فصلنامه صنعت بیمه / سال پانزدهم / شماره ۵۷ / بهار ۱۳۷۹ / صفحات ۹۳ تا ۱۰۸

مارتینگل‌ها و ریسک بیمه[1]

محمدمهدی امانی[2]

چکیده:

نظریهٔ مارتینگل‌ها را می‌توان برای محاسبهٔ احتمال‌های ورشکستگی و تعیین کران لوندبرگ در مدل‌های مختلف ریسک بیمه مانند مدل کرامر ــ لوندبرگ یا مدل کلاسیک، مدل تجدید یا اسپار ــ اندرسن و مدل کلی ریسک بیمه که قرض، بهره و تورم در آن مجاز است، به‌کار گرفت.

واژگان کلیدی:

مارتینگل، احتمال ورشکستگی، بهره، تورم، قرض.

مقدمه

یکی از شاخص‌های اصلی ارزیابی شرکت بیمه محاسبهٔ احتمال‌های ورشکستگی است. محاسبهٔ دقیق احتمال‌های ورشکستگی، جز برای مواردی خاص، از لحاظ عملی مشکل است لذا تقریب‌ها و کران‌هایی برای محاسبهٔ احتمال‌های ورشکستگی زمان متناهی و زمان بی‌نهایت معرفی می‌شود. در این مقاله برآنیم تا احتمال ورشکستگی را با استفاده از کران‌ها و تقریب‌هایی که به کمک نظریهٔ مارتینگل‌ها عملی می‌شود در مدل‌های گوناگون ریسک بیمه محاسبه کنیم. گربر [5] در سال ۱۹۷۳ نظریهٔ مارتینگل‌ها را به طور موفقیت‌آمیزی در نظریهٔ ریسک به کار گرفت و از آن برای به‌دست آوردن نامساوی‌های لوندبرگ استفاده کرد. پس از آن نظریهٔ مارتینگل‌ها در نظریهٔ ریسک به ابزار سودمندی تبدیل شد. در این مقاله تعدادی از این رهیافت‌ها را مرور می‌کنیم. ابتدا با تعریفی از مدل کلاسیک کرامر ــ لوندبرگ شروع خواهیم کرد. سپس کارهای گربر را

---

۱. این مقاله در نخستین سمینار آمار بیمه (اکچواری ـ دانشگاه شهید بهشتی ـ سال ۱۳۷۸) ارائه گردید.

۲. کارشناس ارشد آمار بیمه

مرور می‌کنیم. در کار ساخت مارتینگل‌ها برای فرآیندهای ریسک، نظریهٔ فرآیندهای مارکوف تکه به تکهٔ تعیینی، ابزار سودمندی است که دیویس [۲] معرفی کرد. در این‌جا دو مثال از کاربردهای این نظریه را ارائه می‌دهیم.

۱. مدل ریسک کلاسیک کرامر ــ لوندبرگ

نظریهٔ جدیدی از ریسک که به اوایل قرن تازه گذشته برمی‌گردد، مربوط به مدل ریسک جمعی است که فیلیپ لوندبرگ بررسی کرد. پس از آن کارهای زیادی در این زمینه انجام گرفته است. نظریهٔ ریسک جمعی، قسمتی از ریاضیات اکچواری است که با مدل‌های تصادفی تجارت‌بیمه بحث‌می‌شود. در چنین مدلی، رخداد ادعاها با یک فرآیند شمارش و مبالغ پول پرداختی شرکت بیمه در هر ادعا با دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی توصیف می‌شوند. شرکت بیمه برای پوشش دادن تعهدات خود مقدار معینی حق‌بیمه دریافت می‌کند. اختلاف بین درآمد حق‌بیمه و متوسط هزینه‌ها برای ادعاها، «سربار ایمنی» است. شرکت، داشتن سرمایهٔ اولیهٔ u را نیز در ابتدای کارش فرض می‌کند. پس فرآیند مازادی از ریسک بیمه را می‌توان چنین توصیف کرد: مخارج − درآمد + سرمایهٔ اولیه.

مسألهٔ مهم در نظریهٔ ریسک جمعی و جدید، بررسی «احتمال ورشکستگی» است، یعنی احتمال این‌که مازاد شرکت منفی شود. ساده‌ترین مدل، مدل‌ریسک‌کرامر ــ لوندبرگ است. این مدل تعدادی از ساختارهای پایه مثل ضریب تعدیل، سربار ایمنی، ساختار حق‌بیمه و جز آن را نتیجه می‌دهد. این مدل براساس بیان نکردن چندین فرض ساخته شده ولی هنوز هم چارچوبی برای ساخت مدل‌های واقعی‌تر است و آن را می‌توان مدل پایه درنظر گرفت. فرض کنیم فضای احتمال (Ω, z , p) موضوع‌های مستقل زیر را دربر دارد:

۱) فرآیند شمارشی N_t.

۲) دنبالهٔ $\{Y_i : i \in N\}$ از متغیرهای تصادفی iid ، اندازهٔ ادعاها با تابع توزیع G و $G(\circ)=\circ$ و میانگین متناهی μ قرار می‌دهیم:

$$S_t = \sum_{i}^{N_t} Y_i$$

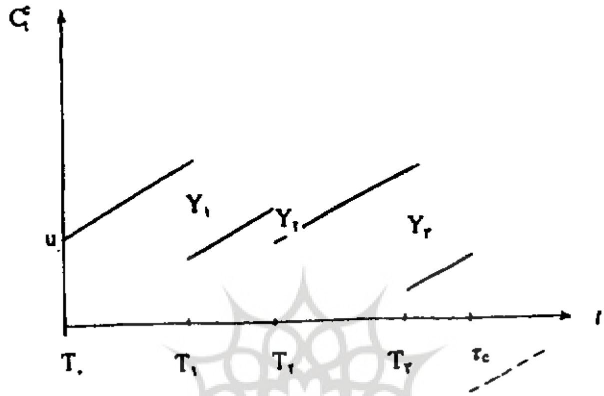
که بر مقدار کل ادعاهای پرداخت شدهٔ شرکت بیمه تا زمان t دلالت می‌کند. فرض کنیم $c>\circ$ نرخ ثابت حق‌بیمه باشد. در مدل کرامر ــ لوندبرگ N_t یک فرآیند پواسون با نرخ

$\lambda > 0$ است و مازادی از شرکت بیمه با سرمایهٔ اولیهٔ u به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود

$$C_t^c = u + ct - S_t$$

که c در C_t^c برای کلاسیک واقع شده است. فرآیند مازاد C_t^c را می‌توان با شکل شمارهٔ ۱ توصیف کرد.

شکل ۱



شرکت بیمه با سرمایهٔ اولیهٔ u شروع به کار می‌کند بنابراین در لحظهٔ $t=0$ سرمایهٔ اولیهٔ شرکت برابر u است. شرکت در طول زمان با نرخ ثابت c شروع به جمع‌آوری حق‌بیمه می‌کند و سرمایه‌اش با ضریب زاویهٔ c رو به افزایش است، تا این که خسارت در زمانی مانند T_1 از شرکت ادعا می‌شود. فرض کنید مبلغ خسارت Y_1 باشد. بنابراین سرمایهٔ شرکت بعد از رسیدن به مقدار $u + cT_1$ بلافاصله بعد از وقوع خسارت به میزان $u+cT_1-Y_1$ تنزل می‌کند و تا زمانی که شرکت برای ایفای تعهدات خود سرمایه‌ای باقی داشته باشد به کار خود ادامه خواهد داد. زمان توقف

$$\tau = inf\left\{t > 0\ ;\ C_t^c < 0\right\} \qquad (1.1)$$

زمان ورشکستگی نامیده می‌شود. یعنی زمانی که خسارت‌های پرداختی شرکت از سرمایهٔ اولیه به علاوهٔ مجموع حق‌بیمه‌های دریافتی فزونی می‌یابد، می‌گوییم شرکت ورشکسته شده است (شکل شمارهٔ ۱). «ورشکستگی» فقط تصویر مطلوب فنی ریاضی‌گونه است. تصور مناسب‌تری از ورشکستگی را می‌توان برحسب «عدم اعسار» بیان کرد. هدف اصلی در نظریهٔ ریسک، تعیین احتمال ورشکستگی است. به‌طور کلی

محاسبهٔ احتمال‌های ورشکستگی در حالت زمان بی‌نهایت و زمان متناهی

$$\Psi(u) = p\left[\ \tau < \infty \ \mid X_{\circ} = u\right]$$
$$\Psi(u\,,\,t) = p\left[\ \tau < t \ \mid X_{\circ} = u\right]$$

مشکل است (X_0 مقدار فرآیند مازاد در $t=\circ$ است). برای $u=\circ$ نتیجه می‌شود که [۴،ص ۳۷۷]

$$p\left[\tau_c < \infty \ \mid C^c_{\circ} = a\right] \ = min\left\{\frac{\lambda\mu}{c}\,,\,\text{۱}\right\}$$

۲. مارتینگل‌ها برای فرآیند ریسک کلاسیک

محاسبهٔ احتمال‌های ورشکستگی برای u اختیاری را می‌توان با استفاده از مارتینگل‌های مناسب انجام داد. گربر [۵] روش‌های مارتینگل را به طور موفقیت‌آمیزی در نظریهٔ ریسک به‌کار گرفت. برای هر تابع F، $\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{s} exp(-sx)\,dF(x)$ تبدیل لاپلاس استیلت‌یس F (تبدیل Ls) را نشان می‌دهد. تبدیل Ls تابع توزیع اندازه‌های ادعا را با $\hat{G}(s)$ نشان می‌دهیم. برای مدل کلاسیک

$$g(r\,,\,\lambda) = \lambda\left(\hat{G}(-r) - \text{۱}\right) - cr \qquad (\text{۱.۲})$$

تابع انباشتک متغیر تصادفی $u - C^c_{\text{۱}}$ است. اکنون فرآیند ریسک کلاسیک را درنظر می‌گیریم. نحوهٔ رهیافت پیدا کردن یک مارتینگل به شکل

$$M_t = e^{-rC^c_t}\,e^{-\theta(r)t}$$

است $\theta(r)$ را برای وابستگی θ روی r می‌نویسیم. در این صورت داریم:

لم ۲.۱ به ازای هر $r \geq \circ$ فرآیند

$$\left(e^{-rC^c_t}\ e^{-g(r\,,\,\lambda)t}\ : t \geq \circ\right) \qquad (\text{۲.۲})$$

یک Z^c_t مارتینگل است، مشروط بر این که $g(r, \lambda) < \infty$ (یا به طور معادل $\hat{G}(-r) < \infty$).

گزارهٔ زیر کران بالایی را برای احتمال ورشکستگی تعیین می‌کند.

گزارهٔ ۱.۲ : فرض کنیم $r \geq \circ$، برای زمان‌های ورشکستگی فرآیند ریسک کلاسیک نتایج زیر را داریم:

$$P\left[\ \tau_c \leq t\right] \ \leq e^{-ru} \sup_{\circ \leq s \leq t} \ e^{g(r\,,\,\lambda)s} \qquad \circ < t < \infty \qquad (\text{۱}$$

$$P\left[\tau_c \langle \infty\right] \ \leq e^{-ru} \sup_{s \geq \circ} e^{g(r\,,\,\lambda)s} \qquad (\text{۲}$$

اگر R_c عددی ثابت باشد، در این صورت R_c جواب اکیداً مثبت یکتایی از $g(r,\lambda)=۱$ است و

$$P\left[\ \tau_c < \infty\right]\ \leq e^{-R_c u} \qquad (۳$$

تعریف ۱.۲ : ثابت R_c در گزارهٔ ۱.۲ نمای لوندبرگ (یا ضریب تعدیل) برای مدل کلاسیک نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲ : سربار ایمنی از یک فرآیند ریسک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - ۱$$

اگر $\rho > ۰$، فرآیند ریسک سربار ایمنی مثبت دارد.

مثال ۱.۲: با بررسی انجام گرفته در مورد اطلاعات مربوط به رشتهٔ بیمهٔ شخص ثالث متوجه شده‌ایم که تعداد ادعاها، فرآیند پواسون با نرخ $\lambda=۷/۵۹$ و اندازهٔ ادعاها توزیع نمایی با میانگین $\mu=۰/۵۹$ دارند.[1] در این صورت نمای لوندبرگ R_c ریشهٔ $g(R_c,\ ۷/۵۹) = ۷/۵۹\,(۱-۰/۵۹R_c)^{-۱} - cR_c = ۰$ است. از این رو، حال با توجه به $c = (۱+\rho)\,\lambda\,\mu$ می‌توانیم R_c را به صورت زیر بنویسیم:

$$R_c = \frac{\rho}{\mu\,(۱+\rho)}$$

که ρ سربار ایمنی (تعریف ۲.۲) است. مقادیر R_c به ازای مقادیر مختلف ρ (در واقع cهای مختلف) در جدول شمارهٔ ۱ آمده است.

با استفاده از منبع [۴، ص ۳۷۸] تحت شرط سود خالص، یعنی $c > \lambda\mu$، نتیجه می‌شود که

$$p\left[\ \tau_c < \infty\right]\ = \frac{\lambda\mu}{c}\,e^{-R_c u} = \frac{۱}{(۱+\rho)}\,e^{-R_c u}$$

---

۱. داده‌ها از یکی از شعب بیمهٔ ایران جمع‌آوری شده است. برای جزئیات بیشتر، منبع ۸ را ببینید.

جدول ۱. مقادیر R_c در حالت زمان بی‌نهایت به ازای مقادیر مختلف ρ

ρ	R_c
۱٪	۰/۰۱۶
۲/۵٪	۰/۰۴۱
۵٪	۰/۰۸
۱۰٪	۰/۱۵
۲۰٪	۰/۲۸

با توجه به مقادیر جدول شمارهٔ ۱ احتمال‌های ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف R_c و سرمایهٔ اولیهٔ u برای مدل ریسک کلاسیک در حالت زمان بی‌نهایت در جدول شمارهٔ ۲ آمده است.

جدول ۲. احتمال ورشکستگی برای مقادیر مختلف ρ و u در حالت زمان بی‌نهایت، اندازهٔ خسارت‌های نمایی θ

u \ e	۰	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۲۰
۱۰	۱	۰/۸۴	۰/۶۴	۰/۴۲	۰/۲۰۳	۰/۰۵۱
۲۰	۱	۰/۷۱	۰/۴۲	۰/۱۹	۰/۰۴۵	۰/۰۰۳۱
۳۰	۱	۰/۶۱	۰/۲۸	۰/۰۸۶	۰/۰۱	۰/۰۰۰۲
۵۰	۱	۰/۴۴	۰/۱۲۳	۰/۰۲۷	۵×۱۰$^{-۴}$	۶/۹×۱۰$^{-۷}$
۱۰۰	۱	۰/۱۸	۰/۰۱۵۶	۰/۰۰۰۳۲	۲/۷×۱۰$^{-۷}$	۵/۷×۱۰$^{-۱۳}$

۳. فرآیندهای مارکوف تکه به تکهٔ تعیینی

برای مدل‌بندی فرآیند ریسک و ساخت مارتینگل‌ها، نظریهٔ فرآیندهای مارکوف تکه به تکهٔ تعیینی ابزار مفیدی است که از این پس آن را PDMP می‌نامیم. دیویس آن را معرفی کرد. امبرخت در بحثی به مقالهٔ دیویس [۲، ص ۳۸۱] اشاره کرد که نظریهٔ PDMP ابزار

مفید و مطلوبی را در نظریهٔ ریسک حاصل کرده است.[1] دلیل عمده‌ای که PDMP به صورت ابزار کارا و مفیدی در نظریهٔ ریسک درآمده است راه ساده‌ای است که برای ساخت مارتینگل ارائه می‌دهد. برای ساخت مارتینگل‌ها ابتدا به تعریف زیر نیازمندیم:

تعریف ۱.۳ : اگر برای تابع‌های حقیقی اندازه‌پذیر $f, \tilde{f} : E \rightarrow R$

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \tilde{f}(X_c)\,ds \qquad (۱.۳)$$

یک Z_t مارتینگل باشد، در این صورت قرار می‌دهیم: $\nu f = \tilde{f}$. عمل‌گر ν مولد (کامل) را (X_t) می‌نامند و گفته می‌شود که f در حوزهٔ مولد، $D(\nu)$، است.

گزارهٔ ۱.۳ : فرض کنیم (X_t) یک PDMP باشد و $f: (E \cup \partial E) \rightarrow R$ تابعی حقیقی و اندازه‌پذیر صدق‌کننده در شرایط زیر باشد.

۱) f تابعی مطلقاً پیوسته در طول خم‌ها باشد. (۲.۳)

۲) $f(x) = \int_E f(y)\,Q(dy, x) \;, \; \forall x \in \partial E$ (شرط مرزی) (۳.۳)

۳) $E\left[\sum_{T_i \le t} \left| f(X_{T_i}) - f(X_{T_i^-}) \right| \right] < \infty$ (۴.۳)

در این صورت $f \in D(\nu)$ و مولد با

$$\nu f(x) = X f(x) + \lambda(x)\left[\int_E (f(y) - f(x))\,Q(dy, x)\right] \qquad (۵.۳)$$

مشخص می‌شود.

هدف، حل کردن معادلهٔ $\nu f = 0$ با ν معرفی شده در (۵.۳) است، به طوری که شرط‌های (۲.۳ – ۴.۳) برآورده شوند. در این صورت فرآیند $(f(X_t) : t \ge 0)$ یک مارتینگل خواهد بود.

---

۱. برای بحث کامل‌تر ریاضی، منبع ۲ را ببینید.

۴. مدل تجدید (یا مدل اسپار - اندرسن)

ساده‌ترین تعمیم از مدل ریسک کلاسیک، فرض رخداد ادعاها مطابق با یک فرآیند تجدید است. یعنی، $N_t = sup\left\{ i \in N \; ; \; \sum_{j=1}^{i} U_j \leq t \right\}$ که $\{U_j \;:\; j \geq 1\}$ متغیرهای تصادفی مثبت و مستقل‌اند، به طوری که $\{U_j \;:\; j \geq 2\}$ تابع توزیع مشترک F و U_1 تابع توزیع کلی F' دارند. N_t را در صورتی که $F'=F$ باشد. فرآیند را فرآیند تجدید معمولی می‌نامیم. اگر $\alpha = \int^{\infty} t dF(t) < \infty$, $F'(t) = \alpha^{-1} \int^{t} (1-F(s))ds$ ، در این صورت N_t را یک فرآیند تجدید مانا می‌نامیم. یعنی به ازای هر $h>0$، توزیع $N_{t+h} - N_t$ مستقل از t است. اکنون فرآیند مازاد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_t^r = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

(r در C_t^r برای تجدید است). در حالت غیر پواسونی $(C_t^r \;:\; t \geq 0)$ یک فرآیند مارکوف نیست، اما رفتاری از فرآیند روی زمان سپری شده پس از آخرین ادعا (عمر جاری) یا زمان باقیمانده به ادعای بعدی (طول عمر مازاد) وابسته است. این متغیرهای تصادفی جالب توجه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$U_t = t - T_{N_t}$ (زمان سپری شده پس از آخرین ادعا)

$V_t = T_{N_t+1} - t$ (زمان باقیمانده به ادعای بعدی)

با تعریف متغیرهای تصادفی بالا، دو امکان برای مدل‌بندی حالت تجدید PDMP امکان‌پذیر می‌شود [۷].

مارکوفی کردن از طریق زمان سپری شده پس از آخرین ادعا

این رهیافت را امبرخت وداسیوس [۳] معرفی کردند. در این روش می‌توان فرآیند $(C_t^r \;:\; t \geq 0)$ را با معرفی متغیرهای مکمل مارکوفی کرد [۱]. فرض کنیم U_t زمان سپری شده پس از آخرین ادعا باشد، در این صورت $X_t = (C_t^r \;,\; U_t \;,\; t)$ یک فرآیند مارکوف است. برای اطمینان بر PDMP بودن فرآیند X_t باید فرض شود که F(t) تابعی مشتق‌پذیر است.

لم ۱.۴ گیریم $r \geq 0$ ، به طوری که $\hat{G}(-r) < \infty$ و فرض کنیم

$$\hat{G}(-r)\,\hat{F}\,(\theta(r)+cr)=1 \qquad (1.4)$$

که $\hat{F}$ تبدیل Ls تابع F است. در این صورت فرآیند

$$\hat{G}(-r)\,\frac{e^{(\theta(r)+cr)\,U_t}}{1-F(U_t)}\int_{U_t}^{\infty}e^{-(\theta(r)+cr)s}\,F'(s)\,ds\;e^{-rC_t^r}\;e^{-\theta(r)t}\;:\;t\geq 0$$

یک مارتینگل است. هم‌چنین (۱.۴) یک جواب یکتا مانند $\theta(r)$ دارد.

زمان ورشکستگی

$$\tau_r=inf\left\{t>0\,,\,C_t^r<0\right\}$$

را برای مدل تجدید تعریف می‌کنیم. چون $U_{\tau_r}=0$, $C_{\tau_r}^r<0$، از قضیهٔ توقف اختیاری برای مارتینگل‌ها نتیجه می‌شود

$$p\left[\tau_r\leq t\;\mid\;C_0^r=u\right]\leq E\left[h(U_0)\right]e^{-ru}\,max\left\{1,e^{\theta(r)t}\right\}$$

که در حالت معمولی $E[h(U_0)]=0$ و در حالت مانا $E\left[h(U_0)\right]=\dfrac{\hat{G}(-r)-1}{\alpha(\theta(r)+cr)}$

$\theta(r)$ تابعی محدب است [۷] و تحت شرط سود خالص $\frac{\mu}{\alpha}<c$ ، $\theta'(0)=\frac{\mu}{\alpha}-c$ و چون $\theta(0)=0$. پس در نهایت جواب R_r (نمای لوندبرگ) برای معادلهٔ $\theta(R_r)=0$ وجود دارد.

در صورت چنین جوابی نمای لوندبرگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P\left[\tau_r<\infty\right]\leq C(-R_r)\,e^{-R_ru} \qquad (2.4)$$

که‌درحالت‌معمولی $C(-R_r)=1$ و در حالت مانا

$$C(-R_r)=(\alpha cR_r)^{-1}(\hat{G}(-R_r)-1)$$

مثال ۱.۴. با بررسی که بر روی داده‌های مربوط به رشتهٔ بیمهٔ آتش‌سوزی شهرستان مشهد انجام گرفت[1] نتیجه شد که تعداد ادعاها از یک فرآیند شمارشی کلی (غیر پواسونی) پیروی می‌کنند. توزیع اندازهٔ ادعاها گاما با پارامترهای $\alpha_1 =$ ۰/۴۴۵ و $\beta_1 =$ ۰/۰۷۴۴. توزیع زمان بین ادعاها نیز توزیع گاما با پارامترهای $\alpha_2 =$ ۱/۳۷ و $\beta_2 =$ ۰/۱۹۲۹دارد. حال با مشخص شدن توزیع F و G، به ترتیب توزیع زمان بین ادعاها و اندازهٔ ادعاها، می‌توانیم نمای لوندبرگ (مؤلفهٔ لوندبرگ) R_r را برای مدل تجدید محاسبه کنیم. $\theta(r)$از (۱.۴) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\theta(r) = \beta_1 \left[\left(1 - \frac{r}{\beta_2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - 1 \right] - cr$$

و R_r جوابی از این معادله است. با قرار دادن مقادیر α_1، β_1، α_2 و β_2و با توجه به$c=(1+\rho)\frac{\mu}{\alpha}$ (μمیانگین مبالغ ادعاها و α میانگین زمان بین ادعاها) مقادیر R_r به ازای مقادیر مختلف π در جدول شمارهٔ ۳ آمده است.

جدول ۳. مقادیر R_r به ازای مقادیر مختلف ρ در مدل تجدید

R_r	ρ
۰/۰۰۳۷	۱٪
۰/۰۰۶۲	۲/۵٪
۰/۰۰۷۴	۵٪
۰/۰۱۱	۱۰٪
۰/۰۱۸۷۵	۲۰٪

حال با به دست آوردن مقادیر R_r احتمال‌های ورشکستگی در حالت زمان بی‌نهایت

---

۱. برای جزئیات بیشتر دربارهٔ این مثال، منبع ۸ را ببینید.

با استفاده از (۲.۴) به ازای مقادیر مختلف ρ و u برای مدل تجدید معمولی و مانا به‌ترتیب در جدول‌های ۴ و ۵ آمده است.

جدول ۴. احتمال‌های ورشکستگی زمان بی‌نهایت به‌ازای مقادیر مختلف ρ و u برای مدل تجدید معمولی

e / u	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۲۰
۱۰	۰/۹۶	۰/۹۳	۰/۹۲	۰/۸۹	۰/۸۲
۵۰	۰/۸۳	۰/۷۳	۰/۶۹	۰/۵۷	۰/۳۹
۱۰۰	۰/۶۹	۰/۵۳	۰/۴۷	۰/۳۳	۰/۱۵
۱۰۰۰	۰/۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰۶	$۱/۷\times۱۰^{-۵}$	$۷/۱۹\times۱۰^{-۹}$

جدول ۵. احتمال‌های ورشکستگی زمان بی‌نهایت برای مدل تجدید مانا

e / u	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۲۰
۱۰	۰/۹۸	۰/۹۶	۰/۹۴	۰/۹۰	۰/۸۴
۵۰	۰/۸۵	۰/۷۵	۰/۷۱	۰/۵۸	۰/۳۹۹
۱۰۰	۰/۷۰	۰/۵۵	۰/۴۸	۰/۳۳۶	۰/۱۵
۱۰۰۰	۰/۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰۶۵	$۱/۷\times۱۰^{-۵}$	$۷/۱۹\times۱۰^{-۹}$

۵. مدل ریسک با ساختار بهره و قرض

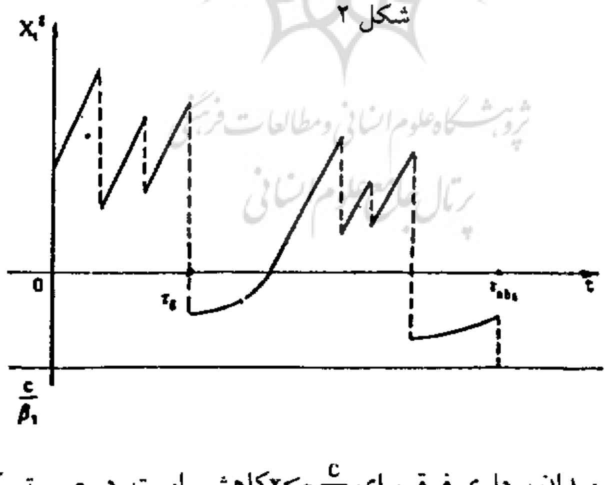
یک بسط مهم اولیه از مدل کلاسیک، معرف بهره در مدل است. مدل‌های گوناگونی برای مدل‌بندی نرخ‌های بهره وجود دارد. یک راه، در نظر گرفتن مدل زمان گسسته است [۵]. روش دیگر انتخاب مدل زمان پیوسته است [۷]. در صورتی که امکان دریافت بهره برای پول سرمایه‌گذاری شده وجود داشته باشد، پس امکان قرض گرفتن پول برای شرکت بیمه طبیعی به‌نظر می‌رسد و در نظریهٔ ریسک جدید ایده‌ای از مفهوم قرض نیست. برای مثال، گربر [۵] برای شرایطی که نرخ بهرهٔ پولی که شرکت قرض گرفته است با نرخ بهرهٔ پول سرمایه‌گذاری شدهٔ شرکت با هم برابرند، مدلی درنظر گرفت. امبرخت و داسیوس

[۳] مدل عدم امکان سرمایه‌گذاری برای حالتی را که اندازهٔ ادعاها دارای توزیع نمایی‌اند مطالعه کردند. در این مدل اصطلاح «ورشکستگی مطلق» معرفی شد (شکل شمارهٔ ۲). در این‌جا هنوز از نمادگذاری مدل کلاسیک استفاده می‌کنیم. $(N_t : t \geq ۰)$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ و $G(x)$ تابع توزیع اندازهٔ ادعاها با میانگین متناهی μ است.

برای تعمیمی از مدل کلاسیک فرض می‌کنیم که یک شرکت بیمه در صورتی که نیازمند باشد (برای مازاد منفی و پایین) می‌تواند پول قرض کند و هم‌چنین برای سرمایهٔ بالای یک حد معین، بهره‌ای دریافت کند، مبلغی از سرمایه که شرکت برای ذخیرهٔ جاری نگه می‌دارد [۵]. نرخ بهره برای پول قرض گرفته شده به ترتیب با $\beta_۱$ و $\beta_۲$ نشان داده می‌شود. فرض کنیم که X_t یک PDMP باشد. با استفاده از زبان PDMP میدان برداری مناسب می‌شود:

$$X = \begin{cases} (\beta_۱(x-\Delta)+c)\dfrac{\partial}{\partial x} & , x \geq \Delta \\ c\dfrac{\partial}{\partial x} & , ۰ \leq x < \Delta \\ (\beta_۲ x + c)\dfrac{\partial}{\partial x} & , x < ۰ \end{cases}$$

شکل ۲



خم انتگرالی به میدان برداری فوق برای $x > -\frac{c}{\beta_۲}$ کاهشی است. در صورتی که شرکت به مرز $-\frac{c}{\beta_۲}$ برخورد کند به طور حتم قادر به پرداخت وام‌های خود نخواهد بود. بنابراین $\tau_{abc} = inf\left\{t > ۰ , X_t < -\frac{c}{\beta_۲}\right\}$ زمان ورشکستگی مطلق نامیده می‌شود (شکل ۲)

احتمال ورشکستگی در حالت زمان بی‌نهایت می‌شود:

$$\Psi_{abs} = p\,[\tau_{abc} < \infty]$$

بنابراین برای $x < -\frac{c}{\beta_2}$، برای تابع‌های f داریم $f(x)=0$. چون رفتاری از فرآیند روی نواحی سه‌گانهٔ $[-\frac{c}{\beta_2},0)$، $[0,\Delta)$ و $[\Delta,\infty)$ مختلف است، پس تابع F را می‌توان در داخل سه مسیر زیر درنظر گرفت:

$$f(x) = f_1(x)\, I_{\{x \geq \Delta\}} + f_2(x)\, I_{\{0 \leq x < \Delta\}} + f_3(x)\, I_{\left\{-\frac{c}{\beta_2} \leq x < 0\right\}}$$

برای به دست آوردن جواب $\nu f=0$ باید سیستم معادلات زیر را حل کنیم.

$$(c+\beta_1(x-\Delta))f_1'(x) + \lambda \left[\int_0^{x-\Delta} f_1(x-y)\,d\,G(y) + \int_{x-\Delta}^{x} f_2(x-y)\,d\,G(y) + \int_{x}^{x+\frac{c}{\beta_2}} f_3(x-y)\,d\,G(y) - f_1(x) \right] = 0$$

$$cf_2'(x) + \lambda \left[\int_0^{x} f_2(x-y)\,d\,G(y) + \int_{x}^{x+\frac{c}{\beta_2}} f_3(x-y)\,d\,G(y) - f_2(x) \right] = 0$$

$$(c+\beta_2 x)\, f_3'(x) + \lambda \left[\int_0^{x+\frac{c}{\beta_2}} f_3(x-y)\,d\,G(y) - f_3(x) \right] = 0$$

با توجه به شرط (۲.۳) از گزارهٔ ۱.۳ فرض می‌کنیم که $f_1(\Delta)=f_2(\Delta)$ و $f_3(0)=f_2(0)$. حال با توجه به محدودیت روی $\{x<\Delta\}$ می‌توان فرآیند را در سه طریق زیر مدل‌بندی کرد:

۱) حالت خاصی از عدم ذخیرهٔ جاری ($\Delta=0$) و نرخ‌های بهرهٔ مساوی ($\beta_1=\beta_2$) که اولین بار گربر [۵] آن را مطالعه کرد.

۲) مدل داسیوس ـ امبرخت [۳] (ورشکستگی مطلق) که هیچ سرمایه‌گذاری مجاز شمرده نمی‌شود (یعنی $\Delta=0$).

۳) مدل کلی.

لم ۱.۵ . فرض کنیم

$$s_{\circ}=\sup\left\{s\geq \circ : cs-\lambda(1-\hat{G}(s))\leq \circ\right\} \quad , \quad \hat{f}_1(s)=\int_{\Delta}^{\infty} f_1(x)e^{-sx}\,dx \text{ ،}$$

$$\hat{f}_2(s)=\int_{\circ}^{\infty} f_2(x)e^{-sx}\,dx \quad , \quad \hat{f}_3(s)=\int_{-\frac{c}{\beta_2}}^{\infty} f_3(x)e^{-sx}\,dx$$

به ترتیب نشان دهندهٔ تبدیلات لاپلاس f_1 ، f_2 و f_3 باشند و همچنین فرض کنیم

$$\hat{g}(s)=\exp\left\{\beta_1^{-1}\left(cs-\lambda\int_{\circ}^{s} z^{-1}(1-\hat{G}(z))\,dz\right)\right\}$$ ، پس

۱)
$$\hat{f}_3(x)=K\frac{1}{s}\exp\left\{\frac{cs}{\beta_2}\right\}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\beta_2}\int_{\circ}^{s}\frac{1-\hat{G}(z)}{z}\,dz\right\}$$

۲) برای $s > s_{\circ}$

$$\hat{f}_2(s)=\frac{cf_3(\circ)-h_2(s)}{s-\lambda(1-G(s))}$$

۳)
$$\hat{f}_1(s)=\frac{\hat{g}(s)e^{\Delta s}}{\beta_1 s}\int_{\circ}^{\infty}\frac{cf_2(\Delta)-h_1(\eta)e^{\Delta\eta}}{\hat{g}(\eta)}\,d\eta$$

که

$$h_2(s)=\lambda\int_{\circ}^{\infty}\int_{x}^{x+\frac{c}{\beta_2}} f_3(x-y)\,dG(y)\,e^{-sx}\,ds$$

و

$$h_1(s)=\lambda\int_{\Delta}^{\infty}\left[\int_{x-\Delta}^{x} f_2(x-y)\,dG(y)+\int_{x}^{x+\frac{c}{\beta_2}} f_3(x-y)\,dG(y)\right]e^{-sx}\,dx$$

حال با توجه به قضیهٔ همگرایی مارتینگل‌ها و توقف اختیاری می‌توان قضیه را نتیجه گرفت. قضیه برای هر $\Delta \in [\circ,\infty)$

$$p[\tau<\infty \mid X_{\circ}=u]=1-\frac{f(u)}{f(\infty)} \qquad (1.5)$$

که f با توجه به لم ۱.۶ تعیین می‌شود (۲. اگر $\Delta=\infty$ و ۳. اگر $\Delta<\infty$) . □

در حالتی که اندازهٔ ادعاها توزیع نمایی دارند، یعنی $\hat{G}(s) = (1+\mu s)^{-1}$، باشند. در این صورت تبدیلات لاپلاس لم ۱.۶ معکوس‌های زیر را دارند

$$f_3(x) = \tilde{K} \int_0^{x + \frac{c}{\beta_2}} s^{(\frac{\lambda}{\beta_2})-1} e^{-\frac{s}{\mu}} ds$$

$$f_2(x) = f_3(0) + \frac{f_3'(0)}{(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})} \left(1 - e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})x}\right) \qquad (2.5)$$

و

$$f_1(x) = f_2(\Delta) + \left(\frac{\beta_1}{c}\right)^{(\frac{\lambda}{\beta_1})-1} e^{\frac{c}{(\beta_1 u)}} f_2'(\Delta) \int_{c/\beta_1}^{x + \frac{c}{\beta_1} - \Delta} S^{(\frac{\lambda}{\beta_1})-1} e^{-\frac{s}{\mu}} ds$$

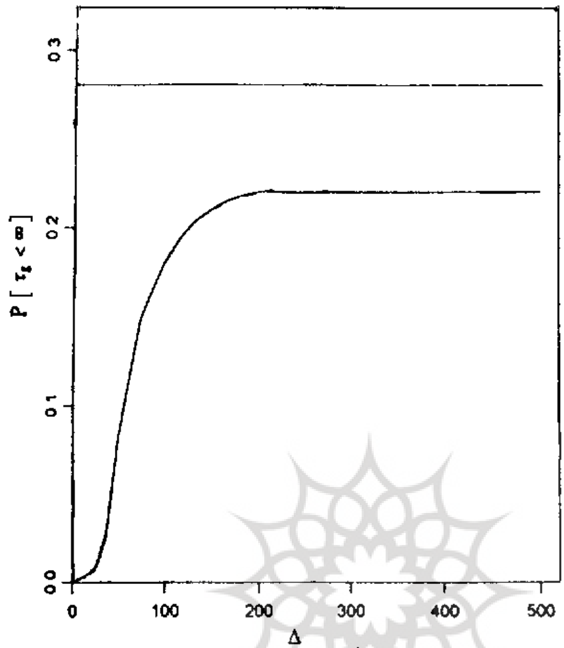
مثال ۱.۵ (ادامهٔ مثال ۱.۲) : با توجه به مثال ۱.۲ چون اندازهٔ ادعاها توزیع نمایی دارند، پس با استفاده از (۱.۵) و (۲.۵) می‌توانیم احتمال‌های ورشکستگی زمان بی‌نهایت را محاسبه کنیم. در جدول شمارهٔ ۶ احتمال‌های ورشکستگی به عنوان مثالی که روی ذخیرهٔ جاری (Δ) وابسته هستند به ازای مقادیر $\mu = ۰/۵۹$، $\lambda = ۷/۵۸$، سرمایهٔ اولیهٔ $u = ۳۰$، نرخ حق‌بیمهٔ $c = ۴/۵۸$ ($\rho = ۰/۰۲۵$)، نرخ بهرهٔ $\beta_1 = ۰/۰۵۸$ (۶ درصد) برای پول سرمایه‌گذاری شده و $\beta_2 = ۰/۰۹۵$ (۱۰ درصد) برای پول قرض گرفته شده در حالتی که اندازهٔ ادعاها نمایی‌اند، نشان داده شده است.

جدول ۶. احتمال‌های ورشکستگی برای مدل ریسک کلاسیک با $\beta_1 = ۰/۰۵۸$، $\beta_2 = ۰/۰۹۵$ و سرمایهٔ اولیهٔ $u = ۳۰$ و ادعاهای نمایی.

Δ	۰	۲۵	۳۷	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰
$p[\tau_{cs} < \infty]$	۰	$۵/۵ \times ۱۰^{-۳}$	۰/۰۲۲۵	۰/۰۸	۰/۱۴۸	۰/۱۱۸	۰/۲۱	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲

در شکل شمارهٔ ۳ این مثال نشان داده شده است. خط مستقیم، مقدار احتمال ورشکستگی برای مدل ریسک کلاسیک است. در این شکل و در جدول شمارهٔ ۶ نشان داده شده است که احتمال‌های ورشکستگی به‌طور جانبی به احتمال ورشکستگی مطلق در مدل امبرخت و داسیوس میل می‌کنند.

شکل ۳. احتمال‌های ورشکستگی برای مثالی از یک فرآیند ریسک با ادعاهای نمایی و با درنظر گرفتن قرض ($\beta2$ = ۰/۰۹۵) و سرمایه‌گذاری ($\beta1$ = ۰/۰۵۸) در محاسبات، سرمایهٔ اولیه u = ۳۰



منابع

1. Cox, D.R. (1995) , The Analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by Inclusion of Suplementary Variable, Proc. Comb. Philos. 51 , 433-441.
2. Davis, M.H.A. (1987), Piecewise - deterministic Markov Processes. A General Class of Non-diffusion Stochastic Models, J.r.statis. soc.B. 46, 353-388.
3. Dassios, A. and Embrecht, P. (1989), Martingales and Insurance Risk, Commun. Statist. - Stochastic Models, 5 , 181-217.
4. Feller, W. (1971), An Introduction to Probability Theory and Its Application, Volume II, Wiley, New York.
5. Gerber, H.U. (1973), An Introduction to Mathematical Risk Theory, Hubner Foundation Monographs, Philadelphia.
6. Grandel. J. (1991), Aspect of Risk Theory, Springer - Verlage, New York.
7. Schmidli, H. (1992) , Ph. D. Thesis, ETH Zurich.