تئوری خطوط متوازی از نگاه خواجه نصیرالدین طوسی

جعفر آقایانی چاوشی
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات
و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

تقدیم به‌دانشجویان گروه فیزیک دانشگاه تبریز و استاد ایشان آقای دکتر علی عجب‌شیری‌زاده بخاطر برگزاری همایش جهانی خواجه نصیر در مراغه

مقدمه

اثری که خواجه نصیرالدین طوسی دربارهٔ نظریهٔ خطوط متوازی تحت عنوان *الرسالة الشافیة* از خود بجای گذاشته، بی شک مفصل‌ترین و مهمترین اثری است که در دوره اسلامی در این زمینه نگاشته شده است.

از طرف دیگر در یک تحریر عربی از کتاب *اصول اقلیدس* که در سال ۱۵۹۴ میلادی در رُم به‌چاپ رسیده آنهم به خواجه منسوب است، ولی پژوهشگران تاریخ علوم اخیراً از روی قراینی آنرا جعلی دانسته و بهرحال حاصل مکتب علمی خواجه خوانده‌اند فصل مشبعی به همین نظریه خطوط متوازی اختصاص دارد که در آن کوشش شده تا از طریق دیگری غیر از طریق مندرج در *رسالهٔ شافیه* اصل پنجم اقلیدس اثبات گردد.

اثر اخیر گرچه در ممالک اسلامی بازتاب چندانی نداشت، اما در اروپا منشأ تحول عظیم گردید. بدین معنی که براهین منقول در آن برای اثبات اصل موضوع اقلیدس توسط والیس (Wallis) ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی قرن هجدهم میلادی به زبان لاتینی ترجمه گردید. همین ترجمه‌ها را والیس در آثار هندسی خود نقل کرد، و بدین ترتیب

فرهنگ، ۴۴و۴۵، زمستان ۸۱ و بهار ۸۲، ص‌ص ۱-۲۴

ریاضیدان اروپائی و در رأس آنها ساکری و روبرت سیمسون و کاستیون و غیره از طریق والیس با نظریه طوسی آشنا گردیدند.

ساکری در اثر خود *اقلیدس عاری از نقص* صریحاً از طوسی نام برده و برهان او را مورد نقادی علمی قرار داده است.

اما سیمسون نیز در اثبات خود از اصل پنجم اقلیدس همان پوستولایی را بکار می‌برد، که قبلاً توسط طوسی، ارائه گردیده است.

می‌دانیم که ساکری بدون آنکه خود آگاه باشد، چند قضیه از هندسه‌های نااقلیدسی راکشف نمود و نیز می‌دانیم که هندسه دانانی که در قرن نوزدهم میلادی موفق به کشف هندسه‌های نااقلیدسی گردیدند، بنحوی از نظریات این دانشمند ایتالیائی آگاهی داشته‌اند. اما ساکری نیز بنوبه خود به خیام و طوسی که از طریق ترجمه‌های لاتینی با آثار آنها آشنائی پیدا کرد مدیون است.

سؤالی که ممکن است برای عده‌ای پیش آید اینست که چرا ریاضیدان اسلامی و در رأس آنها خیام و طوسی با آنکه راه را برای کشف هندسه‌های نااقلیدسی فراهم کردند، خود نتوانستند به این کشف بزرگ نایل آیند. در پاسخ باید گفت که هندسهٔ اقلیدسی آنچنان با زندگی آدمی عجین گردیده که به ذهن هیچیک از این ریاضیدان هندسه‌ای غیر از این هندسه خطور نمی‌کرده است. بر عکس آنان با تلاش خود برای اثبات اصل پنجم یا اصل توازی اقلیدس بر آن بودند تا هر چه بیشتر در استحکام پایه‌های این هندسه بکوشند. تلاش ریاضیدان اروپائی نیز برای اثبات اصل موضوع پنجم اقلیدس بر همین مبنا بود. این آمیختگی هندسه اقلیدسی با زندگی حتی کانت فیلسوف بزرگ آلمانی را بر آن داشت که فضا را یک فضای اقلیدسی بداند. تنها در اوایل قرن بیستم میلادی یعنی بعد از کشف هندسه‌های نااقلیدسی بود که هانری پوانکاره با ارائه نظریه «اصالت اعتبار» خود ثابت کرد که فضا نه اقلیدسی و نه غیر اقلیدسی است و این هندسه‌های اقلیدسی و غیر اقلیدسی بدون اینکه یکی متناقض دیگری باشد، همگی گروهی را تشکیل می‌دهند که آدمی متناسب با نیاز خود ممکن است، از هر یک از آنها استفاده نماید. بنابراین «علت استفاده از هندسه اقلیدسی این نیست که هندسه اقلیدسی درست و هندسه لوباچفسکی غلط است، بلکه علت این است که هندسه اقلیدسی هم از نظر ریاضی و

هم از نظر فیزیکی راحت‌ترین هندسه‌ها می‌باشد.»[1]

این توضیح مختصر شاید عدم‌کشف هندسه‌های نااقلیدسی رابوسیله ریاضیدانان اسلامی توجیه نماید. تا بدانیم که این کشف با کشفهای دیگر ریاضی متفاوت بوده است. حتی گاوس ریاضیدان بزرگ آلمانی که بر وجود هندسه‌های غیر اقلیدسی پی برد، از ترس طرفداران سرسخت هندسهٔ اقلیدس کشف خود را مسکوت گذاشت. ریاضیدیان اسلامی گرچه به دلایل فوق موفق به کشف هندسه‌های نااقلیدسی نشدند اما توانستند اصل موضوع توازی را به صورت نظریه‌ای علمی در آورده و در طی تحقیقات عمیق خود در این نظریه قضایا و روشهایی را بیابند که قرنها بعد از آنها مجدداً بوسیلهٔ مکتشفین هندسه‌های نااقلیدسی کشف گردید. گفتیم که ریاضیدان اسلامی اصل موضوع اقلیدس را به صورت یک تئوری علمی در آوردند، در توضیح این مطلب باید بگوئیم که در یونان باستان که از پوزیدونیوس (Posidonius) شروع و به سمپلیسیوس (Simplicius) در قرن چهارم سیلادی ختم می‌شود، کار چندان درخشانی در زمینه خطوط ستوازی به چشم نمی‌خورد. نه پوزیدونیوس و نه بطلمیوس و پروکلوس که در اصل اقلیدس به تعمق پرداختند، در بند آن نبودند که این اصل را به صورت سیستماتیک و منطقی مطرح کنند و یا آن را به عنوان یک نظریه مستقلی که دارای پوستولاها و قضایای مخصوص خودش باشد در آورند. تنها آغانیس (Aganis) برهان سیستماتیکی بر اصل توازی می‌دهد، برهانی که ما از طریق نوشته ابوالعباس نیریزی از آن گاهی داریم.[2] ریاضیدانان دیگر یونانی تنها به انتقاد ساده‌ای از این اصل بسنده کرده بودند.

در دوره اسلامی است که این اصل به شکل تئوری مطرح می‌شود و سپس بوسیله خیام و طوسی اوج تحول خود را پیدا می‌کند.

از اینرو مطالعه نظریه خطوط متوازی نزد ریاضیدان اسلامی را نمی‌توان تنها یک کنجکاوی باستان‌شناسی بشمار آورد، بلکه باید آنرا بعنوان مدخلی برای شناخت هر چه

---

1. J.I. A. Mooij, *La philosphie des méthematiques de Poincaré* , paris, Louvain 1966 P.14

۲. برای اطلاع از کارهای این ریاضیدان درباره نظریه خطوط متوازی رجوع شود به :
K.Jaouiche, *La théorie des paralleles en pays d'Islam*, paris 1986 pp. 31-35

بیشتر هندسه‌های نااقلیدسی دانست.

با ذکر این مقدمه به اصل مطلب یعنی بررسی کارهای طوسی درباره اصل توازی اقلیدس می‌پردازیم. اما پیش از آن ناگزیریم اشاره‌ای به اصول اقلیدس و بویژه اصل پنجم او بنمائیم.

اقلیدس بطور کلی هندسه خود را بر پنج پوستولایا اصل موضوع بنا نهاده و از خواننده کتابش می خواهد که این اصول موضوعه را قبول کند.

البته اگر خواننده به این پوستولاها شک کند و پوستولاهای دیگر بجای آن قرار دهد و بعد قضایائی بر اساس این پوستولاهای خود بسازد، مرتکب عملی غیر عقلی نگردیده است. اما سر و کارش با هندسه دیگری غیر از هندسه اقلیدس خواهد بود و هم بدین جهت است که پوستولا در زبان یونانی «درخواست» نامیده شده است یعنی از خواننده تقاضا و یا درخواست می‌شود که برای آشنا شدن با این علم باید آنها را قبول کند و در درستی آنها شک و شبهه‌ای بخود راه ندهد.

اصل اول اقلیدس چنین تعریف می‌شود: از دو نقطه تنها یک خط راست می‌گذرد. خط راست نیز کوتاهترین خطی تعریف شده است که دو نقطه را بهم وصل نماید. اصل دوم چنین است: خط راست را تا بی‌نهایت می‌توان امتداد داد.

به عبارت دیگر در فضای اقلیدسی حد و مرزی وجود ندارد.

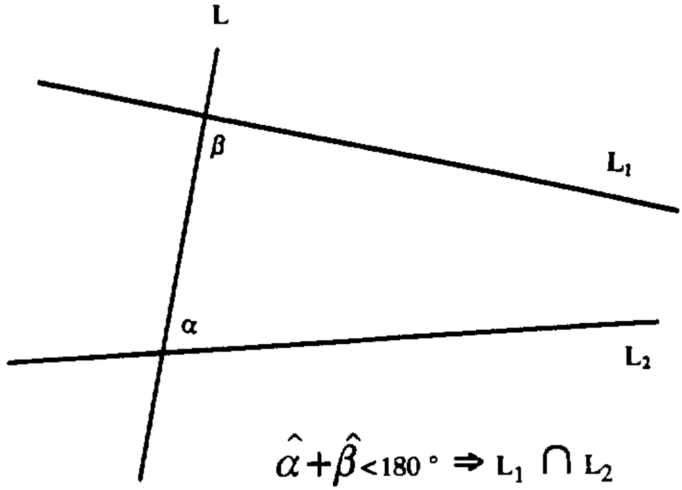
اصل سوم چنین است: می‌توان دایره‌ای با هر مرکز و هر شعاع رسم کرد.

اصل چهارم بما می‌گوید که زوایای قائمه با یکدیگر برابرند.

اصل پنجم چنین است، از یک نقطه خارج یک خط تنها یک خط می‌توان موازی آن رسم نمود.

البته اصل پنجم در کتاب *اصول اقلیدس*، صورت دیگری دارد که ما برای درک بهتر این مقاله ناگزیریم همان صورت را بیاوریم. این اصل به شکل زیر نزد اقلیدس مطرح گردیده است:

«هرگاه دو خط به وسیله خط سومی چنان قطع شوند که مجموع اندازه دو زاویه درونی واقع در یک طرف خط قاطع کمتر از ۱۸۰ درجه باشد آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف خط قاطع تلاقی می‌کنند»



$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}<180^\circ \Rightarrow L_1 \cap L_2$$

این اصل موضوع چون بداهت اصول موضوعهٔ دیگر اقلیدس را نداشت. از همان دوره باستان، ریاضیدانان در اصل بودن آن تردید کردند و بر آن شدند یا آنرا اثبات کرده بدینگونه آنرا بصورت قضیه‌ای هندسی در آورند و یا اصلی را جایگزین آن کنند که بدیهی‌تر از این اصل باشد. البته به دلیل اینکه این اصل اثبات‌ناپذیر است هیچگاه موفق به این کار نشدند.

در دوره اسلامی پیش از خواجه نصیر باید از نیریزی،جوهری، ثابت بن قره، ابن‌هیثم و خیام نام برد که هر یک رسایلی در این زمینه تدوین کردند و یا در تفسیر *اصول اقلیدس* فصل مهمی را به این اصل اختصاص دادند.

رساله شافیه خواجه نصیر همانطوریکه قبلاً نیز اشاره کردیم از همهٔ این رساله‌ها مفصّل‌تر و بی‌شک از مهمترین این رساله‌های می‌باشد.

این رساله به سه بخش تقسیم می‌شود. بخش اول مقدمه نسبتاً کوتاهی است که در آن خواجه دلیل اینکه اصل پنجم به برهان نیاز دارد را توضیح می‌دهد.

در بخش دوم خواجه نصیر، نظریات سه ریاضیدان پیش از خود یعنی جوهری و ابن هیثم و خیام را درباره خطوط متوازی نقل و بررسی می‌کند. و خلاصه در بخش سوم دانشمند طوس تلاش می‌کند که خود اصل توازی را اثبات نماید:

در این مقاله به تحلیل این سه بخش از رساله شافیه می‌پردازیم:

طوسی در مقدمه رساله خود، اصل موضوع توازی را از آن جهت قابل اثبات می داند که مربوط به اَعراضِ ذاتی خطوط می‌باشد.[۳] او که اصطلاح «اعراض ذاتی» را ظاهراً از کتابهای منطقی ارسطو و نیز *ایساغوجی* فورفوریوس گرفته است، درباره معنی آن توضیحی نمی‌دهد. تنها به مثالی از آن قناعت می‌کند. مثالی که طوسی از اعراض ذاتی خطوط متوازی می‌دهد، در واقع همان اصل پنجم اقلیدس است، یعنی دو خطی که خط سومی را قطع کرده‌اند بطوریکه مجموع زوایای داخلی متقابل آنها از ۱۸۰ درجه کمتر باشد. این دو خط در همان طرف دو زاویه یکدیگر را تلاقی خواهند کرد.[۴]

به عقیده طوسی این وضعیت از آن رو عرضی است که مربوط به خواص ذاتی دو خط مفروض و نیز خط قاطعی که آنها را قطع کرده است، نیست. بلکه وضعیتی است، تصادفی که باید درستی آنرا اثبات کرد.

بنابراین اصل «موضوع پنجم اقلیدس» برای طوسی، حکم پوستولا و یا مصادره اثبات‌ناپذیر را ندارد. گزاره‌هائی راکه نیازی به اثبات ندارند، طوسی «مبادی موضوعی» نامیده است. اینها برای آن وضع شده‌اند تا هندسه دانان را در اثبات قضایای هندسی یاری دهند و اثبات خود آنها به علم دیگری که فوق علم هندسه است، یعنی فلسفه نیاز دارد.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، اینست که فیلسوف با چه فنی آشنائی دارد که میتواند، درستی «مبادی موضوعه» یا اکسیوم‌ها را ضمانت کند.

گرچه طوسی توضیحی در این باره نمی‌دهد و اندیشه‌اش چندان روشن نیست با اینحال بنظر می‌رسد که برای او، این اصولی که فیلسوف درستی آنها را تأیید می‌کند، همانهائی است که در ذات خود بدیهی می‌باشند و به همین جهت است که طوسی آنها را «مبادی البینة بانفسها»[۵] نیز تعبیر کرده است، یعنی گزاره‌هائی که درستی آنها را از راه شهود محض می‌توان دریافت. اما اصل پنجم اقلیدس در ذات خویش بدیهی نیست، یعنی نمی‌توان آنرا بین اکسیوم‌ها و یا گزاره‌هائی که شهود محض وجودشان را مبرهن می‌کند جای داد. اگر چنین بود اقلیدس آنرا بین اکسیونهائی از قبیل «چیزهای برابر با یک چیز با هم برابرند» جای می‌داد.

---

۳. خلیل جاویش، *نظریة المتوازیات فی الهندسة الاسلامیة*، تونس ۱۹۸۸ م. ص ۱۶۱

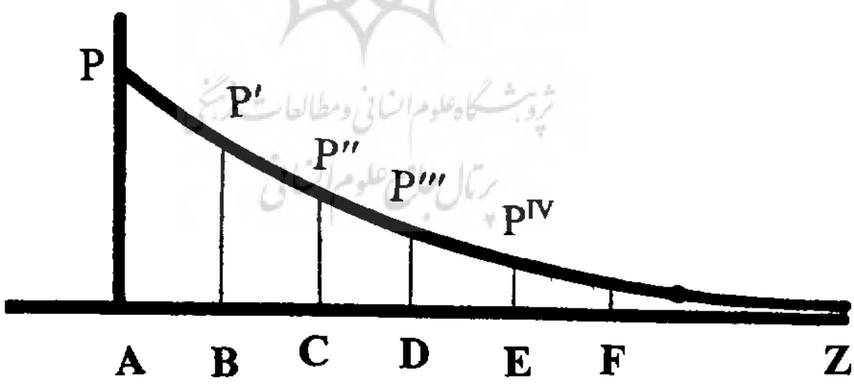
۴. *همان مأخذ* ص ۱۶۱ ۵. *همان مأخذ*، ص ۱۶۱

این اصل به عقیده طوسی از شهود برخودار نیست و نمی‌توان باور کرد که دو خط مورد بحث، در آن یکدیگر را قطع خواهند کرد.

«زیرا اگر این دو خط ادامه یابند درست است که فاصله آنها رو به کاهش می‌رود، زیرا که هر یک از این فاصله‌ها به اندازه مضربی از فاصله ما قبل خود کاسته می‌شوند، اما از آنجائیکه خط را می‌توان تا بی‌نهایت بخش کرد فاصله این دو خط هیچگانه به صفر نمی‌رسد.»[۶]

این مطلب طوسی را می‌تون به صورت زیر مجسم کرد.

هرگاه خط AZ را در شکل زیر در نظر بگیریم وروی آن نقاط A,B,C,D وغیره را به فاصله‌های مساوی از یکدیگر انتخاب کنیم وروی A عمودی به طول دلخواه AP رسم کنیم و نیز بر نقطه B عمود BP' را رسم کنیم بطوریکه طول آن مساوی نصف AP باشد و همین‌طور عمودهای CP'' و EP''' و غیره را رسم کنیم که طول هر یک مساوی نصف عمود ماقبل خودباشد. یک منحنی پیوسته نقاط P و P' و P''و P''' و غیره را بهم وصل می‌کند که گرچه به خط AZ نزدیک میشود ولی هیچگاه آن را قطع نمی‌کند، بلکه به این خط مجانب خواهد بود.



۶. همان مأخذ، ص ۱۶۲

این برهان طوسی بر عدم تلاقی دو خط مورد بحث در اصل پنجم اقلیدس کمابیش نزدیک به برهان جمینوس (Géminus) ریاضیدان یونانی می‌باشد که مثال قدیمی هذلولی و مجانبهای آنرا بخاطر می‌آورد.

در بخش دوم رساله‌اش طوسی به نقل قسمتهائی از رساله‌های جوهری و ابن هیثم و خیام که پیش از او در این زمینه تحقیق کرده‌اند می‌پردازد و از بعضی مطالب آنها انتقاد می‌کند.

مثلاً بر ابن هیثم خرده میگیرد که در اثبات اصل توازی اقلیدس از حرکت استفاده کرده است و این خطای محض می‌باشد، حرکت با هندسه هیچگونه تناسبی ندارد.[۷] بر خیام نیز هم اشکالات فلسفی و هم اشکالات هندسی می‌گیرد[۸] که بررسی آنها از حوصله این مقال خارج است.

در بخش سوم، طوسی خود به اثبات اصل پنجم می‌پردازد و برای اینکار آن را به زعم خود از دو طریق مختلف ثابت می‌کند.در طریق اول از ۷ گزاره به شرح زیر استفاده می‌کند.

گزاره ۱

در این گزاره طوسی بر خلاف ابن هیثم بدون هیچگونه ابهامی فاصله بین یک نقطه و یک خط نامتناهی را تعریف می‌کند. این فاصله کوتاهترین خطی است ما بین این نقطه و خط مفروض. او سپس با استفاده از خواص مثلث‌ها ثابت می‌کند که چنین خطی عمودی است که از نقطه مفروض روی این خط فرود آید.

فرض: خط bw و نقطه a در خارج آن رادر نظر میگیریم :

حکم :کوتاهترین فاصله مابین a و bw عمود ab بر bw می‌باشد.

اثبات :

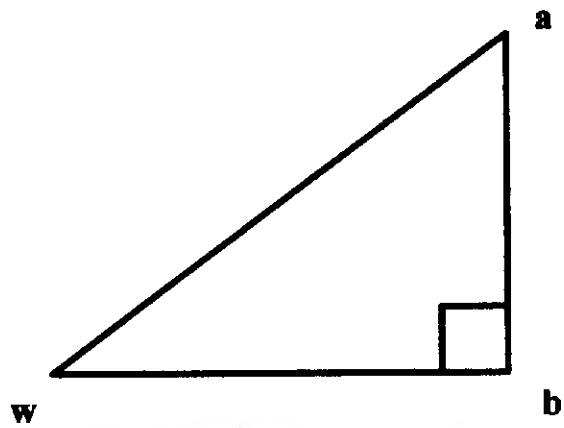
$$\left.\begin{array}{l} a\hat{w}b+a\hat{b}w<180^\circ \\ a\hat{b}w=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow a\hat{w}b<90^\circ$$

$$(a\hat{w}b<90^\circ, a\hat{b}w=90^\circ)\Rightarrow ab<aw$$

---

۷. همان مأخذ صص: ۱۶۵-۱۶۴ ۸. همان مأخذ

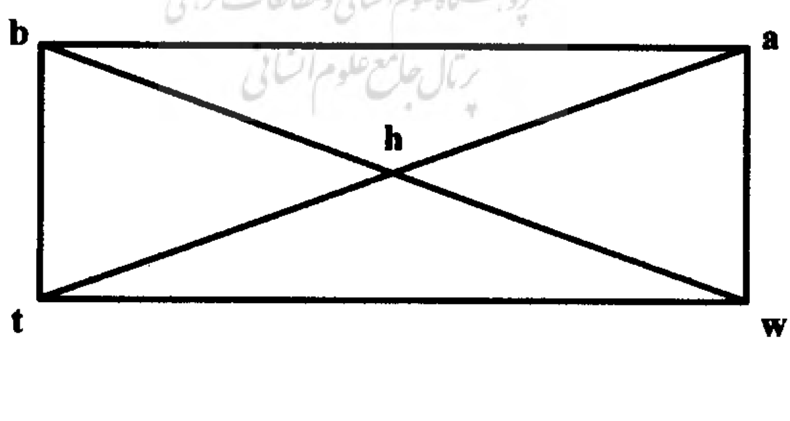
$$(\hat{awb} < 90^\circ, \hat{abw} = 90^\circ) \Rightarrow ab < aw$$



گزاره ۲

این گزاره در واقع گزاره شماره ۱ عمر خیام برای اثبات اصل توازی اقلیدس است. یعنی خطی که دو انتهای دو عمود مساوی بر یک خط را بهم وصل می‌کند، با این خطوط زوایای مساوی می‌سازد.

او این گزاره را با استفاده از خواص مثلث‌ها ثابت می‌کند.[9]



فرض $bt \perp tw,\ bt = aw,$

۹. همان مأخذ صص ۱۷۵ - ۱۷۶

و $aw \perp tw$

حکم: $baw = abt$

اثبات $at \cap bw = \{h\}$

$\Delta atw = \Delta wbt \Rightarrow at = bw$

پس: $\Delta atb = \Delta wba \Rightarrow b\hat{a}w = a\hat{b}t$

گزاره ۳

این گزاره مهمترین گزاره طوسی می‌باشد، در این گزاره نفوذ خیام را بر طوسی بخوبی می‌توان مشاهده کرد، زیرا چهار ضلعی مورد بحث طوسی همان چهار ضلعی متساوی الساقین دو قائمه خیام می‌باشد و طوسی بر آنست که تا ثابت کند که دو زاویه فوقانی این چهار ضلعی نیز قائمه است. او همانند خیام، پس از اثبات اینکه دو زاویه مذکور، مساویند دو حالت منفرجه و حاده برای آنها در نظر می‌گیرد وبعد با برهان خلف سعی می‌کند که این دو حالت مزاحم را به تناقض بکشاند و در نتیجه قائمه بودن دو زاویه دیگر چهار ضلعی را نتیجه بگیرد. با تمام شباهتی که بین برهان خیام و طوسی موجود است. ایندو در جزئیات با هم اختلاف دارند.

زیرا طوسی برای اثبات اینکه دو قاعده چهار ضلعی، واگرا و یا همگرا هستند مثلث‌های قائم الزاویه‌ای در داخل چهار ضلعی ترسیم می‌کند. ترسیمی که در برهان خیام دیده نمی‌شود.

طوسی با ترسیم این مثلث‌ها و با استفاده از خواص آنهادر آن واحد واگرائی و همگرائی دو قاعده چهار ضلعی را ثابت می‌کند، چیزی که پوستولای مورد قبول او یعنی پوستولای خیام را به تناقض می‌کشد.

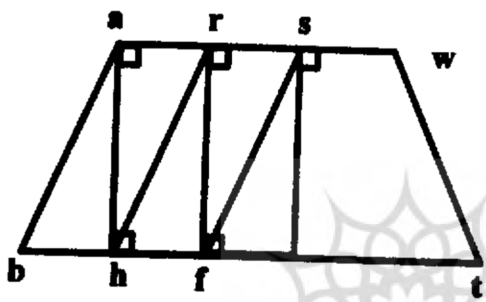
زیرا طبق این پوستولا دو خطی که خط سومی را قطع کرده‌اند نمی‌توانند در یک طرف این خط قاطع در آن واحد رو به گشادگی و رو به تنگی روند. این پوستولا چنانکه می‌دانیم هم ارز اصل پنجم اقلیدس است.

نکته قابل تأمل این است که خواجه که به ریاضیدانان پیش از خود خرده گرفته بود که اصولی که آنان برای جانشین سازی اصل پنجم پیشنهاد کرده‌اند همگی معادل این اصل اقلیدس است، متوجه این مطلب نگردیده که این ایراد بر خود او نیز وارد است.

فرض
$$\begin{cases} \hat{wtb}=\hat{abt}=۹۰^\circ \\ ab=wt \end{cases}$$

حکم $\hat{baw}=\hat{awt}=۹۰^\circ$

اثبات :زوایای baw و awt طبق گزاره ۲ با هم مساویند فرض میکنیم که این دو زاویه حاده باشند یعنی: $\hat{baw}=twa<۹۰^\circ$ ترسیمات زیر را انجام می‌دهیم:



$$\begin{cases} ah\perp aw,\ h\in tb;\ hr\perp tb,\ r\in aw \\ rf\ \perp aw,\ f\in tb;\ fs\perp tb,\ s\in aw \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

aht زاویه خارجی مثلث abh می‌باشد

$\hat{aht}>۹۰^\circ, \hat{hrw}>۹۰^\circ, \hat{rft}>۹۰^\circ$

$fsw>۹۰^\circ, \dots$

یا

$$\begin{cases} \hat{abh}=۹۰^\circ, \hat{ahb}<۹۰^\circ \Rightarrow ab<ah \\ \\ \hat{har}=۹۰^\circ, \hat{hra}<۹۰^\circ \Rightarrow ah<hr \\ \hat{rhf}=۹۰^\circ, \hat{rfh}<۹۰^\circ \Rightarrow hr<rf \\ \hat{frs}=۹۰^\circ, \hat{rsf}<۹۰^\circ \Rightarrow rf<sf \end{cases}$$

$ab<ah<hr<rf<fs<\dots$

$ab<hr<fs<\dots$

از این نامساوی‌ها نتیجه میشود که aw و bt نسبت بهم از سوی w و t واگرا هستند.[10]

برهان مشابهی را از طرف wt، انجام می‌دهیم، از آنجائیکه $twa>۹۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم: bt و aw از طرف a,b همگرا می‌باشند و بنابراین aw و bt از طرف w,t واگرا می‌باشند. (۲)

نتیجهٔ (۱) و نتیجه (۲) متناقض‌اند، پس زوایای مساوی baw و twa نمی‌توانند منفرجه باشند.فرض دوم: $\hat{baw}=\hat{twa}<۹۰^\circ$

$$(rba+arb<۹۰^\circ),\ arb=۹۰^\circ) \Rightarrow rba>۹۰^\circ$$

---

۱۰. همان مأخذ صص ۱۷۶-۱۷۸

$(rba < ۹۰^\circ, abh = ۹۰^\circ) \Rightarrow rbh < ۹۰^\circ$

$(rba + arb < ۱۸۰^\circ, arb = ۹۰^\circ) \Rightarrow rba < ۹۰^\circ$

$(rba < ۹۰^\circ, abh - ۹۰) \Rightarrow (rbh < ۹۰^\circ)$

$(arb = ۹۰^\circ, rab < ۹۰^\circ) \Rightarrow (ab > br)$

$(rsh = ۹۰^\circ, hrs < ۹۰^\circ) \Rightarrow (rh > hs)$

$ab > br > rh > hs > sf....$

$ab > rh > sf....$

از اینجا نتیجه می‌شود که aw و bt از طرف w و t واگرا می‌باشند (′۱)

و با برهان مشابهی می‌توان ثابت کرد که از جهت زاویه حاده twa خطوط aw و bt همگرا می‌باشند (′۲)

بنابراین (′۱) (′۲) با هم متناقص‌اند. در نتیجه دو زاویه مساوی twa و baw نه حاده و نه منفرجه‌اند پس قائمه می‌باشند.

پیش از آنکه به گزاره (۴) بپردازیم لازم است بر اهمیت روش طوسی برای همگرائی و یا واگرائی دو قاعده چهار ضلعی متساوی الساقین دو قائمه تاکید کنیم. خیام که پیش از طوسی برای همگرائی دو قاعده این چهار ضلعی تلاش کرد، از تقارن استفاده نمود اما روش طوسی که کاملاً هندسی است برروش خیام برتری دارد با این روش به سهولت می‌توان همگرائی دو خط را ثابت کرد. البته همانطوریکه قبلاً در گزاره ۳ دیدیم طوسی از خواص مثلثها برای اینکار استفاده می‌کند. ما مجدداً به شکل برمی‌گردیم و اینبار از هندسه تحلیلی استفاده می‌نمائیم.

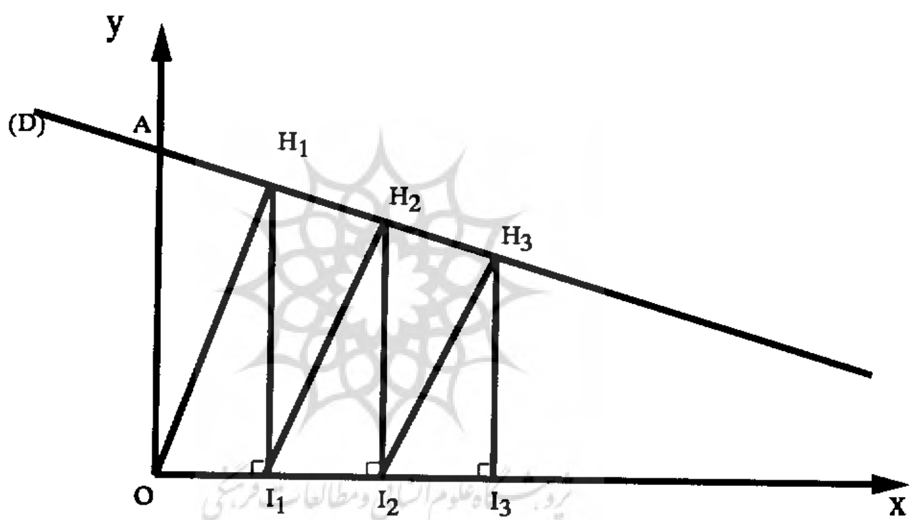
فرض می‌کنیم که خط (D) به معادله $y=mx+a$ قاعده فوقانی چهارضلعی مذکور باشد و قاعده دیگر آن روی محور Ox دستگاه مختصات دکارتی باشد.

نیز فرض میکنیم که زاویه AOx که برابر با ‎۹۰°‎ است، یکی از زوایای این چهار ضلعی باشد. با فرض $m>O$ و $a=OA>O$ و اینکه زاویه A این چهار ضلعی حاده است. از O عمود $OH_۱$ را بر (D) اخراج می‌کنیم. از $H_۱$ نیز عمود $H_۱I_۱$ رسم می‌کنیم به همین ترتیب مثلث‌های قائم الزاویه‌های را مطابق شکل زیر در چهار ضلعی تشکیل می‌دهیم:

فرض می‌کنیم $x_۱=OI_۱, x_۲=I_۱I_۲, ... x_k=I_{k-۱}I_k$ باشد. در این صورت $x_k ... x_۲, x_۱$ یک تصاعد هندسی با جمله اول $x_۱=\frac{am}{۱+m^۲}$ و قدرنسبت $r=\frac{۱}{۱+m^۲}$ می‌سازند که مجموع آنها:

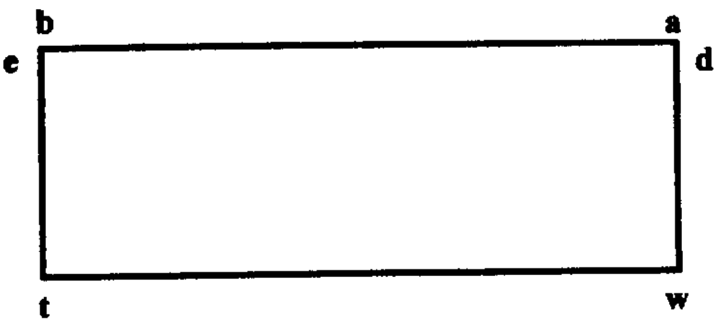
$$S_p = \sum_{k=1}^{k=p} x_k$$

دارای حدی برابر با $\frac{a}{m}$ می‌باشدکه دقیقاً مساوی طول OB است که درآن B محل تلاقی خط D و محور Ox می‌باشد.



گزاره ۴

طوسی چهارمین گزاره خیام را در نظر می‌گیرد و آنرا بکمک گزاره ۳ خود ثابت می‌کند. در این گزاره باید ثابت کرد که در یک مستطیل اضلاع روبرو با هم مساویند.



فرض: abwt یک مستطیل می‌باشد.

فرض H_1 : (ab>wt)

ترسیمات: wd=ab, d∈wt

ad را وصل می‌کنیم:

اثبات: ab=wd , abw=bwd= °۹۰

$\Rightarrow$ bad = adw = °۹۰

طبق گزاره ۳ داریم: bad=adw= °۹۰

پس bad = °۹۰ , bat =°۹۰

$\hat{bad} < \hat{bat}$

که در این صورت محال است، پس فرض H_1 غیر ممکن است.

حال فرض H_2 را در نظر می‌گیریم که در آن ab<wt

ترسیمات: be=wt, e ∈ a b

ew را وصل می‌کنیم.

اثبات: با برهان مشابه با آنچه قبلاً دیدم می‌توان نتیجه گرفت که H_2 نیز غیر ممکن است.

بنابراین از عدم امکان فرضهای H_1 و H_2 نتیجه می‌شود.

ab=wt

گزاره ۵

این گزاره طوسی هم ارز گزاره ۲۹ اقلیدس می‌باشد با این تفاوت که طوسی بجای دو خط متوازی دو خط عمود بر یک خط را در نظر می‌گیرد.

بنابراین طوسی به مفهوم هم فاصله بودن خطوط متوازی بر می‌گردد.

و با این مفهوم همانطوریکه قبلاً نیز بیان کردیم می‌خواهد یادآور این حقیقت شود که

خطوطی وجود دارند که گرچه بهم نزدیک می‌شوند ولی هرگز یکدیگر را تلاقی نمی‌کنند یعنی با هم بشکل مجانب قرار می‌گیرند.[۱۱]

بنابراین بنظر او تنها خطوطی را می‌توان موازی شمرد که از یکدیگر هم‌فاصله باشند. و از طرف دیگر همین فاصله بودن خطوط متوازی است که به او امکان اثبات گزاره‌اش را بدون توسل به پوستولای اقلیدس وتنها با استفاده ازگزاره‌های پیشین او و نیز خواص مثلثها می‌دهد.[۱۲]

گزاره ۶

در این گزاره حالت خاصی از اصل موضوع پنجم قلیدس مورد بررسی قرار می‌گیرد. و آن حالتی است که یکی از دو زاویه‌ای که بوسیله خط قاطع با دو خط دیگر تشکیل شده قائمه باشد.

فرض می‌کنیم که دو خط OA و MN بوسیله OB قطع شوند بطوریکه زاویه α حاده و زاویه β قائمه باشد.

باید ثابت کرد که هرگاه خطوط OA و MN را امتداد دهیم یکدیگر را قطع می‌کنند.

هرگاه این حالت خاص ثابت شود، حالت کلی که در آن α, β زاویه‌های غیر شخصی هستند نیز ثابت خواهد شد.

برای اثبات این مطلب طوسی مثلث قائم الزاویه‌ای که OA وتر و OB یکی از اضلاع آن باشد را ترسیم می‌کند. ضلع دیگر این مثلث قائم الزاویه بر OB عمود خواهد بود که از نقطه‌ای از OA فرود آمده است.

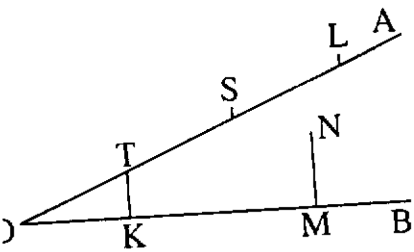
بطوریکه این ضلع خارج از MN می‌باشد.

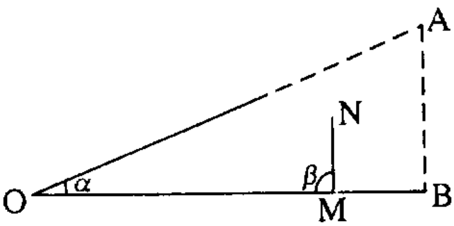
این ترسیم با توسل به اصل ادوکس -ارشمیدس امکانپذیر است.

هنگامیکه این مثلث ساخته شد. خواجه نصیر بکمک اصلی که بعدها به اصل پاش مشهور شد ثابت می‌کند که خط MN را که OB را در وضعیتی که موازی AB است قطع کرده، الزاماً OA نیز قطع خواهد کرد.[۱۳]

---

۱۱. همان *مأخذ* صص ۱۷۸-۱۷۹ ۱۲. *همان مأخذ* صص ۱۷۹-۱۸۱ ۱۳. مأخذ صص ۱۸۱-۱۸۳



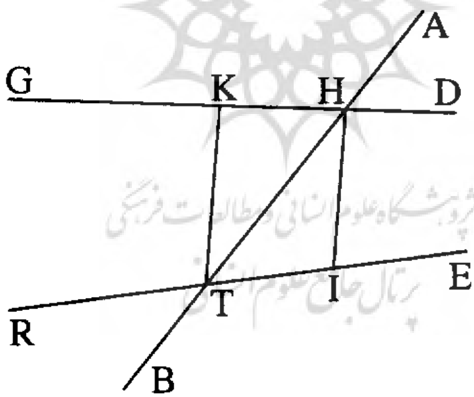


گزاره ۷

در این گزاره اصل پنجم اقلیدس اثبات گردیده است:

خواجه نصیر سه حالت در نظر می‌گیرد

حالت اول هنگامی است که یکی از دو زاویه تشکیل شده بوسیله خط قاطع و دو خط مفروض قائمه باشد، زاویه دوم الزاماً حاده است.

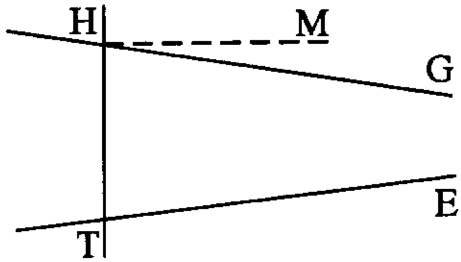


دراین صورت خواجه گزاره شماره ۶ را روی آن اعمال می‌کند.

حالت دوم هنگامی است که یکی از زاویه‌های خط قاطع با دو خط مفروض حاده و دیگری منفرجه باشد.

همانطوریکه در شکل زیر مشاهده می‌کنیم در این شکل زاویه THD منفرجه می‌باشد. برای اثبات اصل اقلیدس از نقطه T خط TK را بر GD عمودی می‌کنیم حال با استفاده ازگزاره ۵ می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ KTE حاده می‌باشد و در این حالت، مسأله

به حالت اول منجر می‌شود.



حالت سوم حالتی است که هر دو زاویه مورد بحث حاده باشند مثل حالتی که در شکل زیر در نظر گرفته شده. طوسی عمود HM را بر HT اخراج می‌کند. با استفاده از گزاره ۶، HM خط TE راتلاقی خواهد کرد. بنابراین TE خط HG را که ما بین HM و TE قرار دارد را قطع خواهد کرد.[۱۴]

روش دوم

در روش دوم طوسی برای اثبات اصل پنجم اقلیدس، نفوذ جوهری را بر او بخوبی توان مشاهده کرد.

چرا که این اثبات کاملاً مبتنی بر رسم یک مثلث و مخصوصاً مثلث قائم الزاویه می‌باشد. یعنی روشی که پیش از طوسی در اثر جوهری بیان گردیده است.

در این روش طوسی از هشت گزاره استفاده می‌کند، که در آن پنج گزاره اولیه همان گزاره‌هائی است که او در روش اول خود برای اثبات اصل توازی استفاده کرده است.

روش منسوب به خواجه نصیرالدین برای اثبات اصل پنجم اقلیدس

چنانکه قبلاً نیز اشاره کردیم، روش دیگری برای اثبات اصل پنجم اقلیدس در تحریر اصول اقلیدس که به خواجه نصیرالدین طوسی منسوب است آمده است .این تحریر را محققین تاریخ علوم جعلی دانسته‌اند زیرا تاریخ تألیف آن چندین سال بعد از مرگ خواجه را نشان می‌دهد.

آنچه مسلم است اینست که این تحریر حاصل مکتب علمی خواجه می‌باشد.

---

۱۴. همان مأخذ صص ۱۸۶-۱۸۵

نویسنده و یا نویسندگان این متن قطعاً در نگارش آن از کارهای خواجه اقتباس کرده‌اند.

برگردیم به روش اثبات اصل توازی دراین متن.

در رسالهٔ *شافیه* چنانکه مشاهده کردیم خواجه زیر نفود افکار خیام قرار داشت، اما در اثباتی که در تحریر به خواجه منسوب است، تأثیر جوهری را بر اوکماپیش می‌توان مشاهده کرد.

مکاتبه با عَلَم الدین قیصر

پس از اتمام *رساله شافیه*، خواجه ظاهراً رساله خود را برای آگاهی از نظر علم‌الدین قیصر ریاضیدان مصری معاصر وی که در آن هنگام در سوریه اقامت داشت ارسال می‌دارد. همین امر موجب مکاتبه این دو دانشمند درباره تئوری، خطوط متوازی می‌شود.

دو نامه از علم الدین قیصر و نیز دو نامه جوابیه از طوسی موجود است که به آخر رساله شافیه ضمیمه گردیده است.

این مکاتبات گرچه چیز تازه‌ای به نظریه خطوط متوازی نمی‌افزاید، اما از نظر تاریخی حایز اهمیت است. مثلاً علم الدین در نامه اول خود به طوسی متذکر می‌شود که اصل اقلیدس در حالت خاص خود یعنی حالتی که یکی از دو زاویه تشکیل شده دو خط مفروض با خط سوم قائمه باشد، قبلاً در شرح سمپلیسیوس بر اصول اقلیدس مورد بررسی قرار گرفته است.

در پاسخ به نامهٔ اول علم الدین، طوسی متذکر می‌شود که هرگز برهان سمپلیسیوس را ندیده است.

درنامه دوم خود علم الدین بر طوسی خرده می‌گیرد که در اثبات خود برای اصل پنجم اقلیدس، از پوستولائی استفاده کرده است که نمیتوان آنرا به عنوان گزاره هندسی پذیرفت. بنابراین پوستولا دو خطی که خط سومی را قطع کرده‌اند، اگر در یک طرف این خط قاطع رو به فراخی روند، در همان طرف نمی‌توانند رو به تنگی رود.

طوسی در نامه دوم خود، سعی می‌کند که به این انتقاد علم الدین پاسخ منطقی دهد. او می‌گوید که پوستولای مورد استفاده وی هیچگاه به عنوان یک حکم هندسی معرفی نگردیده است، بلکه اصل موضوعه‌ای است که اثبات آن به علم دیگری غیراز هندسه یعنی فلسفه نیازمندست. یعنی درستی آنرا فیلسوف ضمانت می‌کند او برای روشن

کردن مطلب، به مخاطب خود متذکر می‌شود که این پوستولا همانند پوستولای اقلیدس می‌باشد که بر طبق آن دو خط راست نمی‌توانند فضائی را اشتغال نمایند.

نفوذ تئوری خطوط متوازی طوسی در جهان غرب

تحریر *اصول اقلیدس* منسوب به خواجه نصیرالدین طوسی که در سال ۱۵۹۴ میلادی در ایتالیا به همت خاورشناسی بنام ریمودی (Raimondi) بصورت سربی به چاپ رسید همانطوریکه که قبلاً اشاره شد شامل اثباتی از اصل موضوع اقلیدس بود. این قسمت را والیس بکمک ادوارد پوکوک (E.Pocok) استاد کرسی زبانهای شرقی در دانشگاه آکسفورد به زبان لاتینی ترجمه کرد، که در سال ۱۶۹۳ در جلد دوم از آثار ریاضی والیس بچاپ رسید. [۱۵]

همین ترجمه بود که مورداستفاده ساکری هندسه دان و منطق دان بزرگ ایتالیائی قرن هجدهم میلادی قرار گرفت.

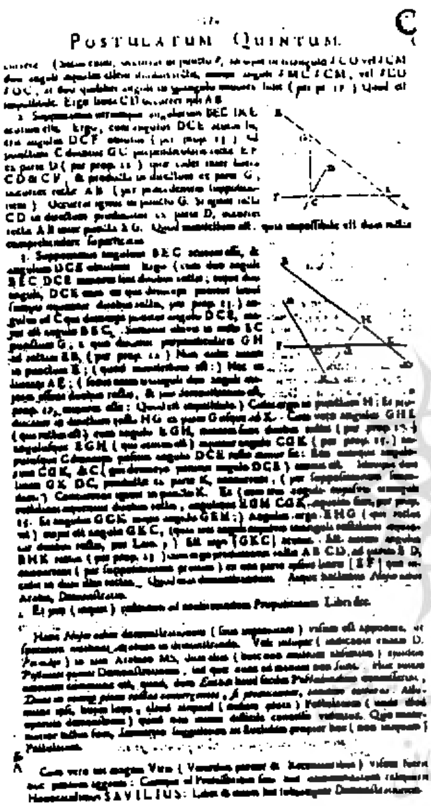
ساکری در کتاب *اقلیدس عاری از نقص*، که آنرا در سال ۱۷۳۳ به چاپ رسانید صریحاً به نام طوسی اشاره کرده و در آن روش طوسی را برای اثبات اصل پنجم اقلیدس مورد نقادی علمی قرار داد.

پس از این زمان کاستیون (Casstillon) یکی دیگر از ریاضیدانان اروپائی در مقاله مهمی که درباره اصل خطوط متوازی اقلیدس به زبان فرانسه نوشت و در سالهای ۱۷۸۶ تا ۸۹ در نشریه آکادمی پادشاهی، علوم و هنرهای زیبای برلن به چاپ رسانید، ضمن نقل روش اثبات طوسی به تجزیه و تحلیل آن پرداخت. [۱۶]

15. J. Wallis, J. *Opera Mathematicae et Miscellanceac*, Tome 2 Oxford 1693 pp. 669-678.

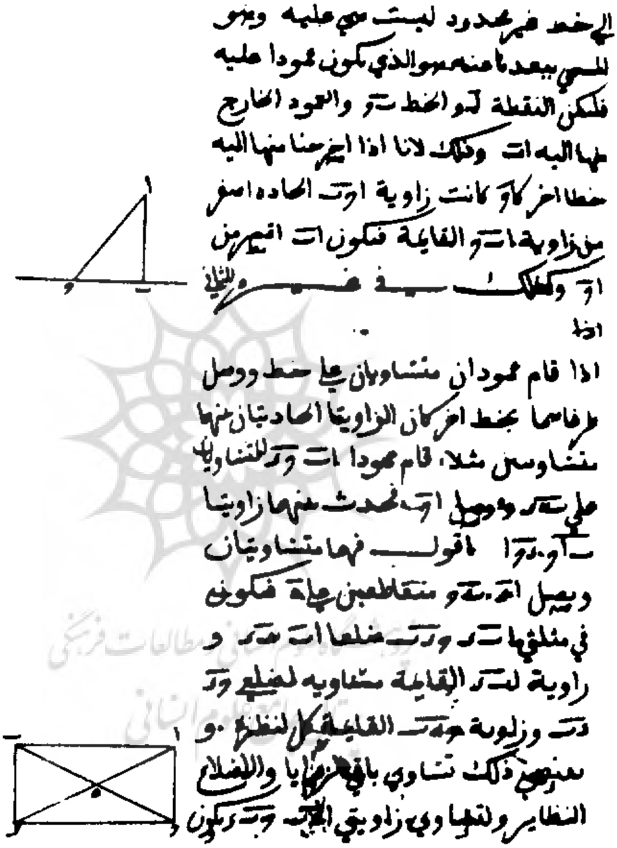
16. Casstillon, "Sur les paralléles d'Euclide" *Mémoires publiés à l'Academie Royale des sciences et Belles lettres de Berlin* 1786

قسمت آخر اثبات اصل پنجم اقلیدس از متن عربی چاپ ایتالیا



ترجمهٔ لاتینی همین قسمت از متن عربی که بهوسیلهٔ والیس و به کمک پوکوک انجام‌شده

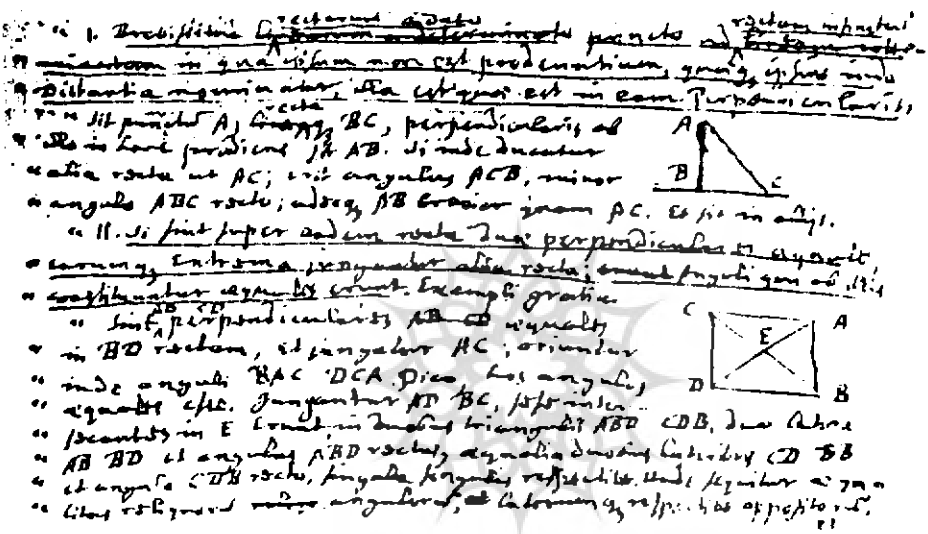
اما اثبات اول خواجه نصیر که در رساله شافیه او مندرج است نیز از طریق نسخه خطی موجود در کتابخانه لورنتین فلورانس مورد استفاده والیس قرار گرفت.


الى خط غير محدود لبست [illegible] عليه وهو
للسطح يبعد [illegible] منه هو الذي يكون عمودا عليه
فلكن النقطة [illegible] الخط [illegible] والعمود الخارج
منها اليه [illegible] وكذلك لانا اذا اخرجنا منها اليه
خطا اخر كا كانت زاوية [illegible] الحادة اصغر
من زاوية [illegible] القايمة فتكون [illegible] اعظم من
[illegible] وكذلك [illegible]
اذا قام عمودان متساويان على خط ووصل
طرفاهما بخط اخر كان الزاويتان الحادثتان منهما
متساويتين مثلا قام عمودا [illegible] المتساويان
على [illegible] ووصل [illegible] فحدث منهما زاويتا
[illegible] اقول فهما متساويتان
ويصل [illegible] متقاطعين على [illegible] فتكون
في مثلثي [illegible] ضلعا [illegible] و
زاوية [illegible] القايمة متساوية لضلعي [illegible]
[illegible] وزاوية [illegible] القايمة كل لنظيره
[illegible] ذلك تساوي [illegible] والاضلاع
النظاير [illegible] زاويتي [illegible]

گزاره‌های اول و دوم از اثبات اول طوسی
موجود در نسخهٔ خطی کتابخانه فلورانس

والیس این اثبات را نیز به زبان لاتینی ترجمه کرد.

ولی این ترجمه به چاپ نرسید و تنها نسخه خطی از آن در کتابخانه بودلیان اکسفورد بر جای ماند.



ترجمهٔ لاتینی این دو گزاره از اثبات اول به وسیلهٔ والیس و به خط این ریاضیدان موجود در کتابخانهٔ آکسفورد

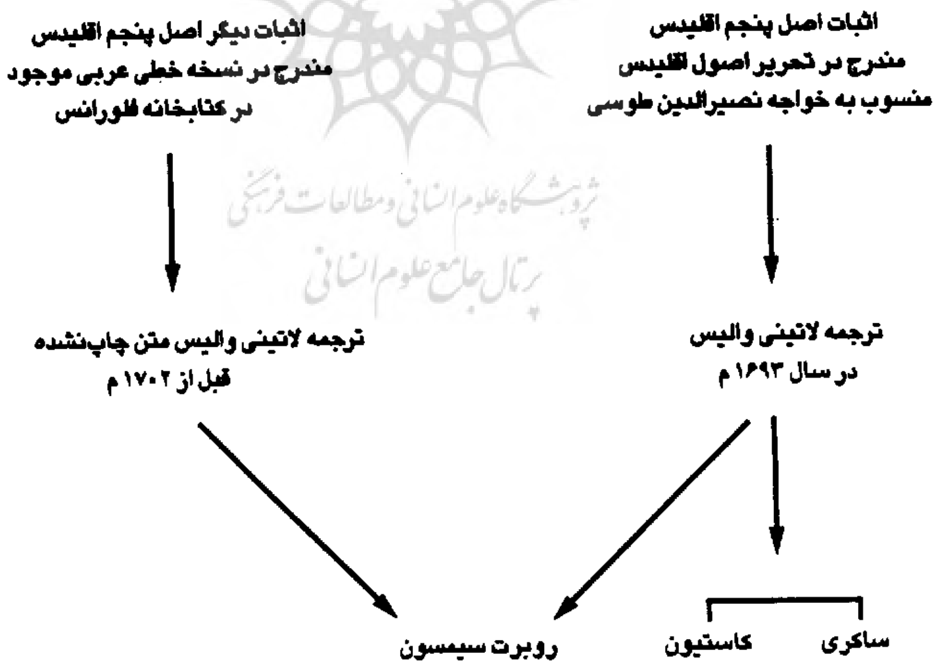
این ترجمه را قطعاً روبرت سیمسون ریاضیدان انگلیسی مورد مطالعه قرار داده است، زیرا در اثباتی که برای اصل پنجم اقلیدس داده، از همان پوستولای طوسی استفاده نموده است.

اما در بین ریاضیدانان اروپائی که درباره تئوری خطوط توازی تلاش کردند سهم ساکری از همه بیشتر است. این ریاضیدان بزرگ بدون اینکه خود متوجه شود، هندسه نااقلیدسی را کشف کرده بود. نکته مهم اینجاست که ریاضیدانانی که در قرن نوزدهم به تحقیق درباره اصل پنجم اقلیدس پرداختند بنحوی از اثر ساکری آگاهی داشتند و قطعاً از او در این کشف الهام گرفتند.

اما ساکری نه تنها در روش بلکه در تشکیل گزاره‌های خود شدیداً تحت تأثیر خیام و طوسی بوده است.

بنابراین تأثیر طوسی را بشکل زیر می‌توان مطرح کرد.

تأثیر نظریهٔ خطوط موازی خواجه نصیر طوسی در اروپا



نتیجه کلی

نظریه خطوط متوازی طوسی از دیدگاههای شناخت‌شناسی، ریاضی و تاریخی در خور تأمل است.

از نظر شناخت‌شناسی، طوسی با انتقاد از پوستولای پنجم اقلیدس بر آنست که به هندسه اقلیدس استحکام منطقی و ریاضی بدهد.

گرچه ریاضیدانان یونانی برای نخستین بار در درستی پوستولای پنجم اقلیدسی شک کردند اما برای بر طرف کردن این شک تنها از ریاضیات کمک گرفتند. حال آنکه طوسی همچون خیام برای اعتبار بخشیدن به هندسه اقلیدسی و اثبات اصل توازی علاوه بر ریاضیات از منطق ارسطوئی نیز بهره گرفت.

با توسل به همین منطق ارسطوئی هم خیام هم طوسی از کار ابن هیثم دایر بر دخالت دادن حرکت در هندسه انتقاد کردند. از نظر طوسی آن دسته از گزاره‌هائی که برهان هندسی ندارند، یعنی همانهائی که اقلیدس آنها را اکسیوم و طوسی آنان را مبادی موضوعی نامیده است، باید برهانی فلسفی داشته باشند. یعنی شهود فلسفی اعتبار آنها را تضمین می‌کند. و اما از دیدگاه ریاضیات، باید گفت که طوسی از دو طریق مختلف تلاش کرد، تا اصل موضوع اقلیدس را ثابت نماید. یکی استفاده از چهار ضلعی متساوی الساقین دو قائمه و دیگری استفاده از خواص مثلث بود.

در این تلاش خود، او از اصل پیوستگی ادوکس ـ ارشمیدس و نیز از اصلی که بعدها به نام اصل پاش معروف گردید استفاده نمود. از نظر تاریخی نیز اهمیت کار طوسی در آن است که برهانش توسط والیس ریاضیدان اروپائی، به زبان لاتینی ترجمه شد و بدین طریق نه تنها به اروپا راه یافت بلکه سرآغازی برای تلاش ریاضیدانان اروپائی برای اثبات اصل موضوع اقلیدس شد. این تلاشها بالاخره در قرن نوزدهم به کشف هندسه‌های نااقلیدسی منجر شد.