فصلنامه صنعت بیمه/سال بیست و دوم/شماره ٤/زمستان ١٣٨٦/شماره مسلسل ٨٨/صفحات ١٢١ تا ١٤٩

تقریب‌هایی برای سالیانه‌های عمر با استفاده از هم‌یکنوایی

دکتر حمیده داریوش همدانی[۱]
ابوطالب شیروانی[۲]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۱۲/۰۴
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۱۰/۰۳

چکیده

در متون بیمه‌ای، تابع توزیع مجموع مخاطره‌ها، مورد علاقه افراد است. چنین مجموعی، زمانی که ادعاهای خسارت تجمعی در یک پرتفوی بیمه‌ای در یک دوره زمانی واحد بررسی می‌شود، ظاهر می‌گردد. فرض متقابلاً مستقل‌بودن اجزای این مجموع، همیشه عقلانی و قابل قبول نیست. از آنجا که انجام محاسبات با مخاطره‌های وابسته، بسیار مشکل است و همچنین اطلاعات به‌دست‌آمده از بیمه‌گذاران، فقط اطلاعاتی درباره توزیع حاشیه‌ای مخاطره‌ها به ما می‌دهد، پس فقط ممکن است که فرمولی برای دو گشتاور اول مجموع مخاطره‌ها به دست آوریم. برای محاسبه معیارهای پیچیده‌تر، مانند حق‌بیمه زیان - بس یا چندک‌های بالا، باید از شبیه‌سازی کمک گرفت؛ بنابراین در این مقاله، تقریب‌هایی برای مجموع مخاطره‌ها، زمانی که تابع‌های توزیع حاشیه‌ای مؤلفه‌های این جمع مشخص باشد، ولی ساختار وابستگی بین مخاطره‌ها نامشخص یا بسیار پیچیده باشد، به‌دست می‌آوریم. به‌طور مشابه، تقریب‌هایی برای سالیانه‌های عمر فردی و سالیانه‌های عمر در یک پرتفوی برای زمانی که نرخ بهره، تصادفی در نظر گرفته می‌شود، ارائه می‌دهیم.

---

۱. عضو هیئت علمی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی (Email: hhamedani@Gmail.com)
۲. کارشناس ارشد آمار بیمه، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی
(Email: Abotaleb.Shirvani@Gmail.com)

واژگان‌کلیدی: سالیانه‌های عمر، نرخ بهره تصادفی، هم‌یکنوایی، حق‌بیمه زیان – بس، ترتیب محدب

۱. مقدمه

معمولاً فعالیت‌های شرکت‌های بیمه‌ای در دو شاخه اصلی، بیمه‌های عمر (اشخاص) و بیمه‌های غیرعمر(اموال) انجام می‌شود و قرارداد بیمه‌ای غیرعمر معمولاً برای دوره‌های کوتاه‌مدت – غالباً یک سال – منعقد می‌شود؛ ازاین‌رو، به بیمه‌های کوتاه‌مدت نیز شهرت یافته‌اند. در شاخه دیگر صنعت بیمه، از آنجا که مورد بیمه، شخص زنده است که زمان مرگ وی نامشخص است و نیز انتظار می‌رود که این شخص، سالیان متمادی به زندگی خویش ادامه دهد، قراردادهای بیمه‌ای به صورت درازمدت منعقد می‌شوند. از طبیعت درازمدت‌بودن قراردادهای بیمه عمر، چنین انتظار می‌رود که بیمه‌گذار، تمایل به سرمایه‌گذاری و سوددهی سرمایه خویش داشته باشد، که در پاسخ به این نیاز، شرکت‌های بیمه‌ای، مسأله سرمایه‌گذاری و نرخ سوددهی را در بیمه‌های عمر وارد می‌نمایند؛ بنابراین، نظریه سوددهی (بهره‌دهی) به بیمه‌های عمر مرتبط می‌گردد.

یکی از عوامل مهم و اساسی در تعیین حق‌بیمه و نرخ‌های بیمه، چه در بیمه‌های غیرعمر و چه در بیمه‌های عمر، قاعده کلی اطلاع و ارزیابی خسارت‌های پذیرفته‌شده از سوی بیمه‌گر است. یعنی مخاطره‌ها یا خسارت‌های وارد به بیمه‌گر به‌عنوان ابزار مهمی برای تعیین حق‌بیمه در نظر گرفته می‌شود؛ در این صورت، برای ارزیابی میزان خسارت، نیاز به تعیین تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها است. در نظریه مخاطره کلاسیک، خسارت‌های اعلام‌شده به بیمه‌گر، تصادفی و مستقل از یکدیگر هستند؛ در این صورت از معیارهایی مانند میانگین، انحراف استاندارد یا چندک‌های بالا به‌عنوان ابزاری برای تعیین حق‌بیمه‌ها استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن فرض استقلال برای مخاطره‌ها، تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها را از روش‌های استانداردی مانند

روش بازگشتی پانجر[1]، دپریل[2] و پیچش‌ها و در صورت زیادبودن تعداد مخاطره‌ها از قضیه حد مرکزی به‌دست می‌آوریم. در نظر گرفتن فرض استقلال برای مخاطره‌ها و ثابت‌بودن نرخ بهره از نظر محاسباتی، فرض بسیار مناسبی به نظر می‌رسد؛ زیرا، انجام محاسبات با مخاطره‌های وابسته، بسیار مشکل و پیچیده است. همچنین آماره‌های به‌دست‌آمده از بیمه‌گذاران، فقط اطلاعاتی درباره توزیع حاشیه‌ای مخاطره‌ها به ما می‌دهند، نه درباره تابع توزیع آنها.

درحالت‌کلی، مخاطره‌ها، متقابلاً مستقل نیستند، زیرا از یک ساختار تولید ادعای خسارت ناشی شده‌اند و یا اینکه تحت یک محیط خاص فیزیکی یا اقتصادی قرار دارند. مخاطره‌های مربوط به بیمه‌نامه‌های یک پرتفوی که از یک منطقه جغرافیایی انتخاب شده‌اند، مانند زمین‌لرزه ، سیل، آتش‌سوزی به‌عنوان مثال‌هایی از مخاطره‌های غیرمستقل هستند. همچنین در یک روز مه‌آلود، ماشین‌های در حال حرکت واقع در یک ناحیه، دارای احتمال تصادف بالایی هستند، یا در یک بیمه عمر، وابستگی بین طول عمر آتی زن و شوهر را می‌توان به عنوان مثال‌های دیگر ارائه کرد. در این صورت، بیمه‌گر با یک بردار تصادفی با مؤلفه‌های وابسته $\underset{\sim}{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ که نشان‌دهنده مخاطرات بیمه‌ای است، روبرو است؛ لذا برای به‌دست‌آوردن تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌های وارد به بیمه‌گر، نیاز به مشخص‌بودن ساختار وابستگی بین اجزای این بردار تصادفی است و در صورت معلوم‌بودن این ساختار وابستگی، به‌دست‌آوردن شکل تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها، کار بسیار مشکل و پیچیده است. در چنین شرایطی، بیمه‌گر برای تعیین حق‌بیمه‌ها و محاسبات خود باید دنبال برآوردی محافظه‌کارانه برای مجموع ادعای خسارت‌ها باشد، تا بتواند محاسبات خود را براساس آن انجام دهد؛ لذا در این مقاله، به‌دنبال یافتن کران‌هایی برای مجموع

1. Panjer
2. Depril

ادعای خسارت‌ها و تقریب‌هایی برای تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها هستیم تا بتوانیم با استفاده از این کران‌ها و تقریب‌ها، محاسبات بیمه‌ای خود را انجام دهیم.

در رویکردهای جدید بیمه، در قراردادهای بیمه‌ای که طول دوره قرارداد، طولانی است، نرخ بهره را تصادفی در نظر می‌گیرند، یا به‌عبارت‌دیگر در صورت طولانی‌بودن قرارداد بیمه‌ای، نمی‌توان نرخ بهره و نرخ تنزیل معادل با آن را برای سال‌های اول قرارداد با سال‌های آخر قرارداد یکی در نظر گرفت. زیرا در سال‌های پایانی بیمه‌نامه، نرخ بهره ممکن است دستخوش نوسانات بیشتری نسبت به سال‌های اول بیمه‌نامه شود. در صورت تصادفی‌بودن نرخ بهره، بیمه‌گر با دو بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ و $\underset{\sim}{Y}=\left(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\right)$ روبروست. بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$، نشان‌دهنده مخاطره‌های بیمه‌ای و خسارت‌ها وارد به بیمه‌گر است و بردار تصادفی $\underset{\sim}{Y}$، نشان‌دهنده مخاطره‌های اقتصادی است. می‌دانیم که مخاطره‌های اقتصادی از مخاطره‌های بیمه‌ای مستقل است؛ بنابراین، بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ از یکدیگر مستقل هستند، اما مؤلفه‌های بردار تصادفی $\underset{\sim}{Y}$ به یکدیگر وابسته‌اند. مانند قبل، به‌دست‌آوردن تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها وقتی که متغیرهای تصادفی مجموع، به یکدیگر وابسته باشند، بسیار مشکل است؛ لذا در این مقاله تلاش می‌کنیم تا برآوردهای محافظه‌کارانه و کران‌هایی برای مجموع تصادفی $S=\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ یعنی زمانی که مجموع ادعای خسارت‌ها از حاصل‌ضرب دو بردار تصادفی مخاطره‌های اقتصادی و بیمه‌ای به وجود می‌آید، ارئه دهیم.

در بیمه‌های عمر، مخاطره‌ها، طول عمر آتی فرد بیمه‌شده است؛ دراین‌صورت، محاسبه احتمال‌های مرگ و بقاء بیمه‌شده، ابزاری معقول جهت ارزیابی این مخاطره‌ها هستند. چون که طول دوره زمانی یک بیمه‌نامه عمر، طولانی است، لذا بیمه‌گر با دو متغیر تصادفی نرخ بهره و طول عمر آتی فرد بیمه‌گذار مواجه است و برای تعیین

حق‌بیمه، نیاز به بررسی دو نظریه اساسی – یعنی نظریه بهره و نظریه احتمال – دارد. لذا تعیین تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌های وارد به بیمه‌گر، مشکل و پیچیده است.

هدف اصلی این مقاله، یافتن کران‌هایی برای ارزش فعلی مجموع خسارات پرداختی به بیمه‌گر است، برای زمانی که متغیرهای تصادفی وابسته‌اند. در این راستا، به مفاهیمی مانند هم‌یکنوایی، ترتیب‌های تصادفی و تابع توزیع معکوس نیاز داریم تا کران‌هایی برای مجموع متغیرهای تصادفی وابسته (با فرض معلوم‌بودن توابع توزیع مؤلفه‌های این مجموع تصادفی) به‌دست آوریم.

۲. وارون توابع توزیع

تعریف: وارون تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را در نقطه p با $F_X^{-1}(p)$ نمایش می‌دهیم که تابعی صعودی و پیوسته چپ است و به صورت زیر تعریف می‌شود (Chung, 2001):

$$F_X^{-1}(p) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_X(x) \geq p\right\} \;;\quad p \in [0,1] \qquad (۲-۱)$$

و اگر $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_X(x) \geq p\right\} = \phi$ باشد، آنگاه $\inf \phi = +\infty$.

برای هر عدد حقیقی $p \in [0,1]$، $F_X^{-1}(p)$ یک نقطه از بازه زیر است:

$$\left[\inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_X(x) \geq p\right\}, \sup\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_X(x) \leq p\right\}\right]$$

و مانند قبل $\inf \phi = +\infty$ و $\sup \varnothing = -\infty$.

از طرفی، حد بالای بازه فوق را با $F_X^{-1+}(p)$ نمایش می‌دهیم. پس برای هر $p \in [0,1]$داریم:

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_X(x) \leq p\right\} \qquad (۲-۲)$$

تعریف: وارون $\alpha-$ آمیخته تـابع توزیـع $\mathrm{F_X}$را بـه ازای هـر $\alpha \in [0,1]$ بـا $\mathrm{F_X^{-1(\alpha)}}$ نمایش داده که صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{F_X^{-1(\alpha)}(p)} = \alpha \mathrm{F_X^{-1}(p)} + (1-\alpha)\,\mathrm{F_X^{-1+}(p)} \;\; ; \;\; \mathrm{p} \in (0,1) \qquad (۲-۳)$$

قابل توجه است که تنها برای p های متناظر با قسمت‌های افقـی نمـودار F_X، مقـادیر متفاوت برای $\mathrm{F_X^{-1}(p)}$ ، $\mathrm{F_X^{-1+}(p)}$ و $\mathrm{F_X^{-1(\alpha)}(p)}$ حاصل می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنیم X و $\mathrm{g(X)}$ متغیرهای تصادفی با مقادیر حقیقی باشـند. همچنـین فرض کنیم $\mathrm{p} \in (0,1)$، در این صورت داریم:

- اگر $\mathrm{g(X)}$ تابعی صعودی و پیوسته چپ باشد، آنگاه

$$\mathrm{F_{g(X)}^{-1}(p)} = \mathrm{g}\left(\mathrm{F_X^{-1}(p)}\right)$$

- اگر $\mathrm{g(X)}$ تابعی صعودی و پیوسته راست باشد، آنگاه

$$\mathrm{F_{g(X)}^{-1+}(p)} = \mathrm{g}\left(\mathrm{F_X^{-1+}(p)}\right)$$

برهان: (Vyncke, 2003).

می‌توان نشان داد که برای هر مقدار $\alpha \in [0,1]$:

$$\mathrm{X} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{F_X^{-1}(U)} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{F_X^{-1+}(U)} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{F_X^{-1(\alpha)}(U)}$$

(نماد $\overset{\mathrm{d}}{=}$ هم توزیعی دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.)

۳. نرخ بهره

نرخ بهره عبارت است از نرخی که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختـی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل نرخ تورم) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود. همچنـین در شرایط متعارف بازار، به‌منظور جبران فرصت‌های سرمایه‌گـذاری بـرای وام‌دهنـده، ممکن است مبلغی به‌عنوان حداقل سود مورد انتظار وام‌دهنده به این نرخ اضافه شـود (پارسائیان و جهانخانی، ۱۳۷۵).

۴. ترتیب متغیرهای تصادفی

از آنجا که در این مقاله از ترتیب تصادفی به صورت گسترده استفاده می‌شود، لذا در این قسمت، مفهوم چند ترتیب تصادفی را به‌طور خلاصه می‌آوریم (Shaked & Shanthikumar, 1994).

تعریف : حق بیمه زیان - بس[1] متغیر تصادفی X، در سطح فرانشیز d را با $E\left[(X-d)_+\right]$ که در آن $(x-d)_+ = \max\left(0, x-d\right)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: می‌گوییم متغیر تصادفی X از لحاظ ترتیب زیان - بس از متغیر تصادفی Y کمتر است، و به صورت $X \leq_{sl} Y$ نشان می‌دهیم، اگر و فقط اگر حق بیمه زیان - بس X کمتر از Y باشد. به عبارت دیگر:

$$E\left[(X-d)_+\right] \leq E\left[(Y-d)_+\right] \ ; \quad -\infty < d < \infty$$

تعریف: می‌گوییم که متغیر تصادفی X از لحاظ ترتیب کوژ از متغیر تصادفی Y کمتر است و می‌نویسیم $X \leq_{cx} Y$، اگر و تنها اگر برای هر تابع کوژ φ که امید آن موجود باشد، داشته باشیم $E\left[\varphi(X)\right] \leq E\left[\varphi(Y)\right]$.

۵. هم‌یکنوایی

در بیمه و اقتصاد، معمولاً با متغیرهای تصادفی به شکل $S = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ روبرو هستیم که متقابلاً مستقل نیستند. بردارهای $\underset{\sim}{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ و $\underset{\sim}{Y} = \left(Y_i, Y_i, \ldots, Y_i\right)$ درحالت‌کلی، مستقل در نظر گرفته می‌شوند؛ ولی مؤلفه‌های این دو بردار تصادفی از یکدیگر مستقل نیستند و درحالت‌کلی فقط توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی X_i و Y_i را می‌دانیم؛ بنابراین، نمی‌توانیم تابع توزیع چندگانه

1. Stop Loss

بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ و $\underset{\sim}{Y} = \left(Y_i, Y_i, \ldots, Y_i\right)$ را دقیقاً تعیین کنیم. در نتیجه، تابع توزیع S نیز نامشخص است. فرض کنیم برای $i = 1, 2, \ldots, n$ متغیر تصادفی X_i، بیانگر مبالغ ادعای خسارت باشد. درچنین شرایطی برای اینکه بتوانیم میزان خسارات وارد به بیمه‌گر را برآورد کنیم، مناسب‌ترین کار، پیداکردن تابع توزیع بردار تصادفی است که منجر به کم‌جذب‌ترین ادعای خسارت (مجموع مؤلفه‌های این بردار تصادفی از لحاظ ترتیب کوژ، بزرگ‌ترین مجموع را دارد) تجمعی می‌شود. در این صورت با داشتن تابع‌های توزیع حاشیه‌ای بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ به دنبال تابع توزیعی هستیم که در بین تمام بردارهای تصادفی که توزیع حاشیه‌ای آنها هم توزیع بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ است، بزرگ‌ترین مجموع کوژ را دارد. نشان داده خواهد شد که بزرگترین مجموع کوژ (از لحاظ ترتیب کوژ از مجموع هر بردار تصادفی دیگر بیشتر است) مؤلفه‌های یک بردار تصادفی مانند $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ با توابع توزیع حاشیه‌ای معین، در صورتی حاصل می‌شود که بردار تصادفی $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ هم‌یکنوا باشد.

تعریف: بردار n-تایی $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ را با $\underset{\sim}{x}$ نشان می‌دهیم. برای دو بردار $\underset{\sim}{x}$ $-n$ و $\underset{\sim}{y}$، نماد $\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{y}$ بیانگر ترتیب مؤلفه‌به‌مؤلفه بین آنهاست، به این معنی که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ رابطه $x_i \leq y_i$ برقرار باشد.

تعریف: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ هم‌یکنواست اگر به ازای $\forall\, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in A$ یکی از دو رابطه $\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{y}$ یا $\underset{\sim}{y} \leq \underset{\sim}{x}$ برقرار باشد.

تعریف: فرض کنیم که $A \subseteq \mathbb{R}^n$. هرگاه $P[\underset{\sim}{X} \in A]=1$ باشد در این صورت کوچکترین مجموعه‌ای که در شرط بالا صدق می‌کند را به‌عنوان تکیه‌گاه بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ در نظر می‌گیریم (Casella & Berger, 1990).

قضیه ۲: بردار تصادفی $\underset{\sim}{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ هم‌یکنواست، اگر و تنها اگر یکی از چهار حکم زیر برقرار باشد(Dhaene et al, 2002a):

- $\underset{\sim}{X}$ دارای تکیه‌گاه هم‌یکنوا باشد.

- به ازای تمام برآمدهای $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ از تکیه‌گاه بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ داشته باشیم:

$$F_{\underset{\sim}{X}}\left(\underset{\sim}{x}\right) = \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\right\} \quad (۵-۱)$$

- برحسب متغیر تصادفی $U \sim \text{uniform}\left(0,1\right)$ ، داشته باشیم:

$$\underset{\sim}{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)\right) \quad (۵-۲)$$

- یک متغیر تصادفی مانند Z و توابع صعودی (بر حسب Z) مانند f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ موجود باشند، به طوری که

$$\underset{\sim}{X} \overset{d}{=} \left(f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_n(Z)\right)$$

که F_{X_i} تابع توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی X_i و $F_{\underset{\sim}{X}}$ تابع توزیع بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ است.

برهان: (Dhaene et al, 2002 a).

که با استفاده از (۱-۵) در می‌یابیم، در میان تمام بردارهای تصادفی n-تایی $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ که توابع توزیع حاشیه‌ای یکسان دارند، احتمال اینکه تمام X_iها به‌طور همزمان، مقادیر کوچک اختیار کنند، در صورتی بیشینه می‌شود که آن بردار، هم‌یکنوا باشد و این موضوع، بیانگر این است که هم‌یکنوایی در برگیرنده، یک وابستگی مثبت بسیار قوی است.در ادامه، برای هر بردار تصادفی $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$، نماد $\underset{\sim}{X}^c = \left(X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c\right)$، برای نشان‌دادن بردار تصادفی هم‌یکنوایی $\underset{\sim}{X}^c$ که توابع توزیع حاشیه‌ای آن مانند $\underset{\sim}{X}$ است، استفاده می‌کنیم.

همچنین از نماد S^c برای نشان‌دادن مجموع مؤلفه‌های بردار تصادفی هم‌یکنوای متناظر با بردار تصادفی $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ یعنی $\left(X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c\right)$، استفاده می‌کنیم. به‌عبارت‌دیگر: $S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c$

قضیه ۳: تابع توزیع $\alpha-$وارون مجموع مؤلفه‌های بردار تصادفی هم‌یکنوای $\left(X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c\right)$ برابر است با:

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p) \;;\; 0 < p < 1 \tag{۵-۳}$$

برهان: (Dhaene at al, 2002a).

با داشتن وارون تابع توزیع X_i یعنی $F_{X_i}^{-1}$، تابع توزیع $S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c$ را می‌توان از رابطه زیر مشخص نمود:

$$\begin{aligned} F_{S^c}(x) &= \sup\left\{p \in (0,1) \middle| F_{S^c}(x) \geq p\right\} \\ &= \sup\left\{p \in (0,1) \middle| F_{S^c}^{-1}(p) \leq x\right\} \\ &= \sup\left\{p \in (0,1) \middle| \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x\right\} \end{aligned} \tag{۵-۴}$$

قضیه ۴: حق بیمه زیان - بس مجموع مؤلفه‌های بردار تصادفی هم‌یکنوای $\left(X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c\right)$، با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$E\left[\left(S^c - d\right)_+\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(X_i - d_i\right)_+\right] \;;\; F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1) \tag{۵-۵}$$

که $\alpha_d \in [0,1]$ و d و d_i عبارتند از:

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}\left(F_{S^c}(d)\right), (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{۵-۶}$$

$$d = F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}\left(F_{S^c}(d)\right) \tag{۵-۷}$$

برهان: (Dhaene et al, 2002a).

با استفاده از قضیه ۴، نتیجه می‌گیریم که حق بیمه‌های زیان - بس مجموعه مؤلفه‌های یک بردار تصادفی هم‌یکنوا را می‌توان به‌صورت مجموع حق‌بیمه‌های زیان - بس مؤلفه‌های آن بردار تصادفی نوشت. این قضیه روشی را برای محاسبه مستقیم حق‌بیمه‌های زیان- بس مجموع مؤلفه‌های یک بردار تصادفی هم‌یکنوا، بدون نیاز به محاسبه تابع توزیع این جمع ارائه می‌کند. در حقیقت برای محاسبه حق‌بیمه

زیان – بس در سطح فرانشیز d، فقط کافی است $F_{S^c}(x)$ را بدانیم و این به سادگی با رابطه (۴–۵) مشخص می‌شود.

مثال ۱: بیمه مستمری عمر (Dhaene et al, 2002b)

برای مثال، بیمه مستمری عمر α_x را در نظر بگیرید. مقادیر پرداختی برابر با یک واحد در انتهای هر سال، به بیمه‌گذاری که دارای سن ورود x است، به شرطی داده می‌شود که وی درآن لحظه زنده باشد. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی T بیانگر طول عمر آتی این شخص باشد. تابع توزیع متغیر تصادفی T با رابطه $F_T(t) = {}_t q_x \ (t \geq 0)$ مشخص می‌شود. همچنین فرض کنید w حد نهایی سن در جدول عمر است، بدین معنا که $w\text{-}x$ حداکثر طول عمر آتی این شخص است، یا به عبارت دیگر $_{w\text{-}x}\, q_x = 1$ و به‌طور معادل $F_T^{-1}(1) = w\text{-}x$. همچنین فرض کنید که نرخ تنزیل v توسط نرخ بهره معین i تعیین می‌شود. ارزش فعلی پرداخت‌های آتی بیمه‌گر را با S نشان می‌دهیم و برابر با مجموع ارزش فعلی پرداخت‌ها در سال‌های متوالی است. به‌عبارت دیگر:

$$S = \sum_{i=1}^{[[w\text{-}x]]-1} X_i$$

که $[[\circ]]$ بیانگر تابع سقف است، یا به عبارت دیگر $[[x]]$ برابر با کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از x و متغیر تصادفی X_i عبارت است از:

$$X_i = v^i I(T > i)$$

و همچنین $I(\circ)$ تابع نشانگر است.

همه پرداخت‌ها توابعی صعودی از طول عمر آتی شخص T هستند. بنابراین بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ هم‌یکنواست. به‌ازای هر $p \in (0,1)$ با استفاده از قضیه ۱ نتیجه می‌گیریم که:

$$F_{X_i}^{-1}(p) = v^i I\left(F_T^{-1}(p) > i\right) = v^i I\left(i \leq \left[F_T^{i}(p)\right] - 1\right)$$

حال با استفاده از قضیه(۳-۵) و همچنین با فرض اینکـه اگـر $a > b$، $\sum_{i=\alpha}^{b} x_i = ۰$،

داریم:

$$F_S^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{[[w-x]]-1} F_{X_i}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{[[F_T^{-1}(p)]]-1} v^i \ ; \ ۰ < p < ۱$$

همچنین، واضح است که این رابطه به‌ازای $p = 1$ نیز برقرار است.

قضیه ۵: برای هر بردار تصادفی $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ داریم:

$$X_1 + X_2 + L + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + L + X_n^c \qquad (۵-۸)$$

برهان: (Goovaerts, Dhaene & De Schepper, 2000).

قضیه بالا نشان می‌دهد که در خانواده تمـام بردارهـای تـصادفی کـه دارای توابـع توزیع حاشیه‌ای یکسان F_i، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ هستند، آن برداری از لحاظ ترتیـب کوژ از همه بیشتر است که دارای توزیع توأم هم‌یکنواست، یعنی اینکه توزیع توأم آن به‌صورت $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \ldots, F_n^{-1}(U))$ است. بین مؤلفه‌های ایـن بـردار تـصادفی، بیشترین وابستگی وجود دارد، چرا که همه مؤلفه‌هـای آن، تـوابعی صـعودی از یـک متغیر تصادفی‌اند.

فـرض کنیـد کـه اطلاعـات بیـشتری در مـورد سـاختار بـردار تـصادفی $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ داشته باشیم. به‌طور دقیق‌تر فرض کنید، متغیر تصادفیماننـد Λ وجود دارد و تابع توزیع آن مشخص است و از طرفی، تـابع توزیـع شـرطی X_i بـه شرط $\Lambda = \lambda$ را می‌دانیم. نشان می‌دهیم که در این حالت، می‌توانیم از لحاظ ترتیـب کوژ، کران بالای بهتری برای S به‌دست آوریم که از لحاظ ترتیب کوژ، کمتر از کران بالای S^c است.کران بالای حاصل را با S_λ^c نمایش مـی‌دهـیم کـه S_λ^c عبارتـست از مجموع مؤلفه‌های بردار تصادفی هم‌یکنوا به شرط $\Lambda = \lambda$ یا به‌عبارت دیگر:

$$S_l^c = F_{X_1|\lambda}^{-1}(U) + F_{X_2|\lambda}^{-1}(U) + L + F_{X_n|\lambda}^{-1}(U)$$

قضیه ۶ : فرض کنید که $U \sim \text{uniform}(0,1)$ و مستقل از متغیر تصادفی Λ باشد. در این صورت:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq_{cx} F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + \cdots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \quad (۵-۹)$$

برهان: (Dhaene et al, 2002a).

فرض کنید که بردار تصادفی $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ دارای توزیع‌های حاشیه‌ای $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$ باشد. در بخش قبل فرض کردیم که متغیر تصادفی مانند Λ با تابع توزیع معلوم وجود دارد به‌طوری که توزیع شرطی X_i به شرط Λ برای مقادیر ممکن $\Lambda = \lambda$ معلوم است. نشان خواهیم داد که از لحاظ ترتیب کوژ، چگونه می‌توانیم یک کران پایین برای S با شرطی‌کردن متغیر تصادفی Λ به‌دست آوریم. در واقع با یافتن متغیر تصادفی که نسبت به S، جذابیت بیشتری دارد، می‌توان در مورد درجه بیش برآوردی کران‌های بالای S^c و S^u، تصمیم‌گیری کرد.

قضیه ۷: برای هر بردار تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و متغیر تصادفی Λ داریم(Vyncke, 2003):

$$E(X_1|\Lambda) + E(X_2|\Lambda) + \cdots + E(X_n|\Lambda) \leq_{cx} X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (۵-۱۰)$$

برهان: (Hoedemakers et al, 2005).

حاصل‌ضرب بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ به شکل زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$S = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + L + X_n Y_n \quad (۵-۱۱)$$

که بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ از یکدیگر مستقل هستند.

قضیه ۸: فرض کنید که بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ مستقل با مؤلفه‌های نامنفی باشند. تعریف می‌کنیم:

$$S^c = F^{-1}_{X_1}(U) F^{-1}_{Y_1}(V) + \cdots + F^{-1}_{X_n}(U) F^{-1}_{Y_n}(V) \quad (۵-۱۲)$$

که U و V متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد($\text{uniform}(0,1)$)هستند. در این صورت، رابطه زیر برقرار است:

$$S \leq_{cx} S^c \quad (۵-۱۳)$$

برهان: (Shaked & Shanthikumar, 1994)

قضیه ۹: فرض کنید که بردارهای تصادفی $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{Y}$ مستقل و نامنفی باشند. قرار می‌دهیم:

$$S^L = E[X_1|T]E[Y_1|\Lambda] + \cdots + E[X_n|T]E[Y_n|\Lambda] \qquad (۵-۱۴)$$

Tیک متغیر تصادفی مستقل از $\underset{\sim}{Y}$ و Λ است وهمچنین Λ یک متغیر تصادفی مستقل از $\underset{\sim}{X}$ و T است. در این صورت، رابطه زیر برقرار است:

$$S^L \leq_{cx} S \qquad (۵-۱۵)$$

برهان: رجوع کنید به (Shaked & Shanthikumar, 1994).

حق بیمه زیان - بس S، وقتی S مجموعی از حاصل‌ضرب مؤلفه‌های دو بردار تصادفی باشد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E\left[(S^c\text{-}d)_+\right] &= E\left[E\left[(S^c\text{-}d)_+|U\right]\right] \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u) E\left[Y_i\text{-}F_{Y_i}^{-1}\left(F_{S^c|U=u}(d)\right)\right]_+ du \end{aligned} \qquad (۵-۱۶)$$

۶. کران‌های کوژ برای سالیانه‌های عمر

در محاسبه حق بیمه‌ها، به‌خصوص برای بیمه‌نامه‌های عمر، سالیانه نرخ بهره i برای همه سال‌های قرارداد بیمه‌ای، ثابت در نظر گرفته می‌شود و مطابق آن، نرخ تنزیل v نیز ثابت است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان نرخ تنزیل مبلغ بیمه‌شده، مثلاً در بیمه عمر کامل، در فاصله سال اول یا سال پایه (سال شروع قرارداد) با نرخ تنزیل مبلغ بیمه‌شده مثلاً در سال سی‌ام قرارداد برابر گرفت. در حالی که می‌دانیم در سال‌های پایانی بیمه‌نامه، نرخ بهره، دچار نوسانات بیشتری نسبت به سال‌های اولیه بیمه‌نامه می‌شود. این نوع سؤال‌ها، ما را به این فکر وا می‌دارد که نرخ بهره را به صورت تصادفی در طی سال‌های مختلف بیمه‌نامه در نظر بگیریم،

تا هم ایراد واردشده را رفع کند و هم مخاطره بیمه‌گر را به‌طور چشمگیری کاهش دهد.

هدف از این بخش، به‌دست‌آوردن تابع توزیع و حق‌بیمه زیان - بس مجموع پرداخت‌های بیمه‌گر در سالیانه‌های عمر فردی و در پرتفوی‌های متشکل از سالیانه‌های عمر، با مخاطره‌های وابسته و نرخ بهره تصادفی است. در این قسمت، ابتدا مبالغ پرداختی در سه نوع سالیانه عمر را بررسی می‌کنیم.

ارزش فعلی مبالغی که برای یک سالیانه عمر فردی برای شخصی به سن x پرداخت می‌شود با مقدار α_i که بیمه‌گر در انتهای سال iام به شرطی که فرد زنده باشد پرداخت می‌کند را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S_{sp,x} = \sum_{i=1}^{k_x} \alpha_i \, e^{-Y(i)} = \sum_{i=1}^{[w-x]} I(T_x > i) \, \alpha_i \, e^{-Y(i)} \qquad (۶-۱)$$

که $K_x = [T_x]$ که $[\circ]$تابع جزء صحیح است.

ارزش فعلی پرداخت‌ها برای یک پرتفوی همگن از سالیانه‌های عمر را به صورت زیر بررسی می‌کنیم. فرض کنید که بیمه‌گر برای هر فرد، مبلغ ثابت $\alpha_i > ۰$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ را درآخر سال i پرداخت می‌کند. در این صورت، ارزش فعلی پرداخت‌ها را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$S_{pp,x} = \sum_{i=1}^{[w-x]} \alpha_i \, N_i e^{-Y(i)} \qquad (۶-۲)$$

که N_i نشان‌دهنده تعداد افرادی است که در سال iام در پرتفوی هستند.

در آخر، پرتفویی را با سالیانه عمر همگن که طول عمر آتی افراد مستقل است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این صورت، بیمه‌گر با دو مخاطره مخاطره مرگ‌ومیر و مخاطره مالی و سرمایه‌ای مواجه است. براساس قانون ضعیف اعداد بزرگ، مخاطره مرگ‌ومیر با افزایش تعداد قراردادهای $N_{\circ}$ کاهش می‌یابد؛ ولی مخاطره سرمایه‌گذاری ثابت می‌ماند. پس برای $N_{\circ}$ به اندازه کافی بزرگ، داریم:

$$\sum_{i=1}^{[w-x]}\varepsilon_i N_i e^{-Y(i)} = N_\circ\left(\sum_{i=1}^{[w-x]}\alpha_i \frac{N_i}{N_\circ}e^{-Y(i)}\right) \cong N_\circ\left(\sum_{i=1}^{[w-x]}\alpha_i \, {}_iP_x e^{-Y(i)}\right)$$

بنابراین در پرتفوی‌های بزرگ از سالیانه‌های عمر،کافی است که متوسط معیار مخاطره پرتفوی $S_{app,x}$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$S_{app,x}=\sum_{i=1}^{[w-x]}\alpha_i \, {}_iP_x e^{-Y(i)} = E\left[S_{sp,x}\,|Y(1),Y(2),\dots,Y([w-x])\right] \tag{۶-۳}$$

برای متغیرهای $S_{sp,x}$ و $S_{app,x}$ داریم:

$$S_{app,x} \le_{cx} S_{sp,x} \tag{۶-۴}$$

در واقع برای متغیر تصادفی T که مستقل از متغیر تصادفی T_x است و با توجه به قضیه ۸ داریم:

$$\begin{aligned} S_{sp,x} &= \sum_{i=1}^{[w-x]} I_{(T_x>i)}\alpha_i e^{-Y(i)} \\ &\ge_{cx} \sum_{i=1}^{[w-x]} E\left[I_{(T_x>i)}\,|T\right]\alpha_i e^{-Y(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{[w-x]} {}_iP_x\,\alpha_i\,e^{-Y(i)} = S_{app,x} \end{aligned}$$

واضح است که $S_{sp,x}$ و $S_{pp,x}$ و $S_{app,x}$ به توزیع T_x (طول عمر آتی فرد) وابسته هستند. اگر فرض کنید که نیروی مرگ‌ومیر T از قانون مک هام-گامپرتز تبعیت کند یا به عبارت دیگر، نیروی مرگ‌ومیر آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_\in = \alpha + \beta c^\varepsilon \tag{۶-۵}$$

که $\alpha > \circ$ و جزء ثابت است که برای جبران پیشامد اتفاقی و βc^ε یک جزء متغیر برای جبران اتفاقات تصادفی دوباره در نظر گرفته می‌شود $(\beta > \circ, c > \circ)$. در این صورت داریم:

$${}_xp_t=P(T_x>t)=e^{\left(-\int_x^{x+t}\mu_e d\in\right)} = s^t g^{c^{x+t}-c^x} \tag{۶-۶}$$

$$s=e^{-\alpha},g=e^{-\left(\frac{\beta}{\log c}\right)} \qquad (۶-۷)$$

اگر $T_x{}'$ طول عمر آتی فردی باشد که نیروی مرگ‌ومیر آن از خانواده گامپرتزتبعیت می‌کند یعنی:

$$\mu_{\varepsilon}{}' = \beta c^{\varepsilon}$$

در این صورت نشان می‌دهیم که:

$$T_x \overset{d}{=} \min(T_x{}', \frac{\beta}{\alpha}) \qquad (۶-۸)$$

که B نشان‌دهنده یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارمتر ۱ و مستقل از T' است، در واقع:

$$\begin{aligned} P\left(\min\left(T_X{}', \frac{\beta}{\alpha}\right) > t\right) &= P\left(T_X{}' > t\right) P\left(\beta > t\alpha\right) \\ &= \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_{\varepsilon}' d\varepsilon\right) \exp\left(-t\alpha\right) \\ &= \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_{\varepsilon} d\varepsilon\right) \\ &= P\left(T_X > t\right) \end{aligned}$$

بنابراین، تابع توزیع تجمعی طول عمر آتی فردی به سن x که نیروی مرگ‌ومیر آن از قانون مک هام-گامپرتز تبعیت می‌کند را می‌توان با تعریف متغیر تصادفی T' و متغیر تصادفی β به صورت بالا به‌دست آورد.

حال با داشتن تابع توزیع متغیر تصادفی T، کران‌های بالا و پایینی را برای ارزش فعلی پرداخت در سالیانه‌های عمر تکی و سالیانه‌های عمر یک پرتفوی به دست می‌آوریم.

۱-۶. کران‌های کوژ برای سالیانه عمر فردی (تکی)

یک سالیانه عمر تکی با مقدار پرداختی $\alpha_i > ۰$ که بیمه‌گر در آخر سال iام به شرطی که فرد به سن (x) در آخر آن سال زنده باشد، پرداخت می‌کند را مورد

بررسی قرار می‌دهیم. ارزش فعلی پرداخت‌های بیمه‌گر در این سالیانه را بـه صـورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_{sp,x} &= \sum_{i=1}^{k_x} a_i \exp\left(-Y(i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{[w-x]} I\left(T_x > i\right) \alpha_i \exp\left(-Y(i)\right) \end{aligned} \qquad (۶-۹)$$

متغیر تصادفی $X_i = I\left(T_x > i\right)$، یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر ${}_i p_x$ اسـت و وارون تابع توزیع آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} F_{X_i}^{-1}(p) &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F_{X_i}(x) \geq p\right\} \\ &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| {}_i q_x \geq p\right\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{for} \quad p > {}_i q_x \\ ۰ & \text{for} \quad p \leq {}_i q_x \end{cases} \end{aligned} \qquad (۶-۱۰)$$

در این صورت با استفاده از قضیه ۱ داریم:

$$\begin{aligned} F_{X_i}^{-1}(U) &= F_{I(T_x > i)}^{-1}(U) \\ &= I\left(F_{T_x}^{-1}(U) > i\right) \\ &= I\left(i \leq \left[F_{T_x}^{-1}(U)\right]\right) \end{aligned}$$

بنابراین، برای کران بالا $S_{sp,x}^c$ خواهیم داشت:

$$S_{sp,x}^c = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) F_{\alpha_i \exp(-Y(i))}^{-1}(V) = \sum_{i=1}^{\left[F_{T_x}^{-1}(U)\right]} F_{\alpha_i \exp(-Y(i))}^{-1}(V) \qquad (۶-۱۱)$$

که U و V متغیرهای تصادفی مستقل و هـم‌توزیـع بـا توزیـع یکنواخـت اسـتاندارد هستند. در این صورت داریم: $F_{S_{sp,x}^c | T_x = t}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{[t]} F_{\alpha_i \exp(-Y(i))}^{-1}$

تابع توزیع شرطی متغیر تصادفی $S_{sp,x}^{c} \left| T_x = t \right.$ را می‌توان با حل معادله زیر به روش‌های عددی مانند نیوتن-رافسون به‌دست آورد:

$$\sum_{i=1}^{[t]} \alpha_i \exp\left(-\mu_i + \operatorname{sign}(\alpha_i) s_i \Phi^{-1}\left(F_{S_{sp,x}^{c}|T_x=t}(y)\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp\left(-\mu_i + \operatorname{sign}(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}\left(F_{S_{sp,x}^{c}|T_x=t}(y)\right)\right) = y$$

متغیر تصادفی $S_{sp,x}^{c} \left| K_x = k \right.$ را با $\tilde{S}_k$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp(-Y(i))$$

بنابراین، تابع توزیع $S_{sp,x}^{c}$ را می‌توان به این صورت محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_{S_{sp,x}^{c}}(y) &= \sum_{k=1}^{[w-x]} P\left(K_x = k\right) F_{S_{sp,x}^{c}|K_x=k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x F_{\tilde{S}_k^{c}}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x P\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp\left(-\mu_i + \operatorname{sign}(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(U)\right) \le y\right] \end{aligned} \tag{۶-۱۲}$$

که $P\left(K_x = k\right) = {}_{k+1}q_x - {}_k q_x = {}_{k|}q_x$ برای حق بیمه زیان- بس $S_{sp,x}^{c}$ داریم:

$$\begin{aligned} &E\left[\left(S_{sp,x}^{c} - d\right)_+\right] \\ &= \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x \left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp\left(-\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \Phi\left(\operatorname{sign}(\alpha_i)\sigma_i - \Phi^{-1}\left(F_{\tilde{S}_k^{c}}(d)\right)\right) - \left(1 - F_{\tilde{S}_k^{c}}(d)\right)\right\} \end{aligned} \tag{۶-۱۳}$$

برای به‌دست‌آوردن کران هم‌یکنوای پایین با مشکل انتخاب متغیرهای شرطی T و Λ مواجه هستیم. اگر متغیر تصادفی شرطی T را طوری انتخاب کنیم که $E\left[X_i \left| T \right.\right]$ به کار رفته در کران پایین، بستگی به طول عمر آتی شخص، یعنی

T_x داشته باشد، در این صورت $E\left[X_i \middle| \mathrm{T}\right]$ هم‌یکنوا خواهد بود. در این صورت، اگر $\mathrm{T=T_x}$ ($\mathrm{T=T_x}$ انتخاب طبیعی ما است)، داریم:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{I}\left(\mathrm{T_x}>\mathrm{i}\right)\middle|\mathrm{T}=\mathrm{T_x}\right)=\mathrm{I}\left(\mathrm{T_x}>\mathrm{i}\right)$$

متغیر تصادفی شرطی Λ با ماکزیمم واریانس متغیرهای تصادفی Λ_j به شکل $\Lambda_{\mathrm{j}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{j}} \alpha_{\mathrm{i}} \exp\left(-\mu_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{i}}^2\right)\mathrm{Y(i)}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و کران پایین منطبق با متغیر تصادفی شرطی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathrm{S_{sp,x}^{l,j}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{K_x}} E\left(\alpha_{\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{-Y(i)}} \middle|\Lambda_{\mathrm{j}}\right), \mathrm{j}=1,\cdots,[\mathrm{w\text{-}x}] \qquad (۶-۱۴)$$

به‌طوری که ما یک کران پایین با بیشینه واریانس نسبت به کران‌های پایین دیگر داریم. متغیر تصادفی بالا را به صورت $\Lambda^{(\mathrm{m})}$ نمایش می‌دهیم. این متغیر تصادفی را به صورت زیر تفسیر می‌کنیم:

برای دو متغیر تصادفی شرطی X و Y به‌طوری که $\mathrm{Y} \le_{\mathrm{cx}} \mathrm{X}$ باشد، داریم: $\mathrm{Var(X)} \le \mathrm{Var(Y)}$، بنابراین می‌توان انتظار داشت که کران پایین با بیشترین واریانس، برازش بهتری را برای متغیرهای تصادفی اصلی ایجاد کند.

با انتخاب متغیرهای تصادفی شرطی، می‌توان تابع توزیع کران پایین را به دست آورد. برای به‌دست‌آوردن تابع توزیع کران پایین، به همان صورتی که در فرآیند به‌دست‌آوردن تابع توزیع کران بالا عمل کردیم، به صورت زیر پیش می‌رویم:

در مرحله اول، تابع توزیع شرطی $\mathrm{S^l_{sp,x|K_x=k}}$ را براساس رابطه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \alpha_{\mathrm{i}} \exp\left(-\mu_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{i}}^2\left(1-r_{\mathrm{i}}^2\right) - \sigma_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}} \Phi^{-1}\left(\mathrm{F}_{\mathrm{S^l_{sp,x}|K_x=k}}(\mathrm{y})\right)\right) = \mathrm{y}$$

حال با داشتن تابع توزیع $\mathrm{S^l_{sp,x|K_x=k}}$ می‌توان تابع توزیع تجمعی $\mathrm{S^l_{sp,x}}$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$F_{S^l_{sp,x}}(y) = \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x F_{S^l_{sp,x}|K_x=k}(y) = \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x F_{S^{-l}_k}(y)$$
$$= \sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x P\left[\sum_{i=}^{k} \alpha_i \exp\left(-\mu_i - r_i\sigma_i\Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}\left(1\text{-}r_i^2\right)\sigma_i^2\right) \leq y\right] \qquad (۶-۱۵)$$

حق بیمه زیان-بس کران پایین را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

(۶-۱۶)

$$E\left[\left(S^l_{sp,x}\text{-}d\right)_+\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{[w-x]} {}_{k|}q_x \left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \exp\left(-\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\Phi\left(r_i\sigma_i\Phi^{-1}\left(F_{\tilde{S}^l_k}(d)\right)\right) - d\left(1\text{-}F_{\tilde{S}^l_k}(d)\right)\right\}$$

۲-۶. کران‌های کوژ برای سالیانه‌های عمر یک پرتفوی

در این بخش، تابع توزیع کران‌های بالا و پایین S وقتی که S ارزش فعلی مقادیر پرداختی یک پرتفوی همگن با $N_\circ$ بیمه عمر مستمری که مقادیر α_iها در پایان سال iام پرداخت می‌شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ارزش فعلی پرداخت‌های بیمه‌گر را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$S_{pp,x}=\sum_{i=1}^{[w-x]} N_i\alpha_i e^{-Y(i)} \qquad (۶-۱۷)$$

که N_i نشان‌دهنده تعداد افراد باقی‌مانده در سال iام در پرتفوی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N_i = I\left(T_x^{(1)} > i\right) + \left(T_x^{(2)} > i\right) + L + \left(T_x^{(N_\circ)} > i\right) \qquad (۶-۱۸)$$

در رابطه (۶-۱۸) $T_x^{(j)}$ نشان‌دهنده طول عمر آتی jامین بیمه‌گذار است و متغیرهای تصادفی $T_x^{(j)}$، دوبه‌دو مستقل هستند. بنابراین، متغیرهای تصادفی N_i دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=N_\circ$ و پارامتر موفقیت ${}_ip_x$ هستند.

متذکر می‌شویم که:

$$S_{pp,x}=\sum_{j=1}^{N_0} S_{sp,x}^{(j)} \qquad (۶-۱۹)$$

و

$$S_{sp,x}^{(j)}=\sum_{i=1}^{[w-x]}\left(T_x^{(j)}>i\right)\alpha_i e^{-Y(i)}$$

محاسبه کران‌های بالا و پایین برای پرتفوی با سالیانه‌های عمر کمی، پیچیده‌تر از حالتی است که فقط یک سالیانه عمر تکی داشته باشیم. از نظر محاسباتی، درنظرگرفتن توزیع دوجمله‌ای برای متغیر تصادفی N_i، یک توزیع مناسب نیست، چون فرمول صریحی برای تابع توزیع تجمعی و معکوس آن وجود ندارد. لذا برای آسان‌ترکردن محاسبات و رفع این مشکل باید متغیر تصادفی پیوسته‌ای مانند $\tilde{N}_i$ را به جای N_i جایگذاری کنیم که انتخاب تقریب توانی نرمال[1] (NPA) یک تقریب مناسب است. می‌دانیم که توزیع دوجمله‌ای، یک توزیع چوله است (مگر اینکه پارامتر n، خیلی بزرگ باشد یا پارامتر p، نزدیک به $\frac{۱}{۲}$ باشد که در این صورت چولگی این توزیع در مقایسه با توزیع نرمال، تقریباً یکی است)، پس این جایگزینی می‌تواند مناسب باشد. برای تابع توزیع $\tilde{N}_i$ داریم:

$$F_{\tilde{N}_i}=\Phi\left(-\frac{3}{\gamma_{N_i}}+\sqrt{\frac{9}{\gamma_{N_i}^2}+\frac{6\left(x-\mu_{N_i}\right)}{\gamma_{N_i}\sigma_{N_i}}+1}\right) \qquad (۶-۲۰)$$

از طرفی داریم:

$$\mu_{N_i}=E\left(N_i\right)=N_{\circ\,i}p_x\ ,\ \sigma_{N_i}^2=Var\left(N_i\right)=N_{\circ\,i}p_{x\,i}q_x$$

$$\gamma_{N_i}=\frac{E\left(N_i-\mu_{N_i}\right)^3}{\sigma_{N_i}^3}=\frac{1-2\,{}_ip_x}{\sqrt{N_{\circ\,i}p_{x\,i}q_x}}$$

1. Normal Power Asymptotic (NPA)

از طرفی، چندک pام از $\tilde{N}_i$ به‌صورت‌زیر حاصل می‌شود:

$$F^{-1}_{\tilde{N}_i}(p)=\mu_{N_i}+\sigma_{N_i}\Phi^{-1}(p)+\frac{\gamma_{N_I}\sigma_{N_I}}{6}\left(\left(\Phi^{-1}(p)\right)^2-1\right) \qquad (۶-۲۱)$$

کران بالا برای متغیر تصادفی $S_{pp,x}$ به‌این‌صورت حاصل می‌شود:

$$S^c_{pp,x}=\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{\tilde{N}_i}(U)\alpha_i e^{-\mu_i+\mathrm{sign}(\alpha_i)\sigma_i\Phi^{-1}(V)}$$

حال، فرض کنیم که $U=u$ مقدار ثابتی باشد. در این صورت داریم:

$$F^{-1}_{S^c_{pp,x}|U=u}(p)=\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{\tilde{N}_i}(u)\alpha_i\exp(-\mu_i+\mathrm{sign}(\alpha_i)\sigma_i\Phi^{-1}(p))$$

که به جای $F^{-1}_{\tilde{N}_i}(u)$ در روابط بالا، مقدار آن یعنی (۶-۲۱) قرار مـی‌دهـیم. از طرفـی می‌دانیم که $F^{-1}_{S^c_{pp,x}|U=u}$ به ازای هر u یک تابع یکنواسـت، بنـابراین $F^{-1}_{S^c_{pp,x}|U=u}(y)$ را می‌توان ازطریق رابطه زیر برای هر $y\geq ۰$ به روش‌های عددی محاسبه کرد:

$$\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{\tilde{N}_i}(u)\alpha_i\exp\left(-\mu_i+\mathrm{sign}(\alpha_i)\Phi^{-1}\left(F_{S^c_{pp,x}|U=u}(y)\right)\right)=y$$

حال با داشتن تابع توزیع شرطی $F^{-1}_{S^c_{pp,x}|U=u}$ می‌توان تابع توزیع $F^{-1}_{S^c_{pp,x}}$ را به‌دست آورد:

$$F_{S^c_{pp,x}}(y)=\int_{۰}^{1}F_{S^c_{pp,x}|U=u}(y)\ du \qquad (۶-۲۲)$$

همچنین حق بیمه زیان-بس متغیر تصادفی $S^c_{pp,x}$ به‌صورت‌زیر است:

$$E\left[(S^c-d)_+\right]=\int_{۰}^{1}\sum_{i=1}^{n}F^{-1}_{\tilde{N}_i}(u)E\left[\left(\alpha_i e^{-Y(i)}-d_{u,i}\right)_+\right]du$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\exp\left(-\mu_i+\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\int_{۰}^{1}F^{-1}_{\tilde{N}_i}(u)\Phi\left(sign(\alpha_i)\sigma_i-\Phi^{-1}\left(F_{S^c|U=u}(d)\right)\right)du\right)$$

$$-d\left(1-F_{S^c_{pp,x}}(d)\right)$$

(۶-۲۳)

برای به‌دست‌آوردن کران پایین یعنی $S^{l}_{pp,x}$ به‌صورت زیرعمل می‌کنیم:

$$S^{l}_{pp,x} = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i|T\right] E\left[\alpha_i e^{-Y(i)}|\Lambda\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i|T\right]\alpha_i \exp\left(-\mu_{i,\lambda} + \frac{1}{2}\sigma^2_{i,\lambda}\right)$$

برای محاسبه کران پایین، نیازمند تعیین متغیرهای تصادفی شرطی T و Λ هستیم. برای متغیرهای تصادفی شرطی T پیشنهاد می‌کنیم که $N_{i_\circ}$ تعداد قراردادهای بیمه‌ای موجود در سال $i_\circ$ را به‌عنوان متغیر تصادفی شرطی در نظر بگیریم. دراین‌صورت داریم:

$$E\left[N_i \middle| N_{i_\circ} = n_\circ\right] = {}_{i-i_\circ}p_{x+i_\circ} n_\circ \;;\; (i \geq i_\circ)$$

برای حالتی که $i<i_\circ$ باشد $P\left[N_i=n \middle| N_{i_\circ}=n_i\right]$ را با استفاده از قضیه بیز[1] به‌دست می‌آوریم؛ دراین‌صورت، فرمول امید شرطی به‌صورت‌زیر خواهد بود:

$$E\left[N_i \middle| N_{i_\circ} = n_\circ\right] = \sum_{k=n_\circ}^{N_\circ} k \begin{pmatrix} N_\circ - n_\circ \\ k - n_\circ \end{pmatrix} {}_i p_x^{k-n_\circ} \frac{{}_{i_\circ - i} q_{x+i}^{k-n_\circ} \; {}_i q_x^{N_\circ - k}}{{}_{i_\circ} q_x^{N_\circ - n_\circ}}$$

برای راحتی محاسبات برای مقادیر غیرصحیح $N_{i_\circ}$، رابطه بالا را به‌صورت‌زیر می‌نویسیم:

(۶-۲۴)

$$E\left[N_i \middle| N_{i_\circ} = y\right] = \sum_{k=[[y]]}^{N_\circ} k \begin{pmatrix} N_\circ - [[y]] \\ k - [[y]] \end{pmatrix} {}_i p_x^{k-[[y]]} \frac{{}_{i_\circ - i} q_{x+i}^{k-[[y]]} \; {}_i q_x^{N_\circ - k}}{{}_{i_\circ} q_x^{N_\circ - [[y]]}}$$

که تابع $[[x]]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x است. یعنی $[[x]]$، یک تابع سقف است.

1. Bayes Theorem

متغیر تصادفی $\Lambda^{(a)}$ را به‌عنوان متغیر تصادفی شرطی Λ انتخاب می‌کنیم. حال برای به‌دست‌آوردن تابع توزیع، سه مرحله زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا، $S^{l}_{pp,x}\left|T=\gamma\right.$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left(S^{l}_{pp,x}\left|T=\gamma\right.\right)=\sum_{i=1}^{n}E\left[\tilde{N}_i\left|T=\gamma\right.\right]\alpha_i\exp\left(-\mu_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2\left(1-r_i^2\right)+\sigma_i r_i\Phi^{-1}(p)\right)$$

حال، تابع توزیع $F_{S^{l}_{pp,x}|T=\gamma}$ را برای هر $y\geq 0$ با استفاده از روش‌های عددی از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}E\left[\tilde{N}_i\left|T=\gamma\right.\right]\alpha_i\exp\left(-\mu_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2\left(1-r_i^2\right)+\sigma_i r_i\Phi^{-1}\left(F_{S^{l}_{pp,x}|T=\gamma}(y)\right)\right)=y$$

سرانجام، تابع توزیع تجمعی $S^{l}_{pp,x}$ را می‌توان به‌صورت‌زیر محاسبه کرد:

$$F_{S^{l}_{pp,x}}(y)=\int_{0}^{1}F_{S^{l}_{pp,x}\left|T=F_T^{-1}(u)\right.}(y)du$$

از طرفی، حق بیمه زیان - بس به‌صورت‌زیر محاسبه می‌شود:

(۶-۲۵)

$$E\left[\left(S^{l}_{pp,x}-d\right)_+\right]=\int_{0}^{1}\sum_{i=1}^{n}E\left[\tilde{N}_i\left|T=F_T^{-1}(u)\right.\right]E\left[\left(E\left[\alpha_i e^{-Y(i)}\left|\Lambda\right.\right]-d_{\gamma,i}\right)_+\right]du$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\exp\left(-\mu_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\int_{0}^{1}E\left[\tilde{N}_i\left|T=F_T^{-1}(u)\right.\right]\Phi\left(r_i\sigma_i-\Phi^{-1}\left(F_{S^{l}_{pp,x}|T=l}(d)\right)\right)du\right)$$

$$-d\left(1-F_{S^{l}_{pp,x}}(d)\right)$$

که در رابطه بالا به جای $E\left[\tilde{N}_i\left|T=F_T^{-1}(u)\right.\right]$ رابطه (۲۴-۶) را قرار می‌دهیم.

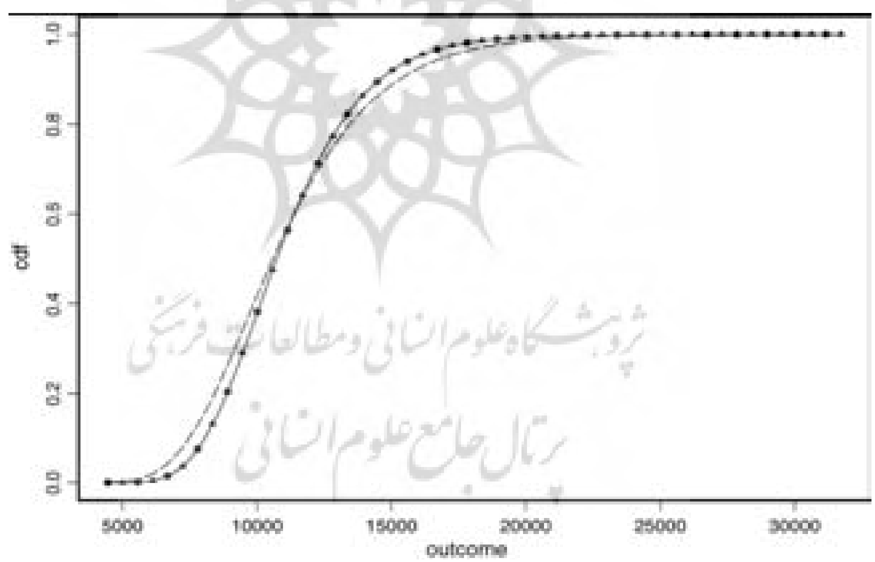
مثال ۲: پرتفوی با سالیانه‌های عمر

در این مثال، برای نشان‌دادن میزان دقت و کارایی کران به‌دست‌آمده، یک پرتفوی با سالیانه‌های عمر وابسته، زمانی که نرخ بهره یک فرآیند تصادفی بلک - شولز با میانگین۰/۰۵ و انحراف استاندارد ۰/۱ است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در اینجا، فرض می‌کنیم که فرآیند مرگ‌ومیر افراد از قانون گامپرتز تبعیت می‌کند. در این

پرتفوی، افراد همه مرد و دارای سن ۶۵ سال هستند. مقادیر آورده‌شده برای $S_{pp,65}$ از طریق شبیه‌سازی به روش مونت کارلو برای یک پرتفوی با ۱۰۰ قرارداد بیمه‌ای، حاصل شده است. تعداد قرارداد بیمه‌ای پس از یک سال، یعنی N_1 را به‌عنوان متغیر تصادفی شرطی Λ در نظر می‌گیریم. برآوردهای حاصل برای $S_{pp,65}$ براساس روش مونت کارلو و براساس ۵۰۰×۱۰۰۰۰ طرح تصادفی شبیه‌سازی شده است.

در شکل ۱، تابع توزیع تجمعی کران‌های حاصل با توزیع تجربی $S_{pp,65}$ مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل۲ دیده می‌شود، تابع توزیع $S^{l}_{pp,65}$ در اغلب جاها، منطبق بر تابع توزیع تجربی $S_{pp,65}$ است و در بیشتر نقاط، مقادیر عددی آنها با یکدیگر برابر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کران بالا برای $S_{pp,65}$ نسبت به کران پایین، کمی ضعیف‌تر عمل می‌کند؛ ولی در کل، یک برازش مناسب برای $S_{pp,65}$ است.

شکل۱. تابع توزیع تجمعی $S_{pp,65}(MC)$ (خط خاکستری منقطع)، تابع توزیع $S^{t}_{pp,65}$ (خط با دایره‌های توپر)، وتابع توزیع $S^{c}_{pp,65}$ (خط مشکی منقطع)



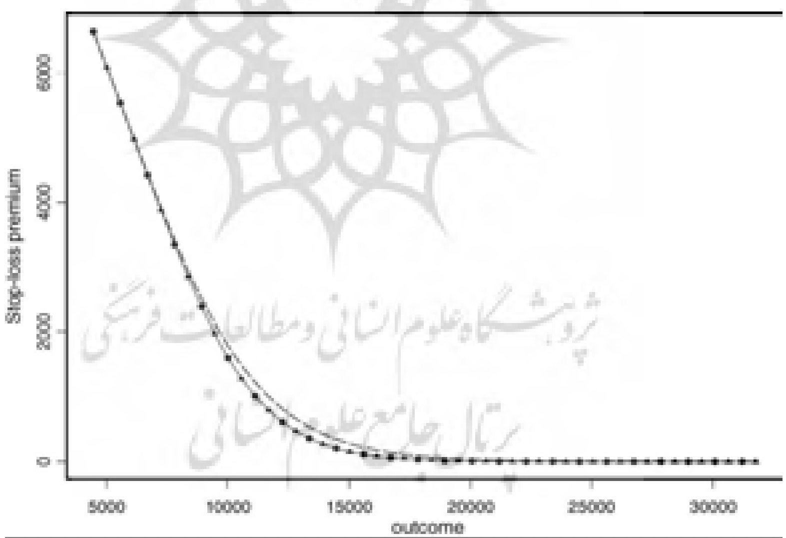
در جدول ۱ نیز مقادیر عددی کران پایین و بالا برای چند p مختلف آورده شده است. که این جدول نشان دهنده آن است که استفاده از کران پایین یعنی $S^l_{pp,65}$ بـه جای $S_{pp,65}$ می‌تواند یک جایگزینی مناسب باشد.

جدول۱. تقریب‌هایی برای بعضی از چندک‌های $S_{pp,65}$ در سطح احتمال p

p	$S^l_{sp,65}$	$S^c_{sp,65}$	$MC(S.E.)$
0.995	20 209	22 620	20242 (22.09)
0.975	17 252	18 722	17 276 (8.80)
0.95	15 937	17 029	15 947 (8.15)
0.90	14 565	15 290	14 568 (5.08)
0.75	12 574	12 821	12 577 (3.90)

نمودار حق بیمه زیان- بس برای کران‌هـای بـالا و پـایین در شـکل۲ آورده شـده است. نمودار حق بیمه زیان- بس، نشان‌دهنده میـزان دقـت بـالای ایـن کـران‌هـا در برآورد حق بیمه زیان- بس $S_{pp,65}$ است.

شکل۲. حق‌بیمه زیان- بس برای $S_{pp,65}(MC)$ (خط خاکستری منقطـع)، $S^l_{pp,65}$ (خـط بـا دایـره‌هـای توپر) و $S^c_{pp,65}$ (خط مشکی منقطع)



۷. نتیجه‌گیری

از عوامل مهم و اساسی در تعیین حق‌بیمه و نرخ‌های بیمه، چه در بیمه‌های غیرعمر و چه در بیمه‌های عمر، قاعده کلی، اطلاع و ارزیابی خسارات پذیرفته‌شده از سوی بیمه‌گر است؛ یعنی مخاطره‌ها یا خسارت‌های پرداختی توسط بیمه‌گر به‌عنوان ابزار مهمی برای تعیین حق‌بیمه در نظر گرفته می‌شود. دراین‌صورت، برای ارزیابی میزان خسارت، نیاز به تعیین تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها است. در چنین شرایطی، بیمه‌گر برای تعیین حق‌بیمه‌ها و محاسبات خود باید به دنبال برآوردی محافظه‌کارانه برای مجموع ادعای خسارت‌ها باشد، تا بتواند محاسبات خود را براساس آن انجام دهد؛ لذا، در این کران‌هایی که برای مجموع ادعای خسارت‌ها و تقریب‌هایی برای تابع توزیع مجموع ادعای خسارت‌ها آوردیم، محاسبات عددی، تصدیق‌کننده دقت این کران‌ها هستند و با استفاده از این کران‌ها و تقریبات، می‌توانیم محاسبات بیمه‌ای خود را انجام دهیم. از طرفی می‌توان گفت:

- جایگزینی S توسط S^{c}، از لحاظ نظریه مطلوبیت، روش مناسبی است. در واقع به جای یک تابع توزیع واقعی، تابع توزیعی کم‌جذب‌تر جانشین می‌شود.

- متغیرهای تصادفی S^{c} و S دارای امید ریاضی یکسان هستند. همچنین به‌دلیل اینکه رابطه ترتیب کوژ بین این دو برقرار است ($\mathrm{S} \leq_{cx} \mathrm{S}^{c}$)، نتیجه می‌گیریم که گشتاورهای مرتبه $2\mathrm{k}$ی $\mathrm{S}\,(\mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{n})$ کمتر از گشتاورهای متناظر S^{c} هستند.

- تابع توزیع S^{c} قابل حصول است. تابع توزیع S را فقط وقتی می‌توان محاسبه کرد که ساختار وابستگی بین مؤلفه‌های آن معلوم باشد. درحالت‌کلی، حتی وقتی این ساختار وابستگی معلوم است نیز تعیین تابع توزیع S مشکل است.

- حق بیمه زیان – بس S^c توسط حق‌بیمه زیـان – بـس توابـع توزیـع حاشـیه‌ای مؤلفه‌های آن قابل حصول است، در حالتی که حق‌بیمه زیان – بـس S را فقـط وقتـی می‌توان تعیین کرد که، تابع توزیع آن معلوم باشد.

منابع:

۱. پارسائیان، علی و جهانخانی، علی ۱۳۷۵، *فرهنگ اصطلاحات مالی*، مؤسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی، شرکت چاپ و نشر بازرگانی.

2. Casella, G & Berger, RL 1990, *Statistical inference*, Wada Word & Brooks, Californian.

3. Chung, KL 2001, *A course in probability theory*, 3rd ed Academic Press.

4. Dhaene, J 1990, 'Distributions in life insurance', *Astin Bulletin*, vol. 20, no. 1, pp. 81-92.

5. Dhaene, J, Denuit, M, Goovaerts, M, Kaas, R & Vyncke, D 2002a, 'The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory', *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 31, no. 1, pp. 3-33.

6. Dhaene, J, Denuit, M, Goovaerts, M, Kaas, R & Vyncke, D 2002b, 'The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications', *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 31, no. 2, pp. 133-61.

7. Goovaerts, MJ, Dhaene, J & De Schepper, A 2000, 'Stochastic upper bounds for present value functions', *Journal of Risk and Insurance Theory*, vol. 67, no. 1, pp. 1-14.

8. Hoedemarkers, T, Darkiewicz, G & Goovaerts, M 2005, 'Approximation for life annuity contracts a stochastic financial environments', *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 37, pp. 239-69.

9. Shaked, M & Shanthikumar, JG 1994, *Stochastic orders and their applications*, Academic Press, New York, p. 545.

10. Vyncke, D, Goovaerts, MJ & Dhaene, J 2001, 'Convex upper and lower bounds for present value functions', *Applied Stochastic Models Business and Industry*, vol. 17, pp. 149-64.

11. Vyncke, D 2003, *Comonotonicity: The Prefect dependence*, Thesis of Ph.D, Catched University of Leuren.