فصلنامه‌صنعت‌بیمه/سال بیستم/شماره۲/ تابستان۱۳۸۳/شماره مسلسل۷۸/صفحات۹۵تا۱۱۶

سیستم پاداش- جریمه در شرکت‌های بیمه

علیرضا صباغ[۱]

چکیده

سیستم پاداش- جریمه یکی از فنون نرخ‌گذاری استحقاقی[۲] در بیمه مسئولیت است که در اغلب کشورهای اروپایی، آسیایی و بعضی از کشورهای امریکای لاتین و افریقا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این سیستم بیمه‌گذاران براساس مخاطره‌هایی که با آنها رو به رو هستند، به تعداد محدودی از رده‌های پاداش- جریمه تقسیم می‌شوند. در هر دورهٔ جدید ردهٔ آنها بر مبنای سوابق ادعاهای خسارت‌هایشان تصحیح می‌شود. نظریه زنجیر مارکوف ابزارهایی برای طراحی، ارزیابی و مقایسه این سیستم‌ها فراهم می‌کند. در این مقاله سیستم‌های پاداش- جریمه معرفی و ابزارهای اصلی بیمه‌آمارشناسان برای مطالعه، طراحی و ارزیابی سیستم‌های پاداش- جریمه بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی

پاداش- جریمه، نرخ‌گذاری استحقاقی، سطح میانگین مانایی نسبی، ضریب تغییرات حق بیمه، کشش سیستم، متوسط سهم نگهداشت بهینه

---

۱. کارشناسی ارشد آماربیمه (آکچوئری)

۲. Merit Rating

مقدمه

مخاطره، قرار گرفتن شخص یا شیئی در وضعیت نامطلوب یا خطرناک است. از دیدگاه بیمه، مخاطره میزان احتمال وقوع پیشامد است. یا به عبارتی، عدم قطعیت وقوع حوادثی که به ایجاد خسارت منجر می‌شود. از طرفی، بیمه بر این اصل استوار است که یک ادعای خسارت احتمالی را بتوان به وسیلهٔ پرداخت‌های ثابت، جبران کرد. به این دلیل، شناخت ساختار مخاطره و میزان شدت خسارتی که این مخاطره ایجاد می‌کند، در تعیین حق‌بیمه، امری ضروری است.

حق‌بیمهٔ دریافتی شرکت بیمه، باید لااقل با میزان مخاطرهٔ داشتمان تحت پوشش آن شرکت، تناسب داشته باشد. لذا برای تعیین حق‌بیمه، لازم است که از اصولی استفاده کرد که به نوعی، با شناختی از ساختار این مخاطره عمل کند که شرکت بیمه در آینده بتواند از عهدهٔ تعهدات خود برآید. از روش‌های شناخت دقیق‌تر این ساختار، استفاده از اطلاعات پیشین مخاطره است که توزیع ساختار فعلی را بر اساس این اطلاعات بنا می‌کنیم تا بر مبنای این ساختار، حق بیمه را تعیین کنیم. با توجه به این نکته که همیشه آمارهای موجود کمیت‌هایی مانند فراوانی ادعاهای خسارت، مبالغ ادعای خسارت و .... از گروه‌های مخاطره، در دسترس است، لذا همیشه اطلاعات گذشتهٔ مربوط به گروهی از مخاطره در اختیار ماست و بر پایهٔ این اطلاعات، فقط می‌توانیم تابع ساختار مخاطرهٔ گروه را تعیین و به این ترتیب فقط حق‌بیمه تجمعی را تعیین کنیم. اطلاعات گذشتهٔ مربوط به یک مخاطرهٔ خاص، موجود نیست تا براساس آن بتوان میزان مخاطرهٔ فردی را تخمین زد. به هر ترتیب، طبیعی است که به دلایل زیر، تمایل داشته باشیم که حق بیمهٔ مربوط به یک مخاطرهٔ خاص (حق‌بیمه ریسک) را بدانیم:

الف) در صورت یکی گرفتن حق‌بیمهٔ تجمعی و حق‌بیمهٔ مخاطره، احتمال دارد که لطمات جبران ناپذیر به شرکت بیمه وارد شود.

ب) تعیین حق‌بیمهٔ یکسان برای تمام بیمه‌گذاران، دور از انصاف است. برای مثال، اگر ثابت شود که میزان خسارتی که زنان به شرکت بیمه گزارش می‌کنند، کمتر از میزان خسارت گزارش شدهٔ مردان است، پس منصفانه است که زنان حق‌بیمهٔ کمتر از مردان بپردازند. چنانچه شرکت بیمه این مهم را نادیده بگیرد و برای هر دو گروه، حق‌بیمهٔ یکسانی تعیین کند، پس از مدتی میانگین خسارت زنان افزایش می‌یابد یا اینکه شرکت بیمه را ترک می‌کنند.

نکته مهم آن است که این حق‌بیمه برای اغلب حالت‌ها نامعلوم است. البته این حق‌بیمه را می‌توان در دو حالت زیر محاسبه کرد:

۱. چنانچه گروه مخاطره همگن باشد و به عبارت دیگر، همهٔ مخاطره‌ها احتمال وقوع خسارت یکسان داشته باشند، حق‌بیمهٔ تجمعی و حق‌بیمهٔ مخاطره، با هم برابرند.

۲. چنانچه اطلاعات مخاطره را بتوان در دورهٔ بسیار طولانی مشاهده کرد و سوابق ادعای خسارت در این دوره مانا باشد، یعنی شرایط مخاطره در طول زمان، ثابت باشد.

در بیمه‌های غیر زندگی، به‌ندرت این شرایط فراهم می‌شود. به همین دلیل، برای رفع این مشکل می‌توان مخاطره‌ها را به گروه‌هایی تقسیم کرد که از نظر احتمال وقوع خسارت، شرایط یکسانی داشته باشند. به عبارت دیگر، آن را به گروه‌های همگن‌تر تقسیم کرد و در آن‌صورت، حق‌بیمهٔ تجمعی با حق‌بیمهٔ مخاطره برابر است.

بیمهٔ مسئولیت شخص ثالث اتوموبیل، از آن دسته بیمه‌هایی است که ما در آن تمایل داریم که بیمه‌گذاران را به گروه‌های مخاطرهٔ همگن و مشابه تقسیم کنیم. زیرا از طرفی تناسب بین میزان حق‌بیمهٔ دریافتی و میزان احتمالی خسارتی که بیمه‌گذار ایجاد کرده و از طرف دیگر تشویق بیمه‌گذاران به ایجاد خسارت کمتر، در مدنظر است. اولین گام برای رسیدن به این منظور، ساختن طبقات همگن برای دسته‌بندی بیمه‌نامه‌هاست که شخص بر اساس مشخصات فردی، در گروه مخاطرهٔ مشابه با مشخصات فردی خود، قرار گیرد و در آن‌صورت، افراد یک طبقه، تقریباً مشخصات یکسانی دارند و به همین

دلیل، حق‌بیمهٔ متناسب با میزان مخاطرهٔ آن طبقه را پرداخت می‌کنند. برای رسیدن به این منظور، از تعدادی متغیرهای پیشین استفاده می‌شود. در گذشته، بیشتر کشورها و هم اکنون در امریکا و کانادا، شرکت‌های بیمه، تمایل به استفاده از متغیرهای پیشینی از قبیل جنس، سن، وضعیت تأهل، تجربهٔ رانندگی، محل سکونت، کاربرد وسیلهٔ نقلیه، مدل ماشین بیمه‌گذار و ... دارند. سیستم‌هایی که با این روش به تعیین حق بیمه می‌پردازند، سیستم‌های نرخ‌گذاری استحقاقی نامیده می‌شوند.

محدودیت‌های استفاده از سیستم‌های نرخ‌گذاری استحقاقی

الف) نرخ‌گذاری پسین، راه بسیار مطلوبی برای رده‌بندی بیمه‌گذاران، در داخل گروه‌های مطابق با مخاطره‌شان است که در این سیستم‌ها اعمال نمی‌شود. از طرفی، مطالعات بسیار، نشان داده است که اگر بیمه‌گر فقط مجاز به استفاده از یک متغیر نرخ‌گذاری برای نرخ‌گذاری استحقاقی باشد، بهترین پیش‌گویی، تعداد ادعاهای راننده در آینده بر اساس سن، نوع خودرو و مشخصات آن، محل سکونت و... نیست، بلکه بر اساس رفتار ادعاهای گذشتهٔ اوست.

ب) متغیرهای عمومی به کار برده شده در این سیستم‌ها، بسیار موشکافانه و دقیق است که در اکثر موارد، این اطلاعات در دسترس نیست و یا در آینده، ممنوعیت بیمه‌گر در استفاده از این متغیرها، صنعت بیمه را با مشکلات فراوانی مواجه می‌کند. به دلایل ذکر شده، بسیاری از کشورهای توسعه یافته و برخی از کشورهای آسیایی، از سیستم‌های نرخ‌گذاری استحقاقی پیچیده‌تری استفاده می‌کنند. در این سیستم‌ها، فقط از متغیر رفتار ادعاها در گذشته، به عنوان متغیر پیشین استفاده می‌شود و این متغیر، حق‌بیمهٔ آیندهٔ بیمه‌گذاران را تصحیح می‌کند (این نوع نرخ‌گذاری حق‌بیمه، نرخ‌گذاری پسین نامیده می‌شود). به این سیستم‌ها، سیستم پاداش ـ جریمه یا جزا ـ پاداش، گفته می‌شود.

تاریخچهٔ این سیستم‌ها، به زمانی‌که ژنرال دوگل رئیس جمهور فرانسه شد، بر می‌گردد. او در سال ۱۹۵۸، به شرکت‌های بیمهٔ فرانسه دستور داد که در بیمهٔ اتومبیل،

سیستمی به کار ببرند که شرایط فوق را داشته باشد. از این‌رو، برای بررسی این سیستم‌ها، بیمه‌آمارشناسان فرانسوی از سایر بیمه‌آمارشناسان کمک گرفتند و نخستین کنفرانس آستین[۳]، در ژوئن ۱۹۵۹با حضور۵۳ بیمه‌آمارشناس از هشت کشور در فرانسه تشکیل شد. موضوع این کنفرانس، "تخفیف برای موارد بدون ادعا در بیمهٔ اتوموبیل" بود. خلاصه‌ای از مطالب مطرح شده در این کنفرانس را می‌توان در آماتر[٤] (۱۹۵۹) یافت. از این‌رو، اولین مجلد از مقالات آستین[٥](۱۹۵۹)، شامل تعدادی از همکاری‌های بعد از این کنفرانس است.

معرفی سیستم پاداش ـ جریمه

نخستین افرادی که در مورد نظریهٔ سیستم پاداش ـ جریمه تحقیق کردند. اولین اعضای آستین، شامل‌فرانکس[٦](۱۹٦۰)، مارتین[۷](۱۹٦۰)، فیلیپسن[۸](۱۹٦۰)،گورتلر[۹] (۱۹٦۳) و ولتن[۱۰](۱۹٦۸) بودند که هرکدام به صورت مختصر به معرفی و تحلیل این سیستم‌ها پرداختند. سیستم‌های پاداش ـ جریمه، موضوع مورد علاقهٔ محققان آستین و سایر پژوهشگران دنیا بوده است و هم اکنون، نوشته‌های بسیار زیادی در این خصوص در مجله‌های آمار بیمه در سراسر دنیا موجود است.

در حال حاضر از سیستم‌های پاداش ـ جریمهٔ مختلفی در سراسر جهان استفاده می‌شود. هر کشوری ترجیح می‌دهد که از سیستم مخصوص به خود استفاده کند و در

---

۳. انجمن بین المللی بیمه‌آمار (International Actuarial Association-IAA) نخستین بخش خود را با نام آستینAstin در سال ۱۹۵۷ تاسیس کرد. وظیفه این بخش منحصراً تحقیق دربارهٔ بیمه‌های غیرزندگی است.

٤. Ammeter
٥. Astin Bulletin, Volume ۱, Number ۲ (۱۹٥۹)
٦. Franchx
۷. Martin
۸. Philipson
۹. Gürtler
۱۰. Welten

بعضی ازکشورها شرکت‌های بیمه ترجیح می‌دهند که از سیستم مخصوص به‌خود استفاده کنند. اما دراصل، هدف همهٔ این سیستم‌ها رسیدن به تعرفهٔ خوب است که برای رانندگان با فراوانی ادعای پایین، حق‌بیمهٔ پایین و برعکس، برای رانندگان با فراوانی ادعای بالا، حق‌بیمهٔ بالا تعیین کنند و حق‌بیمهٔ مربوط به هر بیمه‌نامه، تا آنجا که ممکن است به اندازهٔ مخاطرهٔ آن بیمه‌نامه نزدیک باشد. دراین‌سیستم‌ها، بیمه‌نامه‌های یک گروه مخاطرهٔ خاص، دررده‌های یکسان قرار می‌گیرند. مشخصهٔ این سیستم در بین سایر سیستم‌ها این است که فقط تعداد ادعای خسارت رخ داده، حق‌بیمه را تعدیل و یا تصحیح می‌کند.

نخستین افرادی که زنجیرهای مارکوف را در سیستم‌های پاداش ـ جریمه به‌کار بردند، مونرال و راکول[۱۱](۱۹۶۶) بودند. اما لویمارانتا[۱۲](۱۹۷۲) نمادها و بیان دقیق مشخصه‌های این سیستم‌ها و ارتباط آنها با زنجیرهای مارکوف را معرفی کرد. در ادامه، مطالبی که لویمارانتا مطرح کرده است معرفی می‌شود.

شرایط استفاده از سیستم پاداش ـ جریمه

شرط اول: همه بیمه‌گذاران از گروه‌های مخاطرهٔ معین بتوانند به تعدادی ردهٔ محدود تقسیم شوند. رده‌ها با C_i یا ساده‌تر با i نشان داده می‌شوند $(i=1,\ldots\ldots,s)$. بنابراین حق‌بیمهٔ مخاطره برای دورهٔ معین، منحصراً وابسته به ردهٔ آن دوره و تعرفهٔ دسته‌بندی است.(s نشان دهندهٔ تعداد رده‌هاست).

شرط دوم: بیمه‌گذاران جدید در یک ردهٔ C_{i_0} آغازین خاص، وارد سیستم شوند.

شرط سوم: رده‌ای که بیمه‌گذار در دورهٔ جدید در آن قرار می‌گیرد، فقط وابسته به ردهٔ دورهٔ قبل و تعداد ادعاهای گزارش شده در طی آن دوره باشد.

شرط چهارم: رده‌ای وجود داشته باشد که همهٔ بیمه‌گذاران بعد از تعدادی دوره‌های بدون ادعای به اندازهٔ کافی بزرگ در آن قرار گیرند.

---

۱۱. Monral & Rockwell

۱۲. Loimaranta

مشخصه‌های سیستم پاداش - جریمه

این قبیل سیستم‌ها را سه عنصر مشخص می‌کنند:

۱. نرخ‌گذاری حق‌بیمه: روش‌های تعیین حق‌بیمه‌های b_i، برای همهٔ رده‌های پاداش i است. اندازهٔ حق‌بیمه‌ها $\beta = (b_1, b_2, ..., b_s)$ است. فرض می‌کنیم که این حق‌بیمه‌ها به‌صورت یک بردار β با مولفه‌های b_i معین هستند.

۲. ردهٔ آغازین C_{i_o}.

۳. قاعده‌های تغییر وضعیت: قاعده‌ای که با معلوم بودن ردهٔ قدیم، تعداد ادعاهای گذشته و تعداد رده‌ها، ردهٔ جدید بیمه‌نامه را مشخص می‌کند. این قاعده، مانند تبدیلات $T_k(i) = j$ معرفی می‌شود و بیان کنندهٔ این مطلب است که وقتی k ادعا گزارش شده باشد، بیمه‌نامه از ردهٔ C_i به ردهٔ C_j تغییر وضعیت می‌دهد. تبدیل T_k را می‌توان به صورت ماتریس زیر نوشت:

$$T_k = \left(t_{ij}^{(k)}\right) \quad . \qquad (۱)$$

که اگر $T_k(i) = j$ باشد آن گاه $t_{ij}^{(k)} = 1$ و در غیر این صورت، $t_{ij}^{(k)}$ برابر صفر می‌شود. واضح است که

$$\sum_j t_{ij}^{(k)} = 1 \quad و \quad t_{ij}^{(k)} \geq 0 \qquad (۲)$$

است. اگر فرض کنیم که λ، فراوانی ادعا، یعنی تعداد ادعاهای خسارت مورد انتظار در هر دوره، برای یک بیمه‌نامه داده شده باشد و توزیع احتمال تعداد ادعا، یعنی $p_k(\lambda)$، در طی یک دوره، منحصراً به وسیلهٔ پارامتر λ تعریف شود و علاوه بر این، λ مستقل از دوره باشد، در آن‌صورت $p_{ij}(\lambda)$، یعنی احتمال اینکه یک بیمه‌نامه با فراوانی ادعای λ در یک دوره از ردهٔ C_i به ردهٔ C_j برود برابر با

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)} \qquad (۳)$$

است که در آن $p_k(\lambda)$ احتمال این است که راننده با فراوانی ادعای λ، k ادعا در یک سال داشته باشد و مشخصاً $p_{ij}(\lambda) \geq 0$ و

$$\sum_j p_{ij}(\lambda) = 1 \qquad (٤)$$

و ماتریس

$$M(\lambda) = \left(p_{ij}(\lambda)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k \qquad (٥)$$

ماتریس تغییر وضعیت نامیده می‌شود. این ماتریس شبیه ماتریس تغییر وضعیت در زنجیر مارکوف است.

مثال: برای نمونه، سیستم پاداش ـ جریمهٔ برزیل را بررسی می‌کنیم. در این سیستم هفت رده‌ای، بیمه‌گذار جدید، در ردهٔ هفتم وارد سیستم می‌شود. در سال‌های بدون اعلام خسارت، بیمه‌گذار به عنوان پاداش، به یک رده پایین‌تر می‌آید و در ازای هر ادعا، به عنوان جریمه، یک رده به ردهٔ بیمه‌گذار افزوده می‌شود. قانون‌های تغییر وضعیت و حق‌بیمهٔ مربوط به هر رده در جدول۱ آمده است.

تاریخچهٔ توزیع تعداد اعلام خسارت

دلیل اینکه سیستم‌های پاداش ـ جریمه، بر مبنای تعداد ادعای خسارت بیمه‌گذار است، لذا شناخت ساختار این توزیع از آغاز پیدایش و بررسی این سیستم‌ها مورد توجه آمارشناسان بیمه قرار گرفته و انتخاب توزیع مناسب برای مدل فرایند تعداد ادعا، در زمرهٔ نخستین موضوع‌های تحقیقی آستین بوده است. در مقاله‌های مختلف آمار بیمه [برای نمونه لمایر[۱۳](۱۹۸۵)] نشان داده شده است که اگر

۱. احتمال رخ دادن یک حادثه دربازهٔ زمانی کوچک $(t, t+\Delta t)$، متناسب با طول بازهٔ زمانی باشد و ارتباطی با زمان آغاز دوره نداشته باشد.

۲. احتمال وقوع دو حادثه یا بیشتر از آن در این بازه بعید باشد.

---

۱۳. Lemaire

۳- تعداد حوادث در مدت زمان‌های جدا از هم، مستقل از هم باشند.

جدول ۱. قانون انتقالات سیستم پاداش ـ جریمهٔ برزیل

رده	حق‌بیمه	رده‌ها بعد از k ادعا						
		۰	۱	۲	۳	٤	٥	≥٦
۱	٦٥	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷
۲	۷۰	۱	۳	٤	٥	٦	۷	۷
۳	۷٥	۲	٤	٥	٦	۷	۷	۷
٤	۸۰	۳	٥	٦	۷	۷	۷	۷
٥	۸٥	٤	٦	۷	۷	۷	۷	۷
٦	۹۰	٥	۷	۷	۷	۷	۷	۷
۷	۱۰۰	٦	۷	۷	۷	۷	۷	۷

آن‌گاه، تنها مدلی که سه مشخصهٔ فوق را در بر می‌گیرد، مدل پواسون است. متناظراً اگر فرض کنیم که الگوی حوادث فردی رانندگی، مطابق با این سه مشخصه است، چاره‌ای جز پذیرفتن مدل پواسون برای توزیع تعداد ادعای خسارت فردی بیمه‌گذار نداریم. از این رو فرض می‌کنیم که تعداد ادعای فردی، دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است که به عنوان توزیع تعداد ادعای خسارت بیمه‌گذار، برای بررسی و ارزیابی سیستم پاداش ـ جریمه در فصل سوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر داشتمان مورد نظر همگن باشد، λ پارامتر توزیع پواسون برای همهٔ بیمه‌گذاران، یکسان است و در آن صورت هیچ توجیهی برای به کار بردن سیستم پاداش ـ جریمه وجود ندارد. همهٔ بیمه‌گذاران در ردهٔ یکسان قرار می‌گیرند و حق‌بیمهٔ برابر پرداخت می‌کنند که به گذشتهٔ ادعاهای آنها بستگی ندارد. اما اگر پارامتر λ برای هر بیمه‌گذار متفاوت باشد، در آن‌صورت λ، مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی Λ برای بیمه‌گذار معین است.

تابع چگالی Λ را با $u(\lambda)$ نشان می‌دهیم که تابع ساختار نامیده می‌شود.
توزیع $K = 0,1,2,...$ متغیر تصادفی تعداد ادعا در داشتمان به صورت زیر است:

$$p_K(k|\Lambda) = \frac{e^{-\Lambda}\Lambda^k}{k!} \qquad (٦)$$

توزیع حاشیه‌ای تعداد ادعا در داشتمان، پواسون آمیخته است و در صورتی که توزیع Λ پیوسته باشد، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$p_K = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} u(\lambda) d\lambda \qquad (٧)$$

که در حالت گسسته، انتگرال به مجموع تبدیل می‌شود.

تحقیقات گسترده‌ای در مورد ساختار توزیع تعداد ادعا در داشتمان صورت گرفته است. در زیر خلاصه‌ای از این تحقیقات را بیان می‌کنیم:بیشل[١٤] (١٩٦٠)، تایرون[١٥] (١٩٦٠)، پسونن[١٦] (١٩٦٢)، دیرون[١٧] (١٩٦٢) و دلاپورت[١٨] (١٩٦٥) توزیع دوجمله‌ای منفی را برای توزیع تعداد ادعا در داشتمان ارزیابی کردند و نشان دادند که اگر $u(\lambda)$ توزیع گاما داشته باشد، نتیجهٔ کار، توزیع دوجمله‌ای منفی خواهد بود. یرون (١٩٦٣) یک توزیع گسستهٔ دو نقطه‌ای را برای $u(\lambda)$ به کار برد و یک توزیع پواسون آمیختهٔ دو نقطه‌ای را بررسی کرد. پانجر[١٩] (١٩٨٧) توزیع گاوسی وارون را برای $u(\lambda)$ به‌کار برد و توزیع پواسون گاوسی وارون تعمیم یافته را برای تعداد ادعا در داشتمان معرفی کرد.

ویلمت[٢٠] (١٩٨٦،١٩٩٣) در ارتباط با توزیع‌های آمیختهٔ پیوسته، یک فرمول سادهٔ بازگشتی را به‌کار برد. او توزیع بتا، یکنواخت، پاراتو و پاراتوی تعمیم یافته را

---

١٤. Bichsel
١٥. Thyrion
١٦. Pesonen
١٧. Derron
١٨. Dlaporte
١٩. Panjer
٢٠. Willmot

برای توزیع آمیخته، بررسی و "دوجمله‌ای منفی" و "پواسون ـ بتا" و "گاوسی وارون تعمیم یافتهٔ آمیخته" را نیز مطالعه کرد.

آلبرشت[۲۱] (۱۹۸۲،۱۹۸٤) توزیع پواسون آمیخته را با توزیع‌هایی از قبیل خانوادهٔ پیرسن، وایبل، پاراتو، بسل، خی‌دو و .... به‌کار برد. او همچنین فرایند پواسون آمیختهٔ گسسته را تأیید کرد.

سانت و جول[۲۲] (۱۹۸۱) و ویلمت(۱۹۸۸)، خانواده‌ای از توزیع‌های تعریف شده به وسیلهٔ رابطهٔ زیر را بررسی کردند:

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \qquad (۸)$$

دیگر پژوهشگران، توزیع‌های دیگری را نیز که به کلاس پواسون آمیخته تعلق ندارند برای برازش داده‌های تعداد ادعای خسارت، به‌کار برده‌اند. برای نمونه، توزیع هندسی آماسیده، در لمایر(۱۹۸۵) بررسی شد. فهرست جامعی از توزیع‌های قابل استفاده برای برازش توزیع تعداد در داشتمان در پانجر و ویلمت(۱۹۹۲) وجود دارد.

ابزارهای ارزیابی سیستم‌های پاداش- جریمه

سیستم‌های پاداش ـ جریمه را می‌توان از دیدگاه بیمه‌گذار یا بیمه‌گر ارزیابی کرد که نتایج متفاوتی در بر دارد و فرض‌ها، در مورد توزیع‌های تعداد ادعای خسارت، تغییر پیدا می‌کند. برای نمونه اگر توزیع پواسون برای مدل تعداد ادعای خسارت فردی یک بیمه‌گذار مناسب باشد، ناهمسانی میان فراوانی ادعاهای رانندگان (بیمه‌گذاران)، باعث می‌شود که این توزیع برای نمایش فراوانی ادعای بیمه‌گر مناسب نباشد.در اینجا بررسی درخصوص بیمه‌گذار درمدنظر است.فرض شده‌است‌که $\{p_k, k = 0,1,2,\ldots\}$، توزیع تعداد ادعای موجب خسارت برای یک بیمه‌گذار در طی یک دوره، از توزیع

۲۱. Albrecht
۲۲. Sundt & Jewell

پواسون با پارامتر λ پیروی می‌کند که مقادیر λ فراوانی ادعای بیمه‌گذار بین صفر و یک و مستقل از زمان است(برحسب زمان ثابت است).

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad (۹)$$

در بیشتر کشورها میانگین فراوانی ادعا در داشتمان، زیر ۱۰ درصد است که این مقدار به‌عنوان یک متوسط جهانی پذیرفته شده است، هر چند در بعضی از کشورها امکان دارد که فراوانی ادعا بیشتر یا کمتر از مقدار مورد نظر باشد. برای مثال، کشورهای اسکاندیناوی فراوانی ادعای ۵ درصد دارند. در صورتی‌که در کشورهای مدیترانه‌ای این مقدار تا ۲۰ درصد افزایش پیدا می‌کند که به این اختلاف معنی‌دار، در مقایسهٔ این سیستم‌ها باید توجه کرد. همهٔ سیستم‌های پاداش ـ جریمه، تحت فرض‌های یکسان، قابل مقایسه‌اند.

در این مقاله، ابزارهای طراحی را ارزیابی و سیستم‌های پاداش ـ جریمه را مقایسه می‌کنیم. با این ابزارها می‌توانیم سیستم مورد نظر را با سایر سیستم‌های موجود در سراسر دنیا مقایسه کنیم. البته، رتبهٔ سیستم‌ها، اشاره به قضاوت کیفیت آنها ندارد. رتبهٔ پایین یا بالا روی یک یا چند معیار معرفی شده در این فصل، بدین معنی نیست که سیستم، در مقایسه با سایر سیستم‌ها خوب یا بد است، چرا که آیین‌نامه‌ها در کشورها، به‌شدت متفاوت‌اند (از آزادی مطلق در برخی از کشورها، تا سیستم‌های کاملاً تحت نظارت دولت، در برخی کشورهای دیگر). واضح است که طراحی این سیستم‌ها، تحت تأثیر این آیین‌نامه‌هاست و در کشورهای دارای آیین‌نامه‌های شدید، سیستم‌های پیشرفته‌ای مورد انتظار است. با وجود این، مقایسهٔ کشورها ممکن است نقشی در بهبود بخشیدن به این سیستم‌ها داشته باشد.

البته می‌توان در مطالعات دیگر شبیه‌سازی و محاسبه‌های مورد نظر، توزیع "پواسون" را با "پواسون آمیخته" جایگزین نمود. به‌علاوهٔ فرض‌های مورد نظر، در ارزیابی داشتمان احتیاج به در نظر گرفتن درصد بیمه‌نامه‌هایی که سالانه داشتمان را

ترک می‌کنند، درصد بیمه‌نامه‌های جدید و ... و لازم است که در توزیع جمعیت رده‌های سیستم اعمال شوند.

۱. سطح میانگین مانایی نسبی (RSAL)

نتیجهٔ منطقی از اجرای سیستم پاداش ـ جریمه، کاهش پی‌درپی سطح متوسط حق‌بیمه است. برای نمونه سیستم بلژیک، ادعای خسارت را با اضافه کردن ٤ یا ٥ رده به رده بیمه‌گذار به عنوان جریمه و سال بدون ادعا را با کم کردن ۱ رده از رده بیمه‌گذار، پاداش می‌دهد. از طرفی متوسط فراوانی ادعای مشاهده شده در کشور بلژیک، کمتر از ۱۰ درصد است. در نتیجه در یک سال تعداد رده‌هایی که به‌عنوان پاداش از بیمه‌گذاران بدون ادعا کاسته شده است، خیلی بیشتر از تعداد رده‌هایی است که به بیمه‌گذاران دارای ادعا، به عنوان جریمه اضافه شده است. از این‌رو سطح متوسط حق‌بیمه کاهش می‌یابد و بعد از چند سال، اکثر بیمه‌گذاران در رده‌های پایین سیستم پاداش ـ جریمه متمرکز می‌شوند. در این‌صورت، بیمه‌گر برای جبران این پاداش‌ها و جلوگیری از ورشکستگی، مجبور است که حق‌بیمهٔ پایه را افزایش دهد که در آن‌صورت، هدف اصلی سیستم با شکست مواجه می‌شود و یا اینکه برای نگهداشتن سیستم در تعادل مالی، بدون افزایش حق‌بیمهٔ پایه، لازم است که هر ادعا را به وسیلهٔ ۸ یا ۹ رده، جریمه کند. این مطلب از نظر آماری توجیه پذیر است اما از نظر اقتصادی اجرای آن غیر ممکن است. برای رفع این مشکل لازم است که توزیع آیندهٔ بیمه‌نامه‌ها در بین رده‌ها، بعد از n سال دیگر را پیش‌بینی کنیم. این امر از طریق شبیه سازی و یا به‌وسیلهٔ محاسبهٔ توان nام ماتریس تغییر وضعیت $M(\lambda)$ معرفی شده در رابطهٔ(۵) ممکن است. با مطالعهٔ مجانبی ارائه شده می‌توان وضعیت سطح حق‌بیمه میانگین را در دوره‌های مختلف بررسی کرد.

معیار سطح متوسط مانا (حق‌بیمه میانگین مانا) برای مقایسهٔ سیستم‌های مختلف پاداش ـ جریمه، کار را با مشکل مواجه می‌کند. لمایر (۱۹۹٤) معیار سطح متوسط مانای نسبی (سطح حق‌بیمه میانگین مانای نسبی) را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\textbf{سطح متوسط مانای نسبی} = \frac{\text{سطح متوسط مانا} - \text{سطح حداقل}}{\text{سطح حداکثر} - \text{سطح حداقل}} \qquad (۱۰)$$

سطح متوسط مانای نسبی، معیاری را برای بیان جایگاه متوسط رانندگان (بیمه‌گذاران) وقتی‌که سیستم به حالت مانا می‌رسد، اندازه‌گیری می‌کند. این معیار، درجه تمرکز بیمه‌نامه‌ها در رده‌های بالاتر سیستم پاداش ـ جریمه را ارزیابی می‌کند.

مقادیر کوچک این معیار، نشان دهندهٔ تجمع بیمه‌گذاران در رده‌های پایین سیستم است و مقادیر بزرگ، بیان کنندهٔ توزیع مناسب بیمه‌گذاران در بین رده‌هاست. سطح متوسط مانای نسبی، فقط یک مقیاس خام از شدت سختی سیستم است، زیرا تحت تأثیر حق‌بیمهٔ رده‌های پرجمعیت واقع می‌شود.

۲. ضریب تغییرات حق بیمه

بیمه به معنی انتقال خطر از بیمه‌گذار به بیمه‌گر است. بدون رتبه‌بندی تجربی، تغییرپذیری پرداخت‌های بیمه‌گذار صفر و هماهنگی کامل است. با رتبه‌بندی تجربی، حق‌بیمه‌های شخص از یک سال به سال دیگر مطابق با تاریخچه ادعاها تغییر می‌کند و هماهنگی بین رانندگان ضعیف می‌شود.

ایراد به سیستم‌های پاداش ـ جریمه این است که حق‌بیمه‌های پرداخت شدهٔ بیمه‌گذار، بسیار متغیر است. لمایر(۱۹۹٤)، برای اینکه بتواند این تغییرات را اندازه‌گیری کند، از مقیاسی به نام ضریب تغییرات حق‌بیمهٔ بیمه‌گذار استفاده کرد. انتخاب ضریب تغییرات (انحراف معیار تقسیم بر میانگین) به این دلیل است که نیازی به تبدیل پول رایج نداریم، زیرا این ضریب، فاقد واحد است.

$$CV_i^{\,j} = \frac{\sigma(\mathrm{P}_i^{\,j}(\lambda))}{\mathrm{E}(\mathrm{P}_i^{\,j}(\lambda))} \qquad (۱۱)$$

در صورتی‌که بیمه‌گذار جدید در ردهٔ C_i وارد سیستم شده باشد، $\sigma(\mathrm{P}_i^{\,j}(\lambda))$ و $\mathrm{E}(\mathrm{P}_i^{\,j}(\lambda))$ به‌ترتیب انحراف معیار و میانگین حق‌بیمهٔ بیمه‌گذار در دورهٔ j ام است. ضریب تغییرات وابسته به ردهٔ آغازین بیمه‌گذار است، که آن را با C_i نشان می‌دهیم. این مقدار وقتی‌که که سیستم به وضعیت مانا رسیده باشد، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma(\mathrm{P}(\lambda))}{\mathrm{E}(\mathrm{P}(\lambda))} \qquad (۱۲)$$

۳. کشش سیستم پاداش – جریمه

هدف اصلی سیستم پاداش ـ جریمه، کاهش حق‌بیمهٔ رانندگان، با فراوانی ادعای پایین و افزایش حق‌بیمهٔ رانندگان، با فراوانی ادعای بالاست. یک معیار اندازه‌گیری مخاطره‌ای که بیمه‌گذار ایجاد کرده، حق‌بیمهٔ مخاطره $R = \lambda V$ است که در آن، V میانگین هزینهٔ یک ادعا و λ فراوانی ادعای بیمه‌گذار است. ازطرفی، متغیر تصادفی میزان ادعا و تعداد ادعا، اغلب مستقل فرض می‌شوند. این حقیقت، بیان کنندهٔ این است که هزینهٔ یک حادثه در بیشتر موارد، خارج از کنترل بیمه‌گذار است و دقت راننده بر تعداد حوادث، تأثیرگذار است و برمیزان خسارت تأثیری ندارد.

اعتبار استقلال فرض شده را بیمه آمارشناسان بررسی کرده‌اند. تقریباً در سراسر دنیا شرکت‌های بیمه، تعداد ادعا را مستقل از میزان ادعا، جریمه می‌کنند. به این دلیل V از نظر عملی در داخل یک گروه مخاطرهٔ همگن، ثابت است و حق‌بیمهٔ مخاطره، منحصراً وابسته به فراوانی ادعای بیمه‌گذار است. یعنی مخاطرهٔ هر راننده، به وسیلهٔ λ، فراوانی ادعای فردی، محاسبه می‌شود.

کشش حق‌بیمهٔ میانگین مانای یک سیستم پاداش ـ جریمه، میزان پاسخ حق‌بیمهٔ سیستم، نسبت به تغییرات در فراوانی ادعاست و بدیهی است که در سیستم منطقی، حق‌بیمهٔ میانگین مانا، $P(\lambda)$، تابع افزایشی از λ، فراوانی ادعاست و در وضعیت مطلوب، این وابستگی، خطی است. به این معنی که حق‌بیمهٔ مخاطره و حق‌بیمهٔ میانگین سیستم، با هم برابرند و $P(\lambda)$ متناسب با λ است. از این‌رو تغییرات جزئی در فراوانی ادعا، $\frac{d\lambda}{\lambda}$، باعث تغییرات جزئی متناسب در حق‌بیمهٔ میانگین مانا، $\frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)}$، می‌شود. در حالت ایده‌آل، این تغییرات با هم برابرند و سیستم در این حالت، کاملاً کشسان نامیده می‌شود:

$$\frac{d\lambda/\lambda}{dP(\lambda)/P(\lambda)} = 1 \qquad (۱۳)$$

در حالت کلی، تغییرات حق‌بیمهٔ میانگین مانا، کمتر از تغییرات λ است و کشش در سیستم پاداش ـ جریمه به صورت خارج قسمت این تغییرات، تعریف می‌شود:

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d\ln P(\lambda)}{d\ln\lambda} \qquad (۱٤)$$

$\eta(\lambda)$ کشش حق بیمهٔ میانگین مانا در ارتباط با فراوانی ادعا نامیده می‌شود. این مفهوم را در علم «آکچوئری»، تحت نام کارایی (راندمان)، لیومارانتا (۱۹۷۲) تعریف کرده است. بنابراین برای یک سیستم پاداش ـ جریمهٔ منطقی، $\eta \geq 0$ و برای یک سیستم مطلوب، $\eta = 1$ و در کل، $0 \leq \eta \leq 1$ است. از لحاظ نظری، $\eta > 1$ نیز می‌تواند باشد. اما در عمل، این قبیل سیستم ها با کارایی برتر، بسیار نادر هستند.

٤. متوسط سهم نگهداشت بهینه

سیستم پاداش ـ جریمه باعث می‌شود که بیمه‌گذار برای جلوگیری از افزایش حق‌بیمه تمایل به پرداخت ادعاهای خسارت کم هزینه داشته باشد و آنها را به بیمه‌گر

گزارش نکند. در بعضی از کشورها این پدیده به‌عنوان "اشتیاق برای پاداش" نامیده می‌شود و این موضوع را ناظران دولتی به رسمیت شناخته شده‌اند. برای نمونه در آلمان، ناظران ـبین کرده‌اند که اگر بیمه‌گذار، هزینهٔ ادعا را به بیمه‌گر باز پرداخت کند، نباید جریمه شود و به‌علاوه اگر میزان ادعا کمتر از۱۰۰۰ مارک باشد، لازم است که شرکت بیمه به بیمه‌گذار آگاهی دهد که در صورت تمایل هزینه را خود جبران کند. تا کنون راه‌حل‌های بسیار متنوعی در ارائه یک مدل برای بررسی این موضوع مطرح شده است.عنوان "اشتیاق برای پاداش" را فیلیپسون (۱۹٦۰) به‌ثبت رساند. محققان آکچوئری زیادی در این زمینه تحقیق کرده‌اند و الگوریتم‌هایی برای محاسبه سهم نگهداشت بهینه توسط بیمه‌گذاران ارائه کرده‌اند. بیشتر این تحقیقات بر مبنای فرضیات ساده است.

در همهٔ این مقالات، اشتیاق برای پاداش که تحت تأثیر اجرای یک سیستم پاداش ـ جریمه است، در طراحی این سیستم‌ها، به ثبت رسیده است. بررسی دقیق این مقالات علمی نشان می‌دهد که همهٔ مؤلفان، در به‌کار بردن فرضیات واقعی به همراه راه‌حل‌های عددی، اتفاق نظر دارند.

۵. نرخ همگرایی سیستم پاداش ـ جریمه

ارزیابی نرخ همگرایی سیستم پاداش ـ جریمه به وضعیت مانا بسیار مهم است، چرا که در تعریف بعضی از ابزارهای ارزیابی فرض شده است که سیستم به وضعیت مانا می‌رسد.

$p_{ij}(\lambda)$ احتمال‌های تغییر وضعیت تک مرحله‌ای و $p_{ij}^{n}(\lambda)$ احتمال‌های تغییر وضعیت n مرحله‌ای زنجیرمارکوف در ارتباط با هر سیستم پاداش ـ جریمه است. این احتمال‌ها به‌وسیلهٔ محاسبهٔ توان nام ماتریس تغییر وضعیت $\mathrm{M}(\lambda)$ به‌دست می‌آیند و $\pi_j(\lambda)$ توزیع ماناست. یک سیستم پاداش- جریمه، ردهٔ خاص C_i را (که

معمولاً ردهٔ آغازین است) در نظر می‌گیریم. تغییرات کل را بانسدرف[۲۳] (۱۹۹۲) به‌صورت زیر بیان کرد:

$$(TV)_n = \sum_{j=1}^{s} \left| p_{ij}^{n}(\lambda) - \pi_j(\lambda) \right| \qquad (۱۵)$$

که به‌عنوان مقیاسی از درجهٔ همگرایی سیستم، بعد از n مرحله است. کل تغییرات همیشه بین ۰ و ۲ است. عبارت $(TV)_n$ ابزار بسیار مفیدی برای انتخاب عواملی از قبیل تعداد رده‌ها، ردهٔ آغازین و قاعده‌های تغییر وضعیت که سرعت مانایی را تحت تأثیر قرار می‌دهند، فراهم می‌کند.

می‌دانیم که هر سطر از ماتریس احتمال تغییر وضعیت n مرحله‌ای، همگرا به توزیع ماناست. بانسدرف (۱۹۹۲) نشان داد که برای زنجیر مارکوف منظم، مقادیر $K(\lambda) < \infty$ و $0 < \rho(\lambda) < 1$ وجود دارد که برای هر n داریم:

$$\max_{i=1,\dots,s} \sum_{j=1}^{s} \left| p_{ij}^{n}(\lambda) - \pi_j(\lambda) \right| \le K(\lambda)\rho(\lambda) \qquad (۱۶)$$

نرخ همگرایی احتمالات تغییر وضعیت n مرحله‌ای به‌سمت توزیع مانا می‌تواند با مفهوم ویژه مقادیر ماتریس تغییر وضعیت مشخص شود. همان‌طور که می‌دانیم، عدد ۱، یکی از مقادیر ویژه سادهٔ ماتریس $\mathrm{M}(\lambda)$ است و سایر ویژه مقادیر، از ۱ کوچک‌ترند. نرخ همگرایی رابطهٔ (۱٦) به‌وسیلهٔ دومین ویژه مقدار ماکزیمم ماتریس $\mathrm{M}(\lambda)$، بیان می‌شود

$$r(\lambda) = \max\left[|\alpha_1(\lambda)|, \dots, |\alpha_{s-1}(\lambda)| \right] \qquad (۱۷)$$

که $\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_{s-1}(\lambda)$ ویژه مقادیر ماتریس $\mathrm{M}(\lambda)$، به غیر از ۱ هستند. $r(\lambda)$ نرخ همگرایی سیستم است، بدین معنی که

۱. اگر $\rho(\lambda) > r(\lambda)$، وجود دارد $K(\lambda) < \infty$ که رابطهٔ (۱٦) صحیح است.

۲. اگر $\rho(\lambda) < r(\lambda)$، وجود ندارد $K(\lambda) < \infty$ که رابطهٔ (۱٦) صحیح باشد.

---

۲۳. Bonsdorff

واضح است که $r(\lambda) < 1$ است و $r(\lambda)$ کوچک‌تر بیان کنندهٔ سیستمی است که همگرایی، سریع‌تر درآن اتفاق می‌افتد.نتایج فوق از زنجیرهای مارکوف شمارش پذیر را ایساکسون و لوییک[۲۴] (۱۹۷۸) به‌دست آورده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به اجمال سیستم‌های پاداش ـ جریمه و ابزارهای مربوط به بررسی و ارزیابی این سیستم‌ها معرفی شد. لذا با توجه به این مطلب، طراحی یک سیستم پاداش ـ جریمه برای یک جامعه بر اساس داده‌های آماری مربوط به بیمه اتوموبیل مقدور است.

برای اجرای چنین سیستم‌هایی در کشور، به داشتن بانک اطلاعات جامعی از این داده‌ها نیاز داریم. اجرای چنین سیستم‌هایی در کشور باعث کاهش نرخ تصادفات و افزایش علاقه رانندگان به رعایت قوانین راهنمایی و رانندگی می‌شود و برنامه‌ریزی برای محاسبات حق‌بیمه مسئولیت اتوموبیل را آسان‌تر می‌کند.

۲۴. Issacson & Luecke

منابع

۱. Albrecht, P. (1982). "On Some Statistical Methods Connected With the Mixed Poisson Distribution." *Scandinvian Actuarial Journal*, 1-14.

۲. Albrecht, P. (1984). "Laplace Transforms, Mellin Transforms and Mixed Poisson Processes." *Scandinvian Actuarial Journal*, 58-64.

۳. Ammeter, H. (1959). "Die Ruckvergutung bei Schadenfreiem Verlauf in der Motorfahrzeugversicherung" Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 207-216.

۴. Bichsel, F. (1960). "Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres." *ASTIN Bulletin*, 1, 106-112.

۵. Bichsel, F. (1964). "Erfahrung-Tarifierung in der Motorfahrzeughaftplichtversicherung." Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 207-216.

۶. Bonsdorff, H. (1992). "On The Convergence Rate Of Bonus-Malus Systems." *ASTIN Bulletin*, 22, 217-223.

۷. Bühlmann, H. (1970). Mathematical Models in Risk Theory. Springer- Verlag, Berlin.

۸. Coene, G. and Doray, L. G. (1996). "A Financilly Balanced Bonus-Malus System." *ASTIN Bullrtin*, 26, 107-115.

۹. Delaporte, P. (1965). "Tarification du risque individuel d'accidents automobiles par la prime modelée sur le risque." *ASTIN Bulletin*, 3,251-271.

۱۰. De Pril, N. (1978). "The Efficiency of a Bonus-Malus System." *ASTIN Bulletin*, 10,59-72

۱۱. Derron, M. (1962). "Mathematische Probleme der Automobilversicherung." Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 103-123.

۱۲. Derron, M. (1963). "A Theoretical Study of No-Claim Bonus Problem." *ASTIN Bulletin*, 3.62-74.

۱۳. Dufresne, F. (1988). "Distributions Stationnaires d'un Système Bonus-Malus et Probabilité de ruine." *ASTIN Bulletin* , 18, 31–46.

۱۴. Franckx, E. (1960). "Théorie du bonus." *ASTIN Bulletin*, 1, 113-122.

۱۵. Frangos, N.E. and Vrontos, S. (2001). "Design of optimal Bonus-Malus systems with a frequency and a severity component on an Individual basis in automobile insurance." *ASTIN Bulletin*, 16-S, 59-79.

۱۶. Gürtler, M. (1963). "Bonus ou malus." *ASTIN Bulletin*, 3, 43-61.

۱۷. Issacson, D and luecke, G.R. (1978). "Strongly ergodic Markov chains and rates of convergence using spectral conditions." Stochastic Processes Appl. 7, 113- 121.

۱۸. Lemaire, J. (1976). "Driver Versus Company: Optimal Behaviour of the Policyholder." *Scandinvian Actuarial Journal*, 209-219.

۱۹. Lemaire, J. (1977). "La soif du bonus." *ASTIN Bulletin*, 9, 181-190.

۲۰. Lemaire, J. (1979). "How to Define a Bonus-Malus System With an Exponential Utility Function." *ASTIN Bulletin*, 10, 274-282.

۲۱. Lemaire, J. (1985) Automobile Insurance : Actuarial Models. Kluwer,Boston.

۲۲. Lemaire , J., and H. Zi. (1994). "A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus Systems." *ASTIN Bulletin*, 24, 278-309.

۲۳. Lemaire , J. (1999). "Bonus- Malus Systems: The European and Asian Approach to Merit-Rating." *ASTIN Bulletin*, 10, 274-282.

۲۴. Loimaranta , K. (1972) "Some Asymptotic Properties of Bonus System." *ASTIN Bulletin* 6. 233-245

۲۵. Martin, D.B. (1960). "Automobile Insurance: Canadian Accident-Free Classification System." *ASTIN Bulletin*, 1, 123-133.

۲۶. Monral, D., and T. Rockwell. (1966). "Analysis of Policy Movement in a Merit-Rating Program: An Application of Markov Processes." *Journal of Risk and Insurance*, 265-276.

۲۷. Panjer, H.H. (1987). "Models of Claim Frequency." In Advances in the Statistical Sciences: Actuarial Science. VI, 115-125.I.B. Mac Neill and G.j. Umphrey (eds.).

۲۸. Panjer, H.H., and G.E. Willmot. (1992). "Insurance Risk Models." Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries.

۲۹. Pesonen, E. (1962). "A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale." *ASTIN Bulletin*, 2,102-108.

۳۰. Philipson C. (1960). "The Swedish System of Bonus." *ASTIN Bulletin*, 1,134-141.

۳۱. Sundt, B. and W. Jewell. (1981). "Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distribution." *ASTIN Bulletin*, 12, 27-39.

۳۲. Taylor, G. (1997). "Setting A Bonus-Malus Scale in the Presence of Other Rating Factors." *ASTIN Bulletin*, 27, 319- 327.

۳۳. Thyrion, P. (1960). "Contribution à l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile." *ASTIN Bulletin*, 1, 142-162.

۳٤. Tremblay, L. (1992). "Using the Poisson Inverse Gaussian in Bonus-Malus Systems." *ASTIN Bulletin*, 22, 97-106.

۳۵. Walhin, J. F. and Paris, J. (1999) "Using Mixed Poisson distributions in connection with Bonus-Malus Systems." *ASTIN Bulletin* , 29, 81- 99.

۳٦. Welten, C.P. (1968). "The Unearned No-Claim Bonus." *ASTIN Bulletin*, 5, 25-32.

۳۷. Willmot, G.E (1986). "Mixed Compound Poisson Distributions." *ASTIN Bulletin*, 16-S, 59-79.

۳۸. Willmot, G.E (1988). "Sundt and Jewell's Family of Discrete Distributions." *ASTIN Bulletin*, 18, 17-29.

۳۹. Willmot, G.E (1993). "On Recursive Evaluation of Mixed Poisson Probabilities and Related Quantities." *Scandinvian Actuarial Journal*, 114-133.