

## مدل‌بندی و پیش‌بینی قیمت طلا و دلار با استفاده از برآورد

### استوار مبتنی بر شبیه‌سازی

احد رحیم پور\*، مسعود یارمحمدی\*\*، رحیم چینی پرداز\*\*\* و علی

شادرخ\*\*\*\*

تاریخ وصول: ۱۳۹۷/۹/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۱۸

#### چکیده

اغلب داده‌های سری زمانی چند متغیره با استفاده از مدل اتورگرسیو میانگین متحرک برداری (VARMA) مدل‌بندی می‌شود. ولی وجود نقاط دورافتاده اغلب ناقض فروض مانایی بوده و ممکن است باعث مدل‌سازی اشتباه، اربیبی برآورد پارامترها و پیش‌بینی نادرست شود. بنابراین در این تحقیق، برآورد جدید مبتنی بر شبیه‌سازی استوار برای پارامترهای مدل VARMA معرفی می‌شود. برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی نوعی برآورد غیرمستقیم بوده و به جای برآورد مدل پیچیده VARMA از برآورد مدل ساده‌تر اتورگرسیو برداری (VAR) با مرتبه‌ی بالا استفاده می‌کند. برای این کار، ابتدا روی مشاهدات مدل VAR برازش می‌شود سپس داده‌هایی از VARMAهای مختلف شبیه‌سازی شده و روی هر مجموعه داده شبیه‌سازی شده مدل VAR برازش می‌شود. اساس روش مبتنی بر شبیه‌سازی، فاصله بین برآورد مدل VAR روی داده‌های "شبیه‌سازی" و "مشاهدات" است. مقادیری از پارامترها که در شبیه‌سازی از مدل VARMA استفاده کرده و مینیمم این فاصله را ارائه دهد، برآورد پارامترهای مدل VARMA هستند. حال در صورتی که برآورد مدل VAR به صورت استوار باشد انتظار داریم که برآورد مدل VARMA نیز استوار گردد. به همین دلیل برای برآورد مدل VAR، از روش استوار BMM با عملکرد بهتر استفاده شده است. برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی خواص سازگاری و نرمال بودن مجانبی را دارا است. در ادامه با مطالعات شبیه‌سازی در داده‌های بدون نقاط دورافتاده نشان داده شد که نسبت میانگین توان دوم خطای این برآوردگر به برآوردگر ماکسیمم

\* دانشجوی دکتری گروه آمار دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

\*\* دانشیار گروه آمار دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران. (نویسنده مسئول)

(masyar@pnu.ac.ir)

\*\*\* استاد گروه آمار دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.

\*\*\*\* دانشیار گروه آمار دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

درستنمایی شرطی بین ۰/۷-۰/۶ بوده که برای یک برآوردگر استوار قابل قبول می‌باشد. همچنین وقتی ۰/۵ داده‌ها به نقاط دورافتاده آلوده شود، میانگین توان دوم خطای برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی استوار نسبت به برآوردگر ماکسیمم درستنمایی شرطی کمتر است.

به عنوان مثال کاربردی، داده‌های مربوط به قیمت طلا و دلار در بازار آزاد تهران در بازه‌ی زمانی ۱۳۹۲-۱۳۹۷ به صورت هفتگی جمع‌آوری و بررسی شده است. لازم به ذکر است که قیمت طلا و ارز اغلب، تحت تاثیر بحران‌های اقتصادی، سیاسی، ظهور جنگ و ... قرار گرفته و این بحران‌ها باعث به وجود آمدن نقاط دورافتاده می‌شود. لذا برای کاهش اثرات بد این نقاط دورافتاده و برآورد صحیح مدل از روش استوار استفاده می‌شود. نکته دیگر در مورد قیمت طلا و دلار، وجود همبستگی بالای آن‌ها بوده و برای تعیین اثرات متقابل طلا و دلار در پیش‌بینی از مدل VARMA می‌توان استفاده نمود. برازش مدل VARMA(1,1) به این داده‌ها نشان می‌دهد که واریانس خطای مربوط به قیمت طلا در مدل استوار نسبت به ماکسیمم درستنمایی شرطی ۳۸ درصد و واریانس خطای مربوط به قیمت دلار در مدل استوار نسبت به ماکسیمم درستنمایی شرطی ۳۰ درصد کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر استفاده از این روش، منجر به پیش‌بینی‌های بهتر با واریانس کمتر می‌گردد. با توجه به مدل برداری برازش شده، پیش‌بینی قیمت طلای هر هفته با استفاده از قیمت طلای هفته قبل و نوسانات طلا و دلار هفته قبل بدست می‌آید. همچنین، پیش‌بینی قیمت دلار هر هفته به وسیله قیمت دلار هفته قبل و نوسانات دلار هفته قبل انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نقاط دور افتاده، مدل VARMA، استوار سازی، برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی.  
طبقه بندی JEL: C22, E31, E37, C3, C15.

## ۱- مقدمه

سری‌های زمانی، اغلب، تحت تاثیر بحران‌های اقتصادی، سیاسی، ظهور جنگ و ... قرار می‌گیرد. این بحران‌ها باعث به وجود آمدن مشاهداتی می‌شوند که با بقیه مشاهدات سازگاری ندارند و نقاط دورافتاده نامیده می‌شوند (Jahanbin, 2012). البته برای این نقاط، تعریف‌های دقیق‌تری هم بر اساس مدل‌های سری زمانی وجود دارد (Chen & Liu, 1993; Tsay et al., 2000).

سری‌های زمانی مانند قیمت طلا و دلار را می‌توان با استفاده از مدل ARMA تحلیل نمود، ولی وجود نقاط دورافتاده اغلب ناقض فروض مانایی بوده و مدل‌بندی داده‌ها را با مشکل روبرو می‌کند (Chen & Liu, 1993). به همین دلیل استفاده از برآوردهای معمول برای این مدل‌ها با خطای زیاد همراه می‌شود.

در تحلیل سری‌های زمانی برای برخورد با نقاط دورافتاده دو روش آشکارسازی<sup>۱</sup> و استوارسازی<sup>۲</sup> می‌توانند مورد استفاده قرار گیرد. در روش آشکارسازی، مکان، نوع و اندازه نقاط دورافتاده شناسایی می‌شود. بعد از شناسایی این نقاط، اثر آنها را می‌توان از داده‌ها حذف کرده و مدل‌سازی را با استفاده از داده‌های تمیز<sup>۳</sup> (تعدیل شده) انجام داد. در روش‌های استوارسازی، اثر نقاط دورافتاده بر برآورد پارامترها و مدل‌بندی کاهش داده می‌شود. در اغلب موارد نقاط دورافتاده در باقیمانده‌ها اثر می‌کنند، بنابراین در استوارسازی باقیمانده‌های بزرگ را با ضریبی اصلاح کرده و سپس از آنها جهت برآورد پارامترهای مدل استفاده می‌شود.

موضوع دیگر در مورد داده‌های مربوط به قیمت طلا و دلار، وجود همبستگی بالای آنها است (Hosseinioun et al., 2016). آزمون‌های مربوط به این همبستگی برای فهم رابطه همزمان آنها مفید بوده ولی تحلیل آن، جهت اثر متقابل همزمان را مشخص نمی‌کند (Tehrani & Khosroshahi, 2017). بنابراین در این تحقیق از مدل‌بندی ARMA برداری، برای تعیین اثرات متقابل در پیش‌بینی استفاده شده است.

در ادامه این تحقیق، ابتدا در بخش دوم مدل ARMA برداری (VARMA) معرفی و پیشینه تحقیق ارائه می‌شود. در بخش سوم نحوه‌ی به دست آوردن برآورد

<sup>1</sup> Detection

<sup>2</sup> Robustification

<sup>3</sup> Clean

استوار جدید مبتنی بر شبیه‌سازی برای مدل VARMA تشریح می‌شود. عملکرد این برآوردگر نسبت به برآوردگر در ستنمایی ماکسیمم شرطی در بخش چهارم ارائه می‌شود. در بخش پنجم به بررسی نرمال بودن توزیع مجانبی برآوردگر استوار جدید می‌پردازیم. در بخش ششم برآورد استوار مدل VARMA برای داده‌های مربوط به قیمت دلار و طلا به دست آمده و واریانس خطای پیش‌بینی‌های انجام شده با استفاده از این برآورد و برآورد ماکسیمم در ستنمایی مقایسه می‌شود. سرانجام در بخش هفتم به جمع‌بندی و بیان نتایج می‌پردازیم.

## ۲- ادبیات موضوع

### ۲-۱- مدل VARMA و نقاط دورافتاده

فرض کنید  $Y_t$  یک سری زمانی  $m$  بعدی با مدل VARMA(p,q)

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (1)$$

باشد (Lutkepohl, 2006). که در آن خطای  $\varepsilon_t$ ، دارای توزیع نرمال با میانگین برداری صفر و ماتریس کواریانس  $\Sigma$  است.  $\Phi(B)$  و  $\Theta(B)$  هم چندجمله‌ای‌های ماتریسی از مرتبه  $p$  و  $q$  بر حسب عملکرد تفاضلی پسر  $B$  هستند

$$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p \quad \text{و} \quad \Theta(B) = I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q.$$

مثال ساده این مدل، VARMA(1,1) با دو متغیر بوده و به صورت

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1(t-1)} \\ Y_{2(t-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1(t-1)} \\ \varepsilon_{2(t-1)} \end{bmatrix}.$$

است.

شرط کافی برای مانایی فرایند VARMA آن است که برای  $|z| \leq 1$ ،  $\det(I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p) \neq 0$  باشد. شرط وارون‌پذیری این فرایند آن است که برای  $|z| \leq 1$ ،  $\det(I - \Theta_1 z - \dots - \Theta_q z^q) \neq 0$  باشد. در حالت  $p = 1$  شرط مانایی این فرایند آن است که قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس  $\Phi_1$  کمتر از ۱ باشد.

در حالت  $q = 0$ ،  $\Theta(B) = I$  شده و مدل VAR(p) خوانده می‌شود. در حالت  $p = 0$  هم  $\Phi(B) = I$  شده و مدل VMA(q) خوانده می‌شود.

وقتی سری زمانی چند متغیره  $Y_t$  تحت تاثیر یک ضربه یا رویداد خارجی قرار می‌گیرد به صورت  $Z_t = Y_t + f(t)$  مشاهده می‌گردد که  $f(t)$  تابع پارامتری و نشان دهنده‌ی اثر مداخله در زمان  $t$  می‌باشد. وقتی زمان مداخله  $t$  و مقدار  $f(t)$

معلوم نیست، مشاهده‌ی  $Z_t$  به عنوان نقطه دورافتاده تعریف می‌شود. استفاده از روش‌های استوار، اثر مداخله نقاط دور افتاده بر برآورد پارامترهای مدل (۱) را کاهش می‌دهند.

## ۲-۲- پیشینه پژوهش

به طور کلی با توجه به اهمیت پیش‌بینی قیمت طلا و دلار در نظام اقتصادی کشور، می‌توان از روش‌های بنیادی و یا روش‌های آماری استفاده کرد (Keshideh & Asl, 2011). در روش پیش‌بینی بنیادی، متغیرهای اقتصادی توصیف کننده قیمت‌ها، نظیر عرضه، تقاضا، شرایط سیاسی و سایر موارد شناسایی و اندازه‌گیری می‌شوند. این نوع روش پیش‌بینی از مدل‌های اقتصادی و اقتصادسنجی استفاده می‌کند (Plakanadaras, 2015). روش‌های آماری بر اساس اطلاعات گذشته موجود بوده و شامل روش‌های پارامتری نظیر برازش مدل‌های میانگین متحرک اتورگرسیو (ARMA) و روش‌های ناپارامتری نظیر روش‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی است.

در زمینه قیمت ارز، تا به حال تحقیقات متعددی انجام گرفته است. به عنوان مثال مقایسه مدل‌های ARMA و شبکه‌های عصبی مصنوعی توسط زراء نژاد و دیگران انجام شد. نتایج تحقیق آن‌ها روی داده‌های ارز بهتر بودن روش شبکه‌های عصبی مصنوعی را نشان می‌داد (Nezhad et al., 2009). شیرازی و نصراللهی پیش‌بینی نرخ ارز را با استفاده از مدل‌های پولی مختلف انجام داده و نتایج حاصل از این الگوها را با مدل گام‌برداری تصادفی مقایسه نمودند. نتایج آن‌ها بهتر بودن مدل گام‌برداری تصادفی نسبت به مدل‌های پولی را نشان می‌دهد (Shirazi & Nasrollahi, 2014). احسانی‌فر و راثی بحث تردید در برقراری فرض‌های مانایی و خطی بودن سری زمانی را مطرح کردند. آن‌ها با مقایسه توانایی پیش‌بینی مدل‌های ARIMA و شبکه‌های عصبی مصنوعی، بهتر بودن تخمین‌های روش شبکه‌های عصبی مصنوعی را نشان دادند (Ehsanifar & Rasi, 2015). یارمحمدی و محمودوند نشان دادند که روش ناپارامتری تحلیل مجموعه‌ی مقادیر تکین (SSA) در مقایسه با روش پارامتری مدل ARIMA بدون محدودیت بوده و بدون نیاز به فرضیات زیاد برای سری زمانی کوتاه مدت (ارز) نیز بهتر عمل می‌کند (Yarmohammadi & Mahmoudvand, 2016). حسینی و رضایی

مدل‌سازی و پیش‌بینی نرخ رسمی ارز در ایران را با استفاده از مدل ARIMA همراه با عامل‌های مداخله‌ای انجام دادند. آن‌ها این الگو را با مدل گام‌برداری تصادفی مقایسه کردند. نتایج به دست آمده بهتر بودن عملکرد مدل ARIMA همراه با عامل‌های مداخله‌ای را نسبت به مدل گام‌برداری تصادفی نشان می‌دهد (Hosseini & Rezai, 2017).

در مورد قیمت طلا نیز تحقیقات زیادی صورت گرفته است. برای مثال، خاشعی و بیجاری برای برطرف کردن محدودیت نیاز به داده‌های زیاد در روش‌های ARIMA و شبکه‌های عصبی، مدل ترکیبی ARIMA با منطق فازی (FARIMA) را پیشنهاد دادند. نتایج آن‌ها پیش‌بینی دقیق مدل ترکیبی را روی سری‌های زمانی کوتاه مدت نشان می‌دهد (Khashai & Bijari, 2008). زارعی برای پیش‌بینی قیمت آتی سکه در بازه‌های زمانی کوتاه مدت روش‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی، سیستم استنتاج فازی-عصبی تطبیق، ماشین بردار پشتیبان و مدل ARIMA را مقایسه کرده و نشان داد که روش شبکه‌های عصبی مصنوعی بهتر عمل می‌کند (Zarei, 2017). تجلی برای کاهش خطای پیش‌بینی مدل GARCH، آن را با روش عصبی مصنوعی ترکیب نموده و پیش‌بینی را نسبت به مدل GARCH بهبود بخشید (Tajalli, 2017).

در مورد رابطه بین قیمت طلا و ارز هم تحقیقات زیادی انجام شده است. برای مثال، دلوری و بروجنی عوامل موثر بر تغییر پذیری قیمت‌های آتی سکه طلا را بررسی کردند. تحقیق آن‌ها نشان داد که قیمت آتی سکه بهار آزادی دارای نوسانات خوشه‌ای بوده و استفاده از مدل‌های ARCH جهت مدل‌سازی نوسانات امکان‌پذیر می‌باشد. همچنین عوامل بازده قیمت نقدی سکه، قیمت پیش‌بینی شده نرخ دلار به ریال، بازده شاخص کل بورس و قیمت پیش‌بینی شده طلای جهانی به ترتیب دارای بیشترین تاثیر بر واریانس شرطی هستند (Delavari & Roshani, 2012). بررسی انتقال تلاطم بین سه بازار سهام، طلا و ارز توسط حسینیون و دیگران انجام شد. آن‌ها با استفاده از الگوی VAR-MGARCH نشان دادند که بین بازارهای ارز و طلا و بین بازارهای طلا و سهام انتقال شوک دو طرفه بوده و از بازار سهام به بازار ارز انتقال شوک یک طرفه‌ای وجود دارد (Hosseinioun et al., 2016). تهرانی و خسرو شاهی در تحقیق مشابهی اثر انتقال نوسان بین سه بازار سهام، طلا و ارز را بررسی کردند. در تحقیق آن‌ها سهم عمده خطای پیش‌بینی

شاخص کل، ناشی از نوسانات این شاخص بوده و بیشترین اثر نوسان سکه طلا با استفاده از دلار توضیح داده می‌شود (Tehrani & Khosroshahi, 2017).

در این مقاله، با توجه به همبستگی بین قیمت طلا و دلار، تحلیل همزمان این دو متغیر با استفاده از مدل ARMA برداری پیشنهاد می‌شود. حال از آنجایی که وجود داده‌های دور افتاده در سری‌های زمانی اجتناب ناپذیر بوده و فروض اولیه مورد نیاز را نقض می‌کند، به منظور کاهش اثرات این داده‌ها در مدل‌سازی و پیش‌بینی، نیازمند به کار بردن روش‌های استوار هستیم.

در مورد استوارسازی مدل ARMA برداری، تحقیقات متعددی انجام شده است. به عنوان مثال، لی و های<sup>۴</sup> و بن و دیگران<sup>۵</sup> برآوردهای استواری بر اساس تابع اتوکوریانس باقیمانده‌ها برای مدل VAR و VARMA استخراج کردند (Li & Hui, 1989; Ben et al., 1999). برآورد استوار  $\tau$  هم توسط بن و دیگران<sup>۶</sup> برای مدل VAR معرفی شد (Ben et al., 2001). اورسو و پریو<sup>۷</sup> روش تابع اتوکوریانس باقیمانده‌ها را به مدل VAR دوره‌ای تعمیم دادند (Ursu & Pereau, 2014).

برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی استوار مدل ARMA یک متغیره توسط لونا و جنتن<sup>۸</sup> معرفی شد. این روش برای برآورد مدل ARMA از برآورد مدل AR کمک می‌گیرد. استوارسازی این روش بر اساس استوارسازی برآورد مدل AR می‌باشد. این برآوردگر خواص سازگاری، نرمال بودن مجانبی و استواری را دارا است (Luna & Genton, 2001). با توجه به خواص خوب این برآوردگر، در این تحقیق برای اولین بار برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی استوار برای مدل VARMA گسترش می‌یابد. استوارسازی این روش بر اساس استوارسازی برآورد مدل VAR بوده و مبنای استوارسازی برآورد MM یوهای<sup>۹</sup> می‌باشد که در سه مرحله به دست می‌آید. در مرحله اول، یک برآورد اولیه استوار با نقطه فروریزش بالا اما نه لزوماً کارا استفاده می‌گردد. در مرحله دوم، برآورد M (ماکسیمم درست‌نمایی هابر<sup>۱۰</sup>) انحراف معیار

<sup>4</sup> Li & Hui

<sup>5</sup> Ben et al.

<sup>6</sup> Ben et al.

<sup>7</sup> Ursu & Pereau

<sup>8</sup> Luna & Genton

<sup>9</sup> Yohai

<sup>10</sup> Huber

خطاها با استفاده از خطاهای به‌دست آمده از مرحله اول محاسبه می‌شود. در مرحله سوم، برآورد M پارامترها بر اساس تابعی دوباره-کاهشی<sup>۱۱</sup> به دست می‌آید. برآورد MM کارایی و نقطه فروریزش<sup>۱۲</sup> بالا را باهم ترکیب می‌کند (Yohai, 1987; Huber, 1981). برآورد استوار مدل VAR مورد استفاده در این تحقیق برآورد MM کراندار<sup>۱۳</sup> (BMM) است که مولر و یوهای<sup>۱۴</sup> برای مدل VAR با باقیمانده‌های کراندار به کار بردند (Muler & Yohai, 2013). استفاده از برآورد استوار مدل VAR در روش مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA، باعث استوارسازی این روش می‌شود.

### ۳- برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی

این بخش، برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی لونا و جنتن<sup>۱۵</sup> را برای حالت چند متغیره تعمیم می‌دهد. به صورت کلی، برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA در چند مرحله به دست می‌آید. فرض کنید مشاهداتی از مدل VARMA داشته باشیم. ابتدا روی مشاهدات مدل VAR برازش می‌شود. سپس داده‌هایی از VARMAهای مختلف تولید شده و روی هر مجموعه داده شبیه‌سازی شده مدل VAR برازش می‌شود. اساس روش مبتنی بر شبیه‌سازی، فاصله بین برآورد مدل VAR روی داده‌های "شبیه‌سازی" و "مشاهدات" است. مقادیری از پارامترها که در شبیه‌سازی از مدل VARMA استفاده کرده و مینیمم این فاصله را ارائه دهد، برآورد پارامترهای مدل VARMA هستند.

برای بدست آوردن برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA، دو بار مدل VAR را برازش می‌دهیم. اگر مدل VAR را روی "مشاهدات" به صورت استوار برازش دهیم، برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA هم استوار می‌شود. مولر و یوهای<sup>۱۶</sup> نشان دادند که برآوردگر استوار BMM نسبت به دیگر روش‌های استوار مدل VAR عملکرد بهتری دارد، به همین علت در این تحقیق، این برآوردگر استفاده شده است (Muler & Yohai, 2013). اگرچه از دیگر

<sup>11</sup> Redescending function

<sup>12</sup> Breakdown point

<sup>13</sup> Bounded MM estimator

<sup>14</sup> Muler & Yohai

<sup>15</sup> Luna & Genton

<sup>16</sup> Muler & Yohai



روش‌های استوار نظیر روش حداقل مربعات پیراسته کروکس و جوسنز<sup>۱۷</sup> و روش  $\tau$  بن و دیگران<sup>۱۸</sup> هم می‌توان برای برازش استوار مدل VAR روی مشاهدات استفاده کرد (Ben et al. 2001; Croux & Joossens, 2008).

### ۳-۱- برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA

برای برآورد مدل VAR چندین روش استوار مانند بن و دیگران، کروکس و جوسنز و مولر و یوهای ارائه شده است (Ben et al. 2001; Croux & Joossens, 2008; Muler & Yohai, 2013). ولی با بررسی‌های انجام گرفته برای مدل VARMA تعداد کمی برآورد استوار مانند بن و دیگران<sup>۱۹</sup> وجود دارد (Ben et al. 1999). در این بخش برآورد استوار جدید مبتنی بر شبیه‌سازی برای مدل VARMA از طریق برآورد استوار مدل VAR ارائه می‌شود.

فرض کنید  $\text{vec}$  ستون‌های یک ماتریس را تبدیل به یک بردار ستونی بزرگ می‌کند. در این صورت، برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی پارامترهای  $\Omega = \text{vec}(\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q, \Sigma)'$  مدل (۱) با استفاده از برآورد پارامترهای  $\Lambda = \text{vec}(\Pi_1, \dots, \Pi_r, \Sigma_r)'$  VAR کمکی<sup>۲۰</sup> زیر به دست می‌آید.

$$Y_t = \sum_{i=1}^r \Pi_i Y_{t-i} + U_t \quad (2)$$

که  $\Pi_i$ ها (ضرایب مدل) طوری تعریف می‌شوند که برای  $i = 1, \dots, r$  داشته باشیم  $E(U_t Y_{t-i}') = 0$  همچنین برای برقراری نتایج جانبی بخش ۴، رتبه  $r \geq p + q$  در نظر گرفته می‌شود (Gourieroux & Monfort, 1996; Smith, 1993). فرایند اغتشاش  $U_t$  هم دارای توزیع نرمال  $m$  متغیره با میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $\Sigma_r$  می‌باشد.

در حالت ساده  $p = 0, q = 1$  و برای  $r = 1$ ، مدل‌های (۱) و (۲) به ترتیب به صورت  $Y_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1}$  و  $Y_t = \Pi_1 Y_{t-1} + U_t$  بوده و رابطه<sup>۲۱</sup> بین پارامترهای این دو مدل به صورت

<sup>17</sup> Croux & Joossens

<sup>18</sup> Ben et al.

<sup>19</sup> Ben et al.

<sup>20</sup> Auxiliary

<sup>21</sup> Binding

$$h(\Theta_1, \Sigma) = (\Theta_1 \Sigma (\Sigma + \Theta_1 \Sigma \Theta_1)^{-1}, \Sigma + \Theta_1 \Sigma \Theta_1' - \Pi_1 \Sigma \Theta_1') \\ = (\Pi_1, \Sigma_r) \quad (3)$$

است.

لازم به ذکر است که در حالت  $q = 0$  هر دو مدل (۱) و (۲) مدل VAR کلاسیک بوده و قبل از این تحقیق چندین برآورد استوار مثل برآورد BMM مولر و یوهای ارائه شده است (Muler & Yohai, 2013). پس حالت  $q > 0$  را برای برآورد استوار مدل VARMA کلی در نظر بگیرید. البته در این حالت،  $U_t$ ها وابسته بوده و مدل (۲) مدل VAR کلاسیک نیست.

فرض کنید مشاهدات  $m$  متغیره  $Y_t = (Y_{t1}, \dots, Y_{tm})'$  برای  $t = 1, \dots, T$  از مدل VARMA(p,q) باشند که با نقاط دورافتاده آلوده شده‌اند. برآورد مبتنی بر شبیه‌سازی پارامترهای این مدل،  $\Omega = \text{vec}(\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Theta_1, \dots, \Theta_q, \Sigma)'$ ، متناظر با حالت یک متغیره در چهار مرحله به شرح زیر به دست می‌آید (Luna & Genton, 2001).

۱. برآوردگر BMM مدل VAR را با توجه به مراحل زیر به دست آورید (Muler & Yohai, 2013).

الف: ابتدا  $\hat{\Pi}$  و  $\hat{\Sigma}_r$  به وسیله تساوی‌های زیر به دست آورید.

$$(\hat{\Pi}, \hat{\Sigma}_r) \\ = \underset{\Pi, \Sigma}{\text{argmin}} \{s^{2m} (M(\hat{u}_{r+1}(\Pi, \Sigma, 1), \Sigma), \dots, M(\hat{u}_T(\Pi, \Sigma, 1), \Sigma)) \det(\Sigma))\}$$

و

$$\hat{\Sigma}_r = s^{2m} \left( M(\hat{u}_{r+1}(\hat{\Pi}, \hat{\Sigma}_r, 1), \Sigma), \dots, M(\hat{u}_T(\hat{\Pi}, \hat{\Sigma}_r, 1), \Sigma) \right) \hat{\Sigma}_r$$

که  $M(u, \Sigma) = (u' \Sigma^{-1} u)^{1/2}$  فاصله مالهالونوبیس<sup>۲۲</sup> و  $\hat{u}_t(\Pi, \Sigma, 1)$

باقیمانده‌ی مدل انتشار خطای کراندار VAR (BIP<sup>۲۳</sup>-VAR) می‌باشد. مدل BIP-VAR وزن کوچکتری را به باقیمانده‌های بزرگ آلوده به نقاط دورافتاده می‌دهد.  $S$  هم مقادیری را می‌گیرد که در تساوی

$$\frac{1}{T-r} \sum_{t=r+1}^T \rho_1 \left( \frac{v_t}{s} \right) = 0.5$$

<sup>22</sup> Mahalonobis

<sup>23</sup> Bounded innovation propagation

ب: در این مرحله دو برآورد زیر را به دست آورید:

$$\hat{\Pi}_1 = \underset{\Pi}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=r+1}^T \rho_2 \left( M(\bar{u}_t(\Pi), \hat{\Sigma}_r) \right),$$

$$\hat{\Pi}_2 = \underset{\Pi}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=r+1}^T \rho_2 \left( M(\hat{u}_t(\Pi, \hat{\Sigma}_r, 1), \hat{\Sigma}_r) \right)$$

که  $\bar{u}_t$  باقیمانده‌های مدل VAR کلاسیک می‌باشد. توابع  $\rho_1$  و  $\rho_2$  صعودی و دوبار مشتق پذیر هستند. این توابع برای مقادیر بزرگ باقیمانده مقدار ثابت ۱ را گرفته و  $\rho_2 < \rho_1$  می‌باشد (Muler & Yohai, 2013).

ج: حال مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$a_1 = \sum_{t=r+1}^T \rho_2 \left( M(\bar{u}_t(\hat{\Pi}_1), \hat{\Sigma}_r) \right) \text{ و}$$

$$a_2 = \sum_{t=r+1}^T \rho_2 \left( M(\hat{u}_t(\hat{\Pi}, \hat{\Sigma}_r, 1), \hat{\Sigma}_r) \right)$$

برآوردگر BMM پارمتر  $\Pi$  بصورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{\Pi}_{\text{BMM}} = \begin{cases} \hat{\Pi}_1 & \text{if } a_1 \leq a_2 \\ \hat{\Pi}_2 & \text{if } a_1 > a_2 \end{cases}$$

پس، پارامتر کمکی بصورت  $\hat{\Lambda} = \operatorname{vec}(\hat{\Pi}_{\text{BMM}}, \hat{\Sigma}_r)'$  برآورد می‌شود.

۲. تعداد  $N = n \times T$  داده‌ی مستقل از توزیع نرمال  $m$  متغیره با میانگین برداری صفر و ماتریس کواریانس همبندی تولید کنید.  $n$  عدد صحیح مثبت می‌باشد. برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی برای هر  $n > 0$  سازگار بوده و افزایش  $n$  باعث کاهش واریانس این برآوردگر در تساوی (۵) می‌شود. البته با افزایش مقدار  $n$  مدت زمان اجرای برنامه نیز افزایش می‌یابد.

۳. با استفاده از اغتشاش‌های تولیدی مرحله ۲، برای هر پارامتر داده شده  $\Omega$  داده‌های  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$  را از مدل  $\operatorname{VARMA}(p, q)$  تولید کنید. مدل VAR را به داده‌های تولید شده با استفاده از روش حداقل مربعات خطا یا ماکسیمم درست‌نمایی برازش داده و برآورد این مرحله  $\Lambda$  را  $\Lambda^*$  بنامید.

۴. برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی پارامتر  $\Omega$  به‌عنوان تابعی از  $\hat{\Lambda}$  با مینیمم کردن فاصله زیر به‌دست می‌آید.

$$(\hat{\Lambda} - \Lambda^*)' W (\hat{\Lambda} - \Lambda^*) \quad (۴)$$

که  $W$  ماتریس وزن می‌باشد. حالت بهینه این ماتریس در بخش بعد ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که در تولید  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$  از مدل VARMA، اغتشاش‌ها ثابت بوده و فقط مقادیر پارامتر  $\Omega$  تغییر می‌کند. مراحل ۳ و ۴ را (با تغییر مقدار پارامتر  $\Omega$ ) تا به‌دست آوردن مینیمم فاصله تساوی (۴) تکرار می‌شود. شرط همگرایی این تساوی، یک به یک بودن رابطه بین پارامترهای مدل (۱) و (۲) می‌باشد. برای همگرایی رتبه  $r \geq p + q$  در نظر گرفته می‌شود. مقدار  $\Omega$ ی مرحله ۳ که مینیمم فاصله مرحله ۴ را ارائه می‌دهد برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی  $\Omega$  است (Luna & Genton, 2001).

لازم به ذکر است که برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی نوعی برآوردگر استنباط غیرمستقیم است (Gourieroux et al., 1993). در این روش غیرمستقیم، برآوردهای مدل VARMA از طریق مدل VAR به‌دست می‌آید. استواری این روش از برازش استوار مدل VAR روی مشاهدات و داده‌های شبیه‌سازی شده، به‌دست می‌آید. البته داده‌های شبیه‌سازی شده مرحله ۳ بدون داده‌ی دورافتاده بوده با برازش‌های ساده‌تر می‌تواند انجام شود. شبیه‌به‌روش لونا و جنتن می‌توان انتظار داشت که استواری برآوردگر مدل VAR به برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA منتقل می‌شود (Luna & Genton, 2001).

**۴- توزیع نرمال مجانبی برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA**  
نحوه به‌دست آوردن توزیع مجانبی برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی مدل ARMA برداری شبیه مدل ARMA است (Luna & Genton, 2001). این کار نیازمند تعریف تابع رابطه بین پارامترهای مدل VARMA و VAR است. به عبارت دیگر، تابع رابطه  $h(\cdot)$  طوری تعریف می‌شود که برای  $\Omega$  از مدل VARMA و  $\Lambda$  از مدل VAR داشته باشیم  $h(\Omega) = \Lambda$ . این رابطه برای  $p = 0$  صورت تحلیلی شناخته شده‌ای دارد و مثال آن در تساوی (۳) ارائه شده است. اما برای  $p > 0$ ، رابطه  $h(\cdot)$  به‌صورت پیچیده بوده و معکوس این تابع صورت بسته‌ای ندارد (Brockwell &

(Davis, 1991). پس برآورد  $\Omega$  نمی‌تواند با استفاده از  $h^{-1}(\hat{\Lambda})$  به صورت مستقیم به دست آید و لذا مراحل مبتنی بر شبیه‌سازی پیشنهاد می‌شود.

مولر و یوهای توزیع مجانبی برآوردگر  $\hat{\Pi}_{BMM}$  را به صورت زیر بدست آوردند

$$\sqrt{T}(\hat{\Pi}_{BMM} - \Pi_0) \sim N(0, V_1)$$

که  $V_1$  ضریبی از ماتریس کواریانس برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی شرطی<sup>۲۴</sup> (CMLE) است (Muler & Yohai, 2013). کواریانس درایه‌های  $\sqrt{T}\text{vec}(\hat{\Sigma}_T)'$  را هم می‌توان از طریق شبیه‌سازی به دست آورد. یعنی مثلاً باید ۱۰۰۰ تا نمونه  $T$  تایی از توزیع نرمال  $m$ -متغیره با میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $\hat{\Sigma}_T$  تولید کرده و برای هر یک از این ۱۰۰۰ تا نمونه برآورد  $\hat{\Sigma}_T$  به دست آورد. سپس با استفاده از این ۱۰۰۰ برآورد  $\hat{\Sigma}_T$ ، ماتریس کواریانس درایه‌های  $\sqrt{T}\text{vec}(\hat{\Sigma}_T)'$  یعنی  $V_2$  را محاسبه نمود. بنابراین  $\sqrt{T}\hat{\Lambda} = \sqrt{T}\text{vec}(\hat{\Pi}_{BMM}, \hat{\Sigma}_T)'$  دارای ماتریس کواریانس  $V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$  است.

حال توزیع مجانبی  $\hat{\Omega}$  از توزیع مجانبی  $\hat{\Lambda}$  به دست می‌آید (Smith, 1993).

$$\sqrt{T}(\hat{\Omega} - \Omega_0) \sim N(0, C) \quad (5)$$

که  $C = P(\Omega_0)VP(\Omega_0)' + \frac{1}{n} P(\Omega_0)V^*P(\Omega_0)'$ ،  $V^*$  ماتریس کواریانس مجانبی  $\Lambda^*$ ،  $P(\Omega_0) = [D(\Omega_0)'WD(\Omega_0)]^{-1}D(\Omega_0)'W$  و  $D(\Omega) = \left. \frac{\partial h(\Omega)}{\partial \Omega'} \right|_{\Omega = \Omega_0}$  است.

در عمل برای سادگی برآورد  $P(\Omega_0)$ ، ماتریس وزن تساوی (۴) را  $W = I$  انتخاب می‌کنند. البته بهتر است ماتریس وزن بهینه  $W = V^{-1}$  را استفاده کرد بخصوص زمانی که  $V^{-1}$  از قطری بودن دور بوده یعنی عناصر  $\hat{\Lambda}$  وابستگی زیادی داشته باشند (Smith, 1993). در این حالت برای  $n$  بزرگ، ماتریس کواریانس  $\hat{\Omega}$  (برآوردگر استوار مبتنی بر شبیه‌سازی) به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید.

$$C \approx [D(\Omega_0)'V^{-1}D(\Omega_0)]^{-1} \quad (6)$$

لازم به ذکر است که مشتق تابع رابطه،  $D(\Omega)$ ، که در محاسبه ماتریس کواریانس (۶) استفاده می‌شود با دستور  $\text{numderiv}()$  از بسته  $\text{madness}$  به دست می‌آید. بنابراین به سادگی می‌توان ماتریس کواریانس برآوردگر استوار مبتنی بر شبیه‌سازی،  $C$ ، را محاسبه نمود.

<sup>24</sup> Conditional Maximum Likelihood

برای تقریب بهتر مدل VARMA وارون پذیر، مرتبه مدل VAR یعنی  $r$  را باید بزرگ در نظر گرفت (Gourieroux & Monfort, 1996). البته افزایش  $r$  تا حدودی باعث افزایش کارایی برآوردگر مبتنی بر شبیه‌سازی می‌گردد. برای انتخاب مناسب  $r$ ، از معیار اطلاع آکائیک (AIK) می‌توان استفاده نمود.

##### ۵- شبیه‌سازی عملکرد برآوردگر استوار مبتنی بر شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد برآوردگر استوار مبتنی بر شبیه‌سازی<sup>۲۵</sup> (RSB) را روی مدل‌های VARMA و VMA بررسی می‌کنیم. برای این منظور داده‌هایی را از دو مدل

$$\Theta = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ و } \Phi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

VMA(1) با پارامتر  $\Theta$  و VARMA(1,1) با پارامترهای  $\Theta$  و  $\Phi$

شبیه‌سازی کردیم. برای مانایی و وارون‌پذیری مدل‌ها، پارامترها با قدرمطلق مقادیر ویژه کمتر از یک در نظر گرفته شده‌اند. ماتریس کواریانس خطاها هم همانی است. در مطالعات شبیه‌سازی با دیگر مقادیر پارامترها هم نتایج مشابه این بخش به دست می‌آید که در اینجا ارایه نشده است. البته برای استفاده از روش مبتنی بر شبیه‌سازی و انجام پیش‌بینی، برقراری فروض مانایی و وارون‌پذیری مدل ضروری است.

روش دیگر برآورد مدل VARMA برآورد ماکسیمم درست‌نمایی شرطی (CMLE) است. توزیع مجانبی این برآوردگر، برای باقیمانده‌های نرمال، مانند توزیع مجانبی برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی می‌باشد (Ben et al., 1999). بنابراین برآوردگر CMLE به صورت مجانبی کارا بوده و عملکرد برآوردگر RSB را می‌توان با آن مقایسه نمود. در ادامه، این مقایسه را در داده‌های با نقاط دورافتاده و بدون نقاط دورافتاده انجام می‌دهیم. در داده‌های با نقطه دورافتاده، ابتدا داده‌ها از مدل‌های VMA(1) و VARMA(1,1) شبیه‌سازی شده سپس ۰/۰۵ درصد این داده‌ها با اضافه کردن مقدار  $(5,5) = \omega$ ، اندازه اثر نقطه دورافتاده، آلوده شده‌اند. این آلودگی برای نقاط داده با فاصله‌های زمانی مساوی انجام گرفت. در شبیه‌سازی دو اندازه‌ی نمونه  $T = 200$  و  $T = 400$  استفاده گردید. در مرحله ۲ برآورد RSB هم،  $n = 50$  در نظر گرفته شد. برای تقریب خوب مدل‌های

<sup>25</sup> Robust Simulation-Based

VARMA و VMA، مرتبه مدل VAR کمکی برابر  $r = 10$  استفاده شد. توابع  $\rho_1$  و  $\rho_2$  هم از خانواده مربعی توکی<sup>۲۶</sup> در نظر گرفته شد. مقادیر اولیه برآورد BMM با استفاده از روش آشکار سازی TPP<sup>۲۷</sup> به دست آمده و این روش، برآورد پارامترهای مدل VAR را سریع و نسبتاً خوب ارائه می‌کند (Tsay et al., 2000). سپس داده‌های تعدیل شده از طریق مولر و یوهای حاصل می‌شود (Muler & Yohai, 2013). در ادامه برآورد اولیه RSB از طریق برآورد CMLE مدل‌های VARMA(1,1) و MA(1) روی داده‌های تعدیل شده به دست می‌آید. همانند حالت یک متغیره لونا و جنتن، مرحله ۳ را می‌توان برای مدل VARMA(1,1) اصلاح نمود (Luna & Genton, 2001). یعنی اول داده‌های  $D_t = Y_t - \Phi Y_{t-1}$  را به دست آورد و سپس مدل زیر برآورد داد

$$D_t = \sum_{i=1}^{r-1} \tilde{\pi}_i D_{t-i} + U_t$$

بنابراین  $\Lambda^*$  به صورت  $\Pi_1^* = \Phi + \tilde{\pi}_1$ ,  $\Pi_2^* = \tilde{\pi}_2 - \tilde{\pi}_1 \Phi$ ,  $\Pi_3^* = \tilde{\pi}_3 - \tilde{\pi}_2 \Phi$ , ...،  $\Pi_r^* = -\tilde{\pi}_{r-1} \Phi$  برآورد می‌شود. این کار باعث تسریع مراحل ۳ و ۴ شده و همگرایی سریع‌تر اتفاق می‌افتد.

عملکرد برآوردگرهای RSB و CMLE در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است. در این دو جدول، میانگین مربع خطای (MSE) برآوردگرها در نمونه‌های شبیه سازی شده برای دو روش محاسبه شده است. کارایی (EFF) هم با تقسیم MSE برآوردگر CMLE بر MSE برآوردگر RSB به دست آمده است. در هر دو مدل برای داده‌های بدون دورافتاده، کارایی تقریباً بین  $0/7 - 0/6$  می‌باشد. اما وقتی  $0/5$  داده‌ها به نقاط دورافتاده آلوده می‌شود، MSE برآوردگر CMLE بزرگتر می‌شود. در این حالت، برآوردگر RSB نسبت به CMLE کارا تر می‌باشد. در واقع CMLE نسبت به وجود نقاط دورافتاده حساس می‌باشد. حتی این برآوردگر در بعضی از داده‌های شبیه سازی شده آلوده مخصوصاً برای حجم نمونه  $T = 200$  همگرا نمی‌شود و ما آن‌ها را از نتایج جدول ۱ حذف

<sup>26</sup> Family Bi-square Tukeye's

<sup>27</sup> Tsay, Pena & Pankratz.

کرده‌ایم. همچنین برای عناصر ماتریس کواریانس نیز کارایی برآوردگر RSB نسبت به CMLE بسیار بزرگ بود که در اینجا آورده نشده است. افزایش حجم نمونه  $T$  باعث کاهش MSE در دو مدل و در دو ساختار نقاط دورافتاده شده است. همچنین با افزایش حجم نمونه عملکرد CMLE بهبود یافته ولی باز روش RSB بهتر است.

جدول ۱: مقایسه MSE برای برآوردگرهای CMLE و RSB در مدل VARMA

**Table 1:** MSE comparisons for RSB and CMLE estimators in VARMA model

		بدون دورافتاده			با ۰/۰۵ نقاط دورافتاده		
		CMLE	RSB		CMLE	RSB	
پارامتر	اندازه نمونه	MSE	MSE	EFF	MSE	MSE	EFF
$\Phi_{11}$	$T = 200$	۰/۰۱۳	۰/۰۲۲	۰/۵۹۶	۰/۱۹۱	۰/۰۴۸	۳/۹
	$T = 400$	۰/۰۰۹	۰/۰۱۴	۰/۵۹۴	۰/۰۰۵	۰/۰۲۵	۲/۱۶
$\Phi_{12}$	$T = 200$	۰/۰۱۴۷	۰/۰۲۱	۰/۶۷۶	۰/۰۵۶	۰/۰۲۱	۲/۵۷
	$T = 400$	۰/۰۰۷	۰/۰۱۱	۰/۶۹۳	۰/۰۳۲	۰/۰۱۵	۲/۱۴
$\Phi_{21}$	$T = 200$	۰/۰۱۳۷	۰/۱۶۱	۰/۸۵۱	۱/۲۳۲	۰/۳۱۸	۳/۸۴
	$T = 400$	۰/۰۰۷۸	۰/۱۰۱	۰/۷۶۴	۰/۳۵	۰/۰۹۸	۳/۵۹
$\Phi_{22}$	$T = 200$	۰/۰۸۵	۰/۱۰۸	۰/۷۹۱	۰/۳۹۹	۰/۱۲۲	۳/۳
	$T = 400$	۰/۰۴۳	۰/۰۵۸	۰/۷۴۶	۰/۱۹۷	۰/۰۸	۲/۶
$\Theta_{11}$	$T = 200$	۰/۰۱۱	۰/۰۱۴	۰/۷۶۲	۰/۵۳۴	۰/۰۴۴	۱۱/۷۸
	$T = 400$	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۷۰۶	۰/۳۲۹	۰/۰۱۶	۲۰/۶۸
$\Theta_{12}$	$T = 200$	۰/۰۲۴	۰/۰۳۵	۰/۶۶۹	۰/۰۷۵	۰/۰۳۹	۱/۹۶
	$T = 400$	۰/۰۱۳	۰/۰۱۸	۰/۶۹۶	۰/۰۵۳	۰/۰۲۶	۲/۰۶
$\Theta_{21}$	$T = 200$	۰/۱۳۵	۰/۱۶۲	۰/۸۳۶	۱/۱۲۹	۰/۳۲۵	۳/۴۲
	$T = 400$	۰/۰۸۱	۰/۱۰۶	۰/۷۶	۰/۴۶۸	۰/۱۰۲	۴/۵۵
$\Theta_{22}$	$T = 200$	۰/۰۹۲	۰/۱۱۴	۰/۸۰۷	۰/۳۸۸	۰/۱۴۴	۲/۷۴
	$T = 400$	۰/۰۴۵	۰/۰۵۹	۰/۷۶۴	۰/۲۲	۰/۰۹۴	۲/۳۱

Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
رتال جامع علوم انسانی



جدول ۲: مقایسه MSE برای برآوردهای CMLE و RSB در مدل VMA

Table 2: MSE comparisons for RSB and CMLE estimators in VARMA model

		بدون دورافتاده			با ۰/۰۵ نقاط دورافتاده		
		CMLE	RSB		CMLE	RSB	
پارامتر	اندازه نمونه	MSE	MSE	EFF	MSE	MSE	EFF
$\theta_{11}$	T = ۲۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۴	۰/۶۸	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	۵/۶۵
	T = ۴۰۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۶۹	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۳	۲۰/۳۸
$\theta_{12}$	T = ۲۰۰	۰/۰۰۶	۰/۰۱۶	۰/۳۶	۰/۰۰۹	۰/۰۱۸	۰/۵۷
	T = ۴۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۷	۰/۳۳	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۸۲
$\theta_{21}$	T = ۲۰۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۵	۰/۵۴	۰/۰۳۲	۰/۰۰۷	۴/۷۱۲
	T = ۴۰۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۶۱	۰/۰۲۸	۰/۰۰۳	۱۰/۳
$\theta_{22}$	T = ۲۰۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۸	۰/۶۴	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲	۰/۹۵
	T = ۴۰۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۷۹	۰/۰۰۹	۰/۰۰۴	۲/۲۵

Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

همچنین MSE برای برآوردهای RSB کمی بزرگتر از MSE برای برآوردهای CMLE روی داده‌های تعدیل شده از مدل VAR مولر و یوهای می‌باشد (Muler & Yohai, 2013). اما برای این روش نتایج تئوری مثل توزیع مجانبی ارائه نشده است.

همه برنامه‌های برآورد با استفاده از نرم افزار R انجام شده است. برآوردهای CMLE با دستور VARMA() از بسته MTS و مینیم سازی در مراحل ۱ و ۴ با تابع دستوری spg() از بسته BB- انجام شده است.

## ۶ - داده‌های قیمت طلا و دلار آزاد

داده‌های جمع آوری شده در این تحقیق ۲۴۶ مورد میانگین هفتگی قیمت مثقال طلا و دلار بازار آزاد از تاریخ ۹۲/۰۵/۰۶ تا ۹۷/۰۱/۱۹ بوده که از درگاه <http://www.tgju.org> استخراج شده است. با توجه به عدم وجود داده در هر روز برای هر دو متغیر، میانگین هفتگی هر متغیر بدست آمده است. برای کاهش اثر نقاط دورافتاده ابتدا داده‌ها را استاندارد می‌کنیم. با استفاده از دستور auto.arima از نرم‌افزار R بهترین مدل یک-متغیره برای هر کدام از قیمت‌ها، ARIMA(p=1,d=2,q=3) و ARIMA(p=2,d=2,q=1) بدست آمد. پس برای مدل‌سازی برداری، ابتدا باید تفاضل مرتبه دوم هر دو متغیر را به دست آورد.

نمودار ۱ "داده‌ها" و "تفاضل مرتبه دوم داده‌های استاندارد شده" را نشان داده می‌دهد. با توجه شکل‌های بالایی نمودار ۱ وجود نقاط دورافتاده در سال‌های ۹۴، ۹۶ و اوایل سال ۹۷ مشهود است. این نقاط دورافتاده مربوط به سال (۹۴) انعقاد برجام و سال (۹۶) تغییر دولت یازدهم به دوازدهم بوده که بعد از این تاریخ‌ها، قیمت طلا و دلار دوباره کاهش یافته و افزایش‌های اخیر هم مربوط به تحریم‌های آمریکا می‌باشد. البته روش آشکارسازی چن و لیو<sup>۲۸</sup> هم وجود چندین نقطه دورافتاده مثل داده‌های ۷۴ و ۱۷۹ (سال‌های ۹۴، ۹۶) مربوط به قیمت دلار آزاد و داده‌های آخر (اوایل ۹۷) مربوط به هر دو متغیر را شناسایی می‌کند (Chen & Liu, 1993). پس برای کاهش اثرات بد این نقاط دورافتاده و برآورد صحیح مدل استفاده از روش استوار ضروری به نظر می‌رسد.

### ۶-۱- بررسی مانایی و نرمال بودن داده‌ها

برای آزمون مانایی دو سری جدید تبدیل شده، آزمون‌های ریشه واحد آن‌ها انجام شد و نتایج در جدول ۳ ارائه شده است با توجه به این جدول فرض وجود ریشه واحد تا چهار تاخیر رد شده و هر دو سری مانا هستند.

جدول ۳: آزمون دیکی-فولر افزوده

Table 3: Augmented Dickey-Fuller test

فرض مقابل: سری مربوط به قیمت طلا مانا است.			فرض مقابل: سری مربوط به قیمت دلار مانا است.		
lag	ADF	p.value	lag	ADF	p.value
۰	-۱۹/۹	۰/۰۱	۰	-۲۳	۰/۰۱
۱	-۱۷/۳	۰/۰۱	۱	-۱۹/۹	۰/۰۱
۲	-۱۵	۰/۰۱	۲	-۱۶/۴	۰/۰۱
۳	-۱۳/۴	۰/۰۱	۳	-۱۲/۶	۰/۰۱
۴	-۱۱/۱	۰/۰۱	۴	-۱۱/۳	۰/۰۱

مقدار  $p.value=0/01$  به معنای  $p.value \leq 0/01$  می‌باشد.

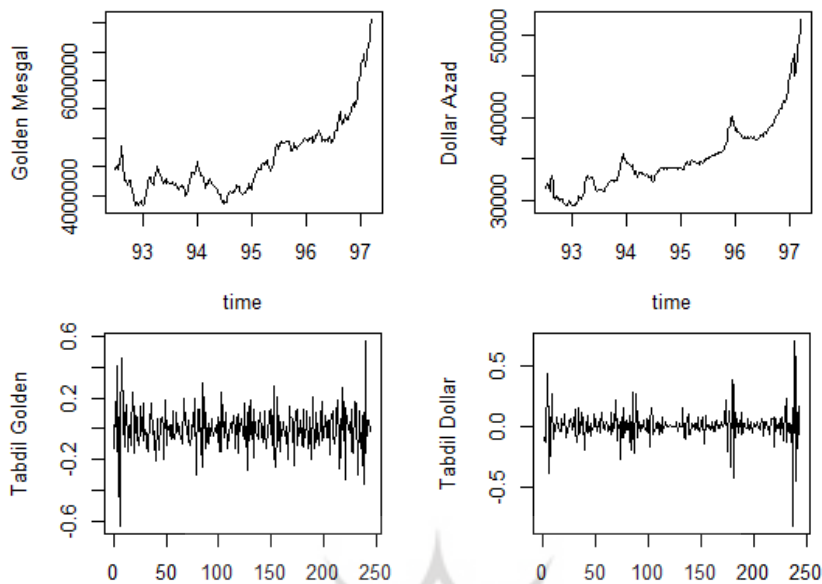
Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی

نمودار ۱: نمودارهای بالایی داده‌های قیمت طلا و دلار آزاد از تاریخ ۹۲/۰۵/۰۶ تا ۹۷/۰۱/۱۹ و نمودارهای پایینی تفاضل‌گیری مرتبه دوم استاندارد شده این داده‌ها.

**Figure 1:** Top figures are Gold and free Dollar data from 27 June 2013 till 8 April 2018 and down figures are second-order difference of standardized of these data.



مأخذ داده‌ها: سایت <http://www.tgju.org>

Data source: <http://www.tgju.org>

برای تعیین مرتبه‌های  $p$  و  $q$ ، برازش استوار مدل  $VARMA(p,q)$  را با اندازه‌های مختلف  $p$  و  $q$  به‌دست می‌آوریم. با تعیین کمترین مقدار آکائیک، مدل  $VARMA(1,1)$  به‌دست می‌آید. البته، برای همه  $p$  و  $q$  های امتحان شده، مقدار آکائیک روش استوار کمتر از CMLE بود. برای  $p=1$  و  $q=1$  واریانس خطاهای مربوط به طلا و دلار به ترتیب ۳۸ و ۳۰ درصد کاهش را در روش استوار نسبت به روش CMLE نشان می‌دهد. همچنین در برآورد CMLE مدل  $VARMA(1,1)$  روی این داده‌ها، انحراف معیار برآورد  $\Theta_{12}$  به‌دست نمی‌آید.

برای آزمون نرمال بودن خطاها، آزمون چند متغیره هند-ذیرکلر<sup>۲۹</sup> به کار رفت (Henze & Zirkler, 1990). این آزمون از ضریب چولگی و کشیدگی استفاده کرده و با دستور (mvn) از بسته MVN نرم افزار R بدست می‌آید. نتایج این

<sup>29</sup> Henze and Zirkler

آزمون در جدول ۴ نشان می‌دهد که در روش استوار، خطاهای مدل VARMA(1,1) برای دو متغیر به صورت چند متغیره نرمال هستند.

جدول ۴: آزمون چند متغیره هند-ذیرکلر برای نرمال بودن خطاها

Table 4: Multivariate Henze-Zirkler test for normality of errors

فرض صفر: خطاها دارای توزیع نرمال هستند. فرض مقابل: خطاها دارای توزیع نرمال نیستند.			
\$multivariateNormality			
TEST	Statistic	p value	Result
چولگی	۴/۲۵۵	۰/۳۷۲	YES
کشیدگی	۰/۴۴۴	۰/۶۵۷	YES

Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

جدول ۵: برآوردهای استوار پارامترهای مدل VARMA(1,1)، انحراف معیار و آزمون t برای داده‌های قیمت طلا و دلار آزاد

Table 5: Robust estimates of parameters of VARMA(1,1) model, standard error and t-test for Gold and free Dollar data

پارامتر	$\theta_{22}$	$\theta_{12}$	$\theta_{21}$	$\theta_{11}$	$\Phi_{22}$	$\Phi_{12}$	$\Phi_{21}$	$\Phi_{11}$
برآورد	۰/۹۹	۰/۰۸۵	-۰/۰۷۳	۰/۸۴۶	۰/۲۵۵	-۰/۰۳۴	۰-۰/۰۲۱	۰/۳۲
انحراف معیار	۰/۰۳۹	۰/۰۴۳	۰/۱۵۷	۰/۰۸۸	۰/۰۸۵	۰/۰۸	۰/۱۱۷	۰/۱
مقدار t	۳۴/۳۱۵*	۲*	-۰/۴۶۴	۹/۶۵*	۲/۹۹*	-۰/۴۲۲	-۰/۱۷۷	۳/۱۶*

\* دارها در سطح ۰/۹۵ معنی‌دار هستند.

Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

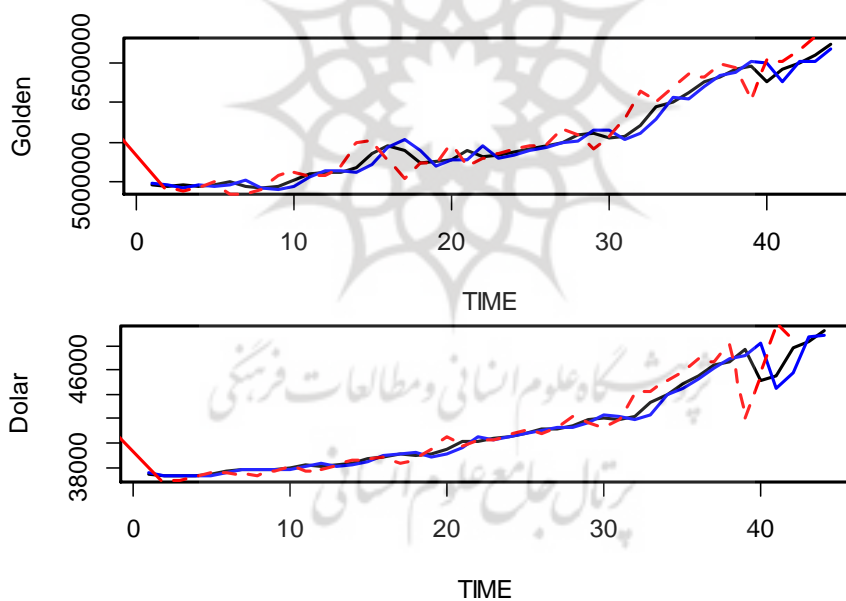
نتایج برآورد استوار پارامترهای مدل VARMA(1,1) همراه با بررسی معنی‌داری آنها برای این داده‌ها در جدول ۵ ارائه شده است. با توجه به این جدول، قیمت طلا به‌وسیله قیمت طلای هفته قبل و نوسانات (خطاهای) طلا و دلار هفته قبل پیش‌بینی می‌شود. همچنین، قیمت دلار هم به‌وسیله قیمت دلار هفته قبل و نوسانات (خطاهای) دلار هفته قبل پیش‌بینی می‌شود. بنابراین، مدل برازش شده VARMA(1,1) به صورت ماتریسی است که برای تبدیل داده‌ها در این مدل، ابتدا آنها را استاندارد کرده و سپس تفاضل مرتبه دوم آنها را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} \text{تبدیل شده طلا} \\ \text{تبدیل شده دلار} \end{bmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.255 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{تبدیل شده طلا} \\ \text{تبدیل شده دلار} \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \text{خطا}_t \\ \text{خطا}_t \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0.846 & 0.085 \\ 0 & 0.991 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{خطا}_{t-1} \\ \text{خطا}_{t-1} \end{bmatrix}$$

از سوی دیگر، مدل‌بندی با روشی بهتر است که پیش‌بینی‌های بهتری انجام دهد. به همین علت، پیش‌بینی یک-گام درون نمونه‌ای با استفاده از روش RSB و CMLE برای داده‌های ۲۰۱ تا ۲۴۶ انجام شد. این پیش‌بینی، برای روش RSB با استفاده از نمایش اتورگر سیو مدل VARMA(1,1) برآورد شده‌ی بالا به دست می‌آید. برای روش CMLE، دستور VARMAPred این پیش‌بینی را انجام می‌دهد. نمودار ۲ نشان می‌دهد که پیش‌بینی‌های روش RSB به مقادیر واقعی داده نزدیک‌تر می‌باشد.

نمودار ۲: داده‌های واقعی قیمت طلا و ارز آزاد —، پیش‌بینی‌های روش RSB — و پیش‌بینی‌های روش CMLE - - - برای ۴۶ داده آخر این دو متغیر.

**Figure 2:** The Gold and free Dollar data —, the forecasts of RSB method — and the forecasts of CMLE method - - - for the 46 end data points of two variables.



Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

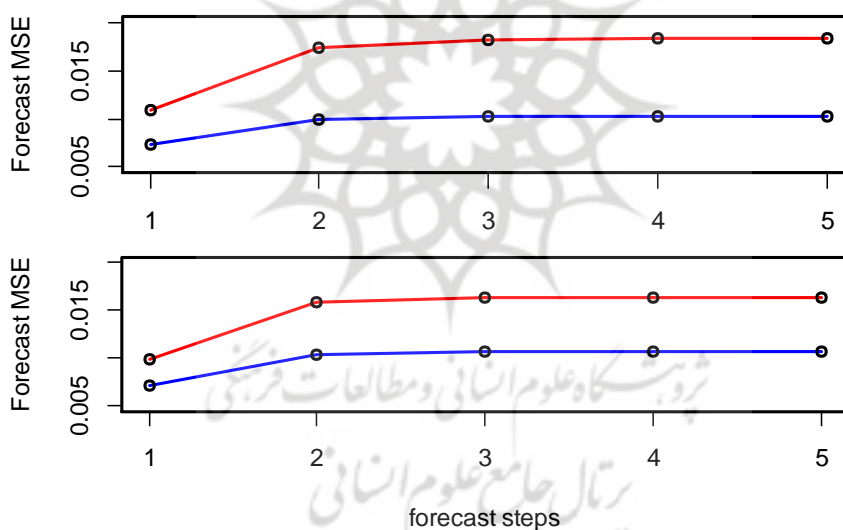
برای مقایسه دو روش، ماتریس واریانس پیش‌بینی‌های (برون نمونه‌ای) این دو روش را هم می‌توان محاسبه نمود. واریانس پیش‌بینی  $Y_{t+h}$  با استفاده از مشاهدات  $\{Y_s | S \leq t\}$  برابر است با

$$\Sigma(h) = E[(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h})(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h})'] = \sum_{i=0}^{h-1} \Psi_i \Sigma \Psi_i'$$

که  $\Sigma$  ماتریس کواریانس باقیمانده‌ها و  $\Psi_i$ ها ضرایب نمایش میانگین متحرک برداری مدل VARMA هستند (Lutkepohl, 2006). با جایگذاری مقادیر برآورد شده مدل، برآورد این واریانس به‌دست می‌آید. روش RSB با برآورد کمتر واریانس‌های باقیمانده‌ها، واریانس‌های پیش‌بینی کمتری را نسبت به CMLE ارائه می‌دهد. میزان کاهش این واریانس‌ها برای گام اول پیش‌بینی طلا و دلار به ترتیب ۳۸ و ۳۰ درصد به‌دست می‌آید. نمودار ۳، کمتر بودن این واریانس را در روش RSB برای ۵-گام ( $h = 1, \dots, 5$ ) نشان می‌دهد.

**نمودار ۳:** مقایسه کواریانس پیش‌بینی ۵-گام برون نمونه‌ای برای دو برآوردگر CMLE — و برآوردگر RSB — (نمودار بالا برای طلا و پایین دلار آزاد)

**Figure 3:** Comparison of forecasts covariances in 5-steps for CMLE estimators — and RSB estimators — (up figure for Golden and down for free Dollar)



Source: Author's Computation

مأخذ: محاسبات تحقیق

## ۷ - نتیجه گیری

در روش مبتنی بر شبیه‌سازی، برآورد استوار مدل VARMA به کمک برآورد استوار مدل VAR به‌دست می‌آید. برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی دارای توزیع مجانبی نرمال است. مطالعات شبیه‌سازی شده روی داده‌های آلوده شده نشان داد که MSE این برآوردگر استوار نسبت به CMLE کمتر می‌باشد. البته روی داده‌های بدون نقاط دورافتاده، MSE این برآوردگر کمی بیشتر از CMLE بوده (نسبت MSEها بین  $0/7 - 0/6$ ) که برای یک برآوردگر استوار قابل قبول می‌باشد.

استفاده از روش استوار مبتنی بر شبیه‌سازی مدل VARMA برای داده‌های قیمت طلا و دلار آزاد، کاهش ۳۸ و ۳۰ درصدی واریانس خطاها را باعث می‌شود. همچنین با مقایسه پیش‌بینی‌های دو برآورد استوار مبتنی بر شبیه‌سازی و ماکسیمم در ستنمایی شرطی، پیش‌بینی بهتر درون نمونه‌ای و خطای کمتر برون نمونه‌ای روش مبتنی بر شبیه‌سازی نشان داده شد.

با توجه به مدل برداری برازش شده، پیش‌بینی قیمت طلای هر هفته با استفاده از قیمت طلای هفته قبل و نوسانات (خطاهای) طلا و دلار هفته قبل بدست می‌آید. همچنین، پیش‌بینی قیمت دلار هر هفته به وسیله قیمت دلار هفته قبل و نوسانات (خطاهای) دلار هفته قبل انجام می‌شود.

داده‌های اقتصادی، اغلب دارای نقاط دورافتاده می‌باشند. بنابراین روش استوار مبتنی بر شبیه‌سازی را می‌توان در دیگر داده‌های اقتصادی هم به کار برد. همچنین با توجه به بررسی‌های انجام شده، فقط یک برآورد استوار بن و دیگران برای مدل VARMA وجود دارد (Ben et al. 1999). بنابراین لزوم تحقیق بیشتر برای یافتن برآوردهای استوار بهتر این مدل ضروری به نظر می‌رسد.

## قدردانی

از داوران محترم بابت پیشنهادات ارزنده شان در بهبود این مقاله تشکر می‌کنیم.

## تضاد منافع

نویسندگان هیچ تضاد منافع را اعلام نمی‌کنند.

## Acknowledgments

We thank the referees for comments that greatly improved the manuscript.

## Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

## References

- Ben, M.G., Martinez, E.J., & Yohai, V.J. (1999). Robust Estimation in Vector Autoregressive Moving-Average Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, 20(4), 381-399.
- Ben, M.G., Villar, A.J., & Yohai, V.J. (2001). Robust Estimation in Vector Autoregressive Models Based on a Robust Scale. *Estadística*, 53, 397-434.
- Brockwell, P.J., & Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Chen, C., & Liu, L. (1993). Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 284-297.
- Croux, C., & Joossens, K. (2008). Robust Estimation of the Vector Autoregressive Model by a Least Trimmed Squares Procedure. In: *COMPSTAT 2008: Proceedings in Computational Statistics*, 489-501.
- Delavari, M. & Roshani, B.N. (2012). Investigating Factors Affecting the Future Volatility of Gold Coin Prices. *Financial Economy (Financial Economy and Development)*, 6(19), 29-58. in Persian.
- Ehsanifar, M., & Rasi, R.E. (2015). Forecasting Currency Exchange Rate in Capital Market using Autoregressive Moving Average Regression and Neural Network Models (Case Study: Australian Dollar, Canadian Dollar, Japanese Yen and British Pound). *Financial Knowledge of Securities Analysis*, 8(27), 35-51. in Persian.
- Gouriéroux, C., Monfort, A., & Renault, A.E. (1993). Indirect Inference. *Journal of Applied Econometrics*, 8, 85-118.
- Gouriéroux, C., & Monfort, A. (1996). *Simulation-Based Econometric Methods*. Oxford: Oxford University Press.
- Henze, N., & Zirkler, B. (1990). A Class of Invariant Consistent Tests for Multivariate Normality. *Communications in Statistics-Theory and Method*, 19(10), 3595-3618.
- Hosseinioun, N.S., Behname, M, & Ebrahimi S.T. (2016). Volatility Transmission of the Rate of Returns in Iranian Stock, Gold and Foreign Currency Markets. *Iranian Journal of Economic Research*, 21(66), 123-150. in Persian.
- Hosseini, S.S., & Rezai, A. (2017). Forecasting the Official Exchange Rate in Iran using ARIMA Auto Regression Model with Intervention



- Factors and Comparison with Random Step Model. *New Economy And Trade*, 12(1), 51-80. in Persian.
- Huber, P. (1981). *Robust Statistics*. Wiley, New York.
  - Jahanbin, G. (2012). *Detection of Outliers in ARMA Models* (Unpublished Master's thesis), Department of Statistics, College of Science, Shiraz university. in Persian.
  - Keshideh, M.D., & Asl, N.M. (2011). Introducing FOREX Market and Identify Factors in Forecasting Exchange Rates in Iran. *Journal of Financial Economics (Financial Economics and Development)* , 5(14), 138-161. in Persian.
  - Khashai, M., & Bijari, M. (2008). Gold Price Forecasting using Combined Models of Classic Autoregressive Integrated Moving Average Model with Fuzzy Logic. *Journal of Isfahan University (Humanities)*, 3(31), 151-162. in Persian.
  - Li, W.K., & Hui, Y.V. (1989). Robust Multiple Time Series Modelling. *Biometrika*, 76, 309-315.
  - Luna, X., & Genton, M.G. (2001). Robust Simulation-Based Estimation of ARMA Models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 10, 370-387.
  - Lutkepohl, H. (2006). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin and Heidelberg: Springer.
  - Muler, N., & Yohai, V.J. (2013). Robust Estimation for Vector Autoregressive Models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 65, 68-79.
  - Nezhad, M.Z., Majidi, A.F., & Rezaei, R. (2009). Forecasting Exchange Rate with Artificial Neural Network (ANN) and Autoregressive Integrated Moving Average Process (ARIMA). *Journal of Quantitative Economics (Quarterly Journal of Economics Review)*, 5(4), 107-130. in Persian.
  - Plakanadaras, V. (2015). *Forecasting Financial Time Series with Machin Learning Techniques* (Unpublished Doctoral Dissertation), Department of Economics, Democritus University of Thrace, Greece.
  - Shirazi, H., & Nasrollahi, K. (2014). Monetary Models and Exchange Rate Forecast in Iran: from theory to empirical evidences. *Quarterly Journal of Fiscal and Economic Policies*, 1(4), 5-24. in Persian.
  - Smith, A.A. (1993). Estimating Nonlinear Time Series Models using Simulated Vector Autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, 8, S63-S84.

- Tajalli, N. (2017). *Forecasting Gold Price Fluctuations using ANN-GARCH Combined Model* (Unpublished Master's thesis), Management Group, Faculty of Economics, Management and Commerce, Tabriz University. in Persian.
- Tehrani, R., & Khosroshahi, S.A. (2017). Fluctuation Transfer and the Interaction of Stock Markets, Currency and Gold. *Financial Management Perspective*, 7(18), 9-31. in Persian.
- Tsay, R., Pena, D., & Pankratz, A. (2000). Outliers in Multivariate Time Series. *Biometrika*, 87, 789-804.
- Ursu, E., & Péreau, J-C. (2014). Robust Modelling of Periodic Vector Autoregressive Time Series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 155, 93-106.
- Yarmohammadi, M., & Mahmoudvand, R. (2016). Exchange Rate Prediction using Singular Spectrum Analysis. *Quarterly Journal of Applied Economics Studies in Iran*, 5(18), 133-146. in Persian.
- Yohai, V.J. (1987). High Breakdown Point and High Efficiency Estimates for Regression. *Annals of Statistics*, 15, 642-656.
- Zarei, M. (2017). *Gold Price Forecasting using ANN, ANFIS and SVM Comparison Methods* (Unpublished Master's thesis), management Group, Faculty of Economics, Management and Commerce, Tabriz University. in Persian.



© 2020 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
رتال جامع علوم انسانی