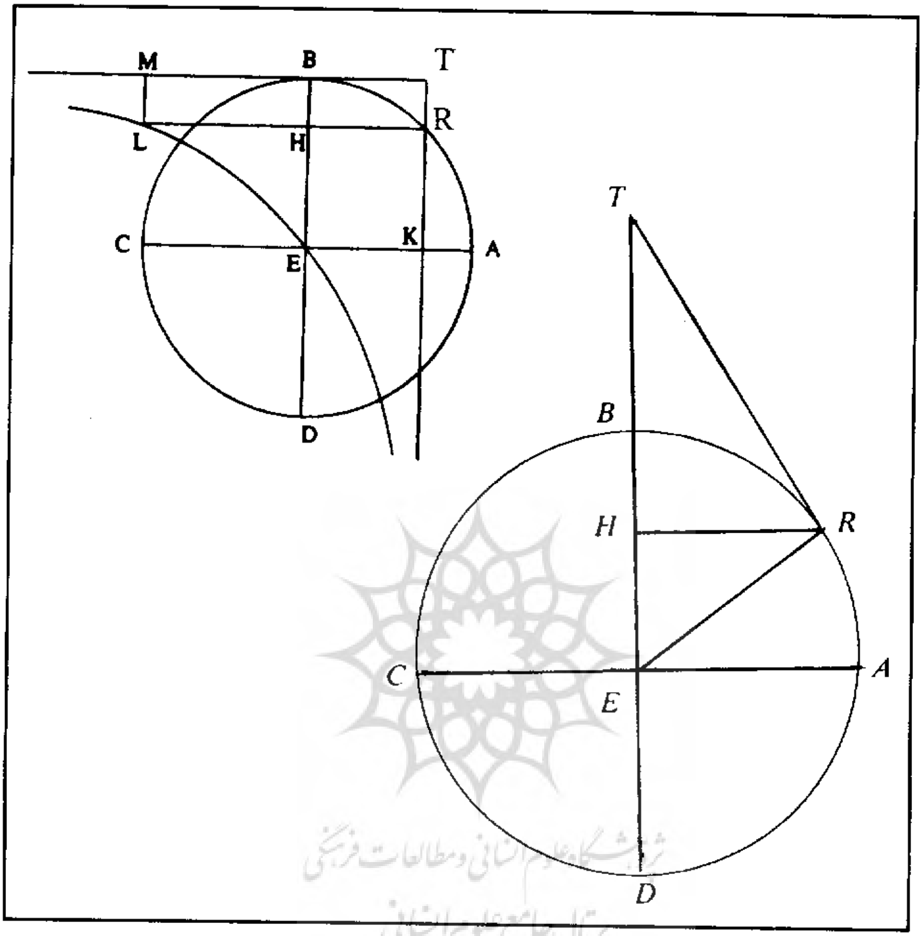
14. A.R. Amir Moéz, "A paper of Omar Khayyam", *op.cit*, p. 336.

۱۵. همان‌گونه که کاشانی نیز اشاره می‌کند، درباریان گاهگاهی اظهار علاقه به شرکت در این‌گونه مجالس می‌کردند به‌ویژه هنگام بحث و گفت‌وگو دربارهٔ ساختمان آثاری که خود، در دستور کار گذاشته بودند. بنابراین چندان بعید به‌نظر نمی‌رسد که سلطان ملکشاه و یا وزیر او نظام‌الملک که گویا یکی از دوستان دیرین خیام هم بوده است در این مجلس شرکت کرده باشند. به‌خصوص با در نظر گرفتن این نکته که آنها بنای مسجد جامع اصفهان را ضمانت و پیگیری می‌کردند، چنین حدسی چندان هم بی‌پایه نیست.

می‌رسد که وی از آشنایی با آنچنان «پنداشت‌های ساده» لذت برده است. ولی باز با کمال تأسف مشاهده می‌کنیم که او مشخصاً ذکر نمی‌کند که این پنداشت‌ها در واقع چیزی جز جنبه‌های عملی و تجربی معماری نبوده‌اند. لیکن اگر اشارات و ملاحظاتی را که وی همراه با تجزیه و تحلیل‌های خود ارائه می‌دهد، مورد تدقیق قرار می‌دهیم، به‌روشنی درمی‌یابیم که فکر اصلی او در رابطه با تحریر این رساله این بوده است که آن را در دسترس هنرورزان قرار دهد.

خیام رسالهٔ مزبور را با وضع و توضیح مسئله به شکلی که تعریف آن قبلاً آمد، آغاز کرده و آنگاه با این فرض که تقسیم‌های مورد نظر صورت گرفته‌اند، یعنی $AE : RH = EH : HB$، می‌گوید:

> حل این مسئله ممکن است به این صورت باشد که یک هذلولی را طوری رسم کنیم که از دو نقطهٔ E و L بگذرد و مجانب‌های آن دو خط TM و KM باشند. (شکل ۷ الف).



شکل ۷

الف) راه‌حلی که خیام برای این مسئله از طریق مقاطع مخروطی ارائه داده است.

ب) راه‌حل دیگری که عمر خیام با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه برای این مسئله ارائه کرده است.

لیکن از آنجا که مکان‌های نقطهٔ L و مجانب TK معلوم نیستند، خیام واقف است که به پایان رسانیدن این کار مشکل خواهد بود و یادآور می‌شود که این امر «به مقدماتی چند از مقاطع مخروطی نیازمند است» و سپس به جای اینکه این روند را تا پایان ادامه دهد، مطلب را کوتاه کرده و می‌گوید:

آنها که از مقاطع مخروطی اطلاع دارند، می‌توانند در صورتی‌که مایل باشند خود این کار را انجام دهند.[۱۶]

ظاهراً خیام چندان مایل نبوده که برای ریاضیدانان که بالطبع با مقاطع مخروطی آشنایی داشتند، توضیح واضحات دهد. وی آنگاه پس از یک کوشش ناموفق اولیه، می‌کوشد تا از راه دیگری مسئله را حل نماید و موقعی که به معرفی این راه می‌پردازد، اشاره می‌کند که مخاطب او بیش‌تر اشخاصی هستند که باکارهای عملی سر و کار دارند:

این روش نیز به برخی از عناصر مقاطع مخروطی نیازمند است، ولی به دلایل زیاد، خیلی آسان‌تر از روش اول بوده و فرض‌های آن نیز مفیدتر می‌باشند.[۱۷]

خیام می‌کوشد تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقدور از مقاطع مخروطی کم‌تر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیر ریاضیدان آسان‌تر باشد. از این رو به نظر می‌رسد که صفت «مفید» که او در اینجا به‌کار می‌برد، به معنای کاربردی و عملی است. حال اگر هر دو روش او منجر به جواب‌های درستی برای مسئلهٔ مورد نظر می‌شده‌اند، پس چرا «فرض‌های» روش دوم را «مفیدتر» می‌خواند؟ بنابراین اگر ما این «فرض‌ها» را به «خواص عملی» تعبیر کنیم، در آن‌صورت «مفید» شامل حوزه‌های عملکردی خواهد شد.

خیام تحلیل خود را در رابطه با روش دوم با این فرض آغاز می‌کند که تقسیمات مورد نظر صورت گرفته‌اند یعنی $AE : RH = EH : HB$ (شکل ۷) و بعد ثابت می‌کند که $ET = ER + RH$. عبارات او چنین‌اند:

مثلثی که خواص آن ذکر شد، برای حل مسائلی از قبیل این مسئله مفید است. اما این مثلث دارای خواص دیگری نیز هست که ما برخی از آنها را ذکر خواهیم کرد تا کسانی که این رساله را مطالعه می‌کنند، بتوانند در ارتباط با مسائل مشابه، استفاده‌های لازم را از آنها بکنند... مثلاً یکی از خواص این مثلث این است که از دو ضلع زاویهٔ قائمه، آنکه بزرگ‌تر است برابر است با مجموع ضلع کوچک‌تر و پاره‌خطی که خط عمود بر وتر را در سمت ضلع کوچک‌تر جدا می‌کند.

منظور وی در اینجا رابطهٔ $ET = ER + EH$ می‌باشد. حل یک مسئلهٔ هندسی فقط می‌تواند برای «موارد عملی مشابه» «مفید» باشد و نه برای «مسائل هندسی مشابه». در نتیجه آنچه که در اینجا منظور خیام است «مواردی» می‌باشند شبیه به موردی که وی

16. A.R. Amir Moéz, “A Papaer of Omar Khayyam” *op.cit.* p. 325.

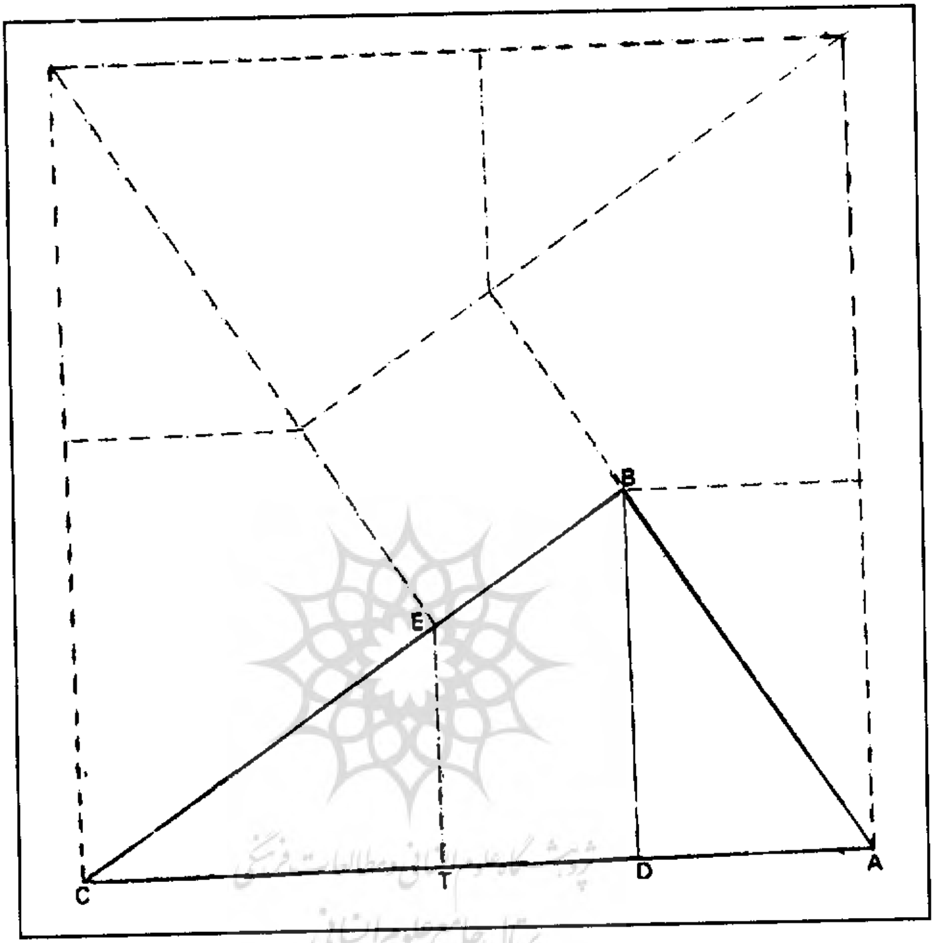
17. Ibid. p. 325.

دربارهٔ آن می‌اندیشید. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که خیام خود را از این جهت با این مثلث مشغول می‌داشته تا آن را برای «موارد مشابهی» که بالقوه در انتظار هنرورزان بودند، «مفید» سازد. اتفاقاً معماری و هنرهای مربوط به آن، حوزه‌هایی بودند که می‌توانستند حداکثر استفاده را از خواص گوناگون این مثلث بکنند. خیام تجزیه و تحلیل جبری از این مسئله را با پوزش‌خواهی از خوانندگان ناآشنا به علم ریاضی شروع کرده و چنین می‌گوید:

> همان‌طور که ریاضیدانان با هوش و ذکاوت دوران گذشته، مفاهیم عالمان جبر را برای آسان‌تر ساختن راه‌حل‌های شهودی به‌کار می‌گرفتند، ما نیز همواره از آنها پیروی کرده‌ایم. ولی به‌کار بردن مفاهیم عالمان جبر در اینجا ضرورتی ندارد و ما می‌توانیم بدون استفاده از آنها، مقاصد خود را بیان کنیم. فقط باید دانست که با استفاده از این مفاهیم، می‌توان عملیات ضرب و تقسیم را آسان‌تر نمود.[۱۸]

باید یادآور شد که خیام در کتاب مهم خود دربارهٔ جبر که آن را منحصراً برای دانشمندانی چون خود نوشته بود، لزومی برای توجیه استفاده از مفاهیم جبری را نمی‌دید. وی مثلث ABC را ترسیم کرده و فرض $AC = AB + BD$ را به مثابه پایه و اساس تجزیه و تحلیل جبری مسئلهٔ مورد بحث قرار می‌دهد (شکل ۸).

18. Ibid.



شکل ۸

مثلث قائم‌الزاویه که پایه و اساس معادلهٔ جبری خیام را تشکیل می‌دهد.

آنگاه برای BD کمیت «مجهول» (x) و برای AD عدد گویای ۱۰ را فرض کرده و بدین‌سان مسئله را تبدیل به معادلهٔ درجه سوم

$$x^{3} + 200x = 20x^{2} + 2000$$

می‌کند. سپس در رابطه با این مثلث (که از این پس از آن به عنوان «مثلث خیام» نام خواهیم برد) به بحث و تفسیر دربارهٔ مسائل کلی جبر می‌پردازد. آنگاه جملات جبری را

تشریح و تعریف کرده و رئوس طبقه‌بندی انواع مختلف معادلات جبری را ذکر می‌کند و به دنبال آن گزارشی کوتاه دربارهٔ کارهای ریاضیدانان پیشین در رابطه با معادلات درجه سوم داده و اضافه می‌کند:

> لیکن هر زمان که پای مکعبات به میان می‌آید... به هندسهٔ فضایی و به‌ویژه به مخروطات و مقاطع مخروطی نیازمند می‌شویم زیرا که مخروط یک جسم است... ولی برای اشخاصی که آشنایی با مقاطع مخروطی ندارند، از آلات و ادوات خاصی استفاده می‌کنیم.

اشاره‌ای که خیام در آخر این مطلب می‌کند، یعنی استفاده از آلات و ادوات خاص برای کاربرد مقاطع مخروطی، از اهمیت زیادی برخوردار است و با توجه به ملاحظات قبلی او، دیگر جایی برای شک و تردید باقی نمی‌ماند که اشخاص خبره و مجرب در کارهای عملی که خیام مورد خطاب قرار می‌دهد، افرادی جز هنرورزان نمی‌توانند باشند. این گفتهٔ وی را می‌توان همچون راه‌حل‌های پیشنهادی ابوالوفا برای هنرورزان به‌شمار آورد و شاید به این دلیل است که مثلث خیام در رسالهٔ اشکال به‌هم پیوسته که مربوط به معماری است آمده است.

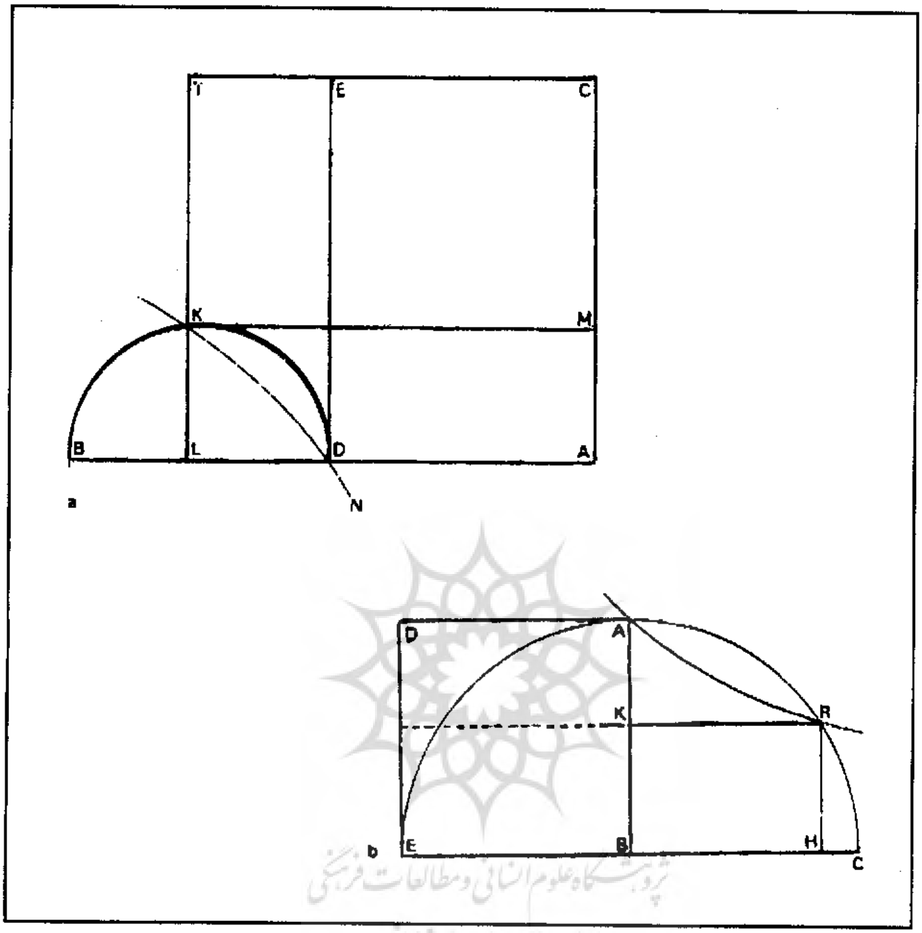
ابوالوفا در کتاب اعمال هندسی خود نوعی راه‌حل‌های مکانیکی را برای مسائل معینی از قبیل «تضعیف مکعب» و «تثلیث زاویه» ارائه می‌دهد. اینها مسائلی بودند که ذهن بسیاری از ریاضیدانان یونانی را به خود مشغول کرده بودند و از آنجا که حل آنها مستلزم به‌کارگرفتن معادلات درجه سوم بود، سبب شدند که ریاضیدانان مقاطع مخروطی را کشف کنند. شیوه‌هایی که ریاضیدانان یونانی برای حل مسائل فوق‌الذکر ارائه می‌کردند عبارت بودند از استفاده از مقاطع مخروطی و یا به‌کار بستن روش‌های مکانیکی که آنها را به یونانی neusis (کناره، آستانه، مرز) و به عبارت دیگر روش مرزی (verging procedure) می‌نامیدند. مشخصهٔ راه‌حل مزبور این است که یک پاره‌خط (و یا دو پاره‌خط مساوی) را طوری بین دو خط راست و یا دو خط دایره‌وار قرار داد که تدریجاً به یک نقطه تقلیل یابد. ریاضیدانان در موارد معدودی نیز از وسایل خاصی برای این منظور استفاده می‌کردند، ولی غالباً این کار را از طریق آزمایش و خطا (trial and error) و با استفاده از خط‌کش انجام می‌دادند. بعدها روش مرزی بین ریاضیدانان مسلمان به نام «هندسهٔ متحرک» (moving geometry) معروف شد. رفتار ابوالوفا در رابطه با مسائلی از

این قبیل، برخوردی چندپهلو بود. بدین معنا که وی از روش مرزی یونانی الهام می‌گرفت، ولی با دقت فراوان فقط آن دسته از راه‌حل‌ها را انتخاب می‌کرد که فهم آنها برای هنرورزان ساده و آسان بود.[۱۹] ظاهراً پیامی که او برای گفتن داشت این بود که هنگام استفاده از معادلات درجه سه، روش‌های مرزی مناسب‌ترین وسیله برای هنرورزان می‌باشند زیرا که هم دقیق هستند و هم به‌کار بردن آنها آسان است. بنابراین می‌توان از اشارهٔ خیام چنین نتیجه گرفت که وی با ابوالوفا هم‌عقیده بوده و به هنرورزان توصیه می‌کرده که از آلات و ادواتی که در روش‌های مرزی به‌کار گرفته می‌شده‌اند، استفاده نمایند.

از توضیحاتی که در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته (که آن نیز برای هنرورزان نوشته شده است) آمده، پی می‌بریم که معادلهٔ درجه سه مربوط به مثلث خیام در واقع به‌کمک یک آلت متحرک موسوم به «خط‌کش ـ مثلث» حل می‌شده. همچنین با توجه به اشارات پیشین خیام، می‌توان با اطمینان خاطر نتیجه گرفت که آن «اشخاصی» که وی آنها را مخاطب قرار داده و «با مقاطع مخروطی آشنایی نداشتند»، کسانی جز هنرورزان نبوده‌اند. منطق نیز قبول این فرض را حکم می‌کند که شخص محترمی که در آن مجلس سؤال را طرح کرده و خیام را بر آن داشته تا رساله‌ای در جواب او بنویسد، به احتمال بسیار یک معمار بوده است. بنابراین می‌توان آن گردهمایی را یکی از آن مجالس گفت‌وشنود دانست.

پس از این جلسه است که خیام برای پیدا کردن راه حل معادلهٔ درجه سوم از طریق مقاطع مخروطی دست به‌کار شده و جواب زیر را به دست می‌آورد (شکل ۹ الف).

۱۹. راه‌حل‌های یونانی که ابوالوفا آنها را به عاریت گرفته است، عبارت‌اند از روش‌های مذکور در کتاب مکانیک هرون اسکندرانی کتاب مأخوذات ارشمیدس و مجموعه‌های ریاضی پاپوس. برای اطلاعات بیش‌تر دربارهٔ روش‌های مرزی ریاضیات یونانی، رجوع کنید به تاریخ ریاضیات یونانی (*History of Greek Mathematics*) در ۲ ج (چ آکسفورد، ۱۹۶۵) و آثار ارشمیدس (*The Works of Archimedes*) نوشتهٔ ت. ل. هیث (T.L. Heath) چ نیویورک، ۱۹۲۱.



شکل ۹

الف) راه حل عمر خیام برای معادله درجه سوم از طریق مقاطع مخروطی

ب) ترسیم مثلث خیام با استفاده از روش مرزی، به شیوه‌ای که در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته آمده است.

نقطهٔ تقاطع هذلولی NDK (که مجانب‌های آن AC و EC می‌باشند) با نیمدایرهٔ DKB در نقطهٔ K.

ریاضیدانان از مقاطع مخروطی برای اثبات نظری یک قضیه استفاده می‌کردند ولی هیچ‌گاه آنها را برای اندازه‌گیری به‌کار نمی‌گرفتند. لیکن خیام هنرورزان را فی‌الفور به این کار ترغیب کرده و می‌گوید:

> وقتی که می‌گوییم مقدار (value) چیزی معلوم است، منظور ما کلانی (magnitude) آن نیست زیرا مقدار و کلانی دو مفهوم مختلف می‌باشند، بلکه منظور آن چیزی است که اقلیدس در کتاب هندسهٔ خود بیان کرده است، یعنی وقتی که بتوانیم چیزی به آن کلانی ترسیم کنیم.[۲۰]

برای تسهیل ترسیم عملی این مسئله، خیام یک راه حل واسطی نیز برای معادلهٔ درجه سه ارائه داده و از این فرض حرکت می‌کند که برخی از هنرورزان مانند مسّاحان با جداول مثلثاتی و نحوهٔ اندازه‌گیری زوایا آشنایی دارند، زیرا می‌گوید:

> هر کس که بخواهد این راه حل را در علم حساب پیدا کند، اگر به‌دقت بنگرد، چنین راهی را نخواهد یافت زیرا آنچه را که می‌توان از طریق مقاطع مخروطی تحصیل کرد، از طریق حساب نمی‌توان و اما اگر جوینده با یک اندازهٔ تقریبی راضی باشد، دیگر به عهدهٔ او است که در جدول اوتار المجسطی و یا در جدول جیب‌ها (سینوس‌ها) و عکس جیب‌ها (۱-cosine) که در رصدخانه‌های مهم موجودند، به جست‌وجو پردازد. در این‌صورت قوسی را در این جداول مشاهده خواهد کرد که عبارت است از نسبت ۶۰ (که برابر است با نصف قطر دایره) به جیب آن قوس. ما مقدار این قوس را به میزان حدوداً ۵۷ درجه پیدا کرده‌ایم که دایرهٔ آن ۳۶۰ درجه می‌باشد. جیب این قوس برابر با ۵۰ تکه و عکس جیب آن برابر با حدوداً ۲۷ تکه و یک‌سوم تکه، و جیب تمام (کسینوس) آن در حدود ۳۲ تکه و یک‌سوم می‌باشد. البته ممکن است که این مقادیر را دقیق‌تر محاسبه کرد تا میزان خطا ناچیزتر و غیر ملموس‌تر باشد.[۲۱]

طبیعتاً خیام می‌بایستی رسالهٔ خود را با آخرین اشاره، که ذکر آن قبلاً رفت، به اتمام برساند. لیکن وی بلافاصله با استفاده از مقاطع مخروطی یک راه حل دیگر ارائه می‌دهد. شاید احساس می‌کرده که معادلهٔ درجه سومی که قبلاً پیشنهاد کرده، کمی ناهنجار بوده است و از این رو سعی می‌کند تا نوع آراسته‌تری از آن را ارائه نماید (شکل ۹ ب). این راه حل سرراست‌تر است و از تقاطع هذلولی AR با نیمدایرهٔ ERAC در نقطهٔ R به‌دست می‌آید. کلیهٔ ضرایب معادلهٔ درجه سوم، که خیام ذکری از آنها به عمل

---

20. A.R. Amir Moéz, “A Paper of Omar Khayyam”, *op.cit.*

۲۱. رجوع کنید به رساله‌ای از خیام ترجمهٔ امیرمعز. طبق توصیهٔ خیام، زاویهٔ BAC (شکل ۸) را می‌توان از طریق محاسبات دقیق‌تر به میزان ۳۴ ۵۸ ۰۹ °۵۷ تعیین نمود. روابط مثلثاتی که وی به‌کار می‌برد عبارت‌اند از ۱ - cos BAC : ۱ :sin BAC = cos BAC

نمی‌آورد، برابر با واحد فرض می‌شده و معادلهٔ درجه سوم زیر حاصل می‌شود:[۲۲]

$$x^۳ + x^۲ + x = ۱$$

با توجه به نتایجی که تاکنون در پژوهش حاضر به‌دست آمده، می‌توان اکنون ادعا کرد که سؤالی که احتمالاً توسط یک معمار هنرورز در آن مجلس گفت‌وشنود مطرح شد، خیام را بر آن داشت تا رسالهٔ خود را به رشتهٔ تحریر درآورد و به عبارت دیگر موجب شد که وی هدیه‌ای پرارزش ارزانی علم جبر کند. خیام رئوس مطالب کتاب جبر خود را آنچنان دقیق مطرح می‌کند که گویی آنها را حاضر و آماده در ذهن داشته است. بدین جهت به نظر می‌رسد که تحریر کتاب جبر که باید در حدود سال ۱۰۷۴ صورت گرفته باشد، چندان وقت او را نگرفته است. به هر تقدیر، ملکشاه سلطان سلجوقی در سال ۱۰۷۳ خیام را به اصفهان دعوت کرده و مسئولیت رصدخانهٔ جدیدالتأسیس را بر عهدهٔ او گذارد. به شکرانهٔ کارهای ساختمانی که در آن زمان در مسجد جامع (و به احتمال قوی گنبد جنوبی) صورت می‌گرفتند، اصفهان به کانونی برای فعالیت‌های معماری تبدیل شده بود و مکانی مطلوب برای انعقاد مجالس گفت‌وشنود به‌شمار می‌رفت. بنابراین خیلی طبیعی به نظر می‌رسد که خیام، این ستارهٔ تابناک عالم ریاضی، که به‌تازگی رحل اقامت در اصفهان افکنده بود، به این جلسات دعوت شده باشد. از این رو باید رسالهٔ بدون عنوان خود را محتملاً کمی بعد از ۱۰۷۳، یعنی در اوایل سال ۱۰۷۴ نوشته باشد.[۲۳] بنابراین چندان بعید به نظر نمی‌رسد که آن سؤال کذایی از جانب معماری

۲۲. اگر ضلع کوچک‌تر مثلث یعنی AB را برابر با واحد و عمود BD را برابر با x فرض کنیم، معادلهٔ $x^۳ + ۲x^۲ = ۲$ به دست می‌آید.

۲۳. اولگ گرابار (Oleg Graber) در کتاب خود مسجد بزرگ اصفهان (*The Great Mosque of Isfahan*) (چاپ نیویورک و لندن ۱۹۹۰) به پیروی از مرحوم اریک شرودر (Eric Schoeder)، بر این عقیده است که خیام در پس نقشه‌هایی که منجر به آفرینش گنبد شمالی مسجد جامع اصفهان شده‌اند، بوده است (اولین نمونهٔ شناسایی‌شده از تزیینات هندسی در روی سطح خارجی گنبد). از آنجا که استفاده از پنج‌ضلعی‌ها و ستاره‌های پنج‌رأسی روی سطح خارجی گنبد، مستلزم احاطهٔ علمی به مثلثات کروی می‌باشد تا بتوان خطوط مستقیم طرح‌های دوبعدی را به خطوط منحنی تبدیل نمود، خیلی منطقی به نظر می‌رسد که خیام به احتمال قوی چنین ایده‌ای را مطرح کرده باشد زیرا او تسلط بسیار بر علوم ریاضی و اخترشناسی داشته و از قوهٔ تخیلی زیادی برخوردار بود. به یقین می‌توان حدس زد که خیام بین سال‌های ۱۰۷۴ و ۱۰۸۸ چندین بار در جلسات گفت‌وشنود شرکت داشته و در آنجا با معماری آشنا شده است. این ادعا که وی مبتکر و مبدع گنبد شمالی بوده است، به‌خصوص زمانی محتمل‌تر می‌شود

←

مطرح شده باشد که خود در آن زمان مسئولیت بنای یک ساختمان دیگر (احتمالاً گنبد جنوبی) را بر عهده داشته است، یعنی ابوالفتح ابن محمد خزانه‌دار.

چنین به نظر می‌رسد که خیام پس از نگارش رسالهٔ بدون عنوان خود، در یک مجلس گفت‌وشنود دیگری نیز یافته‌های خود را برای هنرورزان توضیح داده و راه‌های عملی برای حل معادلهٔ درجه سوم به کمک روش مرزی ارائه داده است. همین راه حل است که بعدها توسط یک مؤلف ناشناس در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته گزارش شده است. مؤلف مزبور علاوه بر این، چهار راه حل دیگر نیز برای این مسئله ذکر کرده است که همگی آنها راه حل‌های تقریبی با درجهٔ دقت‌های متفاوت بوده و در نتیجه جواب درستی به مسئلهٔ مورد نظر ما نمی‌دهند. حال این سؤال مطرح می‌شود که چرا هنرورزان با وجود اینکه راه حل درستی در اختیار داشتند، کماکان این راه حل‌های نادرست را به‌کار می‌گرفته‌اند؟ بررسی زیر کوششی است برای یافتن پاسخی به این سؤال.

یک رسالهٔ به زبان فارسی دربارهٔ گرهٔ چینی از مؤلفی ناشناس

رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته هیچ‌گاه به مثابه یک کتاب هندسی مورد توجه مورخان علوم قرار نگرفته است. من باب مثال وپکه (Woepcke) که بر اساس یک نسخهٔ موجود در پاریس، تحلیل جامعی از ترجمهٔ فارسی کتاب اعمال هندسی منتشر کرده ولی هیچ ذکری از رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته به عمل نیاورده است با وجود اینکه رسالهٔ مزبور پس از کتاب اعمال هندسی ابوالوفا در نسخهٔ پاریس آورده شده است. از طرف دیگر، برخی از

→ که گرابر از آن به عنوان یک امکان «غیر قابل اثبات، ولی در عین حال بسیار جالب» سخن می‌گوید و شگفت اینجا است که تناسب گنبد شمالی دقیقاً برابر است با نسبت مثلث خیام، یعنی اگر طول قطر بخش نمایان سطح را بر ارتفاع سطح نمایان تا رأس تقسیم کنیم، مقداری که به‌دست می‌آید برابر است با ۱۰۲۸ cm : ۶۶۶ cm = tang ۵۷° ۰۳ ۴۵. این اندازه‌گیری‌ها بر اساس عکس‌های فضایی توسط سازمان رصد صورت گرفته و در مقاله‌ای تحت عنوان «مسجد جامع اصفهان» در همایش عکسبرداری هوایی از آثار تاریخی (*Symposium on the Photogrammetric Survey of Ancient Monuments*) بازگو شده‌اند (آتن ۱۹۷۴). گنبد مزبور با تناسبات باشکوه و وقار و سلسله‌مراتب زیبای ساختاری و مقرنس‌های شکیل خود، بدون شک یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای معماری در جهان اسلام می‌باشد و اگر استدلالاتی که در فوق آورده شده‌اند، جامهٔ حقیقت به خود بپوشند، در آن‌صورت باید اذعان داشت که آنچه که ما در اینجا شاهد آن هستیم از جمله شاهکارهایی است که خیام، این ریاضیدان سرشار از استعداد و این شاعر خیال‌آفرین، به عالم معماری هدیه کرده است.

مورخان معماری ارزش زیادی برای بحث‌هایی که در این اثر دربارهٔ هندسهٔ تزیینی صورت گرفته، قایل شده‌اند.[۲۴] این رساله، مجموعه‌ای حاوی راه‌حل‌های هندسی برای طرح‌های مختلف گره چینی و برخی از آلات و ادوات مورد استفادهٔ هنرورزان است. لیکن یک بررسی دقیق از محتوای ریاضی آن، به‌ویژه در مقام مقایسه با کتاب اعمال هندسی، نشان می‌دهد که این رساله باید توسط هنرورزی نوشته شده باشد که فقط کمی با هندسه آشنایی داشته است و نه هندسه‌دانی که خود را با هنرهای تزیینی مشغول می‌داشته. به بیان مختصر و موجز، مؤلف ناشناس این رساله، دانش و مهارت ناچیزی در علم هندسه داشته و نحوه‌ای که برای ارائهٔ مطالب خود اتخاذ کرده است، عاری از نظم و انسجام و وضوح لازم می‌باشد، و اینها مشخصه‌هایی هستند که یک هندسه‌دان واقعی باید دارا باشد. مع‌الوصف باید گفت که این رساله تنها منبع مکتوب و موجود دربارهٔ عملکرد هندسی هنرورزان بوده و از این رو حاوی اطلاعات پرارزشی دربارهٔ هنر و معماری اسلامی است.

گزارش‌هایی که در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته آمده، نمایانگر این نکته است که مثلث کشف‌شده توسط خیام، واقعاً از سوی هنرورزان به صورت یک طرح تزیینی به‌کار گرفته می‌شده است. اشارهٔ مستقیم مؤلف ناشناس به مثلث خیام (صرف نظر از اینکه کشف آن را اشتباهاً به شخص دیگری نسبت داده است)، در این بخش از رساله آمده است:

> روابطی که در این تصویر موجودند، مربوط به مقاطع مخروطی می‌شوند. هدف عبارت است از ترسیم یک مثلث قائم‌الزاویه به طوری که مجموع ضلع عمود و ضلع کوتاه آن برابر باشد با طول وتر مثلث. ابن هیثم رساله‌ای دربارهٔ چگونگی ترسیم چنین مثلثی نوشته و راه حل آن را از طریق مقاطع مخروطی توضیح داده و معلوم کرده است که این مقاطع عبارت‌اند از یک هذلولی و یک سهمی.[۲۵]

---

۲۴. مثلاً مدحت بولاتوف به این رساله به چشم کتابی می‌نگرد که در آن مبانی اصلی هندسهٔ آذینی تشریح و پیشرفت‌های هندسهٔ کاربردی آن عصر منعکس شده‌اند. واسما شورباشی (Wasma'a K. Chorbachi) از این هم جلوتر رفته و در مقالهٔ خود برج بابل: قرینه‌سازی در طرح‌های اسلامی (*Tower of Babel: Beyond Symmetry in Islamic Design* چاپ ۱۹۸۹) ادعا می‌کند که نسبت به اشکال و چندضلعی‌های ساده‌ای که در نسخهٔ ابوالوفا آمده است، تصاویر رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته پیچیده‌تر بوده و این امر دلالت بر مقام والاتر این رساله می‌کند.

۲۵. ابن هیثم از فیزیکدانان و ریاضیدانان بزرگ به‌شمار می‌رود و بیش از ۱۸۰ رسالهٔ علمی نوشته است. عناوین این رساله‌ها به فهرست درآمده و در حال حاضر هفتاد تا از آنها موجود می‌باشند. با وجود اینکه ابن هیثم مقاطع مخروطی را به‌کرّات به‌کار برده است، مع‌الوصف در هیچ یک از آثار خود ذکری از
←

همان‌طور که قبلاً اشاره رفت، اولاً در رسالهٔ خیام صحبت از «یک هـذلولی و یک دایره» است که از تقاطع آنها جواب معادلهٔ درجهٔ سه به‌دست می‌آید و نه «یک هذلولی و یک سهمی». ثانیاً بر خلاف گفتهٔ مؤلف ناشناس، این خیام بود که رساله‌ای دربارهٔ ایـن مسئله نوشت و نه ابن هیثم (۱۰۴۰-۹۶۵). اگر مؤلف نـاشناس واقـعاً رسالهٔ خـیام را خوانده بود، مسلماً این‌چنین نقل‌قول‌های مغلوطی را نمی‌آورد. بنابراین منبع اطلاعاتی او باید مسموعات شفاهی بوده باشد، زیرا اگر دو نام «خیام» و «ابن هیثم» را به صورت نوشته دیده بود، هیچ‌گاه آنها را با همدیگر اشتباه نمی‌کرد. این دو نام فقط وقتی که شفاهاً گفته می‌شوند، شباهتی با هم دارند. پس نتیجه مـی‌گیریم کـه وی احـتمالاً در یکـی از مجالس گفت‌وشنود چیزهایی دربارهٔ مسئلهٔ مورد بحث ما شنیده و بـعدها مسـموعات خود را با اشتباهاتی که گفتیم به خاطر آورده است. به حکم منطق، آن شخصی که موقع بحث و فحص دربارهٔ رسالهٔ خیام در آن مجلس گـفت‌وشنود، راه حـل مسـئله و شـیوهٔ ترسیم آن را توضیح می‌داده، فردی ریاضیدان بوده است.

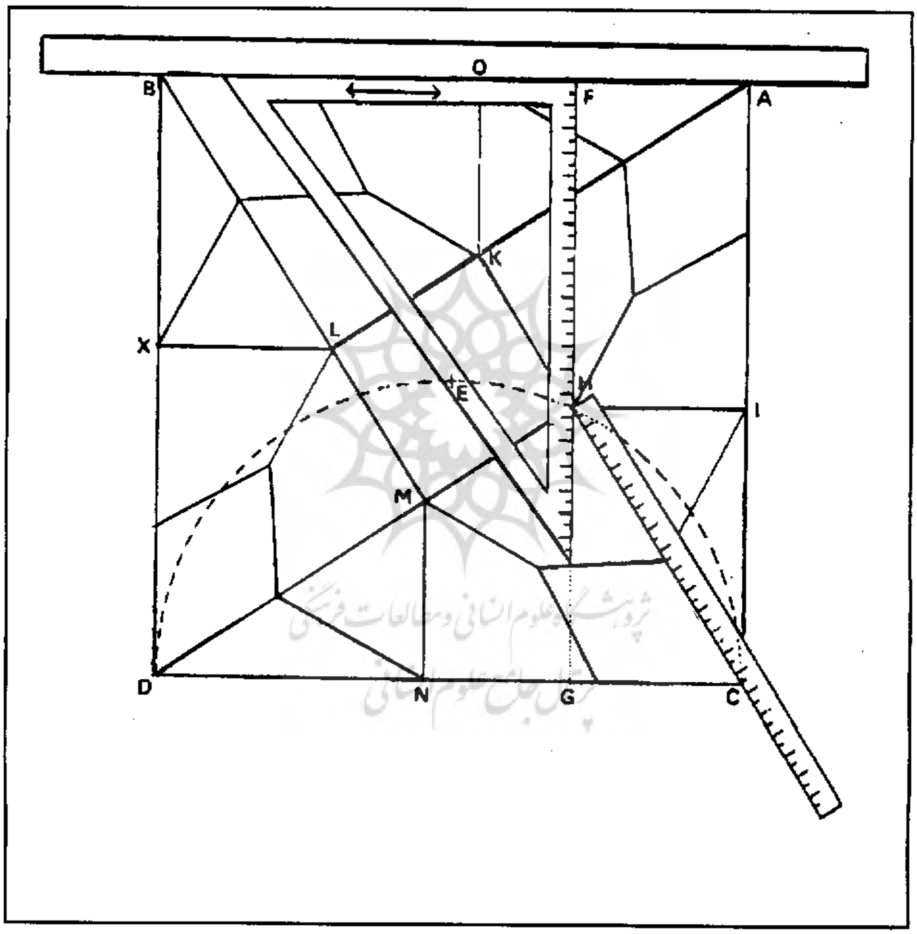
مؤلف ناشناس ما به همان سبک و سیاق نامرتب و ناآگاهانهٔ خود، اطلاعات دیگری نیز بر اساس مثلث خیام دربارهٔ طرح مورد نظر ارائه کرده و می‌گوید:

> ما می‌توانیم به کمک یک «خط‌کش ـ مثلث» به هدف خود برسیم و همان‌طور که قبلاً اشاره کرده‌ایم، هدف ما ترسیم چهار تصویر مخروطی است [منظور اشکال بادوامی است که وی در جای دیگری از آنها به عنوان تُرنج نام می‌برد] با دو زاویهٔ قائم، به طوری که یک چهارضلعی متساوی‌الاضلاع [یعنی یک مربع] را دربـر گیرند. این چهارضلعی‌های مخروطی [که همان اشکال بادامی AIHK، CHMN، BLKO و DMLX] باشند نمایانگر یک چهارگوشه [منظور مـربع است] بـوده (شکل ۱۰) و از آنجا که گوشهٔ H این چهار ضلعی [منظور مربع است] از دو خط عمود تشکیل یافته، پس KH و HD باید دو خط مستقیم باشند. لیکن مـثلث AKC یک مثلث قـائم‌الزاویـه و بـرابـر بـا مـثلث CHD است. ایـن مـثلث نـیز

←

مسئلهٔ مورد بحث ما نمی‌کند. یکی از رسائل او دربارهٔ عمودهای اخراج شده بر اضلاع مثلث از یک نقطه می‌باشد، لیکن وی در آنجا دربارهٔ مجموع فواصل یک نقطه در داخل مثلث از اضلاع آن، بحث می‌کند. برای کسب اطلاعات بیش‌تر دربارهٔ ابن هیثم رجوع کنید به کـتاب تـاریخ منابع مکـتوب عـربی (*Geschichte des arabischen Schriftums*) نوشتهٔ فؤاد سزگین هفت مجلد لیدن ۱۹۷۴.

قائم‌الزاویه است زیرا که محاط در نیمدایره می‌باشد. بنابراین، نقطهٔ H باید روی قوس CE قرار گیرد. چنانچه گوشهٔ F روی خط‌کش ما زاویه‌ای قائم بباشد، در آن‌صورت ضلع AB هم عمود و هم منطبق با ضلع AB [منظور AC است، یکی دیگر از اشتباهات ناشی از بی‌دقتی مؤلف] مربع خواهد بود... خداوند هر چیز را بهتر از همه می‌داند.



شکل ۱۰

شیوهٔ عملی برای ترسیم مثلث خیام

آنچه که مؤلف ناشناس به عنوان هدف مطرح می‌کند چیزی جز ترسیم یک طرح متشکل از چهار مثلث خیام نیست که محیط بر یک مربع مرکزی باشند، یعنی مثلث مورد

بحث ما. ولی آنچه که شرح می‌دهد، منتهی به اثبات ناکامل خواص این مثلث می‌شود. ظاهراً حافظهٔ مؤلف کمکی به وی برای رسیدن به هدف نکرده است. اگر شبه اثبات او را با روش اثباتی خیام مقایسه کنیم، به طور آزاردهنده‌ای روشن خواهد شد که مؤلف ناشناس فقط ادعای یک ریاضیدان را داشته است. خیام با یک تشکل و توالی منطقی قضایا را دنبال کرده و برای اینکه به نتیجه‌گیری لازم برسد، مطابق یک نقشهٔ قبلی به پیش می‌رود، در حالی‌که مؤلف ناشناس ظاهراً نه نقشه‌ای داشته که آن را دنبال کند و نه نتیجه‌ای در مدّ نظر گرفته که بخواهد به آن برسد. او با به‌کار بردن مفاهیم پیچیده به جای مفاهیم معمولی، در واقع تکبر عبث خود را به نمایش گذاشته است. البته فهم این مطلب مشکل نیست که چرا مؤلف ناشناس این‌چنین مغشوش بوده است. مبحث مقاطع مخروطی، موضوعی بس پیشرفته‌تر از آن بوده که هنرورزان قادر به درک آن باشند. ولی علی‌رغم تمام این ابهامات و دوپهلوگویی‌ها، باید اذعان داشت که توضیحات وی اطلاعات کافی در اختیار ما می‌گذارند تا بتوانیم آنچه راکه او قادر به دست آوردن نبوده است، تجدید بنا کنیم. من باب مثال آنجا که می‌گوید: «اگر گوشهٔ F، در روی خط‌کش زاویه‌ای قائم باشد...» (شکل ۱۰) اشاره به این دارد که اگر مثلث را در امتداد ضلع AB به حرکت درآوریم، نیمدایره را در نقطهٔ H قطع می‌کند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$FH + HG = AC = AB = CD$$

ولی از آنجا که این شرط برای همه مکان‌های نقطهٔ H صدق می‌کند، مؤلف ناشناس قادر نیست به چگونگی ترسیم طرح پی ببرد و در نتیجه فراموش می‌کند که تعیین مکان نقطهٔ H را روی نیمدایره مشروط بر این است که FH برابر باشد با HC. زیرا تنها در این‌صورت است که شرط مسئله یعنی $HC + HG = CD$ قبول شده و می‌توان مسئله را به یک روش مرزی تقلیل داده و مکان نقطهٔ H را در $HF = HC$ تعیین نمود.

خیام در رسالهٔ فوق‌الذکر خود می‌گوید: «آنهایی که با مقاطع مخروطی آشنایی ندارند، آلات و ادوات خاصی را به‌کار می‌برند». پس چنین استنباط می‌شود که «خط‌کش ـ مثلث» مورد بحث، آلت بسیار دقیقی برای ترسیم مثلث خیام بوده است. نقل قولی که در زیر آورده می‌شود، در واقع همان روش مرزی است که احتمالاً توسط خیام در اصفهان ارائه شده و بعد از یک مجلس گفت‌وشنود به مجلس دیگری نقل شده و بالاخره به آن مجلسی راه یافته که مؤلف ناشناس ما در آن حضور داشته است، یعنی به احتمال

قوی در قرن سیزدهم و در دیاربکر:

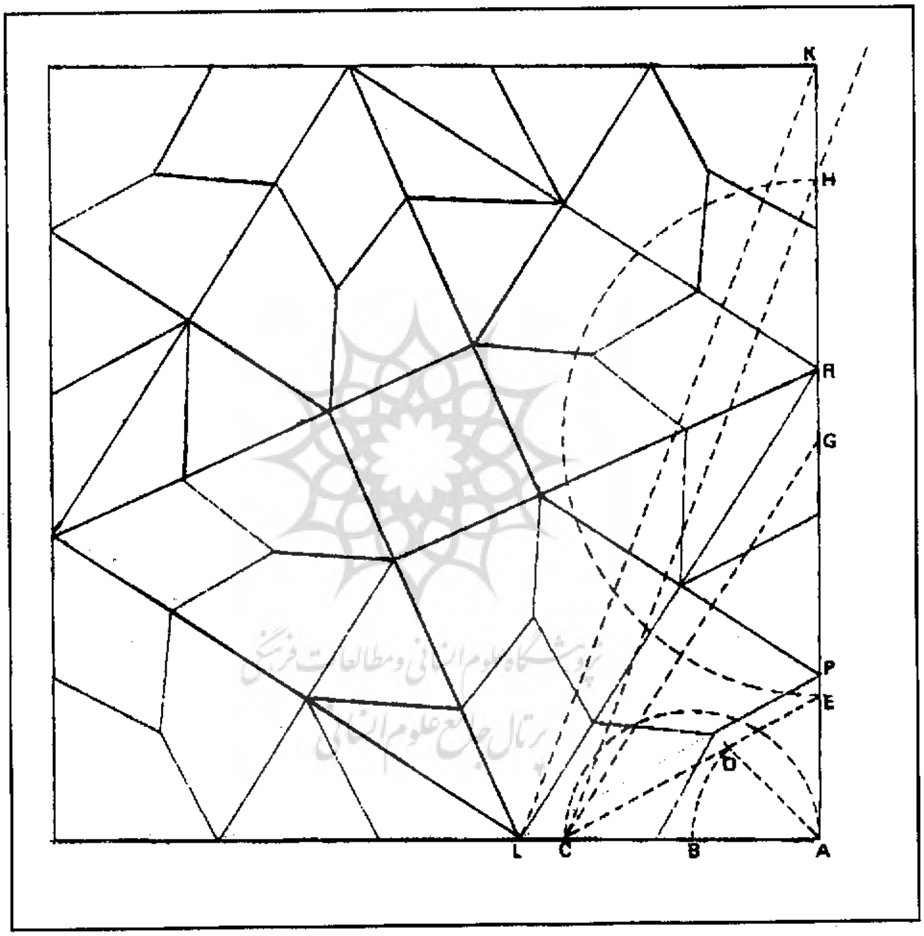
> نیمدایره‌ای را روی پاره‌خط AB رسم کن و لبهٔ مثلث را روی این خط بگذار. حال یک مثلث قائم‌الزاویه را که دارای مقیاسی روی ضلع عمودی باشد، آنچنان در امتداد لبهٔ قائم به حرکت درآور که مرتباً نیمدایره را در نقطهٔ H قطع کند. آنگاه با یک خط‌کش اضافی فاصله‌های HF و HC را اندازه گرفته و با یکدیگر مقایسه کن. این عملیات را آنقدر تکرار کن تا HC = HF شود. حال مکان نقطهٔ H را مشخص کرده و طرح را تکمیل کن.

مؤلف ناشناس ظاهراً با روش‌های مرزی که به گفتهٔ ابوالوفا ابزار کار بسیار مفیدی برای هنرورزان بود، آشنایی نداشته و در نتیجه قادر نبوده است از عهدهٔ مسائلی که حل آنها نیازمند مقاطع مخروطی است، برآید. البته ما نمی‌توانیم عدم اطلاع او را از این روش‌ها به همهٔ هنرورزان تعمیم دهیم. این واقعیت که مؤلف ناشناس راه حل خیام را احتمالاً ۱۵۰ سال پس از مرگ او در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته خود آورده است، دلالت بر این امر دارد که حداقل شمار معدودی از هنرورزان موشکاف آمادگی پیروی از رهنمودهای ریاضیدانان را داشته‌اند.

همان‌طور که اشاره رفت، مؤلف ناشناس چهار روش دیگر نیز برای ترسیم طرح مورد بحث معرفی می‌کند که سه تا از آنها مستقیماً در رابطه با این طرح می‌باشند. ولی هیچ‌جا ذکر نمی‌کند که روش‌های مزبور و همچنین راه حل خیام در واقع برای ایجاد آن طرح به‌کار می‌رفته است. این سکوت او بیانگر این واقعیت است که وی مبدع و مبتکر هیچ‌یک از این روش‌ها نبوده، بلکه فقط به نقل آنها که در اصل توسط هنرورزان پرداخته شده بودند، اقدام کرده است.

وی اولین نحوهٔ ترسیم را بدین‌وسیله آغاز می‌کند که برای طول مقدار دلخواه AD را در نظر گرفته (شکل ۱۱) و سپس نقطهٔ C را روی یک خط افقی در فاصلهٔ ۲AD مشخص می‌کند. آنگاه خط CD را امتداد می‌دهد تا در نقطهٔ E با عمود تقاطع پیدا کند. سپس نقطهٔ H را روی خط عمود در فاصلهٔ ۲AC از نقطهٔ E مشخص کرده و خط CH را ترسیم می‌کند. سرانجام از نقطهٔ K خطی به موازات CH می‌کشد تا مکان نقطهٔ L را تعیین کرده و کار ترسیم را به اتمام رساند. اما ذکر نمی‌کند که تمام این عملیات در واقع گام‌هایی هستند برای ایجاد طرح مورد بحث در روش فوق، زاویهٔ گردش مطابقت دارد با CG که قطر بادام اصلی یعنی LR با آن موازی می‌باشد. همچنین نصف زاویهٔ گردش

مطابق است با CE که قطر بادام ثانوی یعنی LP با آن موازی است. این طرز عمل یک راه تقریبی ولی موفقی برای مثلث خیام بوده و زاویهٔ چرخشی که از آن حاصل می‌شود، فقط ۲ر۰٪ با مقدار واقعی تفاوت دارد.

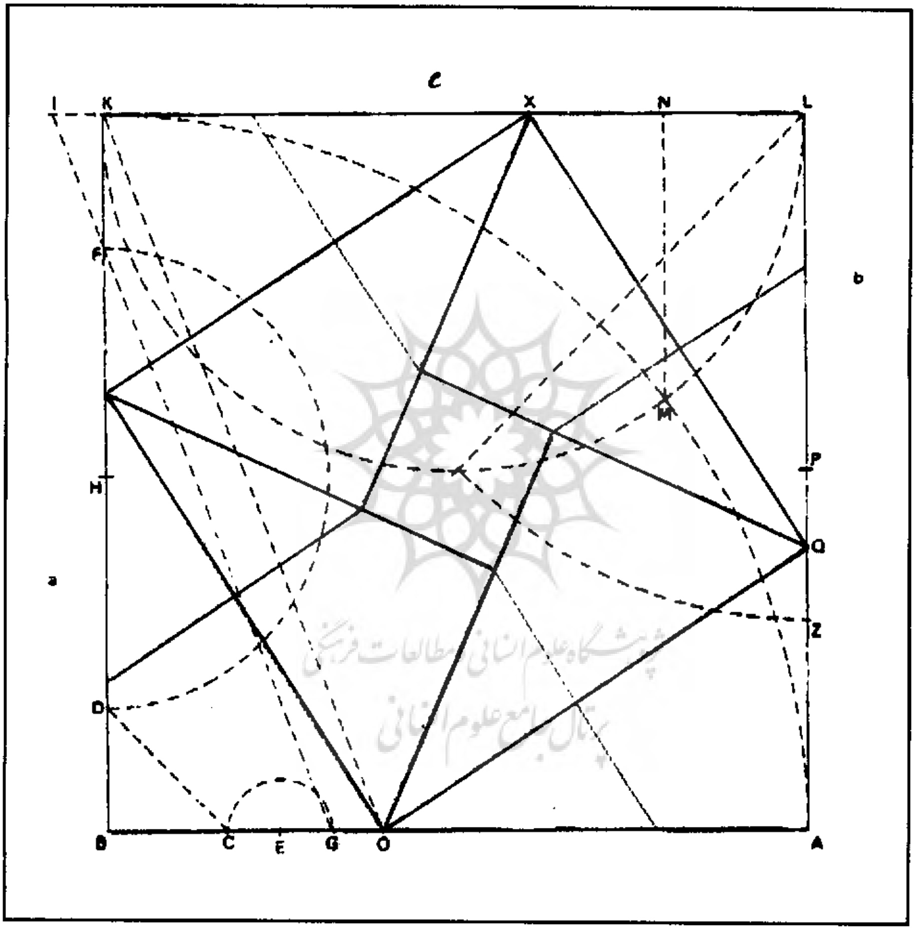


شکل ۱۱

یک روش تقریبی برای ترسیم مثلث خیام

روش دوم در واقع چیزی جز روش قبلی نمی‌باشد. در اینجا مؤلف ناشناس کار ترسیم را اینگونه آغاز می‌کند که برای ضلع مربع (شکل ۱۲ الف) مقدار دلخواه BC را

در نظر می‌گیرد. مابقی روال کار عیناً مانند روش قبلی است (شکل ۱۱). مـی‌بینیم کـه همین تفاوت ناچیز کافی بوده تا ذهن مؤلف مغشوش شده و خیال کند که با دو روش مختلف سر و کار دارد.



شکل ۱۲

سه روش تقریبی برای ترسیم مثلث خیام که در رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته ذکر شده‌اند.

در روش سوم، مکان نقطهٔ Q به مثابه حد میانگین حسابی بین LP (که نصف ضلع مربع است) و IZ (که نصف قطر مربع است) تعیین می‌شود (شکل ۱۲ الف). اختلاف

بین نتیجهٔ حاصل و مقدار واقعی، بالغ بر ۴ر۱٪ است. چنین خطایی برای یک هندسه‌دان بیش از آن است که بتواند آن را بپذیرد.

روش چهارم حتی به اختلاف بیش‌تری یعنی ۹ر۲٪ منجر می‌شود که حتی برای یک هنرورز و یا معمار هم (به‌خصوص اگر کمی موشکاف و وسواسی باشد) قابل پذیرش نیست (شکل ۱۲ ج). در اینجا طول LX از طریق تقاطع ربع دایرهٔ AMK و نیمدایرهٔ KML در نقطهٔ M به‌دست می‌آید. این عملیات سرانجام منتهی می‌شوند به ۳LX=۲KX و نشان می‌دهند که مبدع این روش استعداد بی‌نظیری داشته تا یک مطلب ساده را بیش از حد پیچیده و مغلق نماید. اگر این روش را به‌کار گیریم، به‌زحمت می‌توانیم اثری از مثلث خیام را در آن بیابیم و به عبارت دیگر غیر ممکن خواهد بود که بتوانیم ترکیب‌هایی از آن به‌وجود آوریم.

راه‌حل‌های تقریبی مذکور در فوق، دلالت بر این واقعیت دارند که چگونگی ترسیم طرح مورد بحث ما از طریق روش مرزی، بر هنرورزان نامعلوم بوده و یا مقبول آنان نبوده است. البته این امکان هم وجود دارد که آنها یا دسترسی به راه حل خیام نداشته و یا آن را به‌درستی درک نکرده بودند و شاید هم همان‌طور که مؤلف ناشناس خاطرنشان می‌سازد، برای روش‌های سنتی خود ارجحیت بیش‌تری قایل بوده و علاقه‌ای نداشتند که یک فن غیرمتعارف را نیز به‌کار گیرند هر چند هم که این فن ساده و به‌جا باشد. فراموش نکنیم که بیش‌تر ریاضیدانان مسلمان، هندسهٔ متحرک را غیر قابل قبول تلقی می‌کردند چه رسد به هنرورزان محافظه‌کار. دلیل این برخورد هر چه می‌خواهد باشد، نتیجه‌ای که ما می‌توانیم بگیریم این است که گرچه مجالس گفت‌وشنود از نقطه‌نظر نقل و انتقال شفاهی علم و دانش محمل مناسبی برای هنرورزان بودند، ولی نقش چندانی در پیشبرد افکار و ایده‌های نوین بازی نمی‌کردند زیرا هنرورزان همواره پذیرای رهنمودهای ریاضیدانان نبوده (البته بهتر است بگوییم روشنفکران، زیرا اوضاع و احوال از آن زمان تاکنون چندان فرقی نکرده است). با توجه به این نکته می‌توان فهمید که چرا هندسه‌دان عثمانی آن‌چنان از هنرورزان عهد خود ناراضی بوده است.

بخش دوم ــ خیام و مسجد جامع اصفهان

در انتهای شمالی محور اصلی مسجد جامع (مسجد جمعه) اصفهان، گنبد زیبای ترکان

خاتون قرار دارد که در سال ۴۸۱ هق (۸۹–۱۰۸۸) بنا گردیده و تالی گنبد باشکوه نظام‌الملک است که کمی زودتر از آن در قسمت جنوبی ساخته شده است. گرچه این گنبد از نظر اندازه نسبتاً کوچک و از لحاظ مصالح ساختمانی که در آن به‌کار رفته، بنایی ساده به‌شمار می‌آید، ولی به نظر اریک شرودر، مورخ هنر، در ساختمان آن نبوغ و سنت به‌گونه‌ای زیباتر و فاخرتر از بسیاری از گنبدهای مشهور دیگر، درهم آمیخته شده‌اند.[۲۶] هویت طراح این بنای جالب، معمایی است که فکر بسیاری از مورخان معماری را به خود مشغول داشته است.

درجهٔ کمال گنبد شمالی، این فکر را به خاطر اولگ گرابر خطور داده است که می‌بایستی در اصفهان آن دوران، طراح فوق‌العاده خلاقی وجود داشته باشد.[۲۷] وی استدلال شرودر را مبنی بر اینکه ابعاد گنبد مزبور از تقسیم طلایی مشتق شده‌اند، ذکر کرده و سپس نتیجه می‌گیرد: از آنجا که خیام شاعر و ریاضیدان، درست در همان دوران خواص پنج‌ضلعی را شناسایی نموده است. پس نامبرده می‌بایستی طراح گنبد مورد نظر بوده باشد.[۲۸] لیکن استنتاج شرودر، مبتنی بر یک اطلاع نادقیق است زیرا نتایج اندازه‌گیری‌های دقیق ابعاد گنبد شمالی بر این دلالت دارند که تناسب‌های وی مقادیر تقریبی می‌باشند.[۲۹] از این گذشته، خیام با وجود اطلاع از خواص پنج‌ضلعی، ذکری از

۲۶. ← اریک شرودر، «معماری در دوران سلجوقیان» در کتاب، *A Survey of Persian Art* تألیف آرتر آپهم پوپ.

۲۷. اولگ گرابار: «مسجد بزرگ اصفهان» (The Great Mosque of Isfahan)، نیویورک، لندن، ۱۹۹۰، ۶۵–۶۴.

۲۸. شرودر هیچ‌گاه دلایل خود را منشر نکرد. رجوع کنید به گرابار، ۸۵ و زیرنویس ۵.

۲۹. به گفتهٔ شرودر ارتفاع داخلی گنبدخانه دو برابر قاعدهٔ آن می‌باشد، لیکن اگر ابعاد واقعی را در نظر بگیریم، در آن‌صورت خواهیم داشت: ۱۹٫۲۷m : ۹٫۹۰m = ۱٫۹۴۶ (شکل ۵). شرودر ادعا می‌کند آن خطی که آغاز منطقهٔ انتقالی را تشکیل می‌دهد، کل ارتفاع را آن‌چنان به دو بخش تقسیم می‌کند که نسبت آنها برابر تقسیم طلایی یعنی ۱٫۶۱۸ می‌باشد، ولی می‌بینیم که حاصل تقسیم ۱۲٫۰۴m :۱۹٫۲۷m برابر است با ۱٫۶۰۱. وی اضافه می‌کند که نسبت ارتفاعات طاق‌های اصلی طبقهٔ بالا به طبقهٔ پایین نیز مبتنی بر تقسیم طلایی هستند، در حالی‌که مشاهده می‌کنیم که ۱۰٫۸۱m : ۶٫۶۰m = ۱٫۶۳۸ می‌باشد.

آنها در آثار خود نکرده است.[۳۰]

البته این اشکالات بدین معنا نیستند که نظریهٔ شرودر نادرست است. بسیاری از منابع اسلامی اشاره به نشست و برخاست‌های خاصی می‌کند که بین هنرورزان و ریاضیدانان مرسوم بوده و به دیگر سخن همکاری‌های مداومی بین آنها صورت می‌گرفته است. من از این پس به علت نیافتن واژهٔ بهتری، از این نشست و برخاست‌ها به عنوان گفت‌وشنودها (conversazioni) نام خواهم برد. طرح‌ها و نمونه‌های تزیینی که مبتنی بر معادلات درجه سه و یا مقاطع مخروطی می‌باشند، شاهد و گواه دیگری بر معاشرت و مصاحبت این دو گروه هستند زیرا که این‌گونه ابزار و لوازم نیرومند طراحی، در آن زمان تنها در اختیار ریاضیدانان بودند. به اعتقاد رناتا هولود (Renata Holod) لازمهٔ توضیح و تبیین جنبه‌های زیباشناختی و ساختاری و نوآوری‌های فضایی در مراکز مهم اسلامی، وقوف کامل بر تاریخ فنون مهندسی می‌باشد.[۳۱] آنچه منظور نامبرده است، بر پاشنهٔ یک واژهٔ حساس یعنی لغت مهندس (engineer) می‌چرخد که امروزه در زبان‌های عربی، فارسی و ترکی به‌کار می‌رود. معنای اصلی این واژه، «هندسه‌دان» و یا «ریاضیدان» به معنای وسیع کلمه می‌باشد. مورخان امروزی معمولاً ارجاعاتی را که در ارتباط با فعالیت‌های ساختمانی به واژهٔ «هندسه‌دان‌ها» می‌شود، همچون اشاراتی به مهندسین تلقی می‌کنند، در حالی‌که معنای اصلی این لغت، دقیق‌تر از این برداشت می‌باشد. من بر این باورم که لغت هندسه‌دان زمانی معنای "engineer" به خود گرفت که ریاضیدانان بیش از پیش خود را از طریق گردهمایی‌های گفت‌وشنودی با فن معماری مشغول کردند.

۳۰. در رابطه با خواص پنج‌ضلعی و ارتباط آن با تقسیم طلایی، چنین به‌نظر می‌آید که منظور شرودر کتاب خیام به نام شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس است که در سال ۱۰۷۷ نوشته شده. در این کتاب خیام اعداد اصم را بر مبنای دنباله‌های بی‌نهایت تعریف کرده و می‌گوید مقادیری وجود دارند که آنها را نام نمی‌توان از طریق تقسیم به هیچ‌گونه واحدی تبدیل کرد. برای نمونه، وی از ۵ از و ۱۰ می‌برد. لیکن این که بگذریم، هیچ‌گونه اشارهٔ خاص دیگری به پنج‌ضلعی و یا نسبت حد غایی و میانگین در این کتاب نمی‌یابیم. رجوع کنید به «بحث‌هایی دربارهٔ مشکلات اقلیدس» (Discussions of Difficulties in Euclid)، نوشتهٔ علیرضا امیرمعز در مجلهٔ *Scripta Mathematica* ش ۲۴، ۱۹۵۹، ص‌ص ۳۰۳-۲۷۵.

31. Renata Holod, "Text, Plan and Building: On the Transmission of Architectural Knowledge", in *Theories and Principles of Design in the Architecture of Islamic Societies*, ed. M. Sevcenko (Cambridge, Mass., 1988), 1-2, 11 n. 4.

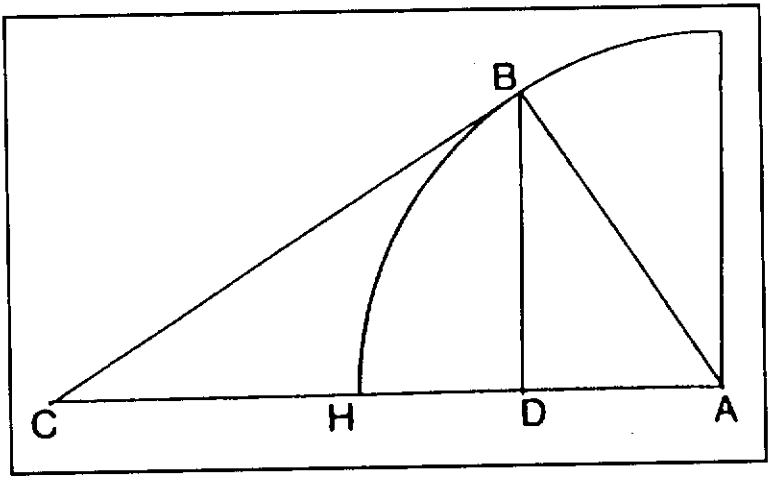
استنادات شرودر به طور کلی جالب توجه به‌نظر می‌آیند اما قابل اثبات نیستند. لیکن یک رسالهٔ بدون عنوان از خیام، که برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ منتشر گردیده و دربارهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه که او کشف کرده است، سخن می‌گوید، می‌تواند مقولهٔ مورد بحث ما را روشن سازد. من پس از توضیح و تحلیل خواص این مثلث و تناسبات موجود در ساختمان گنبدخانهٔ شمالی، مجدداً به این مطلب بازخواهم گشت که آیا خیام طراح گنبد زیربنا بوده است یا خیر.

مثلث عمر خیام

خیام در این رسالهٔ بدون عنوان، مسئلهٔ زیر را مطرح می‌سازد:

> ربع دایره‌ای راکه مرکزش A می‌باشد طوری در نقطهٔ B تقسیم کن که چنانچه BD به صورت عمودی بر شعاع AH رسم شود، نسبت AH : BD برابر باشد با نسبت AD : DH (شکل ۱۳).[۳۲]

32. Ali.R. Amir-Moéz, "A Paper of Omar Khayyam", *Scripta Mathematica* 26 (1963): 323-37.



شکل ۱۳

خیام ابتدا می‌کوشد که این مسئله را از طریق مقاطع مخروطی حل کند، ولی بلافاصله این کار را به عنوان تمرین، بر عهدهٔ شاگرد می‌گذارد. آنگاه برای خوانندگانی که از مقاطع مخروطی چندان اطلاعی ندارند، راه حل دیگری را پیشنهاد کرده و برای این منظور مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به مثابه مثلثی تعریف می‌کند که وتر آن برابر با مجموع ضلع کوچک‌تر و خط عمود بر وتر باشد ($AC = AB + BD$) و سپس ثابت می‌کند که $BC = AB + AD$. آنگاه AD را برابر مقدار دلخواه ۱۰ و BD را برابر x فرض کرده و مسئله را به معادلهٔ درجه سوم $x^۳ + ۲۰۰x = ۲۰x^۲ + ۲۰۰۰$ تبدیل می‌کند.[۳۳]

خیام پس از حل معادلهٔ مزبور از طریق مقاطع مخروطی، راه حل تقریبی ولی عملی دیگری ارائه می‌دهد. وی با استفاده از جداول نجومی و حساب شصتگانی زاویهٔ BAC را در حدود ۵۷ درجه تخمین زده و سپس سینوس و کسینوس آن را به میزان ۰٫۸۳۳ و ۰٫۵۴۴ تعیین می‌کند. همچنین مقدار سینوس معکوس این زاویه یعنی عبارت $\text{vers } BAC = ۱ - \cos BAC$ را به مقدار ۰٫۴۴۵ محاسبه کرده و ارائه می‌دهد. حال

33. Amir-Moéz, "A Paper...", 325-28, fig. 4.
این معادله کمی ناهنجار است؛ اگر $x = ۱۰y$ باشد، در آن‌صورت خواهیم داشت $y^۳ + ۲y = ۲y^۲ + y$ که البته شکل بهتری است با تغییر متغیر می‌توان معادلهٔ فوق را به معادلهٔ $x^۳ + x^۲ + x = ۱$ و یا $x^۳ + ۲x^۲ = ۲$ تبدیل کرد.

چنانچه مقادیر فوق را با استفاده از ابزار جدید و فرض اینکه طول AC برابر واحد باشد، محاسبه نماییم. در آن‌صورت میزان زاویهٔ BAC و مقادیر BC و AB و BD به شرح زیر خواهند بود:

BAC = ۵۷°۳ ۵۳٫۵۶۵

BC = ۰٫۸۳۹۲۸۶۸

AB = ۰٫۵۴۳۶۸۹۰

BD = ۰٫۴۵۶۳۱۱۰

مقادیر تقریبی که خیام برای این کمیات تعیین کرده است، به‌ترتیب فقط ۷ر۰٪، ۱ر۰٪ و ۲ر۰٪ با مقادیری که ما با دقت تعیین نموده‌ایم، اختلاف دارند.

یک راه حل دیگر برای مثلث خیام را در نوشته‌ای مشاهده می‌کنیم که پس از او به زبان فارسی و دربارهٔ هندسهٔ تزیینی نوشته شده و مؤلف آن نامعلوم است. عنوان این نوشته «دربارهٔ پیوستگی اشکال متشابه یا متقارن» *(On Interlocking Similar or Corresponding Figures)* می‌باشد. این کتاب ظاهراً مجموعه‌ای است که توسط یکی از منشیان از جلسات گفت‌وشنود جمع‌آوری شده است.[۳۴] وی تعریف مثلث خیام را در این کتاب دقیقاً تکرار کرده ولی همان‌طوری که قبلاً اشاره شد به غلط آن را به ابن هیثم نسبت می‌دهد.[۳۵] راه‌حلی را که نویسندهٔ این اثر به طور ناکامل و مغشوش ارائه می‌کند،

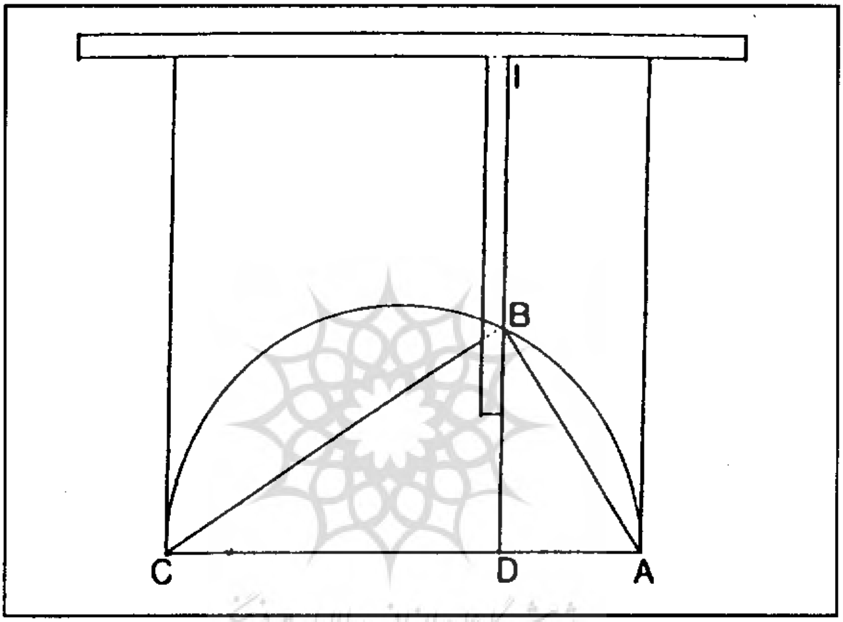
---

۳۴. این ارزیابی بر اساس مقالهٔ «دربارهٔ پیوستگی اشکال متشابه یا متقارن و طرح‌های تزیینی معادلات درجه سه» نوشتهٔ اوزدورال می‌باشد:
"On Interlocking Similar or Corresponding Figures and Ornamental Patterns of Cubic Equations", *Muqarnas* 13 (1996): 191-211.

۳۵. اوزدورال: «دربارهٔ پیوستگی اشکال متساوی یا متقارن و طرح‌های تزیینی» ص ۱۹۷. ابن هیثم بیش از ۱۸۰ رساله نوشته است. برای اطلاع از فهرست عنوان‌های این رسالات رجوع کنید به فرهنگ زندگینامهٔ علمی (*The Dictionary of Scientific Biography*) تحت عنوان «ابن هیثم» و همچنین به کتاب تاریخ منابع و مآخذ (*Geschichte des arabischen Schriftums*) اثر فواد سزگین (Fuad Sezgin)، ج ۷ (لیدن، ۱۹۶۷) ص‌ص ۵:۳۶۵ تا ۳۷۴ و ۶:۲۵۴ تا ۲۶۱. در حدود ۷۰ اثر از ابن هیثم در حال حاضر در دست هستند، ولی هیچ‌کدام مطلبی دربارهٔ این مسئلهٔ به‌خصوص دربر ندارند. نجیب اوغلو معتقد است که ابن هیثم احتمالاً خود را با این مسئله در یک رسالهٔ جداگانه مشغول نداشته، بلکه آن را در پایان کتاب خود موسوم به کتاب الابنیه و العقود که اینک در دست نیست، آورده است (رجوع کنید به رسالهٔ طومار توپقاپو نوشتهٔ نجیب اوغلو، ص ۱۷۸). از آنجا که رسالهٔ دربارهٔ پیوستگی اشکال متساوی یا متقارن و طرح‌های تزیینی با تأکید ذکر می‌کند که این مثلث موضوع یک مقاله بوده است، من بر این اعتقاد هستم که نسبت دادن مثلث مزبور به ابن هیثم نادرست است.

می‌توان به شرح زیر بیان نمود (شکل ۱۴):

روی ضلع AC یک مربع و یک نیمدایره ترسیم کن. حال با کمک یک خط‌کش که روی ضلع مقابل AC قرار می‌دهی، طول‌های AB و BI را برای موضع‌های مختلف نقطهٔ B اندازه بگیر. چنانچه AB = BI باشد، در آن‌صورت حکم مثلث خیام، یعنی AB + BD = AC صادق خواهد بود.



شکل ۱۴

راه‌حل مزبور شیوه و عملکردی است که می‌توان آن را معادل مکانیکی معادلهٔ درجهٔ سوم [خیام] خواند. در ریاضیات یونانی و اسلامی، برای وصول به مقاصد عملی و حل تقریبی یک مسئله گاهگاه چنین روشی یعنی آلات و ادوات اندازه‌گیری به‌کار گرفته می‌شد، که بعضی بسیار تخصصی بودند. به‌کارگرفتن چنین روشی برای حصول به یک نتیجهٔ عملی که از لحاظ نظری نیز درست باشد، نقش ریاضیدانان را در هنر معماری اسلامی نمایان می‌سازد. زیبایی و ظرافت این روش حاکی از این است که مبدع و مبتکر آن می‌بایستی خود خیام بوده باشد.

رسالهٔ بدون عنوان خیام به‌گونه‌ای غیر معمول در آثار وی جنبه‌های نظری و عملی این روش را تا بدان درجه رعایت می‌کند که این تأثیر را در ذهن باقی می‌گذارد که گویا خیام در این رساله هم مردمان اهل فن و هم ریاضیدانان را مخاطب قرار داده است. متن باب مثال در آنجا آمده است:

> مثلثی که خواص آن ذکر شد، می‌تواند در رابطه با مسائلی شبیه این مسئله، مورد استفادهٔ فراوان قرار گیرد. علاوه بر این، مثلث مزبور ویژگی‌های دیگری نیز دارد که ما برخی از آنها را ذکر می‌کنیم تا کسانی که این نوشتار را مطالعه می‌کنند، بتوانند از آنها در موارد مشابه استفاده نمایند.[۳۶]

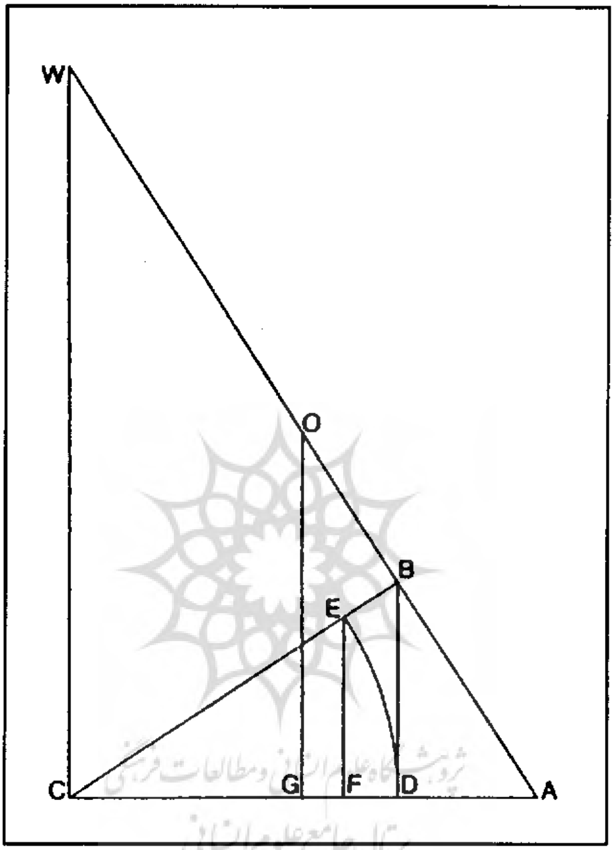
حال می‌توان نتیجه گرفت که خواص مسئلهٔ مورد بحث خیام، احتمالاً در ارتباط با سؤالی بوده است که در یکی از جلسات مباحثه مطرح شده و خیام را بر آن داشته تا این رساله را به رشتهٔ تحریر درآورد. لیکن این امر که مثلث کشف‌شده توسط خیام، بعدها پایه و اساس یک طرح تزیینی قرار گرفته است، دلالت بر این دارد که چنین جلسه‌ای می‌بایستی یکی از همان گردهمایی های گفت‌وشنود بوده باشد و افرادی که خیام آنها را مخاطب خود قرار داده است، کسانی جز هنرورزان نبوده‌اند. چنانچه «مسائل مشابهی» که خیام از آنها نام می‌برد، طرح‌های تزیینی مبتنی بر این مثلث بوده باشند، در آن‌صورت می‌بایستی «خواص دیگری» که وی به آنها اشاره می‌کند، خواصی باشند که هیچ‌گونه ارتباطی با هنرهای تزیینی ندارند. برای پی بردن به خواصی که وی ذکری از آنها به عمل نیاورده است، باید مثلث خیام را با توجه به مطالب کلی رسالهٔ مزبور، یعنی تناسب‌ها و میانگین‌ها مورد تدقیق قرار داد.

تحلیل این مثلث بر اساس میانگین‌های هندسی، حسابی و هارمونیک، یعنی دستگاه‌های تناسباتی که در ریاضیات یونانی و اسلامی مورد استفادهٔ بسیار بوده‌اند، کیفیت‌های غیر قابل انتظاری را نمایان می‌سازد. برای این منظور، مثلث ABC خیام را طوری ترسیم می‌کنیم که عمود BD، وتر AC را به دو قطعهٔ AD و CD تقسیم نماید (شکل ۱۵). طبق خواص کلی مثلث‌های قائم‌الزاویه، دو ضلع AB و BC میانگین هندسی وتر و دو قطعهٔ مزبور می‌باشند. به عبارت دیگر

$$AC : AB : : AD$$

۳۶. امیر معز: «یک مقاله از عمر خیام»، ص ۳۲۶

AC : BC : : CD



شکل ۱۵

یکی از ویژگی‌های مختص به مثلث خیام این است که در این مثلث نسبت قطعهٔ طولانی‌تر به ضلع کوتاه‌تر، برابر است با نسبت مجموع وتر و قطعهٔ کوچک‌تر به وتر، به عبارت دیگر

CD : AB : : (AC + AD) : AC

حال ضلع AB این مثلث را ادامه می‌دهیم تا عمودی را که در نقطهٔ C بر وتر AC رسم کرده‌ایم، در نقطهٔ W قطع کند. آنگاه از نقطهٔ G که در وسط این وتر قرار دارد، عمود GO

را ترسیم می‌کنیم. در این‌صورت GO برابر با نصف CW و در عین حال میانگین حسابی وتر و ضلع کوتاه‌تر مثلث خواهد بود. یعنی

$$GO = \frac{۱}{۲}CW = \frac{۱}{۲}(AB + AC)$$

نسبت وتر به میانگین حسابی، مانند نسبت مجموع وتر و قطعهٔ کوچک‌تر، به وتر می‌باشد:

$$AC : GO : : (AC + AC) : AC$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$AD : GO : : CD : AB$$

بدین ترتیب طبق تعریف، قطعهٔ بزرگ‌تر یعنی CD میانگین هارمونیک وتر و ضلع کوتاه‌تر می‌باشد، یعنی

$$(AC - CD) : AC : : (AD - AB) : AB$$

طبق فرضیهٔ اعداد، هر نسبت چهارجمله‌ای، از میانگین‌های حسابی و هارمونیک بین دو عدد تشکیل می‌شود. برای نمونه یک مثال ساده: میانگین حسابی ۱۲ و ۶ عدد ۹ می‌باشد و میانگین هارمونیک آنها عدد ۸. در نتیجه خواهیم داشت ۶ : ۸ : : ۹ : ۱۲.

در مثلث خیام (علی‌رغم مقادیر اصم) GO میانگین حسابی و CD میانگین هارمونیک دو ضلع بزرگ بوده و همان‌گونه که در بالا مشاهده شد، با یکدیگر طبق رابطهٔ زیر مربوط هستند:

$$AC : GO : : CD : AB$$

یامبلیخوس (Iamblichus) می‌گوید تناسبی که از میانگین‌های حسابی و هارمونیک دو عدد ترکیب شده باشد، «نسبت موسیقایی» (musical proportion) نام دارد و کامل‌ترین نسبت‌ها می‌باشد. گفته می‌شود که بابلی‌ها این تناسب را کشف کرده و فیثاغورث آن را به یونان برده است. از زمانی که ریاضیات اسلامی فرضیهٔ یونانی نسبت‌ها و میانگین‌ها را پذیرا شد، میانگین هارمونیک نقش مهمی در نظریهٔ موسیقی اسلامی بازی نموده است.

نسبت موسیقایی مقادیر اصم، یکی از خواص بسیار جالب مثلث خیام می‌باشد، ولی آیا او خود به این امر واقف بوده است؟ پاسخ به این سؤال می‌تواند احتمالاً در بخش سوم تفسیر خیام بر اقلیدس نهفته باشد. چرا که خیام پس از بحث دربارهٔ تناسبات

مرکب، استدلال می‌کند که یک نسبت اصم که از طریق هندسی به‌دست آمده باشد، فقط زمانی قابل درک است که کمیات اصم را به مثابه اعداد بپذیریم. وی با انجام این کار، در واقع اولین ریاضیدانی است که کمیات اصم را به حوزهٔ اعداد وارد کرده است. خیام سپس به توضیح دربارهٔ چگونگی استفاده از نسبت‌ها در موسیقی پرداخته و می‌گوید:

> علم موسیقی بر پایهٔ ترکیب نسبت‌ها استوار است. لیکن نسبت‌هایی که در این علم به‌کار برده می‌شوند، نسبت‌های عددی می‌باشند و نه هندسی. تجزیهٔ نسبت‌ها در موسیقی، در واقع نوعی ترکیب به‌شمار می‌آید و ما درک این نکته را به عهدهٔ هوش و ذکاوت نافذ خواننده واگذار می‌کنیم تا اینکه خود هنگام بحث دربارهٔ مشکلات کتاب موسیقی و علم اعداد، نکاتی در این‌باره ذکر کنیم. ولی [دیگران] می‌کویند: «علم موسیقی را هیچ نیازی به هندسه نیست و می‌توان آن را بدون توجه به هندسه آموخت، زیرا علم موسیقی بر هندسه قدمت دارد و در نتیجه هیچ‌گونه رابطه‌ای بین آنها موجود نیست». لیکن... باید دانست که علم اعداد و علم هندسه، دانش‌هایی هستند که هیچ‌کدام را بر دیگری تقدم زمانی نیست.[۳۷]

ظاهراً علت اینکه خیام بحث تناسبات موسیقی را به میان می‌آورد، این است که تأکید نماید که نسبت‌های اصم در علم موسیقی نیز نقشی بازی می‌کنند، و چنین به‌نظر می‌آید که او خود تصورات روشنی در این زمنیه دارد و از این رو درک این مطلب را به عهدهٔ خواننده وامی‌گذارد. شاید تصور این نکته زیاد بعید نباشد که اشارهٔ خیام در رسالهٔ بدون عنوان خود، احتمالاً مربوط به تناسب‌های موجود در موسیقی است که از مقادیر اصم تشکیل می‌شوند. به هر تقدیر، مثلث خیام با تناسبات فراوان و هماهنگی که دارد، به شکل بارزی به مثابه یک ابزار مفید برای کاربردهای معماری نمایان می‌شود.

---

۳۷. جلال‌الدین همایی، خیامی‌نامه، تهران ۱۳۴۶ ص ۲۱۸ ــ برای درک بهتری از کمیات اصم ــ که ریاضیدانان یونانی با آنها از طریق هندسه آشنایی داشتند ــ خیام این کمیات را بر اساس کسرهای مسلسل نامحدود تعریف می‌کند. تعریف آرخیتاس از میانگین هارمونیک پاسخ به‌جایی به تجزیهٔ نسبت‌ها می‌دهد. اما از اینکه بگذریم، من هنوز دقیقاً متوجه منظور خیام نشده‌ام آنجا که می‌گوید درک این مطلب را به عهدهٔ هوش نافذ خواننده می‌گذارم. تحقیقی دربارهٔ تئوری موسیقی اسلامی می‌تواند احتمالاً منتج به نتایج دلخواه در این زمینه شود.

گنبدخانهٔ شمالی مسجد جامع اصفهان

فرضیهٔ تناسب‌ها، در معماری آن‌چنان مستند نیستند که در ریاضیات می‌باشند، و منابع و مأخذ وسیعی که در این زمینه وجود دارند، به طور کلی مبتنی بر مشاهدات و یا اعتقادات شخصی دانشمندان دوران ما هستند. سستی شواهد و قراینی که اکنون در ارتباط با اصول واقعی طراحی در دست‌اند، دلالت بر این دارند که این فرضیه‌ها بر اساس تجزیه و تحلیل بناهایی تکوین یافته‌اند که احتمالاً هیچ‌کدام از آنها نه با دقت لازم ساخته شده و نه به گونهٔ کافی و وافی مساحی شده‌اند. در نتیجه فرضیه‌های مزبور حتی در رابطه با یک بنای مشخص نیز با یکدیگر در تضادند. وجود چنین جوّ نامطمئنی در این زمینه، به ما هشدار می‌دهد که موقع تجزیه و تحلیل گنبدخانهٔ شمالی نهایت دقت را به‌کار بندیم. از این رو قبل از بررسی ابعاد این بنا می‌بایستی درستی و صحت اندازه‌گیری‌های موجود و میزان دقت در ساختمان این بنا را مورد توجه قرار داد.

سازمان نقشه‌برداری رصد (Rassad Survey Company) در تهران، نقشهٔ فتوگرامتری مسجد جامع اصفهان را منتشر ساخته است. تهیه‌کنندگان آن توانسته‌اند این نقشه را به کمک دستگاه‌ها و روش‌هایی که از آنها استفاده کرده‌اند، با دقتی بهتر از ۱:۵۰٫۰۰۰ در نقشهٔ موضع‌نگاری و «دقت بسیار و مداومی» در نقشه‌برداری فتوگرامتری به‌دست آورند. یکی از تصاویر منتشرشده برشی است از گنبدخانهٔ شمالی (شکل ۱۶)،[۳۸] که در مقایس ۱:۵۰ انتشار یافته است. این تصویر می‌تواند ــ با توجه به دقت گزارش‌شده ــ پایه و اساس درستی برای بررسی‌های ما باشد.[۳۹] لیکن از آنجا که گزارش منتشرشده فقط یک برش از گنبدخانهٔ شمالی را دربر دارد، بهتر است که تجزیه و

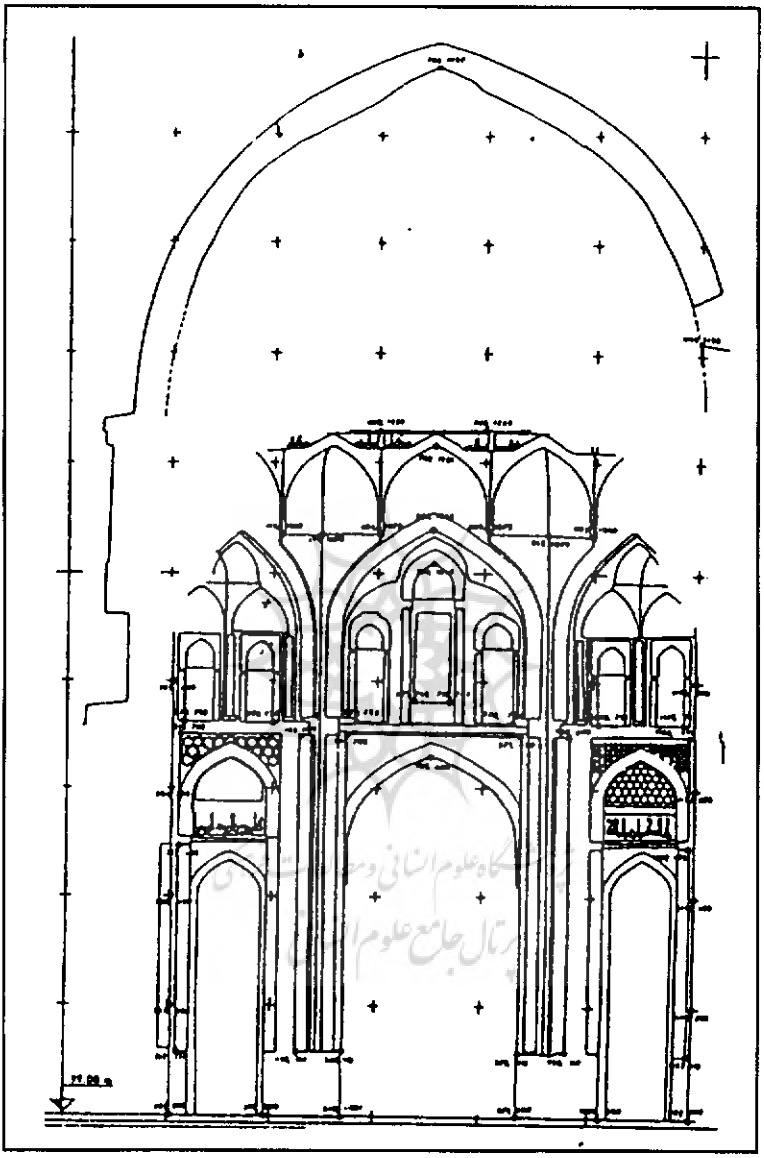
---

۳۸. سازمان رصد: «مسجد جامع اصفهان» (مقالهٔ ارائه‌شده در همایش بین‌المللی بررسی‌های فتوگرامتری از بناهای باستانی، (آتن، ۱۹۷۴) ۱۳. در رابطه با میزان دقت منظره‌برداری نگاه کنید به ص‌ص ۴-۱. مقالهٔ مزبور.

۳۹. در این همایش گفته شد که کوشش فراوانی صورت گرفته تا تصاویر منتشرشده دقیقاً به مقیاس اصلی ۱:۵۰ خود باقی بمانند (نقشهٔ کلی به مقیاس ۱:۴۰۰ تقلیل یافته بود). عرض قاب داخلی هر لوح (در اینجا در شکل ۵ با Y-Z نمایش داده شده) دقیقاً به میزان ۴۰ سانتیمتر کشیده شده به طوری که مقیاس نقشه می‌تواند هر زمانی در آینده مقابله شود. من اصل نقشهٔ منتشرشده را با استفاده از دستگاه برای ، Summagraphics MG III دقت بیش‌تر به مقیاس ۱۰۰۰ خط در اینچ به ارقام درآورده و محور مختصات نقاط مهم را توسط Auto CAD R12 جدا ساخته‌ام. در نتیجه اندازهٔ فاصلهٔ Y-Z ۴۰ سانتیمتر به‌دست آمد.

تحلیل اینجانب ابتدا به مثابه یک سنجش و ارزیابی موقت و اولیه تلقی شده و بعدها بر اساس گزارش‌های کامل، مورد آزمون قرار گیرد.[۴۰]

۴۰. یک نقص برش گنبد شمالی در این است که جزئیات قسمت‌های فوقانی را دربر ندارد. چنین به‌نظر می‌آید که جزئیات مزبور از طریق استریوسکپ مورد پوشش قرار نگرفته‌اند. با این حال، این مطلب تأثیر زیادی روی تجزیه و تحلیل ما نمی‌گذارد زیرا که نقاط لازم و مهم پوشش شده‌اند. تنها یک مورد استثنا وجود دارد و آن این است که دیواری که روی آن نوارهٔ کتیبه بوده، در بنیاد گنبد دیده نمی‌شود. سن اطلاعات ناموجود را از طریق رجوع به دیگر نقشه‌های منتشرشده که با روش مستقیم تهیه شده بودند و نیز عکس‌ها به‌دست آورده‌ام. ر. ک. به کتاب ***A Survey of Persian Art*** تألیف پوپ و آکرمان (زیرنویس ۱)، ۹۱-۸:۲۸۹. من به این نکته پی برده‌ام که لبهٔ فوقانی نوار کتیبه با طاقچه‌های پنجره‌های گنبد (که یکی از آنها را می‌توان در تصویر فتوگرامتری مشاهده کرد) منطبق می‌باشد، سطح آن نیز منحنی نبوده، بلکه همان‌گونه که در شکل ۱۷ با خط منفصل نشان داده شده است، عمودی می‌باشد. طبق اصول عکسبرداری در معماری هرگاه بخشی از یک ساختمان فقط در یکی از عکس‌ها دیده شده و تحت پوشش روش استریوسکپی نباشد در آن‌صورت دستگاه رسم می‌تواند با سنجش و اندازه‌گیری ساختمان، آن را با خطوط منفصل تکمیل نماید. دستگاه رسم در این مورد تعبیر نادرستی از شرایط نموده و در نتیجه انحنای گنبد را بدون مقابله و امتحان ادامه داده است.



شکل ۱۶

مختصات بسیاری از نقاط نقشهٔ منتشرشده، توسط دستگاه رسم (plotter) تـعیین

شده‌اند و از این رو می‌توانند پایه و اساس دقیقی برای تجزیه و تحلیل قرار گیرند.[۴۱] ساختمان این بنا به طرزی استثنایی دقیق می‌باشد، به طوری که انحراف افقی و عمودی عناصر ساختمانی از موضع واقعی خود، بین ۲ ۰ر۰ ۷ متر قرار دارند که در نتیجه یک خطای میانگین در حدود ۳ر۰٪ به‌وجود می‌آید.[۴۲] موضع محورهای عمودی طاق‌های مرکزی و گنبد، از اهمیت زیادی برخوردار است. این محورها، رأس هر یک از طاق‌ها و نیز نقطهٔ رأس گنبد را با انحرافی در حدود ۱ر۰٪ قطع می‌کند. تحصیل چنین دقتی در تعیین موضع محور گنبد با طاق‌ها، حتی با استفاده از ابزار فنّاوری امروزی عملی است دشوار، چه رسد به قرن یازدهم میلادی. چنین دقتی در یک بنای متعلق به دوران سلجوقی، به نظر من که تجارب زیادی بر اساس مساحی بسیاری از آثار قرون وسطی در

۴۱. برای اطلاع از ابزار و لوازم سنجش و روش‌های به‌کار گرفته‌شده، رجوع کنید به زیرنویس ۳۸. در اینجا یک پیکان که نشانهٔ یک ارتفاع ۹۹ متری در نقشهٔ اصلی است، به مثابه نقطهٔ ثابت انتخاب شده است. همچنین نقاط زیادی که با ارزیابی ما در ارتباط هستند، در اینجا نشان داده شده‌اند، به این ترتیب که اولین تصویر رقم مختصات افقی و دومین تصویر رقم خط عمود را نمایش می‌دهد. هر دو رقم به کمیت‌های کامل، تکمیل شده‌اند (شکل ۱۶).

۴۲. کف گنبدخانهٔ شمالی، در سراسر نقشهٔ ساختمان دقیقاً در ۹۹ متری نقطهٔ ثابت عمودی نقشهٔ کل ساختمان قرار دارد. از آنجا که مسجد مزبور از زمان سلجوقیان تاکنون مرتب محل آمدوشد مردم بوده است، دلیلی وجود ندارد که ما فکر کنیم که سطح اصلی زمین آن تغییر کرده باشد. کف این مسجد تقریباً افقی است و فقط دارای انحرافی به میزان ۲ ۰ر۰− متر در میان آن می‌باشد. مختصات نقاطی که در امتداد دیوار به فاصلهٔ دو متر به دو متر مساحی شده‌اند، حداکثر دارای انحرافی به میزان ۳ ۰ر۰ متر از شاقول می‌باشند. ارتفاع لبهٔ فوقانی ازاره که گچبری از آن آغاز می‌شود، بالغ بر ۲ ۰ر۰ ۱۵m ر۱ می‌باشد. قاب‌های طاق‌های جانبی که با طاق مرکزی مطابقت می‌کنند، در ارتفاع ۴ر۹۵ متری قرار دارند. رأس طاق مرکزی پایینی به بلندی ۶ر۶۰ متر می‌باشد. ارتفاع لبهٔ تحتانی نوار باریکی که پایهٔ مربع بنا را از منطقهٔ انتقالی آن جدا می‌سازد، بالغ بر ۲ ۰ر۰ m ۰۰ر۷ است. لبهٔ فوقانی این نوار که با طاقچه‌های پنجره‌های میانی در بلندی ۷ر۶۳ متری قرار دارد. عناصر پایینی مقرنس از ارتفاعی به میزان ۲ ۰ر۰ m ۱۰ر۷۰ می‌شوند. حد فوقانی منطقهٔ انتقالی در ارتفاع ۱۲ر۵۹ متری قرار دارد. نقشهٔ مورد بحث فقط یک پنجرهٔ گنبد را نشان می‌دهد که طاقچهٔ آن با لبهٔ فوقانی نوار کتیبه در ارتفاع ۱۴ر۲۳ متری مطابقت دارد. رأس گنبد دارای ارتفاعی به میزان ۱۹ر۲۷ می‌باشد. انحرافات از میانگین ارتفاع، در کلیهٔ خطوط افقی ساختمان بسیار ناچیز بوده و در نتیجه خطایی در حدود ۲ر۰ درصد دارند که قابل چشم‌پوشی است (در این تحلیل خطاهای کم‌تر از ۱ر۰ درصد، چشم‌پوشی شده و به میزان صفر گزارش شده‌اند). این امر در مورد خطوط عمود نیز مصداق دارد: فاصلهٔ بین دو دیوار که در سطح زمین بالغ بر ۹ر۹۰ متر می‌باشد، در بخش میانی به میزان تقریبی ۳ ۰ر۰ متر افزایش پیدا کرده و در منطقهٔ انتقالی مجدداً به ۹ر۹۰ متر می‌رسد. در این دیوارها، حداکثر انحراف از خط واقعی شاقولی کم‌تر از ۴ر۰ درصد بوده و تغییر مکان افقی گچبری عمودی ازاره تا نوار باریک بیش از ۲ ۰ر۰ متر نمی‌باشد و در نتیجه منجر به خطایی به میزان ۳ر۰ درصد می‌گردد.

آناتولی کسب کرده‌ام، بسیار غیر معمول است و این امر نه تنها به ما اجازه می‌دهد، بلکه ما را به شوق می‌آورد تا به تجزیه و تحلیل خود ادامه دهیم.

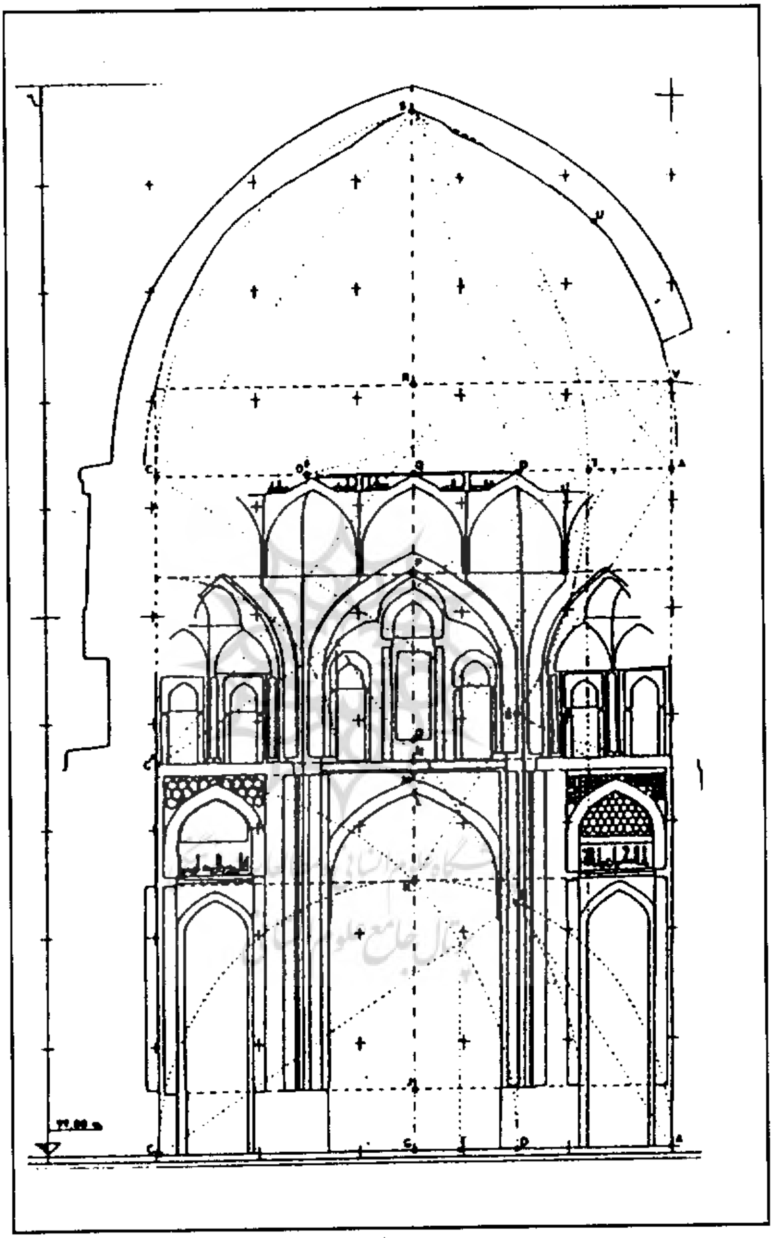
«تناسب» به معنای متعارف خود، امروزه چنین تعریف می‌شود: «ارتباط درست بین اندازه، موضع و شکل اجزای گوناگون یک کل، آن‌چنان‌که یک اثر زیبا به‌وجود آید». تعریف ریاضی این مقوله نیز مشخص است، یعنی: «تساوی نسبت‌ها». حال باید دید که این مقوله در دنیای اسلام چگونه در ارتباط با هنر معماری به‌کار می‌رفته است؟ ابن خلدون می‌گوید:

> درودگری و نجاری علی‌الاصول نیازمند به مقدار زیادی هندسه و انواع آن می‌باشند. این حرفه را یا نیاز به معلومات کلی و یا احتیاج به دانش تخصصی دربارهٔ تناسب‌ها و اندازه‌ها می‌باشد تا بتوانند اشکال (اشیا) را به‌درستی از قوه به فعل درآورد و برای اخذ این‌گونه معلومات می‌باید دست به دامن هندسه‌دانان شود.[۴۳]

از آنجا که نجاری همواره با معماری در ارتباط مستقیم بوده است، می‌توانیم از این گفته چنین نتیجه بگیریم که ریاضیدان نیز در رابطه با تناسب‌های معماری، حرفی برای گفتن داشته‌اند. تعریف آنان از تناسب‌ها می‌تواند به گونهٔ زیر بوده باشد: «گروهی از نسبت‌های مساوی که طوری تنظیم می‌شوند تا بتوانند تأثیری منظم و مطبوع به‌وجود آورند». من بر این باورم که تناسبات گنبدخانهٔ شمالی با این تعریف مطابقت دارند.

حال مثلث ABC خیام را طوری روی نقشهٔ گنبدخانه قرار می‌دهیم که وتر آن AC با طول ۹٫۹۰ متر ضلع قاعده مطابقت کند (شکل ۱۷).

43. Ibn Khaldun, *The Muqaddimah*, trans. F. Rosenthal (Prenceton, 1967), 2:365.



شکل ۱۷

قسمت تحتانی اطاقگاه گنبد به شکل مربع می‌باشد و یک نوار باریک آن را از منطقهٔ

انتقالی چندضلعی که دارای مقرنسی پیش‌آمده می‌باشد، جدا می‌کند. ارتفاعات قسمت مربع‌شکل و منطقهٔ انتقالی یعنی GM و NQ به‌ترتیب با قطعهٔ CD و ضلع AB مثلث مطابقت دارند.[۴۴] به این ترتیب ارتفاع قسمت مربع‌شکل، میانگین هارمونیک دهانهٔ طاق و منطقهٔ انتقالی بوده و ارتفاع طاقچهٔ پنجرهٔ مرکزی در قسمت فوقانی طاق اصلی یعنی GO برابر است با میانگین حسابی دهانهٔ طاق و منطقهٔ انتقالی. این نسبت‌ها به نوبهٔ خود تناسب موسیقایی یامبلیخوس را برقرار می‌کند که من آن را «بالارونده» توصیف می‌کنم. به عبارت دیگر:

$$AC : GO : : GM : NQ$$

نوار افقی QR که دارای کتیبه است، گنبد را با فضای زیرین مرتبط می‌سازد. این نوار در برش عمودی منطقهٔ انتقالی را به لحاظ بصری گسترده‌تر ساخته و بر نقشه مدور به گنبد متصل می‌شود. ارتفاع مشترک بین منطقهٔ انتقالی و نوارکتیبه یعنی NR برابر است با CD. به‌نظر می‌آید که این کار از ابتدا و عمداً به مثابه بالامیانگین هارمونیک دهانهٔ طاق و منطقهٔ انتقالی، منظور نظر بوده است. در نتیجه، LR که برابر است با GO، بالامیانگین حسابی دهانهٔ طاق و منطقهٔ انتقالی می‌شود. از آنجا که QR و KL با هم مساوی هستند، KQ نیز برابر می‌شود با GO و چنین به‌نظر می‌رسد که این امر نیز به مثابه زیرمیانگین حسابی عمدی بوده است تا بتوان نقش دوگانه نوارکتیبه را منعکس نمود. این روابط، دو تناسب پایین‌روندهٔ موسیقایی را تشکیل می‌دهند که عبارت‌اند از:

$$AC : LR : : NR : NQ : : AC : KQ$$

ظاهراً میانگین هارمونیک، ارتفاعات قسمت‌های اصلی را تعیین می‌کرده و میانگین‌های حسابی در جهت تأکید خطوط مرکزی به‌کار برده می‌شدند و در عین حال تناسبات موسیقایی را با یکدیگر مرتبط می‌نمودند.

ارتفاع GQ در قسمت تحتانی گنبد برابر است با مجموع دهنهٔ طاق و نصف ارتفاع منطقهٔ انتقالی یعنی $(AC + \frac{1}{2}AB)$ و GK، KO، OQ، KN به‌ترتیب برابرند با

$$\frac{1}{2}AC,\ \frac{1}{2}AB,\ \frac{1}{2}AC,\ \frac{1}{2}BD$$

در قسمت مربع پایینی، ارتفاع GK پاکار طاق مرکزی و هم قاب قوس‌های پایینیِ جانبی

---

۴۴. در جدول مقایسه‌ای که در پیوست این مقاله آمده است، مطابقت بین رویهٔ پیشنهادی هندسی بر اساس مثلث خیام و ابعاد واقعی گنبد شمالی مشاهده می‌شود.

را معین می‌نماید. ارتفاع ازاره GJ، فاصلهٔ GK را چنان تقسیم می‌کند که[۴۵]

$$GJ = \frac{1}{4}BD$$
$$JK = \frac{1}{2}GO$$

منطقهٔ انتقالی یک کمربند تحتانی هشت‌ضلعی NP و یک کمربند فوقانی شانزده‌ضلعی PQ را دربر می‌گیرد که برابرند با:

$$NP = \frac{1}{2}CD$$
$$PQ = AB - \frac{1}{2}CD$$

این تقسیم‌بندی‌ها در این دو منطقه، دو تناسب موسیقایی از نیم فاصله‌ها به‌وجود می‌آورند، به این ترتیب که:

$$GK : JK :: NP : KO :: OQ : JK$$

تقسیم منطقهٔ انتقالی، موجب تکرار نسبت منطقهٔ انتقالی به دهنهٔ طاق می‌شود، یعنی:

$$PQ : NP :: NQ : AC$$

دهنهٔ طاق میانگین حسابی ارتفاع زیر گنبد و ارتفاع منطقهٔ مربع‌شکل می‌باشد:

$$AC = \frac{1}{2}[GQ + GN]$$

شیب گنبد توسط مثلث خیام تعیین می‌شود. مثلث‌های متساوی‌الساقین TCS، CDS و CSA هر سه در عمود QS و ضلع CS که برابر است با BC مشترک‌اند.[۴۶] QS با ارتفاع گنبد در بالای کمربند شانزده‌ضلعی مطابقت می‌کند و در هنگام بنای ساختمان از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. لیکن پس از اتمام کار ساختمان گنبد، موجودیت استثنایی QS به عنوان یک بُعد قابل رؤیت از بین رفت. آنچه ما از روی زمین مشاهده می‌نماییم، سطح خارجی گنبد است که از کمربند شانزده‌ضلعی تا رأس گنبد گسترش پیدا می‌کند. از نقطه‌نظر تجزیه و تحلیل تناسبات، قوس CS در واقع عضو اصلی می‌باشد.[۴۷] نسبت CS

---

۴۵. یکی دیگر از خواص مثلث خیام این است که $AC = GO + \frac{1}{2}BD$. در نتیجه این رابطه به‌دست می‌آید $\frac{1}{2}AC - \frac{1}{4}BD = \frac{1}{2}GO$ که معادل است به

۴۶. بنا بر استدلال نظری [۲] می‌باشد $QS^2 = AC \cdot CD - \frac{1}{4}AC^2$. ضلع CS به مثابه میانگین هندسی ضلع کوچک‌ترین مثلث یعنی CDS[۴] و قاعدهٔ بزرگ‌ترین مثلث یعنی CSA به عبارت دیگر $CD:CS::CS:CA$.

۴۷. قوس CS قطعه‌ای از دایره‌ای است که شعاع آن CD است. CS یک کمیت صرفاً مجازی ریاضی می‌باشد که ترسیم شده تا بتوان به کمک آن تناسب و ارتفاع گنبد را نمایان ساخت. منحنی واقعی گنبد

←

به دهانهٔ طاق مساوی است با نسبتی که خیام به عنوان هدف و منظور رسالهٔ بدون عنوان خود قلمداد کرده است، یعنی:

$$CS : AC :: BC : AC :: BD : AB$$

همین نسبت است که به صورت کمیتی ثابت، زیربنای کلیهٔ تناسبات موسیقایی گنبدخانه را تشکیل داده و به صورت میانگین هندسی بین دهانهٔ طاق و تمامی منطقهٔ انتقالی، یعنی

$$JM:GM::KL:PQ::QR:PQ::PQ:KN::KN:KO::NR:CS::CS:AC$$

در آن طنین می‌اندازد.[۴۸]

در خاتمه می‌توان گفت: چنین به‌نظر می‌رسد که طرح هندسی گنبدخانهٔ شمالی تماماً بر اساس مثلث خیام صورت گرفته است. البته طرح مزبور صرفاً از سوی اینجانب ارائه شده است ولی انطباق کامل آن با ابعاد واقعی گنبد آن را معتبر می‌سازد (معدل انحراف به میزان ۱۲ ٫۰ متر یعنی ۲٫۰٪ است).[۴۹] از نقطه‌نظر منطق نیز می‌توان تصور کرد که طراح این گنبد، یعنی به احتمال زیاد شخص خیام، ابعاد این ساختمان را به کمک دستورالعمل‌های نجومی محاسبه کرده است.

→

یعنی VUS از لبهٔ بالایی نوار عمودی کتیبه آغاز می‌شود. نوار عمودی مزبور احتمالاً مشمول ملاحظات ساختمانی بوده و سبب می‌شود تا کمی به ضخامت پایهٔ گنبد افزوده شود. این وضع مستلزم یک پروفیل چهارمرکزی است تا بتوان ارتفاع از پیش تعیین‌شده را حفظ کرد. چنین به نظر و می‌رسد که قوس‌های VU و US توسط نقاط D^X و C^X که مرکز آنها می‌باشند، تعیین شده و D^XU C^XS اشعهٔ این قوس‌ها می‌باشند.

۴۸. در مثلث خیام JM مطابق است با CF. ارتفاع منطقهٔ مکعبی‌شکل یعنی GM و فاصلهٔ افقی بین دیوارهای دور و لبهٔ طاق‌های تحتانی جانبی یعنی CT به مانند دو نسبت اصلی بین JM و دهانهٔ طاق (JM : GM : : GM : CT : : CT : AC) عمل می‌کنند. نسبت بلندی به دهانهٔ طاق قسمت مکعبی‌شکل یعنی GM : AC همچون یک ثابت دومی در میان گنبدخانه پدیدار شده و سرانجام در قاعدهٔ گنبد به صورت نسبت ارتفاع به دهانهٔ منطقهٔ انتقالی پایان می‌یابد:

NR:AC(GM:AC::GJ:KL:GJ:QR::JK:NQ::KO:JK::NP:GK::KL:KN:KO:PQ::NR:AC

این نسبت که در مثلث خیام برابر است با CD : AC، عبارت است از مربع ثابت اولیه یعنی $BC : AC :: [CD : AC]^2$.

۴۹. رجوع کنید به زیرنویس ۴۴. حداکثر انحراف در رابطه با همهٔ ابعاد، در حدود ۲ ٫۰ متر می‌باشد. ولی به‌نظر می‌رسد که خطایی که در KN و GJ صورت گرفته، از بقیهٔ خطاها بزرگ‌تر باشد زیرا که آنها ابعاد بسیار کوچکی بوده و از طریق تفریق تعیین شده‌اند.

آیا خیام طراح گنبدخانهٔ شمالی بوده است؟

عمر خیام در سال ۱۰۴۸ م در شهر نیشابور بـه دنـیا آمـد. پس از اقـامت در شـهرهای مختلف آسیای مرکزی و ایران، در سال ۱۰۷۴ م از سوی سلطان مـلکشاه و وزیـر وی خواجه نظام‌الملک دعوت شد تا بـه اصـفهان رفـته و در آنـجا مسئولیت رصـدخانه را عهده‌دار شود. در حوالی همین تاریخ بود که وی رسالهٔ بدون عنوان و نیز اثر مشهور خود به نام رسالهٔ في البراهین علی المسائل الجبر و المقابله را دربارهٔ علم جبر به رشتهٔ تحریر درآورد. در سال ۱۰۷۷ م تفسیر خود را دربارهٔ کتاب اصول اقلیدس موسوم بـه شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس نوشت. در سال ۱۰۷۹ م تقویم پیشنهادی او و طبق فـرمان سلطنتی مورد قبول واقع شد. این تقویم آن‌چنان دقیق است که تنها یک روز در هر دورهٔ ۵۰۰۰ ساله اشتباه دارد. آغاز بنای گنبدخانهٔ شمالی به احتمال قوی در اوایل سال ۱۰۸۰ م صورت گرفت.

احتمال اینکه عمر خیام به تناسب موسیقایی در مثلث خود واقف بوده است، بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود، چنانچه تجزیه و تحلیل من از نقش و اهمیت آن در رابـطه بـا طـرح هندسی گنبدخانهٔ شمالی درست باشد. در فاصلهٔ زمانی کوتاهی که بین کشـف مـثلث خیام و شروع ساختمان گنبدخانهٔ شمالی گذشته است، تنها یک احـتمال مـی‌رود و آن اینکه خیام خواص منتشرنشدهٔ مذکور در فوق را در اصفهان به اجرا گذاشته است. حتی چنانچه شخص دیگری به این کار نایل شده باشد، مسلماً خیام را (کـه کـاشف مـثلث مشهور بوده و در اصفهان به عنوان بزرگ‌ترین ریاضیدان شهرت داشته)، در جریان آن می‌گذاشته است. البته این استدلال به‌تنهایی نمی‌تواند دال بر این باشد که خیام طـراح گنبدخانهٔ شمالی بوده است. زیرا ممکن است که او آگاهی خود را از تناسب موسیقایی در مثلث خود را در یکی از آن مجالس گفت‌وشنود با معماران هنرورز در میان گذاشته باشد.

یکی از ریاضیدانان همعصر خیام به نام اسفزاری می‌گوید:

> هندسه پایه و اساس معماری است، به همین دلیل است که هندسه‌دان با دانش خود شالودهٔ بنا را پی‌ریزی می‌کند. به دنبال او اسـتاد بـنّا و پس از وی کـارگر روزمزد پا به میان می‌گذارند. هندسه‌دان، اولی یعنی استاد بنّا و این یکی به نوبهٔ خود دومی یعنی کارگر روزمزد راکه با آب و گل مشغول کار است، تحت فرمان

خود دارد.[۵۰]

از این گفته که در کتاب بیهقی (۱۱۷۴-۱۱۰۶ م) مورخ ایرانی نقل شده است، استنباط می‌شود که می‌توان هندسه‌دانانی را که مسئولیت ساختمان‌ها را به عهده داشته‌اند، به‌حق ریاضیدان ـ معمار نامید. اشاره‌ای که در کتاب بیهقی به فردی به نام قایینی شده است، مبین نوعی سلسله‌مراتب است که بر حسب سطح و میزان اطلاعات هندسی اشخاص در زمینهٔ معماری برقرار بوده است:

> بنّا دارای آن اهمیتی نیست که معمار از آن برخوردار است و معمار نیز دارای آن اهمیتی نیست که هندسه‌دان از آن برخوردار است. هندسه‌دان بطلمیوس است و معمار البتّانی و من نقش بنّا را عهده‌دار هستم.[۵۱]

گرچه چنین سلسله‌مراتبی در مورد هر بنایی صدق نمی‌کند، ولی قوهٔ ابتکار و ابداعی که در طرح هندسی گنبدخانهٔ شمالی به‌کار رفته، این فکر را القا می‌کند که در اینجا یک ریاضیدان و به‌خصوص ریاضیدانی چون عمر خیام باید در این کار دست می‌داشته است. چرا که قدر و منزلت او در دربار، درست کمی قبل از اینکه ساختمان این گنبد آغاز شود، به خاطر پذیرش تقویم اصلاحی‌اش از سوی سلطان، بالا گرفته بود و این امر می‌تواند احتمالاً حامی خیام یعنی ترکان خاتون را بر آن داشته باشد تا دستور ساختن چنین بنای معتبری را به عهدهٔ وی واگذار کند.

مقایسهٔ گنبدخانهٔ شمالی با گنبدخانهٔ جنوبی که بنای آن بین سال‌های ۱۰۸۷-۱۰۸۶ م صورت گرفته، دلیل دیگری به‌دست می‌دهد که چرا یک ریاضیدان ـ معمار ماهری می‌باید عهده‌دار ساختمان گنبدخانهٔ شمالی بوده باشد. نقشه‌های فتوگرامتری که توسط سازمان رصد صورت گرفته‌اند، نقشه‌ها و برش‌هایی از گنبدخانهٔ جنوبی را نیز دربر دارند.[۵۲] مواضع خطوط افقی و عمودی و به‌ویژه تنظیم محور عمودی این گنبد، طبق نقشه‌ها و برش‌های مزبور به هیچ وجه به دقت گنبدخانهٔ شمالی نمی‌رسند، به طوری که تجزیه و تحلیل تناسب‌های آنها غیر ممکن است. از سوی دیگر این دو بنا هر دو طوری نزدیک به هم ساخته شده‌اند که کار ساختمان آنها می‌باید در یک زمان صورت گرفته

---

50. Gulru Necipoglu, *The Topkapi Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture*, pt. 4. "Geometry and the Contribution of Mathematical Sciences" (Santa Monica, Calif., 1995), p. 140, 177 n. 24.

51. ibid

52. *Rassad Survey Company*, plates 8, 12.

باشد. از این رو بعید به نظر می‌رسد که عمله بنّاهایی در ساختمان گنبد شمالی مشغول به کار بوده‌اند، ماهرتر از همکاران خود در گنبد جنوبی بوده باشند. در نتیجه تفاوت در دقتی که در اجرای این دو طرح دیده می‌شود، باید ناشی از اختلاف در مهارت و توانایی افرادی باشد که مسئول این کار بوده‌اند. معمار گنبدخانهٔ جنوبی شخصی است به نام ابوالفتح، فرزند محمد خزانه‌دار. نام این شخص می‌رساند که نامبرده تا حدودی از نفوذ سیاسی برخوردار بوده است. ما با توجه به این اثر می‌توانیم از مهارت‌ها و توانایی‌های این شخص تا اندازه‌ای آگاهی داشته باشیم. در عوض، دقت و کمال چشمگیری که در بنای گنبدخانهٔ شمالی به‌کار رفته، دلالت بر این دارد که در آنجا باید شخص تکامل‌جو و باریک‌بینی دست به‌کار بوده باشد. تقویم خیام که از توجه او به‌دقت در کار حکایت می‌کند و شهرت و اعتبار او به عنوان اخترشناسی چیره‌دست در علم مثلثات، وی را حداقل از جمله افرادی جلوه‌گر می‌سازند که به احتمال زیاد در اصفهان آن زمان می‌باید کار مشکل و طاقت‌فرسای تنظیم گنبد را انجام داده باشند.

نکتهٔ دیگری که قابل توجه است، ستارهٔ پنج‌پر روی سطح این گنبد است که از تقاطع تونره‌های گنبد به‌دست آمده است. این قدیمی‌ترین نمونه‌ای از تزیین سطح مقعری یک گنبد است. طرح هندسی آن می‌باید ابتدا به صورت دوبعدی روی یک صفحه نقشه‌ریزی شده و سپس خطوط مستقیم آن به منحنی تبدیل شده باشند. از آنجا که هم این تونره‌ها و هم گنبد با هم ساخته شده‌اند، باید نتیجه گرفت که این فکر مبتکرانه در حین طراحی شکل گرفته و بعد جامهٔ عمل پوشیده است. ولی آیا چه کسی جز خیام می‌توانسته است در آن زمان در اصفهان، رؤیای خیال‌انگیز و کارآرایی لازم را برای انجام یک چنین طرح انقلابی داشته باشد؟

طرح هندسی که در اینجا مورد بحث قرار گرفته است، به‌تنهایی دلالت کامل بر آن ندارد که عمر خیام می‌باید گنبد شمالی را طرح‌ریزی کرده باشد. لیکن بر اساس شواهد و قراین موجود است که این فکر بیش از پیش مسلم و بدیهی جلوه می‌کند. حال این سؤال پیش می‌آید که چرا در منابع و مآخذ آن عصر هرگز از خیام، یعنی یکی از بزرگ‌ترین متفکرانی که عالم اسلام پرورش داده است، به عنوان طراح این گنبد ذکری به‌عمل نیامده است. شاید پاسخ به این پرسش، در دوران زندگانی خیام پس از بنای گنبد شمالی نهفته باشد.

پس از مرگ ملکشاه در سال ۱۰۹۲ م، رصدخانه بسته شده و خیام به علل کشمکش‌های سیاسی عصر خود برای مدتی از کارهای علمی دست برداشت. خیام در حدود سال ۱۱۳۱ در نیشابور وفات یافت.

بر فراز دری که به درون گنبد شمالی راه می‌برد، سنگ‌نبشته‌ای نصب شده است، که مربوط به زمانی است که مسجد پس از یک آتش‌سوزی در سال ۱۱۲۲-۱۱۲۱ م مرمت گردید. روی این سنگ‌نبشته آیهٔ ۱۱۴ از سورهٔ دوم قرآن آورده شده است:

> و کیست ستمکارتر از آن که مردم را از ذکر نام خدا در مساجد منع کند و در خرابی آن اهتمام و کوشش نماید. چنین گروه در مساجد مسلمین درنیایند جز آنکه بر خود (از اعمال زشت خویش) ترسان باشند، این گروه را در دنیا ذلت و خواری نصیب است و در آخرت عذابی بزرگ.

ذکر این آیه روی یک کتیبهٔ ساختمانی امری غیر عادی به نظر می‌رسد و به قول گرابار اشاره‌ای است روشن به یک بی‌حرمتی که دامن‌گیر این مسجد شده است. آیا می‌توانیم در این آیه اشاره‌ای که نشانهٔ اعتراف خیام به ترس و هراس باشد که دامن‌گیر اهل علم آن زمان شده باشد، پیدا کنیم؟ آیا طرح او در آن بخش از مسجد که به در منتهی می‌شود، می‌تواند به مثابه شکلی از این بی‌حرمتی تلقی شده باشد؟ شاید توضیح و تأویل این که چرا نام او هرگز به عنوان طراح این مسجد ذکر نشده است، در این آیه به رمز آمده باشد.

نتیجه‌گیری کلّی

تاریخ معماری اسلامی سرشار است از مسائل هندسی که برخی از آنها هنوز حل نشده‌اند. پژوهش حاضر موردی را نمایان می‌سازد که هم برای تاریخ معماری و هم برای تاریخ ریاضیات حاوی اطلاعات جالبی می‌باشد. با توجه به شمار روزافزون پژوهش‌های دقیقی که دربارهٔ این‌گونه مسائل صورت می‌گیرند، امید می‌رود که بیش از پیش به حل آنها نائل شویم.

هدف پژوهش حاضر دستیابی به دلایلی است برای اثبات اینکه در گذشته مجالس گفت‌وشنود منعقد می‌شدند تا ریاضیدانان و هنرورزان با یکدیگر به همکاری پرداخته و از این طریق، راه‌هایی برای استفاده از هندسهٔ کاربردی در معماری و هنرهای مربوط به آن پیدا کنند. رسالهٔ بدون عنوان خیام، خود سند قانع‌کننده‌ای در این زمینه است. نکات

دیگری که در این پژوهش مطرح می‌شوند، عبارت‌اند از:

الف) برخی از ریاضیدانان از جمله ابوالوفا و خیام تمایل داشتند که دانش و تجارب خود را در اختیار هنرورزان بگذارند و به آنها توصیه می‌کردند که در رابطه با معادلات درجه سوم از روش‌های مرزی استفاده کنند.

ب) رسالهٔ اشکال به‌هم‌پیوسته که توسط یک مؤلف ناشناس دربارهٔ هندسهٔ تزیینی و به احتمال زیاد برای هنرورزان نوشته شده است، در واقع شایستهٔ چنان ستایش و تحسینی نیست که برخی از دانشمندان به مثابه یک اثر فنی برای آن قایل هستند.

ج) اطلاعاتی که مؤلف ناشناس در این رساله ارائه می‌دهد، دلالت بر این دارند که تبادل دانش و معلومات به صورت شفاهی در مجالس گفت‌وشنود بین هنرورزان صورت می‌گرفته است. لیکن آنها غالباً یا از رهنمودهای ریاضیدانان آگاهی نداشتند و یا پذیرای این رهنمودها نبوده‌اند.

پیوست

درصد خطا	مقادیر واقعی (به متر)	مقادیر فرضی (به متر)	اجزای مثلث	ابعادگنبدخانهٔ شمالی
۰ر۲	۶ر۹۹	۶ر۹۷۴	CD	GM
۰ر۴	۵ر۳۶	۵ر۳۸۳	AB	NQ
۰ر۱	۷ر۶۳	۷ر۶۴۱	GO	GO
۰ر۴	۷ر۰۰	۶ر۹۷۴	CD	NR
۰ر۱	۷ر۶۳	۷ر۶۴۱	GO	LR
۰ر۰	۷ر۶۴	۷ر۶۴۱	GO	KQ
۰ر۰	۱۲ر۵۹	۱۲ر۵۹۱	$AC+\frac{1}{2}AB$	GQ
۰ر۰	۴ر۹۵	۴ر۹۵۰	$\frac{1}{2}AC$	GK
۰ر۴	۲ر۶۸	۲ر۶۹۲	$\frac{1}{2}AB$	KO
۰ر۲	۴ر۹۶	۴ر۹۵۰	$\frac{1}{2}AC$	OQ
۰ر۹	۲ر۲۸	۲ر۲۵۹	$\frac{1}{2}BD$	KN
۰ر۹	۱ر۱۴	۱ر۱۲۹	$\frac{1}{4}BD$	GJ
۰ر۳	۳ر۸۱	۳ر۸۲۱	$\frac{1}{2}GO$	JK
۰ر۵	۳ر۴۷	۳ر۴۸۷	$\frac{1}{2}CD$	NP
۰ر۳	۱ر۸۹	۱ر۸۹۶	$AB - \frac{1}{2}CD$	PQ
۰ر۳	۷ر۲۳	۷ر۲۰۹	$\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD$	GN
۰ر۱	۶ر۶۸	۶ر۶۷۴	$\sqrt{(AC \cdot CD - \frac{1}{4}AC^2)}$	QS
۰ر۲	۸ر۲۹	۸ر۳۰۹	BC	CS
۰ر۰	۵ر۸۵	۵ر۸۵۳	CF	JM

جدول مقایسه‌ای: توافق بین طرح هندسی پیشنهادی بر اساس مثلث خیام و ابعاد واقعی گنبدخانهٔ شمالی