Educational Measurement and Evaluation Studies

National Organization for Educational Testing

Print ISSN: 2476-2865 Online ISSN: 2783-0942

Teaching the Concept of Random Variable Using the Riemann-Stieltjes Integral Approach and Scaffolding Strategy for Science and Engineering Students

Mehdi Shams[1], Fereshteh Sadat Hosseinian Ghamsari[2]

1. Assistant Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran; (Corresponding Author), Email: mehdishams@kashanu.ac.ir
2. Master's Degree, Department of Biostatistics, Tarbiat Modares University, Tehran, Tehran, Iran. Email: f.hoseinian@modares.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article Type:
Research Article

Received:2023.10.01
Received in revised form: 2024.02.09
Accepted: 2024.03.05
Published online: 2024.03.23

Objective: The current research was conducted with the aim of studying the scaffolding strategy and providing a new approach for teaching random variables in probability courses of science and engineering students.

Methods: In this article, firstly, some issues are raised about active learning and factors such as group work, corrective feedback, and the use of computers that help students learn courses related to statistics and probability. Then the demonstration programs that can replace the classical educational methods were introduced.

Results: In the following, some common misconceptions of students about events, random variables and continuous random variables will be mentioned and these concepts will be analyzed by citing a number of examples. In the last part, the concept of scaffolding and its application in random variable education and a teaching approach in statistics and probability courses are described.

Conclusion: According to the items stated in the article, it is suggested to teach the basic topics of random variables, instead of teaching discrete and continuous random variables separately, random variables should be taught in general.

Keywords: Statistics and probability, random variables, Riemann-Stieltjes integral.

Cite this article: Shams, Mehdi; Hosseinian Ghamsari, Fereshteh Sadat (2024). Teaching the Concept of Random Variable Using the Riemann-Stieltjes Integral Approach and Scaffolding Strategy for Science and Engineering Students. *Educational Measurement and Evaluation Studies*, 14 (45): 73-96 pages.

DOI:10.22034/EMES.2024.2011124.2502

Publisher: National Organization of Educational Testing (NOET)

مطالعات اندازه‌گیری و ارزشیابی آموزشی
سازمان سنجش آموزش کشور
شاپا چاپی: ۲۸۶۵-۲۴۷۶ شاپا الکترونیکی: ۰۹۴۲-۲۷۸۳

آموزش مفهوم متغیر تصادفی با استفاده از رویکرد انتگرال ریمان–استیلتس و راهبرد داربست برای دانشجویان علوم و مهندسی

مهدی شمس[1]، فرشته سادات حسینیان قمصری[2]

۱. استادیار گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران؛ (نویسنده مسئول)، رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir
۲. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه آمار زیستی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، تهران، ایران. رایانامه: f.hoseinian@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: **مقاله پژوهشی**	**هدف:** پژوهش حاضر با هدف مطالعه راهبرد داربست و ارائه رویکرد جدیدی برای آموزش متغیرهای تصادفی در دروس احتمال دانشجویان علوم و مهندسی انجام شده است.
	روش پژوهش: در این مقاله ابتدا در مورد یادگیری فعال و عواملی نظیر کار گروهی، بازخورد اصلاحی و استفاده از رایانه، که در یادگیری دروس وابسته به آمار و احتمال به دانشجویان کمک می‌کند، موردهایی مطرح می‌شود. سپس برنامه‌های نمایشی به عنوان جایگزینی برای روش‌های کلاسیک آموزشی معرفی می‌شود.
دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۰۹ **اصلاح: ۱۴۰۲/۱۱/۲۰** **پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۵** **انتشار : ۱۴۰۳/۰۱/۰۴**	**یافته‌ها:** در این مقاله به برخی تصورهای غلط رایج دانشجویان درباره پیشامدها، متغیرهای تصادفی و متغیرهای تصادفی پیوسته اشاره می‌شود و با ذکر تعدادی مثال این مفهوم‌ها مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهند گرفت. سپس مفهوم راهبرد داربست و کاربرد آن در آموزش متغیر تصادفی و یک رویکرد تدریس در دوره‌های آموزشی آمار و احتمال شرح داده می‌شود.
	نتیجه‌گیری: با توجه به موارد بیان شده در مقاله، پیشنهاد می‌شود در تدریس مباحث اولیه متغیرهای تصادفی برای دانشجویان علوم و مهندسی، به‌جای این که حالت‌های متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته به‌طور جداگانه تدریس شوند، متغیرهای تصادفی به‌صورت کلی و با استفاده از مفهوم انتگرال ریمان–استیلتس آموزش داده شوند.
	واژه‌های کلیدی: آمار و احتمال، متغیرهای تصادفی، انتگرال ریمان–استیلتس.

استناد: شمس، مهدی؛ حسینیان قمصری، فرشته سادات (۱۴۰۳). آموزش مفهوم متغیر تصادفی با استفاده از رویکرد انتگرال ریمان–استیلتس و راهبرد داربست برای دانشجویان علوم و مهندسی. *مطالعات اندازه‌گیری و ارزشیابی آموزشی*، ۱۴ (شماره۴۵)، ۷۳-۹۶ صفحه.
DOI:10.22034/EMES.2024.2011124.2502
ناشر: سازمان سنجش آموزش کشور

مقدمه

مفهوم‌های آمار و احتمال در تمام سطح‌های آموزشی، از مقطع دبستان تا دانشگاه تدریس می‌شوند. برای اصلاح برنامه درسی در مقطع کارشناسی و توسعه برنامه‌ها در مقطع‌های دبستان و دبیرستان، یادگیری فعال و تجربی توصیه می‌شود.

تعداد زیادی از منبع‌های مناسب مانند کتاب‌های درسی، کتاب‌های همراه برای معلمان، وب‌سایت‌ها و ابزارهای محاسباتی برای رسیدن به این هدف در دسترس قرار دارند. افزایش یادگیری فعال به دلیل‌های متعددی مانند بی‌تجربگی، عدم برنامه‌ریزی و ... می‌تواند چالش‌برانگیز باشد. برای افزایش یادگیری فعال در قالب سخنرانی می‌توان چند مثال و پیشنهاد ارائه داد. این نوع از یادگیری به آنچه دانشجویان در داخل و خارج از کلاس انجام می‌دهند و چگونگی به‌دست‌آوردن بینش نسبت به ایده‌های اصلی و جزئیات فنی و شهودی مربوط می‌شود. دانشجویان می‌توانند به‌طور فعال با حل مسئله‌ها برای خودشان، فکرکردن در مورد مفهوم‌ها برای ایجاد خلاصه‌های خود و توضیح و بحث درباره ایده‌ها با دیگران مطلب‌های درسی را فرا گیرند. کار در گروه‌های کوچک، یادگیری از طریق مطالعه‌های موردی، تعاملی و حل مسئله در کلاس، نمونه‌هایی از راهبردهای یادگیری فعال هستند. تکلیف‌های درسی که دانشجویان را ملزم به ارائه توضیح به زبان خود می‌کند، باعث یادگیری فعال می‌شود. تدریس در قالب سخنرانی که در آن دانشجویان بر اساس ارائه مدرس یادداشت‌برداری می‌کنند توصیه نمی‌شود. اگرچه در این نوع تدریس دانشجویان یادداشت‌برداری می‌کنند، اما اعتقاد بر آن است که بیشتر دانشجویان هنگام نوشتن، تفکر انتقادی ندارند و آنچه روی تخته سیاه نوشته شده را رونویسی می‌کنند و حتی ممکن است ایده‌ها یا توضیح‌های شفاهی معلم را به‌طور کامل درک نکنند (لارسن[1]، ۲۰۰۶). عیب‌های عمده روش‌های تدریس سنتی این است که دانشجویان باید بین یادداشت‌برداری و گوش‌دادن به مدرس یکی را انتخاب کنند. در نتیجه، بیشتر یادگیری در تدریس سنتی، فردی است، زیرا دانشجویان به‌جای مشارکت، یادداشت‌برداری می‌کنند و یا گوش می‌دهند (یووانوویچ-دولچِک[2] و فرناندز-وازکوئز[3]، ۲۰۰۸). موردهایی که در یادگیری دانشجویان برای دروس وابسته به آمار و احتمال کمک می‌کند را می‌توان به شرح ذیل بیان کرد:

۱- کلاس‌های مبتنی بر فعالیت و استفاده از گروه‌های کوچک به دانشجویان در غلبه بر تصورهای غلط کمک می‌کند (شوگنسی[4]، ۱۹۷۷) و باعث یادگیری بهتر مفهوم‌های آمار می‌شود (جونز[5]، ۱۹۹۱).

۲- بازخورد گرفتن دانشجویان از اشتباه‌هایی که در امتحان داشتند یعنی تشویق آن‌ها برای توضیح راه‌حل‌ها، حدس زدن پاسخ‌ها قبل از محاسبه آن‌ها و بررسی منطق پاسخ‌های خودشان باعث غلبه بر تصورهای نادرست می‌شود. این روش «*بازخورد اصلاحی*[6] » نام دارد (میوارچ[7]، ۱۹۸۳).

۳- ظاهراً استفاده از «*شبیه‌سازی*[8] » با رایانه باعث می‌شود دانشجویان پاسخ‌های صحیح‌تری ارائه دهند. استفاده از نرم‌افزار که به دانشجویان امکان تجسم و تعامل با داده‌ها را می‌دهد، درک آن‌ها از پدیده‌های تصادفی و یادگیری تجزیه و تحلیل داده‌ها را بهبود می‌بخشد (بروئر[9]، ۱۹۸۵).

تجربه نشان می‌دهد استفاده از «*برنامه‌های نمایشی*[10]»، که مفهوم‌ها را با کمک ابزارهای بصری نشان می‌دهد، به عنوان مکمل آموزش‌های سنتی در کلاس درس منجر به صرفه‌جویی در زمان، درک بهتر و بهبود فرایند تدریس و یادگیری می‌شود (دولچِک[11]، ۲۰۲۱). این برنامه‌ها یکی از ابزارهای مهم در زمینه آموزش دروس وابسته به رشته‌های علوم و مهندسی هستند و به دانشجویان کمک می‌کنند تا عملکرد نظریه‌ها و

[1]. Larsen
[2]. Jovanovic-Dolecek
[3]. Fernandez-Vazquez
[4]. Shaughnessy
[5]. Jones
[6]. corrective-feedback
[7]. Mevarech
[8]. simulation
[9]. Brewer
[10]. demo program
[11]. Dolecek

سیستم‌ها در دنیای واقعی را بهتر درک کنند. زمانی که دانشجویان با پرداختن به مسئله‌های عینی آموزش می‌بینند و به‌طور فعال در اکتشاف و تعقیب دانش شرکت می‌کنند، بهتر یاد می‌گیرند، طولانی‌تر به‌خاطر می‌آورند و بهتر می‌توانند مفهوم‌های مناسب را برای حل مسئله‌های جدید شناسایی کنند (یووانوویچ– دولچِک و فرناندز– وازکوئز، ۲۰۰۸). با استفاده از برنامه‌های نمایشی می‌توان موضوعات را به‌صورت تصویری به دانشجویان نشان داد که این کار یک فرایند ابزاری مهم برای آموزش محسوب می‌شود. در این راستا استفاده از محتوای چندرسانه‌ای مانند محتواهای متنی، صوتی و تصویری نیز به منظور یادگیری فراینده مفید است (کریشناسامی[1] و همکاران، ۲۰۲۰). علاوه بر این، استفاده از برنامه‌های نمایشی، دانشجویان را از یادگیرنده غیرفعال به شرکت‌کننده فعال در یادگیری تبدیل می‌کند. یکی دیگر از مزایای برنامه‌های نمایشی این است که می‌توان چندین بار با پارامترهای مختلف آن را تکرار کرد و این کار نیازی به تجهیزات خاص آزمایشگاهی ندارد و فقط از رایانه استفاده می‌شود (دولِچک، ۲۰۲۱). این روش نه تنها در کلاس، بلکه به عنوان یک ابزار خودآموز محسوب می‌شود و می‌تواند کمک مفیدی در زمینه انجام تکلیف‌ها باشد. در دسترس‌بودن رایانه‌های شخصی، قدرت محاسباتی فزاینده و امکانات گرافیکی پیشرفته آن‌ها، مدرسان را قادر می‌سازد از امکانات آموزشی ارائه شده توسط فناوری‌های جدید بهره ببرند. یادگیری به کمک رایانه بسیار رایج شده است و استفاده از آن در کلاس درس می‌تواند با افزودن قابلیت‌های تحلیلی بیشتر در تمام شاخه‌های علوم و مهندسی مفید باشد و می‌توان در جنبه‌های آموزش، یادگیری، اعتبارسنجی و تحقیق در آموزش رشته‌ها از این ابزار استفاده کرد. علاوه بر موردهایی که ذکر شد، استفاده از رایانه از نظر صرفه‌جویی در زمان فرایند آموزش نیز مفید است؛ بنابراین، این روش یادگیری به یک فعالیت تحقیقاتی آموزشی مهم در رشته‌های علوم و مهندسی تبدیل شده است؛ در نتیجه علاقه فزاینده‌ای به توسعه نرم‌افزارها در همه زمینه‌های تحصیلی وجود دارد. بسته‌های رایانه‌ای زیادی برای کمک به یادگیری نیز توسعه داده شده‌اند (یووانوویچ– دولِچک و فرناندز– وازکوئز، ۲۰۰۸). استفاده از برنامه‌های نمایشی، به دانشجویان دید بصری و شهودی از مفهوم‌های آمار و احتمال، به ویژه متغیرهای تصادفی، ارائه می‌دهد که در روش‌های سنتی بر اساس توصیف و تعریف‌های ریاضی به‌صورت انتزاعی بیان می‌شوند (دولِچک، ۲۰۲۱).

شاخه آمار و احتمال به حل مشکلات دنیای واقعی می‌پردازد. آموزش آمار در دهه‌های اخیر دست‌خوش یک انقلاب اساسی شده است که دلیل اصلی آن پیامدهای ظهور رایانه است. ابزارهای نرم‌افزار قدرتمند، انجام یک تحلیل آماری را از ضرورت درک ریاضیات زیربنایی تجزیه و تحلیل آن جدا کرده است. این بدان معنی است که وقتی آمار را آموزش می‌دهیم، اینکه چه کسی آموزش می‌بیند و دلیل یادگیری فرد باید کاملاً مشخص باشد. آیا هدف ما آموزش افرادی است که بتوانند روش‌های آماری جدیدی را توسعه دهند یا هدف آموزش افرادی است که بتوانند تجزیه و تحلیل انجام دهند. مشخص است که اکثریت افراد متعلق به گروه دوم هستند (هَند[2]، ۱۹۹۸).

چندین رویکرد نظری برای آموزش نظریه احتمال وجود دارد که بعضاً آن را گیج‌کننده می‌دانند. یک روش تدریس خوب باید بر نیاز به آشنایی با رویکردهای مختلف تأکید کند. ضمن این که نباید هیچ تناقضی بین این رویکردها وجود داشته باشد، بلکه آن‌ها مانند یک لایه جدید بر روی لایه قبلی، یکدیگر را تکمیل کنند. برای ترکیب آن‌ها پیشنهاد می‌شود برنامه‌های مختلف را با اتخاذ یک دیدگاه تاریخی که با مجموعه‌ای از مثال‌ها تقویت شده، شروع کرد که با این کار نیاز هر یک از این رویکردها در موقعیت‌های مختلف نشان داده می‌شود. رویکرد مدل‌سازی سنتی یا مرسوم قابل دفاع است. هر مدل احتمالی ارائه شده باید با مثال‌هایی از زندگی واقعی، موقعیت‌های حل مسئله و تجزیه و تحلیل داده‌های تصادفی ساده ارائه شود تا باعث ایجاد انگیزه شود. برای این کار نیازی به جست‌وجو در پایگاه‌های اطلاعاتی نیست، بلکه در دنیای اطراف ما داده‌های زیادی برای نشان‌دادن هر مدلی که قصد معرفی آن را داریم وجود دارد. نظریه احتمال ابتدا از منظر تاریخی ارائه می‌شود و با در نظرگرفتن شانس‌ها، که برای دانشجویان بسیار شهودی است، شروع و طبیعتاً به نظریه کلاسیک منتهی می‌شود و در نهایت به رویکرد فراوانی نسبی می‌رسد. در حین حل مسئله‌های زندگی واقعی متوجه اهمیت و اعتبار نظریه کلاسیک می‌شویم، اما برای اهداف ما به اندازه کافی عمومی نیست. رویکرد فراوانی نسبی در حل مسئله‌های زندگی واقعی مفید اما مشکل‌ساز است و نمی‌توان آن را به یک تعریف مناسب تبدیل کرد. نامتقارن بودن فضای نمونه و تعداد نامتناهی نتایج بخش مهمی از تدریس حرفه‌ای از مدرسان است و در آن بر ایجاد درک چگونگی روابط ریاضی با زندگی تلاش می‌شود. مدرسان باید با بسیاری از باورهای غلط رایج آشنا باشند و بتوانند به‌طور مؤثر با آن‌ها برخورد کنند. همچنین باید با برخی از معماها و پارادوکس‌های احتمالی معروف آشنا باشند (لویاتان[3]، ۲۰۰۲).

---

[1]. Krishnasamy
[2]. Hand
[3]. Leviatan

موضوعات عمومی در احتمال اغلب در متون و دوره‌های آمار مقدماتی حذف می‌شوند تا بتوان تجزیه و تحلیل داده‌ها و استنتاج آماری بیشتری را در سرفصل دروس گنجاند. جنبشی اصلاحی در آموزش آمار ایجاد شده است (راسمان[1] و شورت[2]، ۱۹۹۵). از اوایل دهه ۱۹۷۰، علاقه زیادی به تحقیقات در مورد درک و عملکرد افراد در آمار و احتمال وجود داشته است (گارفیلد[3]، ۱۹۹۵ و گارفیلد و آلگرن[4]، ۲۰۲۰) بیشترین پژوهش برای تدریس احتمال روی اصول احتمال و کاربردهای آماری آن متمرکز شده است. تدریس مفهوم‌های احتمال، شامل متغیرهای تصادفی، توسط هایتلی[5] (۱۹۷۵)، لارسن (۲۰۰۶)، میلر[6] (۱۹۹۸)، لویاتان (۲۰۰۰)، بالمن[7] (۱۹۹۷) و هرناندز[8] و همکاران (۲۰۰۶) مورد مطالعه قرار گرفته است. تحقیقات زیادی روی تفکرات دانشجویان درباره احتمال، شانس و تصادفی بودن و تصورهای اشتباه مربوط به آن انجام شده است (سوتوس[9] و همکاران، ۲۰۰۷). در کاپلار[10] (۲۰۲۱) تصورهای غلط دانشجویان مهندسی در مورد مفاهیم احتمال بیان شده است. در خازانوف[11] و پرادو[12] (۲۰۱۰) نیز به باورهای غلط دانشجویان در مورد درس احتمال مقدماتی اشاره شده است. در بسیاری از مقالات به مفهوم احتمال پرداخته شده، اما مفهوم خاص متغیر تصادفی بیان نشده است. متغیر تصادفی «*..یک ایده تصادفی بنیادی...*» و «*... پشتوانه بسیاری از موضوعات آمار و احتمال...*» است. بنابراین، درک عمیق دانشجویان از این مفهوم اهمیت دارد (کاچاپوا[13] و کاچاپوف[14]، ۲۰۱۲). برای مطالعه بیشتر می‌توان مراجعی نظیر آنکر[15] (۲۰۰۶)، راسمان و شورت (۱۹۹۵)، سان مارتین[16] (۲۰۰۶) و وارنر[17] و همکاران (۲۰۱۷) را مشاهده کرد.

بر خلاف جبر یا حساب دیفرانسیل و انتگرال، احتمال بر اساس یک تعریف رسمی از مفهومی به نام «*متغیر تصادفی*[18]» سرچشمه گرفته شده است. سؤال اساسی این است که تعریف متغیر تصادفی به چه معنی است؟ چه چیزی باعث شده که نیاز به چنین تعریفی وجود داشته باشد؟ این مفهوم از آن جهت قابل توجه است که با وجود سابقه طولانی و تأثیر آن بر «*نظریه احتمال*[19]»، در «*آموزش آمار و احتمال*[20]» اهمیت چندانی ندارد. متغیر تصادفی تابعی است که یک مقدار عددی را به هر «*پیشامد*[21]» در «*فضای نمونه*[22]» متناظر با یک «*آزمایش تصادفی*[23]» مرتبط می‌کند. مقدارهایی که متغیر تصادفی اختیار می‌کنند، عددهای حقیقی هستند و لذا در زمینه عددی کار با احتمال‌ها، متغیر تصادفی باعث می‌شود که پیشامدها به عددهای حقیقی نگاشته شوند. این مفهوم به ظاهر ساده می‌تواند رابطه فضای نمونه را با توزیع احتمال به شکل تابعی به عددهای حقیقی مدل‌سازی کند. اما تفسیر رسمی این مفهوم ساده نیست، زیرا نقش متغیر تصادفی به دلیل ارتباط برقرار کردن بین فضای احتمال، که در «جبر پیشامدها: *فضای پیشامد*[24] یا σ-جبر[25] یا σ-*میدان*[26]» و «*اندازه احتمال*[27]» تعریف شده و عددهای حقیقی کاملاً پیچیده است.

---

1. Rossman
2. Short
3. Garfield
4. Ahlgren
5. Heitele
6. Miller
7. Ballman
8. Hernandez
9. Sotos
10. Kaplar
11. Khazano
12. Prado
13. Kachapova
14. Kachapov
15. Ancker
16. San Martín
17. Warner
18. random variable
19. probability theory
20. teaching statistics and probability
21. event
22. sample space
23. random experiment
24. event Space
25. σ-algebra
26. σ-field
27. probability measure

در آموزش آمار، پارزن[1] (۱۹۷۱) ترتیب متفاوتی را برای آموزش پیشنهاد می‌دهد. «*تابع توزیع*[2]» یک پیشامد تصادفی را با نتایج عددی، «*امید ریاضی* (*مقدار مورد انتظار*)»، «*پراکندگی*» و «*گشتاورها*» تعریف می‌کند. سپس چند تابع توزیع شناخته شده را معرفی می‌کند و نهایتاً مفهوم متغیر تصادفی بیان می‌شود. متغیر تصادفی به تمام مقدارهای ممکن یک متغیر در یک آزمایش تصادفی اشاره دارد. این مفهوم با کمک فرایند «*همگرایی*» متغیر آماری نیز می‌تواند تعریف شود. این موضوع نشان می‌دهد که تعریف متغیر تصادفی ارائه شده توسط کولموگوروف (۱۹۵۰)، به تخصیص احتمال‌ها اهمیتی نمی‌دهد، بلکه با تعریف احتمال کلاسیک مطابقت دارد، همچنین به این معنی است که تعریف متغیر تصادفی بسته به احتمال‌های تعیین شده، به‌صورت متفاوت نمایش داده می‌شود. توسعه تفکر آماری شامل دو فرایند به ظاهر متناقض است. از یک سو به حوزه ابزارهای ریاضی انتزاعی وابسته است و از سوی دیگر جدا شدن از تفکر جبرگرا برای پذیرش نوع دیگری از دانش که مشخصه آن ارائه نتایج با درجه‌ای از عدم قطعیت است. بنابراین باید به اهمیت متغیر تصادفی در مدل‌سازی موقعیت‌های تصادفی پرداخت. زیرا باعث ایجاد فرصتی برای آموزش مدل‌سازی در ریاضیات می‌شود (رویز، ۲۰۱۶).

متغیر تصادفی « *... یک ایده تصادفی بنیادی است*» و « *... بسیاری از موضوعات آمار و احتمال را پشتیبانی می‌کند*» (هرناندز و همکاران، ۲۰۰۶)؛ این موضوع که دانشجویان در دوره‌های آموزشی احتمال یک درک عمیق از مفهوم متغیر تصادفی را با یک تعریف صحیح و مناسب به دست آورند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در دوره‌های حسابان پیشرفته در دانشگاه، دانشجویان برای یادگیری تعاریف صحیح و استخراج قضایای ریاضی از آن‌ها به رشد کافی در ریاضی رسیده‌اند. لویاتان (۲۰۰۳) می‌گوید: «*دیدگاه اصل موضوعی سوری مهم است، زیرا آن‌ها مبنای تمام قوانین دیگر احتمال هستند.*» بنابراین، پایه‌های اصول موضوعی توسط کولموگوروف در ۱۹۳۱ بنیان‌گذاری شده است (کولموگوروف، ۱۹۵۰). مدل‌سازی احتمالی بر حسب متغیر تصادفی که ارتباط تنگاتنگی با تعریف احتمال دارد، مشکلاتی را برای دانشجویان هنگام استفاده از تیمارهای متغیرهای تصادفی به وجود می‌آورد. مدل‌سازی احتمال‌ها در مقطع کارشناسی از طریق متغیرهای تصادفی تعریف شده در «*فضای احتمال*[3]»، مبنایی اساسی در طول دوره تحصیلی است، زیرا هدف نهایی این است که دانشجویان در پایان این دوره بتوانند از ابزارهای ریاضی برای «*پیش‌بینی تیمارها*[3]»، «*برآورد پارامترها*[4]»، «*فاصله‌های اطمینان*[5]» و ... از طریق مفهوم‌های «*آزمون‌های فرض آماری*[6]» استفاده کنند (آمرانی[7] و زکی[8]، ۲۰۱۵).

بخش‌بندی مقاله به شرح ذیل است. در بخش بعدی نگاهی به برخی از تصورهای غلط رایج دانشجویان درباره مفهوم‌های آماری به ویژه پیشامدها و متغیرهای تصادفی خواهد شد. در بخش آخر درباره تدریس متغیرهای تصادفی پیشنهادهایی مطرح می‌شوند. در اکثر دوره‌های آموزشی احتمال برای دانشجویان علوم و مهندسی، متغیرهای تصادفی در دو فصل مجزا شامل متغیرهای گسسته و پیوسته تدریس می‌شوند؛ بنابراین بسیاری از مباحث مربوطه به‌صورت تکراری تدریس می‌شوند. امید ریاضی متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته به‌طور جداگانه تعریف می‌شوند، بنابراین دانشجویان آن‌ها را به عنوان دو مفهوم متفاوت درک کرده‌اند و معنی کلی ریاضی مقدارهای مورد انتظار از دست می‌رود. از طرفی برخی از قضایا که برای متغیر تصادفی دلخواه درست هستند، فقط برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته بنا شده‌اند؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود بدون از دست دادن کلیت مسئله، تا زمانی که امکان‌پذیر است، قبل از تدریس خواص ویژه متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته، برای معرفی امید ریاضی یک متغیر تصادفی در قالب کلی و توسعه نظریه برای متغیر تصادفی دلخواه، از انتگرال ریمان-استیلتیس استفاده شود. این روش باعث می‌شود دوره‌های درسی احتمال کمی پیشرفته‌تر ارائه شوند، بنابراین این روش برای دوره‌های تحصیلی دانشگاهی برای دانشجویان علوم و مهندسی پیشنهاد می‌شود، ولی این روش در دوره‌های مقدماتی آمار و یا آموزش آمار برای دانشجویان رشته‌های علوم انسانی که دانشجویان پیش‌زمینه کمی از ریاضی دارند، توصیه نمی‌شود.

1. Parzen
2. distribution function
3. forecasting of treatments
4. parameter estimation
5. confidence intervals
6. statistical hypothesis testing
7. Amrani
8. Zaki

تصورهای غلط رایج در مورد پیشامدها و متغیرهای تصادفی

در ابتدای بخش به برخی تصورهای غلط محققان در به‌کارگیری نادرست مفهوم‌های آماری به‌طور خلاصه اشاره می‌شود. سپس در مورد باورهای غلطی که دانشجویان در مورد پیشامد، متغیر تصادفی و «*متغیر تصادفی پیوسته*[1]» در ذهن می‌پرورانند، نکاتی مطرح می‌شود.

برخی دانشمندان معتقد هستند، کاربران علم آمار در علوم رفتاری به دلیل سوء تفاهم و به‌کارگیری نادرست حتی ابتدایی‌ترین مفهوم‌ها مقصر بوده‌اند (بروئر، ۱۹۸۵). تصورهای غلط محققان می‌تواند در دسته‌بندی زیر قرار بگیرد:

۱- **اطلاعات ناقص:** باورهایی که طبق یک اصل، استنباط می‌شوند که نمی‌توان یک اصلاح‌کننده و یا شرطی را ضمیمه آن کرد. مانند «α و β *رابطه معکوس دارند*». این عبارت تنها در صورتی صادق است که شرط ثابت بودن «*حجم نمونه*[2]» و اندازه اثر وجود داشته باشد و در غیر این صورت نادرست است.

۲- **خطاهای تعریفی:** این باورها ناشی از یک تعریف نادرست است. مانند «*توان یک آزمون*[3]*، یعنی احتمال رد فرض صفر*» یا «*طبق قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است*» که هر دوی این عبارات نادرست هستند.

۳- **متغیر-ثابت:** این نوع خطا زمانی رخ می‌دهد که فرد معمولاً برای بیان یک عبارتی که قوی‌تر باشد و یا «*معنی‌داری*[4]» بیشتری داشته باشد، وضعیت یک متغیر را ثابت در نظر می‌گیرد.

۴- **باورهایی که در آن‌ها مفروضات با محاسبات یا نتایج اشتباه گرفته می‌شوند:** به عنوان مثال «*اگر حجم نمونه کوچک باشد، آزمون ناپارامتری*[5] *ترجیح داده می‌شود*». در این مثال اندازه نمونه به عنوان یک فرض در نظر گرفته می‌شود که با توجه به آزمون آماری پارامتری یا ناپارامتری و مفروضات مرتبط با آن، باید محاسبه و یا تقریب زده شود.

۵- **استنتاج واحد:** تصورهای نادرست از این دسته، آن‌هایی هستند که شکل‌های مختلف استنباط با هم برابر یا سعی در توصیف یکی در قالب دیگری می‌شود. برای مثال «*فاصله اطمینان ۹۵ درصد حاکی از سطح معنی‌داری ۰/۰۵ است*». خطا در ترکیب تکنیک‌های استنباطی براورد پارامتر و آزمون فرض‌های آماری است، به‌صورتی که گویی این دو معادل هستند؛ در حالی که لزوماً مرتبط نیستند.

پیشامدها

یکی از تصورهای غلط رایج در احتمال این است که یک پیشامد زیرمجموعه‌ای دلخواه از فضای نمونه است که معمولاً در مورد یک فضای نمونه متناهی[6] درست است، اما در حالت کلی برقرار نیست. در برخی موارد نمودارهای ون می‌توانند این باور غلط را تقویت کنند. زمانی می‌توان از این بدفهمی غلط اجتناب کرد که دیدگاه اصول موضوعی برای احتمال در نظر گرفته شود که در آن یک زیرمجموعه $\mathbf{A}$ از یک فضای نمونه Ω زمانی که اندازه احتمال وجود داشته باشد در نظر گرفته می‌شود، در واقع یک پیشامد، یک زیرمجموعه «*اندازه‌پذیر*[7]» از Ω است. همه پیشامدها روی فضای نمونه یک میدان سیگمایی (جبر پیشامدها، *فضای پیشامد*، σ-*جبر* یا σ-*میدان*) می‌سازند. بنابراین در نظریه احتمال، هر آزمایش یک

[1]. continuous random variable
[2]. sample size
[3]. power of a test
[4]. significance
[5]. nonparametric test
[6]. finite
[7]. measurable

فضای احتمال $(\Omega.\boldsymbol{A}.\mathrm{P})$ را مشخص می‌کند که Ω فضای نمونه، $\boldsymbol{A}$ یک میدان سیگمایی و P یک تابع احتمال است و در «*اصول احتمال*[1]» ارائه شده توسط کولموگوروف (۱۹۵۰) صدق می‌کند. در این صورت یک پیشامد به عنوان هر عضو از $\boldsymbol{A}$ تعریف می‌شود. مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر، پیشامد نیستند، زیرا نمی‌توان به آنها احتمال‌ها را اختصاص داد. این که آیا مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر وجود دارند، در ظاهر یک سؤال پیچیده است اما با استفاده از مراجع زیر می‌توان به دانشجویان توضیح مختصری در این مورد ارائه کرد:

۱- یک مثال از مجموعه «*غیربورل*[2]» روی P (لوزین[3]، ۱۹۵۳).

۲- با فرض اصل موضوع انتخاب، وجود یک مجموعه از عددهای حقیقی که «*اندازه‌پذیر لبگ*[4]» نیستند اثبات می‌شود (ویتالی[5]، ۱۹۰۵).

۳- مدلی ارائه کرد که همه زیرمجموعه‌های P، اندازه‌پذیر لبگ باشند و اصل موضوع انتخاب نادرست باشد. این نشان می‌دهد که وجود زیرمجموعه‌های «نااندازه‌پذیر[6]» از P را بدون اصل موضوع انتخاب نمی‌توان اثبات کرد. (سولووی[7]، ۱۹۷۰).

رویکرد استاندارد در ریاضیات، پذیرش وجود مجموعه‌های نااندازه‌پذیر است؛ بنابراین در نظریه احتمال برخی فضاهای نمونه می‌توانند زیر مجموعه‌ای داشته باشند که پیشامد نیستند.

متغیر تصادفی

از نظر یک دیدگاه کلی و عمومی، مفهوم متغیر تصادفی در حوزه آمار یک مفهوم اساسی و بنیادی است. با این وجود، اکثر متن‌های مقدماتی از این ایده بهره نمی‌گیرند و آن‌هایی که استفاده می‌کنند، اغلب باعث ایجاد مشکل در موضوعات پیشرفته‌تر می‌شوند. موور[8] (۱۹۹۵) بحث در مورد متغیرهای تصادفی را در یک بخش اختیاری ذکر کرده است که بسیاری از دانشجویان هرگز این توضیح‌ها را نخواهند دید. با این وجود، افرادی که این بخش را مطالعه می‌کنند، احتمالاً کاملاً گیج می‌شوند، زیرا موور (۱۹۹۵) این اصطلاح را به دو روش بسیار متفاوت به کار می‌برد. اولین مورد نشان می‌دهد که «*آماره*[9]»، یک متغیر تصادفی است که این تعریف با توجه به تعریف متغیر تصادفی مورد استفاده موور (۱۹۹۵) منطقی است: «*... متغیری که مقدار آن نتیجه عددی یک پدیده تصادفی است.* » (میلر، ۱۹۹۸). ذکر این نکته ضروری است که باید از ارتباط مقدارهای عددی با متغیر تصادفی اجتناب شود. یکی از دلیل‌ها این است که به‌طور واضح یک مقدار عددی با تعریف متغیر تصادفی مطابقت ندارد. برای مثال، با استفاده از تعریف موور (۱۹۹۵)، یک مقدار عددی مانند تعداد اعضای یک خانوار، نتیجه عددی یک پدیده تصادفی نیست، بلکه نتیجه یک پدیده یا نمونه تصادفی انتخاب شده در یک خانواده خاص است. لذا، تعداد اعضای آن خانواده، یک مقدار عددی است که کاملاً از انتخاب تصادفی مستقل است. خانواده‌ای که انتخاب نشده نیز دارای تعداد عضوهایی است. این موضوع متفاوت از حالت‌های آماری است که مقدارها به‌طور واضح به انتخاب تصادفی عنصرهایی از جامعه وابسته است. دلیل دوم برای ارتباط ندادن داده‌ها با متغیر تصادفی این است که دیر یا زود مجبور به بازگشتن از این تعریف می‌شوید. برای مثال، اگر قصد تدریس «*رگرسیون*[10]» را داشته باشید، تمرکز اصلی روی ویژگی‌های آماری « *برآوردگر حداقل مربعات*[11]» است که تحت شرایط خاصی «*ناریب*[12]» است. یکی از این شرایط، «*استقلال آماری*[13]» بین خطا و «*متغیرهای توضیحی (مستقل)*[14]» است. چه زمانی این استقلال وجود دارد؟ رایج‌ترین مثال زمانی است که متغیرهای توضیحی ثابت در نظر گرفته شود و این همان

[1]. probability axioms
[2]. non-Borel
[3]. Luzin
[4]. Lebesgue measurable
[5]. Vitali
[6]. non-measurable
[7]. Solovay
[8]. Moore
[9]. statistic
[10]. regression
[11]. least square estimator
[12]. unbiased
[13]. statistical independence
[14]. explanatory (independent) vaiable

شرایطی است که در کتاب‌های درسی استاندارد هنگام معرفی مدل رگرسیونی فرض می‌شود. دیدگاه یک مقدار عددی به عنوان یک متغیر تصادفی در برخی از موارد و یک متغیر ثابت در سایر مباحث، باعث گمراه شدن دانشجویان می‌شود. بنابراین مقدارهای عددی باید به عنوان یک متغیر ثابت در نظر گرفته شوند، مگر اینکه دلیل قانع‌کننده‌ای برای رد این حالت وجود داشته باشد. به عنوان نمونه مقدار «*متغیر وابسته*[1]» در رگرسیون یک متغیر تصادفی است، زیرا بر حسب «*خطای تصادفی*[2]» تعریف شده است (میلر، ۱۹۹۸).

متغیر تصادفی یک مفهوم پایه‌ای در نظریه احتمال است که مستقیماً قابل درک نیست، بنابراین برخی از دانشجویان در مورد آن تصوری نادرست دارند. یک باور غلط رایج این است که متغیر تصادفی X هر تابع با مقدارهای حقیقی روی فضای نمونه است. به عنوان نمونه، در راس[3] (۲۰۱۸)، متغیر تصادفی به اشتباه به این صورت تعریف شده است و این تعریف ناصحیح باعث ایجاد بدفهمی در دانشجو خواهد شد. دانشجویان با یادگیری مهم‌ترین مشخصه متغیر تصادفی، یعنی تابع توزیع

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

می‌توانند بر این تصور ناصحیح غلبه کنند. برای وجود داشتن تابع توزیع احتمال، باید کمیت $P(X \leq x)$ برای هر مقدار حقیقی x تعریف شود. بنابراین X یک متغیرتصادفی معتبر است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \boldsymbol{R}$ اندازه احتمال

$$P(X \leq x)$$

تعریف شده باشد، بنابراین $\{X \leq x\}$ باید لزوماً یک پیشامد باشد. از نظر ریاضی یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega. \boldsymbol{A}. \mathrm{P})$ به عنوان یک تابع $X: \Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$ با این ویژگی تعریف شده است که برای هر $x \in \boldsymbol{R}$، $\{X \leq x\} \in \boldsymbol{A}$ که یک شرط ضروری است، زیرا همان‌طور که قبلاً اشاره شد، وجود مجموعه‌های نااندازه‌پذیر در ریاضیات پذیرفته شده هستند. یکی از بدفهمی‌های دانشجویان این است که گمان می‌کنند یک متغیر تصادفی باید تابعی «*یک‌به‌یک*[4]»، «*پوشا*[5]» و یا «*معکوس‌پذیر*[6]» باشد. لازم به ذکر است که لزوماً یک متغیر تصادفی دارای این ویژگی‌ها نیست. به عنوان مثال فرض کنید در آزمایش پرتاب مستقل دو سکه سالم با فضای نمونه $\Omega = \{\mathrm{HH. HT. TH. TT}\}$، متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد شیر باشد. در این صورت $X(HT) = X(TH) = 1$، ولی $HT \neq TH$، یعنی X یک تابع یک‌به‌یک نیست. همچنین از این که برد تابع X یعنی $\{\mathrm{X(c)}:\ \mathrm{c} \in \mathbf{A}\} = \{0.1.2\}$ با $\boldsymbol{R}$ برابر نیست، تابع X پوشا نیز نخواهد بود. دلیل ایجاد باور نادرست معکوس‌پذیری یک متغیر تصادفی این هست که دانشجویان شرط اندازه‌پذیری متغیر تصادفی، یعنی این که برای هر $x \in \boldsymbol{R}$،

$$X^{-1}(-\infty. x] = \{c \in \Omega: X(c) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \boldsymbol{A}$$

که نشان‌دهنده عضویت «*پیش‌تصویر (نگاره وارون)*[7]» مجموعه $(-\infty. x]$ تحت تابع X به میدان سیگمایی $\boldsymbol{A}$ است را با شرط معکوس‌پذیری تابع X خلط می‌کنند. در ضمن برخی دانشجویان در محاسبه تابع توزیع دچار یک اشتباه رایج می‌شوند. آنان باید با ثابت در نظر گرفتن نقطه x، در ناحیه‌های مختلف روی $\boldsymbol{R}$ و محاسبه احتمال پیشامد $\{c \in \Omega: X(c) \leq x\}$، مقدار $P(X \leq x)$ را محاسبه کنند، ولی به اشتباه احتمال این که متغیر تصادفی به ناحیه مذکور تعلق دارد را پیدا می‌کنند. به عنوان نمونه در آزمایش پرتاب مستقل دو سکه سالم که در بالا اشاره شد، تابع توزیع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

1. dependent variable
2. random error
3. Ross
4. one-to-one (injective)
5. onto (surjective)
6. invertible
7. preimage (inverse image)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0 \\ \frac{1}{4} & if 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & if\ 1 \le x < 2 \\ 1 & if\ x \ge 2 \end{cases}$$

در صورتی که برخی دانشجویان دچار این بدفهمی می‌شوند که مثلاً در حالت $1 \le x < 2$، باید احتمال این ناحیه یعنی

$$P(1 \le X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

را محاسبه کرد. این لغزش نشان‌دهنده این است که دانشجویان مفهوم تجمعی بودن تابع توزیع را درک نکرده‌اند. برای این منظور مدرس باید بگوید که یک عدد ثابت در بازه [۱,۲) مثل x در نظر می‌گیریم (حتی می‌تواند دقیقاً مقدار x را مشخص کند). اکنون داریم

$$P(X \le x) = P(\{c \in \Omega: X(c) \le x\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته نیز به‌طور مشابه می‌توان این روش را برای فهم دانشجویان ارائه کرد.

متغیر تصادفی پیوسته

بیشتر تصورهای غلط برخی دانشجویان در احتمال، به متغیرهای تصادفی پیوسته بر می‌گردد که درک آن نسبت به متغیرهای تصادفی گسسته سخت‌تر است. یکی از باورهای غلط این است که متغیر تصادفی پیوسته به عنوان متغیری با یک مجموعه «ناشمارا[1]» از مقدارها است، در واقع برخی وقت‌ها انتظار می‌رود این مجموعه یک فاصله یا اجتماعی از فاصله‌ها باشد. این امر منجر به تصور غلطی می‌شود که هر متغیر تصادفی، گسسته یا پیوسته است. این تصور نادرست ممکن است به دوره‌های آموزشی آمار که در آن داده‌های عددی را به دو نوع «*گسسته*[2]» و «*پیوسته*[3]» دسته‌بندی می‌کنند مربوط شود. برای غلبه بر این بدفهمی‌های ناصحیح، می‌توانیم تعریف استاندارد زیر را ارائه کنیم:

تعریف ۱. متغیر تصادفی X پیوسته است، اگر بتوان تابع توزیع F را بر اساس یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی مثل f که آن را «*تابع چگالی احتمال*[4]» X می‌نامند، به‌صورت

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

بیان کرد (فلر[5]، ۱۹۷۱).

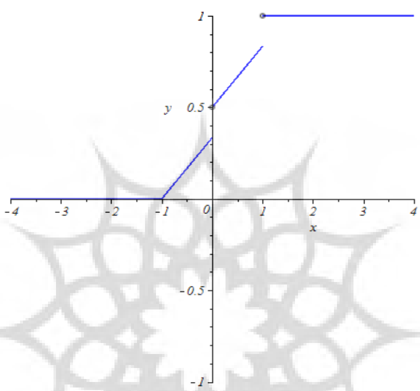
1. uncountable
2. discrete
3. continuous
4. probability density function
5. Feller

یک مثال ساده از «*متغیر تصادفی آمیخته*[۱]» می‌تواند مطلب را شفاف سازد. لازم به ذکر است که این نوع از متغیرهای تصادفی در شاخه بیمه کاربرد فراوان دارند (آسموسن[۲] و استفنسن[۳]، ۲۰۲۰ و مالینوسکی[۴]، ۲۰۲۱ و میلدنهال[۵] و مجر[۶]، ۲۰۲۲).

مثال ۱. (متغیر تصادفی آمیخته). تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < -1 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{3} & if - 1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} & if\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & if\ x > 1 \end{cases}$$

که به وضوح تکه‌ای ثابت[۷] و پیوسته نیست، ولی ناکاهشی[۸]، از راست پیوسته[۹] و حد آن در $-\infty$ و $+\infty$ به ترتیب برابر ۰ و ۱ است (شکل ۱).



شکل ۱. تابع توزیع متغیر تصادفی آمیخته در مثال ۱

بنابراین F تابع توزیع متغیر تصادفی X است. در اینجا «*تابع جرم احتمال*[۱۰]» قسمت گسسته متغیر تصادفی X به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P(X = 1) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

اگر فرض کنیم که X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ است، پس برای هر عدد حقیقی نظیر x به جز نقاط ۱-، ۰ و ۱، داریم

1. mixed random variable
2. Asmussen
3. Steffensen
4. Malinovskii
10. Mildenhall
11. major
7. piecewise constant
8. nondecreasing
9. right continuous
10. probability mass function

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{3}$$

بنابراین

$$F(0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$$

که یک تناقض است، زیرا طبق ضابطه داده شده برای تابع توزیع، داریم $F(0) = \frac{1}{2}$. بنابراین اگر چه مجموعه مقدارهای متغیر تصادفی X در فاصله (۰,۱) ناشمارا است، اما X یک متغیر تصادفی پیوسته نیست. این متغیر تصادفی یک مثال از یک متغیر آمیخته است. در واقع، این متغیر تصادفی در نقطه‌های ۰ و ۱ گسسته با تابع جرم احتمال

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

و روی فاصله‌های (۱,۰-) و (۰,۱) پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{3}$ است.

یکی دیگر از تصورهای غلط رایج دانشجویان این است که تصور می‌کنند تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته باید از دیدگاه ریاضی یک تابع پیوسته باشد. شرط پیوستگی تابع توزیع، لازم است، اما کافی نیست. هر «*متغیر تصادفی تکین*[1]» می‌تواند به عنوان یک مثال نقض استفاده شود، از آنجایی‌که تابع توزیع چنین متغیری پیوسته است و تقریباً همه جا[2] مشتق[3] آن برابر ۰ است؛ لذا متغیر تصادفی تکین دارای یک تابع چگالی نیست و پیوسته است. در ادامه یک مثال معروف از یک متغیر تکین ارائه می‌شود که دانشجویان برای درک این مثال، تنها به دانش پایه‌ای از حسابان نیاز دارند.

مثال ۲. (متغیر تصادفی تکین) تابع توزیع F را به عنوان «*تابع کانتور*[4]: *تابع لبگ*[5]، یا *تابع کانتور-ویتالی*[6] یا *پلکان شیطان*[7]» تعریف کنید. برای هر $x \in [0.1]$، $(x_1.x_2.x_3.\dots)$ را به عنوان جمله‌ای از عدد حقیقی

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots$$

در مبنای ۳ در نظر بگیرید. کمیت $k = \min\{r: x_r = 1\}$ را تعریف کنید؛ همچنین اگر هیچ rای با شرط $x_r = 1$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه تعریف کنید $k = \infty$. تابع با ضابطه

$$F(x) = \sum_{r=1}^{k} \frac{sign(x_r)}{2^r}$$

را تعریف کنید که در آن

$$sign(a) = \begin{cases} 1 & if\ a > 0 \\ 0 & if\ a = 0 \end{cases}$$

[1]. singular random variable
[2]. almost everywhere (a. e.)
[3]. derivative
[4]. Cantor function
[5]. Lebesgue function
[6]. Cantor-Vitali function
[7]. devil's staircase

این یک تعریف تحلیلی از تابع کانتور است. به‌طور هندسی می‌توان آن را به شرح ذیل توصیف کرد. بازه (۰،۱) به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود و تابع F روی قسمت میانی به‌صورت $F(x) = \frac{1}{2}$ برای $x \in [\frac{1}{3}.\frac{2}{3}]$ تعریف می‌شود. سپس، هر دو فاصله باقیمانده به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود و تابع F درقسمت‌های میانی توسط $F(x) = \frac{1}{2^2}$ برای $x \in [\frac{1}{9}.\frac{2}{9}]$ و $F(x) = \frac{3}{2^2}$ برای $x \in [\frac{7}{9}.\frac{8}{9}]$ تعریف می‌شود. این فرایند به تعداد نامتناهی مرتبه تکرار می‌شود (برای تعاریف دیگر تابع کانتور، رویدن[1] (۱۹۸۸) را ببینید). همچنین برای $x < 0$ ، $F(x) = 0$ و برای $x > 1$، $F(x) = 1$ را تعریف کنید. به‌وضوح $F(0) < F(1)$، تابع F پیوسته، ناکاهشی و مشتق آن تقریباً همه جا برابر صفر است. از این رو F یک تابع تکین و تابع توزیع یک متغیر تصادفی تکین Y است (بیلینگزلی[2]، ۱۹۹۵). قضیه‌ای که در ادامه ارائه شده است، به دانشجویان کمک می‌کند تا متوجه شوند واژه‌های گسسته و پیوسته، تنها نوع متغیر تصادفی نیستند.

قضیه ۱ (قضیه تجزیه لبگ) هر متغیر تصادفی می‌تواند به‌صورت منحصر به فردِ

$$X = \alpha_1 X_d + \alpha_2 X_c + \alpha_3 X_s$$

نمایش داده شود که $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ و $\alpha_i \geq 0$، $i = 1.2.3$. متغیرهای تصادفی X_d، X_c و X_s را به ترتیب گسسته، پیوسته و تکین می‌نامند (فلر، ۱۹۷۱).

پیشنهادهای تدریس

در این بخش ابتدا به معرفی مفهوم داربست و کاربرد آن در آموزش متغیر تصادفی پرداخته می‌شود. سپس یک رویکرد جامع تدریس با تأکید بر نظریه عمومی برای کلیه متغیرهای تصادفی پیشنهاد می‌شود.

۱- آموزش متغیر تصادفی به کمک مفهوم داربست

ریاضیات ساخته یک ذهن برتر است که به توصیف قوانین هستی می‌پردازد. یکی از بزرگترین اتفاقات تاریخ، ابداع خطی بود که علم را توضیح دهد و آن خط ریاضیات است (جمله‌ای از زنده یاد دکتر علی‌اصغر رضایی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه کاشان). ریاضیات علمی است که زمینه‌ساز توسعه علم و فناوری مدرن و دارای مطالعه‌های انتزاعی است. این ماهیت مستلزم توسعه یک ذهنیت در یادگیری ریاضیات است؛ بنابراین می‌توان گفت که ریاضیات نقش مهمی در توسعه الگوهای فکری انسان ایفا می‌کند. این تغییر در طرز فکر بر دستیابی به ماهیت یادگیری ریاضیات، یعنی تحقق دانشجویانی که در حل یک مسئله مهارت دارند، تأثیر دارد. استفاده از یک رویکرد یادگیری مناسب یکی از عواملی است که می‌تواند موفقیت دانشجویان را برای تبدیل‌شدن به یک حلال خوب مسئله‌ها، تحت تأثیر قرار دهد. مفهوم «*داربست*[3]» در دهه گذشته مورد توجه محققان قرار گرفته است (کوسنا[4]، ۲۰۲۱). ثابت شده است که داربست از فرایند آموزش و یادگیری پشتیبانی می‌کند. داربست یک مدل یادگیری با ارائه کمک بر اساس مشکلات تجربه شده توسط دانشجویان است و به آرامی این راهنمایی‌ها کاهش می‌یابد، تا دانشجو بتواند به استقلال در یادگیری دست یابد. یادگیری مبتنی بر داربست شامل چهار قسمت است: توضیح، بازنگری، بازسازی و توسعه تفکر مفهومی. فعالیت‌های توضیحی، شامل گفتن و نشان دادن، یعنی آماده‌سازی برای مطلب‌ها در بحث اولیه با کمی مشارکت دادن دانشجو است. بازنگری، فعالیتی است که دوباره بر روی مسئله‌های اصلی تمرکز دارد. این فعالیت برای پیش‌بینی زمانی است که دانشجویان قادر به شناسایی جنبه‌های مهم موجود در یک مفهوم یا مشکل نیستند. مؤلفه بازسازی، فعالیتی برای اصلاحاتی در ایده‌ها است. به‌طوری که نه تنها به درک دانشجویان منجر می‌شود، بلکه توانایی ایجاد معنی از یک مفهوم را نیز به همراه دارد. توسعه تفکر مفهومی زمانی اتفاق می‌افتد که مدرس، دانشجویان را در یک گفتمان مفهومی گسترده‌تر از یک تفکر دانشجویی درگیر کند (کوسنا، ۲۰۲۱).

[1]. Royden
[2]. Billingsley
[3]. scaffolding
[4]. Khusna

افزایش دسترسی به ابزارهای دیجیتال مانند فیلم‌ها و سامانه‌های آموزشی، ویدئو کنفرانس، پادکست‌ها و شبکه‌های اجتماعی و همچنین ابزارهای فناوری مانند رایانه رومیزی، تبلت و تلفن هوشمند (گراسر[1] و پرسون[2]، ۱۹۹۴)، فرصتی برای مدرسان و نویسندگان ایجاد کرده تا نحوه ارائه مفهوم‌های آماری را دوباره بررسی کنند. مهم نیست مدرس طرف‌دار روش سنتی یا مدرن باشد، آموزش می‌تواند یک رویکرد شهودی داشته باشد (هانلی[3] و تِچ[4]، ۲۰۰۶). واضح است که متغیر تصادفی یکی از انتزاعی‌ترین و از نظر مفهومی، دشوارترین حوزه‌ها در آموزش آمار و احتمال است. آموزش متغیرهای تصادفی یکی از موضوعاتی است که درک آن زمان بیشتری لازم دارد. با استفاده از رایانه می‌توان نمایش بصری و شهودی از متغیر تصادفی داشت که در روش‌های سنتی به‌صورت انتزاعی بیان می‌شوند (یووانوویچ–دولچِک و فرناندز–وازکوئز، ۲۰۰۸). مدرس با درخواست از دانشجویان برای درک تعریف متغیرهای تصادفی شروع به آموزش می‌کند. در یادگیری مبتنی بر داربست، توجه هم‌زمان به درک دانشجویان اهمیت دارد. در ادامه تعریف یک متغیر تصادفی به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۲. فرض کنید X تابعی با فضای نمونه $\mathbf{A}$ باشد که در مجموعه عددهای حقیقی $\mathbf{R}$ تعریف شده است، یعنی $\boldsymbol{A} \xrightarrow{X} \boldsymbol{R}$ که هر $c \in \boldsymbol{A}$ را به $\mathrm{x} \in \mathbf{R}$ می‌نگارد و به‌صورت $\mathrm{X(c) = x}$، $\mathrm{c} \in \mathbf{A}$ نوشته می‌شود.

حال X یک متغیر تصادفی نامیده می‌شود که دامنه تغییرات آن به‌صورت $\lambda = \{\mathrm{x{:}\ X(c) = x\,.\,c} \in \mathbf{A}\}$ است و «*تکیه‌گاه*[5]» (*فضا*[6] یا *برد*[7]) متغیر تصادفی نامیده می‌شود (کوسنا، ۲۰۲۱).

یادگیری مبتنی بر داربست یادگیری مؤثری است. این روش به ویژه در یادگیری‌هایی که نیاز به مهارت‌های تحلیلی بالایی دارند به کار می‌رود.

۲– آموزش متغیر تصادفی به کمک رویکرد جامع تدریس با تأکید بر نظریه عمومی

متغیرهای تصادفی، توابع احتمال و توزیع، ابزار قدرتمندی هستند که تحلیل ریاضی را در احتمال معرفی می‌کنند. با این حال، آموزش و یادگیری این مفهوم‌ها ساده نیست. این تعریف در ظاهر ساده به نظر می‌رسد: «*قاعده‌ای که دقیقاً یک مقدار عددی را به هر نتیجه در یک فضای نمونه اختصاص می‌دهد*»، زیرا این مفهوم به درک پدیده‌های تصادفی، پیشامدهای تصادفی، عملیات روی پیشامدها و احتمال بستگی دارد. برای قاعده یک متغیر تصادفی لازم است که معکوس یک بازه در تبدیل متغیر تصادفی یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد. فقط در این حالت می‌توان در مورد توزیع احتمال آن صحبت کرد و این رویکرد، متغیر تصادفی را به عنوان یک تابع اندازه‌پذیر تعیین می‌کند. این بدان معنی است که متغیرهای تصادفی به جز ابزارهای احتمالی، بر اساس ابزارهای ریاضی نیز ساخته شده‌اند که معمولاً به عنوان بخشی از ریاضیات در دبیرستان تدریس می‌شوند (هرناندز و همکاران، ۲۰۰۶).

بسیاری از کتاب‌های درسی یک متغیر تصادفی و تابع توزیع آن را به‌صورت اصلی تعریف می‌کنند، سپس دوباره تعاریف بیشتر و عباراتی درباره متغیرهای تصادفی ابتدا در حالت گسسته، سپس در حالت پیوسته ارائه می‌دهند. بعضی وقت‌ها حتی تابع توزیع و استقلال متغیرهای تصادفی به‌طور جداگانه برای دو مورد تعریف می‌شود. این روش برای یک دوره‌ی آموزشی احتمال در سطح پایین خوب است. ولی برای یک دوره آموزشی تخصصی دانشگاهی در رشته‌هایی نظیر آمار و ریاضی (و به‌طور کلی‌تر دانشجویان علوم و مهندسی)، یک رویکرد جامع‌تر تدریس با تأکید بر نظریه عمومی برای کلیه متغیرهای تصادفی و توجه کمتر به جزئیات دقیق موارد گسسته و پیوسته پیشنهاد می‌شود.

---

[1]. Graesser
[2]. Person
[3]. Hanley
[4]. Teltsch
[5]. support
[6]. space
[7]. range

بعد از تعریف متغیر تصادفی X، توصیه می‌شود تابع توزیع تجمعی، یعنی $F_X(x) = P(X \le x)$، «*تابع بقا*[1]»، یعنی $S_X(x) = P(X > x)$ و همچنین «*تابع چندک*[2]»، یعنی $F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \boldsymbol{R}:\ F_X(x) \ge u\}$ ، $u \in [0.1]$ تعریف شوند. تابع چندک برای شبیه‌سازی توزیع‌های پیوسته استفاده می‌شود و معمولاً پس از آن با سایر روش‌های شبیه‌سازی معرفی می‌شود، اما معرفی این تابع و خصوصیات آن در ابتدای دوره منطقی‌تر است. سپس، معرفی «*انتگرال ریمان– استیلتیس*[3]» با توجه به تابع توزیع F پیشنهاد می‌شود. در دوره‌های حسابان پیشرفته دانشجویان می‌توانند به راحتی بر این مفهوم مسلط شوند، زیرا یک قیاس طبیعی با «*انتگرال ریمان*[4]» وجود دارد، که «*نموهای*[5]» X با نموهای F جایگزین می‌شود. برای یک متغیر تصادفی X با تابع توزیع F، امید ریاضی به وسیله انتگرال ریمان–استیلتیس

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

تعریف می‌شود. بنابراین، دانشجویان متوجه می‌شوند که یک متغیر تصادفی برای داشتن امید ریاضی، لازم نیست گسسته یا پیوسته باشد و اینجا مزیت استفاده از انتگرال ریمان– استیلتیس به جای انتگرال ریمان حس می‌شود. با ذکر یک مثال، محاسبه امید ریاضی متغیرهای تصادفی آمیخته و تکین با استفاده از این روش توضیح داده می‌شود.

مثال ۳. هدف این مثال، محاسبه امید ریاضی $E(X)$ برای متغیرتصادفی آمیخته X در مثال ۱ توسط روش ارائه شده است. تابع چگالی متناظر با قسمت پیوسته متغیر، برابر است با $f(x) = F'(x) = \frac{1}{3}$، $x \in (-۱.۰) \cup (۰.۱)$. بنابراین امیدریاضی برابر است با

$$E(X) \;=\; 0 \times P(X=0) \;+\; 1 \times P(X=1) \;+\; \int_{-1}^{0} x\ f(x)\,dx \;+\; \int_{0}^{1} x\ f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{6} + \int_{-1}^{1} \frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{6}.$$

در ادامه با اثبات دقیق‌تری نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان پاسخ را از تعریف کلی امید ریاضی به دست آورد؛ این حقیقت می‌تواند در دوره‌های احتمال پیشرفته‌تر نیز مورد استفاده قرار گیرد. زمانی که متغیر تصادفی X کران‌دار[6] است، امید ریاضی $E(X)$ وجود دارد و توسط انتگرال ریمان–استیلتیس محاسبه می‌شود و این انتگرال، یک حد از مجموع انتگرال‌ها است. برای یک عدد صحیح فرد نظیر $n = 2m+1$ ، که در آن $m > 0$ ، بازه (-۱.۱) به n زیرفاصله برابر

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < 0 < x_{m+1} < \cdots < x_n = 1$$

تقسیم می‌شود. در این صورت برای $\xi_i = x_{i+1}$ ، $i = 0.1. \ldots . n-1$ مقدارهای

$$\Delta F_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

مشخص می‌شوند. سپس برای $i \ne m$ قرار می‌دهیم $\Delta F_i = \frac{1}{3}\Delta x_i$. مجموع انتگرال برابر است با

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta F_i = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + S_n^{(3)} + S_n^{(4)}$$

1. survival function
2. quantile function
3. Riemann-Stieltjes integral
4. Riemann integral
5. increments
6. bounded

که در آن $S_n^{(1)} = S_n^{(4)} = \xi_m \Delta F_m$، $S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i \Delta F_i$ و $S_n^{(3)} = \sum_{i=m+1}^{n-1} \xi_i \Delta F_i$. در اینجا

$$S_n^{(1)} = x_{m+1}[F(x_{m+1}) - F(x_m)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\left[\lim_{x\to 0+} F(x) - \lim_{x\to 0-} F(x)\right] = 0 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 0.$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i \, \frac{1}{3}\Delta x_i = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{m-1} \xi_i \, \Delta x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} x dx\,.$$

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{3}\sum_{i=m+1}^{n-1} \xi_i \, \Delta x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}\int_{0}^{1} x dx$$

$$S_n^{(4)} = x_{m+1}[F(x_{m+1}) - F(x_m)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\left[\lim_{x\to 1+} F(x) - \lim_{x\to 1-} F(x)\right] = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}.$$

که انتگرال ریمان هستند. بنابراین

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} S_n = 0 + \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} x dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} x dx + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x dx = \frac{1}{6}.$$

به همین ترتیب برای متغیر تصادفی تکین Y در مثال ۲ می‌توان نشان داد، امیدریاضی برابر $E(Y) = \frac{1}{2}$ است. همچنین این حقیقت از تقارن تابع توزیع نسبت به نقطه $(\frac{1}{2}.\frac{1}{2})$ نیز به دست می‌آید.

به نظر می‌رسد متغیر تصادفی تکین یک ساختار ریاضی مصنوعی است. از سوی دیگر متغیرهای تصادفی آمیخته، به‌طور ویژه در علم بیم‌سنجی کاربرد دارند. یک نوع متغیر تصادفی آمیخته که اغلب در علم بیم‌سنجی با آن مواجه می‌شویم مخاطره بیمه است که یک جرم احتمال در صفر وجود دارد، احتمال عدم وقوع ادعا، در حالی‌که میزان ادعا با توجه به این که ادعا رخ می‌دهد، یک متغیر تصادفی پیوسته است (دنوئیت[1] و همکاران، ۲۰۰۵). این نکته را با دو مثال زیر شرح می‌دهیم (برای مثال‌های بیشتر کاس[2] و همکاران ۲۰۰۸ را ببینید).

مثال ٤. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X، اندازه (برحسب دلار) ضرر تصادفی یک قرارداد بیمه با حداکثر بیمه‌نامه M باشد که در آن $P(X > M) > 0$. اگر خسارت تصادفی کمتر از M باشد، بیمه‌گر کل مبلغ خسارت تصادفی را پرداخت می‌کند، ولی اگر خسارت تصادفی از M بیشتر شود، پرداخت بیمه در حد همان سقف M است. پس متغیر تصادفی Y، یعنی مبلغ قابل پرداخت برای هر خسارت توسط بیمه‌گر با ضابطه

$$Y = \begin{cases} X & if\ X < M \\ M & if\ X \geq M \end{cases}$$

مشخص می‌شود که یک متغیر تصادفی آمیخته است و در نقطه M جرم احتمال و در بازه $(0.M)$ تابع چگالی احتمال دارد. همچنین تابع توزیع متغیر تصادفی آمیخته Y در نقطه M دارای جهش $1 - F_X(x)$ است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & if\ X < 0 \\ F_X(x) & if\ 0 \leq X < M \\ 1 & if\ X \geq M \end{cases}$$

1. Denuit
2. Kaas

تابع جرم احتمال و تابع چگالی احتمال Y نیز برابر است با

$$f_Y(x) = \begin{cases} f_X(x) & if\ X < M \\ 1 - F_X(M) & if\ X = M \end{cases}$$

در حالت خاص که میزان خسارت تصادفی در قرارداد بیمه دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، داریم

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & if\ X < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & if\ 0 \le X < M \\ 1 & if\ X \ge M \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & if\ X < M \\ e^{-\lambda M} & if\ X = M \end{cases}$$

لذا امید ریاضی مبلغ قابل پرداخت برای هر خسارت توسط بیمه‌گر توسط انتگرال ریمان–استیلتیس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(Y) = \int_0^M x\lambda e^{-\lambda x} + Me^{-\lambda M} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda M}\right).$$

در یک قرارداد بیمه مازاد خسارت، شرکت بیمه متعهد می‌شود که زیان‌های بیش از مبلغ از پیش تعیین شده d را به بیمه‌گذار بازپرداخت کند. این مبلغ d به عنوان کسر قرارداد نامیده می‌شود. با توجه به اینکه زیان X است، این مبلغ بین بیمه‌گذار که مسئولیت اولین مبلغ d را بر عهده دارد و شرکت بیمه که در صورت وجود مازاد آن را پرداخت می‌کند، تقسیم می‌شود. بنابراین بیمه‌گذار مسئولیت $min(X.d)$ را بر عهده دارد و شرکت بیمه مازاد آن را می‌پردازد که برابر است با

$$X_I = X - min(X.d) = \begin{cases} 0 & if\ X \le d \\ X - d & if\ X > d \end{cases}$$

متوسط بخشی از X که شرکت بیمه با پرداخت آن موافقت می‌کند به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X_I) = E(X) - E\big(min(X.d)\big) = E(X) - \int_0^d S_X(x)dx$$

در حالت خاص که متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو با تابع چگالی

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha+1}.\quad x > 0$$

است، تابع بقا به‌صورت

$$S_X(x) = \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha}$$

محاسبه شده و در نهایت مقدار مورد انتظار بخشی از X که شرکت بیمه با پرداخت آن موافقت می‌کند برابر است با

$$E(X_I) = E(X) - \int_0^d S_X(x)dx = \frac{\theta^{\alpha}}{(\alpha-1)(d+\theta)^{\alpha-1}}$$

در عمل، شرکت بیمه تنها در صورت وقوع حادثه، خسارت یا صدمات وارده به بیمه‌گذار پرداخت می‌کند. از این‌رو مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵. فرض کنید متغیر تصادفی برنولی I نشان‌دهنده وقوع حادثه یا پیشامد مربوط به بیمه‌گذار با احتمال موفقیت (وقوع پیشامد)

$$P(I = 1) = p$$

باشد. اگر پیشامد بیمه‌گذار اتفاق بیفتد، مقدار زیان، متغیر تصادفی پیوسته X است که آن را شدت ضرر می‌نامند. با نادیده گرفتن هرگونه تغییر پوشش احتمالی، شرکت بیمه در صورت عدم وقوع رویداد ۰ و در صورت وقوع رویداد X را پرداخت خواهد کرد. در واقع، مطالبه بیمه را می‌توان به عنوان متغیر تصادفی آمیخته زیر نوشت

$$Y = XI = \begin{cases} 0 & if\ I = 0 \\ X & if\ I = 1 \end{cases}$$

که آن را خسارت بیمه می‌نامند. این متغیر تصادفی آمیخته در نقطه ۰، جرم احتمال $1 - p$ و به ازای مقدارهای مثبت، تابع چگالی احتمال $pf_X(x)$ دارد. از این‌رو تابع توزیع متغیر تصادفی Y برابر است با

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - p & if\ y = 0 \\ 1 - p + pF_X(x) & if\ y > 0 \end{cases}$$

به عنوان مثال، فرض کنید احتمال رخداد پیشامد ۰/۲۵ و شدت ضرر دارای توزیع پارتو $Pareto(3.1000)$ با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \frac{4}{1000}\left(\frac{1000}{x + 1000}\right)^4. \quad x > 0$$

باشد. احتمال این که قرارداد بیمه مبلغی کمتر یا مساوی ۵۰۰ را پرداخت کند به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 500) &= P(Y = 0) + P(0 < Y \leq 500) = 0.75 + 0.25F_X(500) \\ &= 0.75 + 0.25\left[1 - \left(1 + \frac{500}{1000}\right)^{-3}\right] = 0.92 \end{aligned}$$

خواص امید ریاضی را می‌توان با استفاده از خصوصیات انتگرال ریمان–استیلتیس به‌صورت کلی بیان و اثبات کرد. سپس منطقی است که به شکل کلی از طریق امید ریاضی، سایر خصوصیات عددی متغیرهای تصادفی، مانند گشتاورها، *واریانس*[1]، *انحراف استاندارد*[2]، *کوواریانس*[3] و *همبستگی پیرسون*[4] معرفی شوند. در پایان، فرمول‌ها می‌توانند برای امید ریاضی یک متغیر تصادفی گسسته و پیوسته با استفاده از مفهوم انتگرال ریمان–استیلتیس به دست آیند به این صورت که به عنوان نمونه برای یک متغیر تصادفی پیوسته یا گسسته (با مقدار صحیح) نظیر X، به ترتیب امید ریاضی متغیر تصادفی X از فرمول‌های

$$E(X) = \int_0^\infty S_X(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \qquad (۱)$$

و

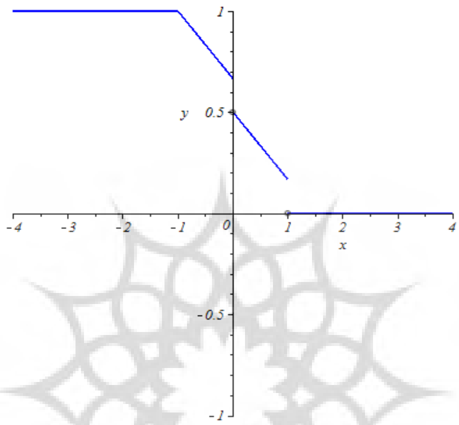
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) - \sum_{k=-\infty}^{0} P(X < k)$$

[1]. variance
[2]. standard deviation
[3]. covariance
[4]. Pearson correlation

محاسبه می‌شود.

مثال ٦. در ادامه مثال ۳، برای محاسبه امید ریاضی $E(X)$ در مثال ۱ می‌توان از فرمول (۱) نیز استفاده کرد. برای این منظور ابتدا تابع بقا برای متغیرتصادفی آمیخته X به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (شکل ۲):

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & if\ x < -1. \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{3} & if\ -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} & if\quad 0 \le x < 1 \\ 0 & if\ x > 1 \end{cases}$$



شکل ۲. تابع بقای متغیر تصادفی آمیخته در مثال ۱

بنابراین

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty S_X(x)\ dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\ dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) dx - \int_1^\infty 0dx \\ &\qquad - \left[\int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3}\right) dx\right] \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

مثال ۷. در ادامه مثال ۵، با استفاده از فرمول (۱) داریم:

$$E(Y) = \int_0^\infty S_Y(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_Y(x)dx = p\int_0^\infty 1 - F_X(x)dx = p\int_0^\infty S_X(x)dx = pE(X).$$

پس در حالتی که احتمال رخداد پیشامد ۰/۲۵ و شدت ضرر دارای توزیع پارتو $Pareto(3.1000)$ است،

$$E(X) = \frac{1000}{3-1} = 500$$

و لذا $E(Y) = 0.25 \times 500 = 125$.

بحث و نتیجه‌گیری

یک دوره نیم‌ساله استاندارد در حساب دیفرانسیل و انتگرال، دانشجویان علوم و مهندسی را با مهارت‌های مشتق و انتگرال آماده می‌کند؛ این دانشجویان با انتگرال ریمان آشنا هستند و بنابراین می‌توانند انتگرال ریمان- استیلتیس را که به‌طور مشابه تعریف می‌شود، درک کنند که تنها نمو x با نمو y جایگزین می‌شود. بنابراین در حالت کلی، امید ریاضی متغیر تصادفی می‌تواند از طریق انتگرال ریمان- استیلتیس تعریف شود.

در این مقاله ابتدا در مورد یادگیری فعال و عواملی که در یادگیری دروس وابسته به آمار و احتمال به دانشجویان کمک می‌کند نظیر کار گروهی، بازخورد اصلاحی و استفاده از رایانه صحبت شد. سپس برنامه‌های نمایشی به عنوان مکمل آموزش‌های سنتی معرفی شدند. در ادامه به این نکته مهم اشاره شد که شناسایی مخاطبی که آموزش می‌بیند و دلیل یادگیری او باید کاملاً مشخص باشد و با توجه به آن، نوع آموزش مشخص شود. سپس در مورد این که مدرسان باید با بسیاری از باورهای غلط رایج آشنا باشند و بتوانند به‌طور مؤثر با آن‌ها برخورد کنند توضیح‌هایی ارائه شد. در بخش بعدی مقاله برخی بدفهمی‌ها راجع به پیشامد، متغیرهای تصادفی و متغیرهای تصادفی پیوسته مطلب‌های ارزنده‌ای مورد بررسی قرار گرفت. سپس مفهوم داربست شامل توضیح، بازنگری، بازسازی و توسعه تفکر مفهومی و کاربرد آن در آموزش متغیر تصادفی مورد تحلیل قرار گرفت و در ادامه روشی متفاوت برای آموزش متغیرهای تصادفی بیان شد. رویکرد کلی توصیف شده در این مقاله آموزش متغیرهای تصادفی و انواع متغیرها را پوشش می‌دهد. این روشی است که در علم بیم‌سنجی، برای استفاده از متغیرهای تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در این شاخه متغیرهای تصادفی آمیخته کاربردهای مهمی دارند و مقدار امید ریاضی از طریق انتگرال ریمان- استیلتیس معرفی می‌شود. این روش به جلوگیری از تکرار خسته‌کننده تعاریف و اثبات‌ها کمک می‌کند و اثبات‌های جالب‌تری به‌صورت عمومی به وجود می‌آورد. مطالعه‌های موردی نشان می‌دهد که مثال‌های توضیح داده شده از متغیرهای تصادفی غیرمعمول، علاقه دانشجویان به موضوع و تفکر انتقادی آن‌ها را تحریک می‌کند. دانشجویان علاقه‌مند می‌شوند که چه نوع دیگری از متغیرهای تصادفی وجود دارند و قضیه تجزیه لبگ (قضیه ۱)، آنان را در رسیدن به پاسخ این سوالات یاری می‌کند.

بسیاری از دانشجویان دانش پایه‌ای درباره متغیرهای گسسته و پیوسته را از مقطع دبیرستان کسب کرده‌اند. در دوره‌های دانشگاهی می‌توان این دانش را بنا کرد و آن را به یک سطح پیشرفته‌تر تعمیم و توسعه داد. رویکرد کلی متغیرهای تصادفی می‌تواند به دانشجویان علوم و مهندسی کمک کند تا بین ویژگی‌های کلی و نوع خاص متغیرهای تصادفی تفاوت قائل شوند. همراه با مثال‌های اشاره شده، رویکرد تدریس توضیح داده خواهد شد و این حقیقت می‌تواند از تصورهای غلط جلوگیری کند تا درک عمیق‌تری از مفهوم‌های احتمال پایه به دست آورند. مثال‌های پیشرفته‌تر در احتمال را می‌توان در کتاب استویانوف[1] (۲۰۱۳) یا لویاتان (۱۹۹۸) یافت. رویکرد تدریس کلی ارائه شده در این مقاله، دانشی انتزاعی از متغیرهای تصادفی را برای دانشجویان فراهم می‌کند. به‌طور خاص، این علم همان‌طور که در مثال‌های ۴ و ۵ نشان داده شد، می‌تواند در بیم‌سنجی به کار رود، بنابراین نیازی به مطالعه متغیرهای تصادفی آمیخته به‌طور جداگانه به‌عنوان نوع سوم متغیرها نیست.

نظریه پیاژه[2] (پیاژه، ۱۹۵۰ و پیاژه و اینهلدر[3]، ۱۹۷۴)، بیان می‌کند که کودکان تصوری از شانس ندارند. این بدان معنی است که پیشامدهای تصادفی را می‌توان پس از شناسایی مجموعه‌ای از پدیده‌ها که پیشامد تصادفی نیستند درک کرد. با توجه به این دیدگاه، در آموزش آمار و احتمال نکات زیر باید در نظر گرفته شود:

---

[1]. Stoyanov
[2]. Piaget
[3]. Inhelder

۱- آموزش آمار و احتمال باید پس از دوره‌های آموزش ریاضی انجام شود. در سطح دانشگاهی، به این معنی است که درس آمار و احتمال باید پس از دوره‌های درسی حسابان، نظریه گروه، نظریه شبکه و هندسه فضایی تدریس شود. طبق این ادعا، می‌توان گفت که آمار و احتمال از ریاضیات مشتق شده است و پیش‌نیازهایی از ریاضی به درک مفهوم‌های آمار و احتمال کمک می‌کند. بنابراین در سرفصل و چیدمان دروس وابسته به آمار و احتمال در مقطع‌های دانشگاهی یک بازنگری اساسی لازم است.

۲- دانشجویان باید با نمونه‌هایی از شانس فیزیکی که مربوط به دنباله‌های برگشت‌ناپذیر است، مواجه شوند. شبیه‌سازی عددهای تصادفی را می‌توان در موقعیت‌های تجربی نیز استفاده کرد.

۳- در سطح دانشگاهی، احتمال باید با ترکیبیات آغاز شود. لازم به ذکر است که ترکیبیات ابزار مفیدی برای شمارش تمام نتایج ممکن یک پیشامد تصادفی است. لذا پیشنهاد می‌شود دانشجویان قبل از گذراندن درس آمار و احتمال، درس مبانی ترکیبیات را نیز اخذ کنند و در غیر این صورت، توصیه می‌شود مدرس دروس آمار و احتمال قبل از وارد شدن به مفهوم‌های احتمال، مفاهیم پایه مبانی ترکیبیات را مرور کند.

بنابراین، آموزش آمار و احتمال به پیروی از روش پیاژه لزوماً به معنی آموزش آمار ریاضی یا نظریه احتمال نیست، بلکه مستلزم مفهوم‌های فلسفی و ریاضی زیربنای نظریه احتمال است (سان مارتین، ۲۰۰۶).

رویکرد توصیف شده در این مقاله برای دوره‌های آماری مقدماتی یا برای دانشجویان رشته‌های علوم انسانی که پیشینه ریاضی دانشجویان محدود است، پیشنهاد نمی‌شود. پیشنهادهایی که در این مقاله ارائه شد برای دوره‌های احتمال پیشرفته در نظر گرفته شده است که بیشتر به دوره‌های تخصصی رشته آمار و حتی رشته‌های علوم و مهندسی بر می‌گردد. دانشجویان در این دوره‌ها از جنبه‌های ریاضی در احتمال لذت می‌برند و به‌طور کامل روی کاربردهای آماری متمرکز نشده‌اند. امید است محققان در مورد روش‌های آموزش سایر مفهوم‌های آمار و احتمال در ادامه تحقیق انجام شده، پژوهش‌های ارزنده‌ای انجام دهند.

References

Amrani, H., & Zaki, M. (2015). Student's conceptual difficulties with respect to the notion of random variable. *International Journal of Education, Learning and Development*, 3(9), 65-81.

Ancker, J. S. (2006). The language of conditional probability. *Journal of Statistics Education*, 14(2), 1-5.

Asmussen, S & Steffensen, M. (2020). *Risk and Insurance: A Graduate Text. Probability Theory and Stochastic Modelling*, Springer.

Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education*, 5(2), 1-16.

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure,* 3 ed., New York: Willey.

Brewer, J. K. (1985). Behavioral statistics textbooks: Source of myths and misconceptions? *Journal of Educational Statistics*, 10(3), 252-268.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. J., & Kaas, R. (2005*). Actuarial Theory for Dependent Risks*. New York: Willey.

Dolecek, G. J. (2013). Interactive MATLAB-based demo program for sum of independent random variables. *Computer Applications in Engineering Education*, 21(2), 372-85.

Dolecek, G. J. (2021). Teaching Random Variables: Demo Program for Product of m Independent Uniform Variables. *U. Porto Journal of Engineering*, 7(1), 10-15.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. II, New York: Willey.

Garfield, J. (1995), How students learn statistics, *International Statistical Review*, 63, 25-34.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (2020). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44–63.

Graesser, A.C., & Person, N.K., (1994). Questions asked during tutoring. *American Educational Research Journal*, 31(1), 104-137.

Hand, D. J. (1998). Breaking misconceptions—statistics and its relationship to mathematics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 47(2), 245-250.

Hanley, J. A., & Teltsch, D. (2006). The PDF of a function of a random variable: Teaching its structure by transforming formalism into intuition. *The American Statistician*, 60(1), 61-67.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(3), 187-205.

Hernandez, B., Huerta, J. A., & Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. Paper presented at *the 7th International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil.

Jones, L. (1991). *Using cooperative learning to teach statistics*. Research Report 91-2, The L.L. Thurston Psychometric Laboratory, University of North Carolina, Chapel Hill.

Jovanovic-Dolecek, G., & Fernandez-Vazquez, A. (2008). Use of MATLAB in teaching the fundamentals of random variables. *ACM SIGCSE Bulletin*, 40(4), 46-51.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory: using R* (Vol. 128): Springer Science & Business Media.

Kachapova, F., & Kachapov, I. (2012). Students' misconceptions about random variables. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 963-971.

Kaplar, M., Lužanin, Z., & Verbić, S. (2021). Evidence of probability misconception in engineering students—why even an inaccurate explanation is better than no explanation. *International journal of STEM education*, 8(1), 1-15.

Khazanov, L., & Prado, L. (2010). Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics Course. *ALM Internationa Journal*, 5(June), 23–35.

Khusna, A. H. (2021). Scaffolding based learning: strategies for developing reflective thinking skills (a case study on random variable material in mathematics statistics courses). Paper presented at *the Journal of Physics: Conference Series*.

Kolmogorov, A. N. (1950). *Foundations of the theory of probability*, Chelsea Pub. New York (German original 1933).

Krishnasamy, S., Ling, L., & Kim, T. (2020). Improving learning experience of probability and statistics using multimedia system. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 15(1), 77-87.

Larsen, M. D. (2006). Advice for new and student lecturers on probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 14(1), 1-13.

Leviatan, T. (1998). Misconceptions, fallacies, and pitfalls in the teaching of probability, *Proceedings of ICM*.

Leviatan, T. (2000). Strategies and principles of problem solving in probability, *Proceedings of ICME-9*.

Leviatan, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability, *Proceedings of ICOTS-6*.

Leviatan, T. (2003). Conceptual, computational and didactic aspects of teachers' training in probability and statistics. *54th session of ISI*.

Luzin, N. N. (1953). Lectures on analytic sets and their applications. Moscow: Gosudarstv. *Izdat. Tehn.-Teor. Lit.*, 359.

Malinovskii, V. (2021). *Insurance Planning Models: Price Competition and Regulation of Financial Stability*, World Scientific Publishing Company.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

Mildenhall, S. J. & Major, J. A. (2022). *Pricing Insurance Risk: Theory and Practice*, First Edition, John Wiley & Sons, Inc.

Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. Paper presented at *the Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*.

Moore, D. S. (1995). *The Basic Practice of Statistics*. Freeman: New York.

Parzen, E. (1971). *Teoría moderna de probabilidades y sus apliaciones*. México: Limusa. Ríos, S. (1967). Métodos estadísticos. Madrid: Del Castillo.

Piaget, J. (1950). Une expérience sur la psychologie du hasard chez l'enfant: Le tirage au sort des couples. *Acta Psychologica*, 7, 323-336.

Piaget, J. and Inhelder, B. (1974). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.

Ross, S. (2018). *A First Course in Probability*. 10th Edition, Verlag: Pearson.

Rossman, A. J., & Short, T. H. (1995). Conditional probability and education reform: Are they compatible? *Journal of Statistics Education*, 3(2), 1-4.

Royden, H. L. (1988). *Real analysis,* 3 ed., Prentice-Hall.

Ruiz, B. (2016). Random variable and its relationship with statistical variable: an educational perspective from an analysis of the concept, Paper presented at *the13th International Congress on Mathematical Education*.

San Martín, E. (2006). Piaget's viewpoint on the teaching of probability: A breaking-off with the traditional notion of chance. Paper presented at *the International conference on the teaching of statistics*.

Shaughnessy, J.M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Education Studies in Mathematics*, 8, 285-316.

Solovay, R. M. (1970). A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, Second Series, 9, 1-56.

Sotos, A. E. C., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W., & Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational research review*, 2(2), 98-113.

Stoyanov, J. M. (2013). *Counterexamples in Probability*, Courier Corporation.

Vitali, G. (1905). *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*. Bologna: Tip, Gamberini e Parmeggiani.

Warner, B. A., Pendergraft, D., & Webb, T. (2017). That was Venn, this is now. *Journal of Statistics Education*, 6(1).