دو نکته مهم در مورد خواص ماتریسهای داده‌ها وستاده‌ها

هوشنگ آذرسهد

۱ـ اثبات این قضیه، که توان n ام ماتریس ضرائب فنی داده‌ها وستاده‌های بخشهای اقتصادی یعنی A^n بازاء $n \to \infty$ دارای حد بوده و این حد برابر است با صفر، بما این امکان را خواهد داد که ماتریس $(I-A)^{-1}$ را که تقاضای نهائی بخشهای مختلف را به تولید کل این بخشها تبدیل مینماید به‌یک سری ماتریسی به‌شکل $I+A+A^2+\cdots+A^r+\cdots$ بسط بدهیم، (این سری ماتریسی کمک بزرگی در عکس کردن ماتریس $(I-A)$ خواهد کرد).

در اتحاد ماتریسی $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I-A^n$

(I ماتریس یکه $m.m$ میباشد)، وقتی $\lim_{n\to\infty} A^n=0$ باشد خواهیم داشت:

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^r+\cdots)=I$$

وازآنجا سری $(I+A+A^2+\cdots+A^r+\cdots)$ ماتریس معکوس ماتریس $(I-A)$ خواهد بود. بعبارت دیگر $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^r+\cdots$

حال باید دید که چرا وقتی که A یک ماتریس ضرائب فنی داده‌ها وستاده‌های بخشهای مختلف اقتصادی فرض شود همواره $\lim_{n\to\infty} A^n=0$ میباشد. برای اثبات این امر اول باید تحقیق بکنیم که مقادیر ویژه ماتریس A^n دارای مدول کوچکتر از واحد میباشد و یا بعبارت دیگر: $\forall i\in(1,2,\cdots,m)\ |\lambda_i|<1$. زیرا که اگر P ماتریس متشکل از بردارهای ویژه ماتریس A باشد میتوان A را بصورت $A=PGP^{-1}$ نوشت (G ماتریس قطری مقادیر ویژه میباشد). لذا شرط لازم برای اینکه $\lim_{n\to\infty} A^n=\lim_{n\to\infty} PG^nP^{-1}=0$ باشد این است که اجزاء واقع در روی قطر ماتریس G^n یعنی $\lambda_i^n(i\in 1,2,\cdots,m)$ بازاء $n\to\infty$ حد صفر داشته باشند ومستلزم این امر شرط $|\lambda_i|<1$ است. اثبات تحقق شرط فوق معمولا دشوار و احتیاج به شناسائی قضایای زیادی دارد و بهمین دلیل است که در کتابهای کلاسیک اقتصاد از اثبات آن صرفنظر میشود و فقط به‌وجود آن شرط اشاره مینمایند.

یک روش ساده برای اثبات حد صفر ماتریس A^n

فرض اینکه مجموع اجزاء واقع برروی‌هرستون ماتریس کوچکتر است از واحد، فرض بی‌موردی نیست، زیرا مجموع اجزاء ستون متناظر بایک بخش در ماتریس داده‌ها وستاده‌ها برابر یک باشد این‌بخش هیچ نوع منبع تولیدی نخواهد داشت و بنابراین نمیتواند به‌فعالیت اقتصادی ادامه دهد.

با فرض فوق خواهیم داشت $\vec{e}A < \vec{e}$ طرف اول این نامعادلهٔ ماتریسی مجموع اجزاء واقع برروی هریک از ستونهای ماتریس A و طرف دوم بردار سطری $[1,1,\ldots,1]$ میباشد. از نامعادله فوق نامعادلات ماتریسی زیر به‌سهولت بدست میآیند:

$$\vec{e}A^2 < \vec{e}A < \vec{e}$$

$$\vec{e}A^3 < \vec{e}A^2 < \vec{e}A < \vec{e}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{e}A^n < \vec{e}A^{n-1} \cdots < \vec{e}A < \vec{e}$$

نامساویهای ماتریسی فوق رابا ضرب ماتریسی مناسب میتوان به تساوی تبدیل نمود:

$$\vec{e}A = \vec{e}\,\theta^0$$

$$\vec{e}A^2 = \vec{e}A\theta^1 = \vec{e}\,\theta^0\theta^1$$

$$\vec{e}A^3 = \vec{e}A^2\theta^2 = \vec{e}\,\theta^0\theta^1\theta^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{e}A^n = \vec{e}\,\theta^0\theta^1\cdots\theta^n$$

ماتریس‌های θ^j ماتریس قطری میباشند که اجزاء آنها غیرمنفی و کوچکتر از یک هستند.

حاصلضرب (n)ماتریس قطری $\theta^0\theta^1\theta^2\cdots\cdots\theta^n$ ماتریسی است قطری که اجزاء آن از حاصلضرب اجزاء n ماتریس θ^j تشکیل شده‌اند و بدیهی است که هریک از اجزاء آن بازاء $n\to\infty$ بسمت صفر میل مینماید. درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\vec{e}A^n = 0$ یعنی حد حاصل جمع اجزاء روی هریک

از ستونهای ماتریس A^n صفر میباشد ، و چون A^n ماتریس غیرمنفی است پس ناچار هریک از اجزاء آن باید برابر با صفر باشد و یا:

$$\lim_{n \to \infty} A^n = 0$$

۲- چه رابطه‌ای بین ماکزیمم و مینیمم افزایش شاخص قیمت‌های منابع و افزایش شاخص قیمتهای بخشها وجود دارد؟

اگر A ماتریس ضرائب فنی داده‌ها و ستاده‌های واسطه بخشهای اقتصادی و B ماتریس‌ضرائب منابع باشد (جزء ij ماتریس B میزان کاربرد منبع i برای تولید واحد بخش j را نشان میدهد)، بدیهی است که درتعادل خواهیم داشت:

$$\vec{P}A + \vec{\Pi}B = \vec{P}$$

$\boxed{A(m \cdot m)}$

$\boxed{B(k \cdot m)}$

($\vec{P}$ بردار سطری شاخص قیمتهای بخشها و $\vec{\Pi}$ بردار سطری شاخص قیمتهای منابع میباشد).

رابطه تعادلی فوق بصورت $\vec{P}(I - A) = \vec{\Pi}B$ و یا $\vec{\Pi}B(I - A)^{-1} = \vec{P}$ نوشته میشود ،که رابطه تغییری آن $\triangle\vec{P} = \triangle\vec{\Pi}B(I - A)^{-1}$ است (B در حالت کلی ماتریس مربع نیست).

قضیه

مجموع اجزاء واقع در روی هریک از ستونهای ماتریس $B(I - A)^{-1}$ برابر است با واحد. چون مجموع اجزاء واقع در روی هریک از ستونهای A وستون متناظر آن در B برابر است با یک پس میتوان نوشت :

$$\vec{e}_m A + \vec{e}_k B = \vec{e}_m$$

(اندیس m و k ابعاد بردارهای سطری $\vec{e}_m$ و $\vec{e}_k$ را نشان میدهند) . اتحاد ماتریسی بالا را به شکل $\vec{e}_m(I - A) = \vec{e}_k B$ می‌نویسیم. با پس ضرب دو طرف این رابطه در ماتریس $(I - A)^{-1}$ خواهیم داشت:

$$\vec{e}_m = \vec{e}_k B(I - A)^{-1}$$

طرف اول رابطه بالا بردارسطری با اجزاء $[1,1,\cdots,1]$ (m مرتبه) وطرف دوم‌آن بردار

سطری حاصل ازمجموع عناصر ستونهای ماتریس $B(I-A)^{-1}$ است. پس حاصل جمع اجزاء واقع در روی هریک ازستونهای ماتریس $B(I-A)^{-1}$ برابر است با یک.

نتیجه: ازرابطه فوق با درنظرگرفتن قضیه بالا بسهولت میتوان نتیجه‌گرفت که شاخص تغییرات قیمت هر بخش ترکیب محدبی است از شاخص تغییرات قیمتها در منابع و لذا افزایش شاخص تغییرات قیمتها درهر یک از بخشها بین حداکثر وحداقل افزایش شاخص تغییرات قیمتها درمنابع قرار دارند.

مثال: اگر ماکزیمم تغییر قیمت منابع دردستمزدها باندازه ۱۰ درصد و مینیمم تغییر قیمت منابع درواردات ۹ درصد باشد، تغییر قیمت درهیچیک ازبخشها از ۱۰ درصد بیشتر واز ۹ درصد کمتر نخواهد بود.

هوشنگ آذرمهر- آذرماه ۲۵۳۵