

### مقدمه‌ایی بر باتری های کوانتومی بسته

سیدنوید الیاسی<sup>۱</sup>

پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۱۲

دریافت: ۱۴۰۲/۱/۱۹

### چکیده

در چندسال اخیر، فناوری های کوانتومی در سرتاسر دنیا پیشرفت های چشمگیری داشته است و پژوهشگران برای ارتقاء آنها تحقیقات بسیار زیادی انجام داده‌اند. در این میان، باتری های کوانتومی از این قاعده مستثنی نیستند. باتری‌هایی که در لوازم الکترونیکی وجود دارند عمل ذخیره سازی انرژی را بر اساس فرایندهای الکتروشیمیایی انجام می‌دهند و مقیاس آن‌ها به صورت ماکروسکوپی است. اما می‌توان در سطح میکروسکوپی، سامانه‌هایی را معرفی کرد که انرژی را برای ما ذخیره کرده و در صورت نیاز از آن کار استخراج کنیم. در بررسی این سامانه‌ها، مفاهیمی از قبیل ارگوتروپی، توان شارژ و پایداری از اهمیت بسیار بالایی برخوردار هستند. در این مقاله، به معرفی باتری های کوانتومی پرداخته و تعاریفی که لازم است به درک کلی از این لوازم داشته باشیم را معرفی خواهیم کرد. در پایان نیز یک با طرح یک مثال از یک باتری کوانتومی، مفاهیم مربوطه را بکار می‌بریم.

**واژگان کلیدی:** باتری کوانتومی، ارگوتروپی، توان شارژ، پایداری.



<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک اپتیک و لیزر دانشگاه کردستان، ایران، [navid.elyasi97@gmail.com](mailto:navid.elyasi97@gmail.com)

## مقدمه

باتری‌ها لوازمی هستند که ما در شبانه‌روز به صورت مستمر با آن‌ها سروکار داریم. در واقع، باتری‌ها وظیفه ذخیره انرژی را بر عهده دارند. ما می‌توانیم آن‌ها را شارژ کرده و در صورت نیاز انرژی ذخیره‌شده در آن را با متصل کردن به یک مصرف‌کننده، تخلیه نماییم. انواع مختلف این نوع از باتری‌ها همچون لیتیوم-یون، لیتیوم-کادمیوم، لیتیوم-پلیمر و انواع دیگر با اشکال مختلف و بر حسب نیازهای متفاوت در طیف وسیعی از لوازم الکترونیکی استفاده شده‌اند. برای هر کدام از این نوع باتری‌ها قطعاً مطالعات نظری و تجربی بسیاری صورت گرفته تا توانستند خود را وارد عرصه صنعت نمایند. باتری‌هایی که به صورت مرسوم از آن‌ها استفاده می‌کنیم، انرژی الکتریکی را به صورت انرژی پتانسیل شیمیایی و با رهیافت‌های متفاوت در خود ذخیره می‌کنند. در مطالعه توسعه این گونه از باتری‌ها، مفاهیمی همچون ظرفیت باتری، پایداری، طول عمر و غیره در مقالات متعدد مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند (پلین و همکاران، ۲۰۲۱).

با پیشرفت مکانیک کوانتومی در حوزه‌های مختلف و تمایل تبدیل علم به عمل و تولید فناوری، پای باتری‌های کوانتومی اولین بار با تعریفی ساده از آن‌ها در سال ۲۰۱۳ به میان کشیده شد. به تعریف اولیه آلیسکی، باتری کوانتومی یک سامانه کوانتوم مکانیکی کوچک است که انرژی در آن به شکل موقت ذخیره شده و با انتقال آن به مصرف‌کننده، می‌توان از آن، کار استخراج کرد (آلیسکی و فانس، ۲۰۱۳). تحقیقات سال‌های اخیر نشان داده است تکنولوژی‌هایی که مکانیک کوانتوم، پایه و اساس آن‌ها است، بسیار بهینه‌تر از نمونه‌های کلاسیکی خود بوده‌اند (دفتر و همکاران، ۲۰۰۳). این اعتقاد نیز وجود دارد که با بررسی باتری‌ها در حوزه مکانیک کوانتومی می‌توان بهره‌وری آن‌ها را افزایش داد. در سال‌های اخیر، مطالعه باتری‌های کوانتومی توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و پژوهشگران بسیاری از جنبه نظری به این موضوع پرداخته‌اند (دل‌مونت و همکاران، ۲۰۲۱). جالب آنکه بخشی از تحقیقات در حوزه باتری‌های کوانتومی، به عرصه عمل نیز وارد شده‌اند (والیکورسا و همکاران، ۲۰۲۲).

دو نوع دیدگاه در رابطه با بررسی باتری‌های کوانتومی وجود دارد. دیدگاه اول بررسی این سامانه به صورت بسته بوده و دیدگاه دوم بررسی آن به صورت باز است. در حالت بسته فرض بر این است که سامانه با جهان اطراف خود هیچ ارتباطی ندارد. بنابراین فرآیند شارژ و تخلیه آن‌ها بدون در نظر گرفتن اتلاف محاسبه می‌شود. اما در مقابل هنگامی که باتری به صورت باز در نظر گرفته می‌شود، در محاسبات اثرات محیط اضافه می‌شود (بروئر، ۲۰۱۲). قابل ذکر است که به علت دشوار بودن این محاسبات، محیط به صورت مدل‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که قابل حل باشند (بروئر و پتروچیونی، ۲۰۰۲). هر باتری کوانتومی دارای یک حالت اولیه  $p$  و یک هامیلتونی  $H$  است. در اینجا، کار قابل استخراج برگشت‌پذیر با استفاده از تحول سامانه به صورت یکانی به دست خواهد آمد. همچنین، هدفی که برای این کار مشخص می‌کنیم، آن است که بتوانیم حداکثر این مقدار را به دست آوریم (حاتمی کمین و همکاران، ۲۰۲۰). در همین راستا، اثبات شده که در برخی از حالت‌ها که باتری در آن قرار گیرد، نمی‌توان از آن کار استخراج نمود که حالت‌های منفعل گذاری می‌شود.

در این مقاله قصد داریم به صورت مروری به بررسی باتری‌های کوانتومی بسته پردازیم. در ابتدا تعاریف مهمی همچون کار کوانتومی، حالت‌های منفعل و ... مورد بررسی قرار خواهند گرفت که خواننده دید نسبتاً کلی و جامعی درباره این بحث داشته باشد. سپس، با طرح یک مثال از یک اتم دوترانه‌ای که به عنوان باتری کوانتومی در نظر گرفته و با جذب دو فوتون شارژ می‌شود، بحث را به اتمام می‌رسانیم.

کار کوانتومی (ارگوتروپی) (۱)

در این بخش، ما حداکثر کار (ارگوتروپی) قابل استخراج از یک سامانه کوانتومی (با محترم شمردن ترمودینامیک کوانتومی) را معرفی می‌کنیم. باتری کوانتومی نیز یک سامانه کوانتومی کوچک بوده که می‌توان از آن، کار استخراج نمود. قطعاً مطالعه حداکثر کار قابل استخراج می‌تواند جهت توصیف بهره‌وری آن مفید واقع شود.



شکل ۱: فرایند استخراج کار از یک باتری کوانتومی به صورت چرخه‌ای حاصل از تغییرات انرژی پتانسیل سامانه ارگوتروپی حداکثر کاری است که می‌توان با استفاده از یک فرآیند چرخه‌ای یکانی، از یک سامانه کوانتومی بدون تغییر در ساختار آن استخراج کرد (اله‌وردیان و همکاران، ۲۰۰۴). ما یک هامیلتونی وابسته به زمان را از سامانه در نظر می‌گیریم که متشکل از هامیلتونی آزاد و یک پتانسیل چرخه‌ای وابسته به زمان است. در تعریف این پتانسیل، شرط زیر روی آن گذاشته می‌شود:

$$\hat{H}(t) = \hat{H} + \hat{V}(t)$$

$$V_{(0)} = 0, V_{(\tau)} = 0 \rightarrow V_{(\tau)} = V_{(\tau)}^\dagger$$

به این معنا که در ابتدا و پایان فرآیند چرخه‌ای استخراج کار، مقدار آن صفر می‌شود. به بیان دیگر، می‌توان این گونه تفسیر کرد که در آغاز و پایان فرایند، سامانه دستخوش تغییر نخواهد شد. تحولات یک سامانه بسته کوانتومی با استفاده از عملگرهای یکانی انجام می‌شوند. در اینجا نیز چون با یک باتری کوانتومی بسته سروکار داریم، می‌توانیم تحول آن را با استفاده از عملگر یکانی زیر برای یک هامیلتونی وابسته به زمان تعریف نماییم:

$$U = \text{Exp}\left\{-i \int_0^\tau dt (H + v(t))\right\}$$

حال می‌توانیم با استفاده از عملگر تحول داده‌شده، ماتریس چگالی سامانه را به راحتی به دست آوریم:

$$\rho_{(\tau)} = U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^\dagger$$

در نتیجه، با استفاده از این رهیافت می‌توانیم کار استخراج شده را بدین صورت تعریف کنیم:

$$W = \text{Tr}(\rho H) - \text{Tr}(\rho_{(\tau)} H)$$

حال می‌توانیم حداکثر کار قابل استخراج از سامانه را به شکل زیر بنویسیم:

$$W_{\max} = \text{Tr}(\rho H) - \min[\text{Tr}(U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^\dagger H)]$$

که به این معادله، ارگوتروپی سامانه یا همان حداکثر کار قابل استخراج در یک فرایند چرخه‌ای یکانی بدون تغییر سامانه گفته می‌شود. در اینجا، عمل کمینه‌گیری بر روی تمامی مجموعه عملگرهای تحول سامانه گرفته می‌شود. جمله ارگوتروپی زمانی به بیشینه مقدار خود خواهد رسید که عملگری از میان مجموعه عملگرهای تحول زمانی انتخاب شود که جمله دوم را کمینه نموده و حالت سامانه را به حال منفعل متناظر با آن هدایت کند. در بخش بعد، به ارائه توضیح‌های دقیق‌تر و قابل‌درک - تری از حالت‌های منفعل خواهیم پرداخت. در واقع، معادله بالا، اختلاف انرژی درونی بین دو حالت اولیه و ثانویه سامانه است. در نتیجه، می‌توان معادله بالا را به شیوه ساده‌تری به شکل زیر بیان کرد:

$$W_{\max} = E_{(0)} - E_{(\tau)} \rightarrow E = \text{Tr}(\rho_{(t)} H) \rightarrow 0 \leq t \leq \tau$$

همان میانگین انرژی درونی باتری کوانتومی است.  $E = \text{Tr}(\rho_{(t)} H)$

حالت‌های منفعل

حالت‌های منفعل<sup>۱</sup>، حالت‌هایی هستند که نمی‌توان از آن‌ها کار استخراج کرد.

قضیه:  $\sigma$  یک حالت منفعل است اگر و فقط اگر:

$$\left[ \begin{aligned} & \left[ \sigma_p, H_0 \right] = 0 \\ & \left\{ \begin{aligned} \sigma_p &= \sum_j^d r_j |\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon_j| \rightarrow r_{j+1} \leq r_j \\ H &= \sum_j^d \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon_j| \rightarrow \varepsilon_{j+1} \geq \varepsilon_j \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

اثبات: برای هر سامانه کوانتومی می‌توانیم یک هامیلتونی و یک ماتریس چگالی در نظر بگیریم، به این صورت که:

$$\begin{aligned} H &= \sum_j^d \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon_j| \\ &= \sum_j^d r_j |r_j\rangle\langle r_j| \end{aligned}$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اگر سامانه در حالت منفعل باشد، به این معناست که نمی‌توان از آن کار استخراج کرد و به باتری به کمترین مقدار انرژی درونی خود دست یافته است. حال با توجه به رابطه ۰ که برای ارگوتروپی یک سامانه بسته طرح شد، می‌بایست جمله دوم را کمینه سازیم. لذا با استفاده از مشتق‌گیری بر روی تمام عملگرهای تحول زمانی سامانه خواهیم داشت:

$$\delta \text{Tr}(U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^\dagger H) = 0$$

با انجام عمل بالا می‌توانیم نقاط اکسترمم آن را پیدا کنیم. حال چون مشتق، عملی خطی است؛ بنابراین، می‌توانیم آن را

وارد کنیم، به این صورت که:

$$\text{Tr}(\delta U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^\dagger H + U_{(\tau)} \rho \delta U_{(\tau)}^\dagger H) = 0$$

<sup>۱</sup> Passive states

حال می‌توانیم تغییرات عملگر یکانی  $U$  را به صورت حاصل ضرب یک عملگر یکانی و یک عملگر پاد الحاقی در نظر بگیریم. آنگاه خواهیم داشت:

$$\delta U = XU \rightarrow X^\dagger = -X$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(XU_{(\tau)}\rho U_{(\tau)}^\dagger H - U_{(\tau)}\rho U_{(\tau)}^\dagger XH) &= \text{Tr}(X\rho_{(\tau)}H - \rho_{(\tau)}XH) \\ &= \text{Tr}(X[\rho_{(\tau)}, H]) = 0 \end{aligned}$$

در اینجا، شرط اول منفعل بودن حالت سامانه به دست آمد. این شرط بدین معناست که بردارهای ویژه ماتریس چگالی و هامیلتونی در پایه‌های انرژی و یکسان باشند اما این شرط به تنهایی حالت‌های اکسترمم را مشخص می‌کند. باین حال، با تعریف شرط دوم به صورت زیر، حالت کمینه ما مشخص خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sum_j^d r_j |\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon_j| \rightarrow r_{j+1} \leq r_j \\ H &= \sum_j^d \varepsilon_j |\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon_j| \rightarrow \varepsilon_{j+1} \geq \varepsilon_j \end{aligned}$$

$$\min \text{Tr}(\sigma_p H) = \sum_j r_j \varepsilon_j$$

چنانچه رابطه بالا را در جمله دوم ارگوتروپی جایگذاری کنیم، جنانچه رابطه بالا را در جمله دوم ارگوتروپی جایگذاری کنیم، این معادله بدین شکل است که با توجه به معادله ۰، بیشترین انرژی در کمترین احتمال، ضرب خواهد شد و برعکس، کمترین ویژه مقدار انرژی در بیشترین احتمال، ضرب خواهد شد. این گزاره همانند این است که باتری طوری تحول یابد که انرژی باتری را به حداقل رسیده و بیشترین کار را می‌توانیم استخراج کنیم. فهم حالت‌های منفعل از اهمیت بسزایی برخوردار است چراکه می‌توان حالت‌هایی را که (به اصطلاح) باتری خالی است، تعریف نمود. هنگامی باتری در یک حالت منفعل قرار می‌گیرد، به این معناست که باتری خالی شده و در نتیجه نمی‌توان از آن، کار استخراج کرد. در مقابل حالت‌های منفعل، حالت‌های فعال وجود دارند که می‌توان از این حالت‌ها کار استخراج کرد (بایندر و همکاران، ۲۰۱۵).

محدودیت استخراج کار

در این قسمت سعی می‌کنیم یک حد بالا و حد پایین جهت حداکثر کار قابل استخراج ارائه دهیم تا چهارچوب بندی ما کامل تر شود. این کار را با مقایسه انرژی دو حالت منفعل  $\sigma_p$  و حالت گیبس کانونیک  $\omega_\beta$  که آنتروپی آن‌ها با  $\hat{\rho}$  برابر است، انجام می‌دهیم. ماتریس چگالی یک حالت گیبس کانونیک به شکل زیر داده می‌شود:

$$= \beta = \frac{\exp(\beta H)}{Z}$$

$$= \frac{1}{KT}$$

که در آن،  $K$ ، ثابت بولتزمن و  $T$ ، دما برحسب درجه کلونین است. همچنین،

$Z = \text{Tr}(\exp(-\beta H))$  است که همان تابع پارش سامانه است. برای هر ماتریس چگالی  $\rho$  که بر روی فضای هیلبرت

سامانه کوانتومی مشخصی تعریف شود، یک دما یا همان  $\beta$  منحصر به فردی وجود دارد که  $S(\rho) = S(\omega_\beta)$  است. باید

توجه داشت که رابطه بین  $\rho$  و  $\beta$  کاملاً خطی است.

بر اساس اصل وردشی مکانیک آماری، ماتریس چگالی حالت گیس کانونیک، انرژی آزاد را که به صورت

$$F - U_{(p)} - TS_{(p)}$$

تعریف می‌شود، کمینه می‌کند (آلیسکی و فانس، ۲۰۱۳):

$$\text{Tr}(\rho H) - TS(\rho) \geq \text{Tr}(\omega_{\beta} H) - TS(\omega_{\beta})$$

بر اساس اینکه  $S(\rho) = S(\omega_{\beta})$  است، به صورت کلی خواهیم داشت:

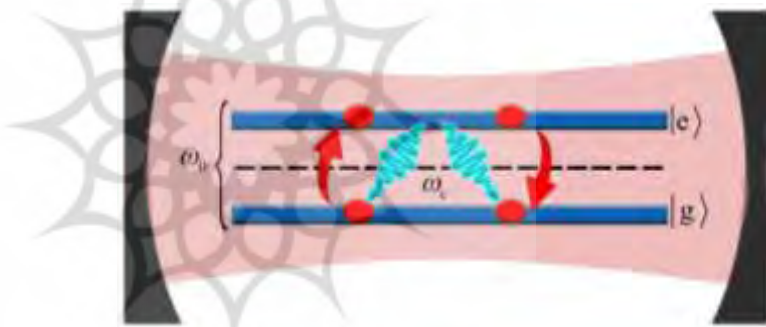
$$\text{Tr}(\rho H) \geq \text{Tr}(\sigma_p H) \geq \text{Tr}(\omega_{\beta} H)$$

که با توجه به رابطه بالا می‌توانیم حد بالایی را برای حداکثر کار قابل استخراج از یک سامانه کوانتومی تعریف کنیم:

$$W_{\max} \leq \text{Tr}(\rho H) - \text{Tr}(\omega_{\beta} H)$$

مثال باتری کوانتومی

در این بخش می‌خواهیم یک مثال از باتری کوانتومی بسته را ارائه دهیم. در این مثال، ما باتری را یک سامانه دو ترازه در نظر می‌گیریم که با ثابت  $\lambda$  به یک کاواک جفت شده است (دلنونه و همکاران، ۲۰۲۱). این سامانه را می‌توان در حالت گسترده تر نیز به شکل  $n$  تایی نیز در نظر گرفت تا به صورت موازی شارژر شوند. در این مدل، اتم دو ترازه ما همانند باتری عمل کرده که با جذب ذو فوتون شارژ شده، و کاواک حکم شارژر را دارد. به دلیل اینکه در اینجا با برهم کنش ذره و ماده سروکار داریم؛ بنابراین، می‌توانیم از مدل جینز-کامینگز برای توصیف این سامانه استفاده کنیم.



شکل ۲: نمایی از یک اتم دو ترازه که در داخل یک کاواک قرار گرفته است. در اینجا اتم دو ترازه باتری بوده و کاواک شارژر می‌باشد.

بنابراین هامیلتونی که می‌تواند که سامانه را توصیف کند به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \frac{\omega_a}{2} \cdot z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \theta(t) \lambda (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \sigma_x$$

که در آن،  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^\dagger$  عملگرهای خلق و فنا ی بوزونی و همچنین،  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  عملگرهای پائولی هستند. در ادامه نیز  $\omega_c$  و  $\omega_a$  به ترتیب فرکانس‌های کاواک و اتم هستند. باید به این نکته توجه داشت که ضریب  $\theta(t)$  همانند یک تابع پله‌ای است، به این صورت که در  $t < 0$  مقدار آن برابر صفر خواهد بود و فرایند برهم کنش ماده و نور متوقف می‌شود اما در زمان  $t \geq 0$  سازوکار برهم کنش نور و ماده وصل شده و مقدار آن برابر یک خواهد شد.

حال با استفاده از تقریب موج چرخان، معادله **Error! Reference source not found.** را باز کرده و جملاتی را که احتمالات بسیار کمی دارند، در طول محاسبات حذف خواهیم کرد. در ابتدا نیز این حد را در نظر می‌گیریم که ثابت

جفت‌شدگی بین اتم و کاواک بسیار کوچک‌تر از فرکانس‌های اتمی و کاواک باشد. با در نظر گرفتن همه گزاره‌های بالا، هامیلتونی سامانه برابر خواهد بود با:

$$H = \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \theta(t) \lambda (\sigma_+ \hat{a}^{\dagger 2} + \sigma_- \hat{a}^2)$$

در این معادله، قسمت اول مربوط به هامیلتونی باتری، قسمت دوم مربوط به کاواک و قسمت سوم نیز بیانگر برهم‌کنش بین اتم و کاواک است. در معادله بالا نیز  $\sigma_{\pm}$  برابر است با:

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_x \pm i \sigma_y}{2}$$

در ادامه بر روی حالتی تمرکز خواهیم کرد که اتم و کاواک در حالت رزونانس باشند؛ یعنی  $\omega_a = 2\omega_c$  باشد. در این حالت، تمام انرژی مربوط به دو فوتون می‌تواند به اتم انتقال پیدا کند. این شرط باعث می‌شود که باتری با بهترین حالت خود کار کند.

در ابتدا فرض می‌کنیم باتری و شارژر در حالت ضربی باشد، به این معنا که در ابتدا درهم‌تنیدگی بین باتری و شارژر وجود ندارد. با این شرایط می‌توانیم حالت اولیه را در زمان  $t = 0$  به صورت زیر بنویسیم:

$$|\alpha(0)\rangle \otimes |g\rangle \otimes \sum_n |n\rangle$$

قسمت اول معادله بالا، بیانگر حالت باتری است در حالی که قسمت دوم نشان‌دهنده حالت شارژر است. به بیان دیگر، فضای هیلبرت سامانه متشکل از باتری و شارژر را به صورت  $I_s \otimes I_B \otimes I_C$  در نظر گرفته‌ایم.

حال، وقتی می‌خواهیم پارامترهای مهم از جمله ارگوتروپی، توان شارژ، افت و خیز انرژی ذخیره‌شده و ... را به دست آوریم، می‌توانیم کاواک را در حالات مختلف عددی ۱، همدوس ۲ و چلانده ۳ در نظر بگیریم که بررسی این حالت‌ها برای به دست آوردن پارامترهای ذکر شده می‌تواند نتایج جالبی را به همراه داشته باشد.

در معادله ۰،  $\alpha_n$  دامنه احتمالات است که برای هر یک از حالت‌های مختلف کاواک متفاوت خواهد بود. دامنه احتمال برای هر سه حالت گفته شده برابر است با (لودن، ۲۰۰۰):

$$\delta_n^{(F)} = \delta_{n,N}$$

$$\alpha_n^{(C)} = e^{-\frac{N}{2}} \frac{N^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}$$

$$\alpha_n^{(S)} = \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{n!}}{n!} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{N+1}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

در رابطه بالا تاکید می‌شود که  $N$  برای حالت عددی تعداد دقیق فوتون‌های درون کاواک می‌باشد. این در حالی است که برای دو حالت دیگر میانگین تعداد فوتون‌های داخل کاواک می‌باشد. در این قسمت برای آنکه بهره‌وری باتری را مورد

- 
- ۱ Fock
  - ۲ Coherent
  - ۳ Squeezed

بررسی قرار دهیم، باید تحول زمانی را آن را محاسبه کنیم. برای این کار، هامیلتونی سامانه را به صورت ماتریسی و در پایه های فضای هیلبرت سامانه می نویسیم. با در نظر گرفتن پایه های فضا به صورت  $|g\rangle|n\rangle$  و  $|e\rangle|n-2\rangle$ ، می توانیم فرم ماتریسی هامیلتونی سامانه را به صورت زیر بنویسیم:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_a}{2}(n-1) & \lambda\sqrt{n(n-1)} \\ \lambda\sqrt{n(n-1)} & \frac{\omega_a}{2}(n-1) \end{pmatrix}$$

در این مرحله می خواهیم ویژه مقادیر و ویژه حالت های هامیلتونی سامانه را بر اساس ماتریس بالا محاسبه کنیم. هدف از انجام این کار، همان گونه که در ابتدای این بخش هم اشاره شد، به دست آوردن تحول سامانه است. برای به دست آوردن ویژه مقادیر، مقدار ثابت را از عناصر قطر اصلی کم خواهیم کرد، سپس دترمینان ماتریس را برابر صفر قرار می دهیم تا ویژه-مقادیر آن به دست آید. با این کار خواهیم داشت با انجام محاسبات ساده ریاضی، ویژه مقادیر به دست خواهند آمد:

$$E_{\pm}^{(n)} = \frac{\omega_a}{2}(n-1) \pm \lambda\sqrt{n(n-1)}$$

همچنین، جهت به دست آوردن ویژه بردارهای متناظر با هر ویژه مقدار، هر ویژه مقدار را در معادله ویژه بردار و ویژه مقادیری قرار می دهیم. که با انجام محاسبات برای هر ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار به دست آمده، خواهیم داشت:

$$|e_{\pm}^{(n)}\rangle = \frac{|g\rangle \otimes |n\rangle \pm |e\rangle \otimes |n-2\rangle}{\sqrt{2}}$$

حال در این قسمت می توانیم تحول سامانه را مورد بررسی قرار دهیم. در ابتدا هم اشاره شد که در این قسمت با یک باتری کوانتومی بسته روبه رو هستیم. در وضعیت کلی، حالت سامانه های بسته به صورت زیر به وسیله عملگرهای یکانی تحول می یابند:

$$|\psi_{(t)}\rangle = U_{(t,t_0)} |\psi_{(t_0)}\rangle$$

به شرط آنکه هامیلتونی معرف سامانه مستقل از زمان باشد و با خودش جابه جا شود، عملگر تحول زمانی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$U_{(t,t_0)} = e^{-iHt}$$

همان طور که در معادله ۰ حالت اولیه سامانه را تعریف کردیم، می توانیم آن را به صورت زیر بر حسب پایه های انرژی نوشته و سپس عملگر تحول زمانی را روی آن اثر دهیم:

$$|\psi_t\rangle = U_{(t,0)} |\psi_{(0)}\rangle = \sum_n \alpha_n \frac{(e^{-iE_-^{(n)}t} |\psi_-^{(n)}\rangle + e^{-iE_+^{(n)}t} |\psi_+^{(n)}\rangle)}{\sqrt{2}}$$

و در نهایت با جایگذاری ویژه مقادیر متناظر با هر ویژه بردار که در رابطه ۰ بدست آوردیم، خواهیم داشت:

$$|\psi_{(t)}\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i\frac{\omega_a}{2}(n-1)t} \frac{(e^{-i\lambda\sqrt{n(n-1)}t} |\psi_-^{(n)}\rangle + e^{i\lambda\sqrt{n(n-1)}t} |\psi_+^{(n)}\rangle)}{\sqrt{2}}$$

انرژی ذخیره شده در باتری



در این مرحله از محاسبات می‌خواهیم انرژی ذخیره‌شده در باتری را به دست آوریم. به صورت کلی، برای به دست آوردن انرژی ذخیره‌شده در باتری از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

$$E(t) = [\langle \Psi(t) | H_{QB} | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(0) | H_{QB} | \Psi(0) \rangle]$$

در رابطه بالا،  $H_{QB} \sigma \frac{\Omega_a}{2} \sigma_z$  است که برای جملات اول و دوم خواهیم داشت:

$$\langle \Psi(0) | H_{QB} | \Psi(0) \rangle = -\frac{\Omega_a}{2} \sum_n \alpha_n^2$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | H_{QB} | \Psi(t) \rangle &= \frac{\Omega_a}{2} \sum_n \alpha_n^2 \frac{1}{2} (-1+1-1+1+e^{2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}(-1-1)+e^{-2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}(-1-1)) \\ &= -\frac{\Omega_a}{2} \sum_n \alpha_n^2 \frac{(e^{2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t} + e^{-2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t})}{2} = -\frac{\Omega_a}{2} \sum_n \alpha_n^2 \cos(2\lambda\sqrt{n(n-1)}t) \end{aligned}$$

حال اگر دو جمله بالا را با هم جمع کنیم، رابطه نهایی را به شکل زیر برای انرژی ذخیره‌شده در باتری به دست خواهیم آورد:

$$E(t) = \omega_a \sum_n P_n \sin^2(\lambda\sqrt{n(n-1)}t)$$

نکته‌ای که در باتری‌های کوانتومی اهمیت دارد، این است که بتوان در کوتاه‌ترین زمان، حداکثر انرژی را ذخیره کرد.

باین حال، می‌توان حداقل زمان لازم جهت شارژ کامل باتری را در حالت عددی، وقتی که  $\alpha_n^{(F)} = \delta_{n,N}$  است، به صورت زیر به دست آورد:

$$\sin^2(i\lambda\sqrt{n(n-1)}t) = 1$$

$$\lambda\sqrt{n(n-1)}t_E = (k + \frac{1}{2})\pi$$

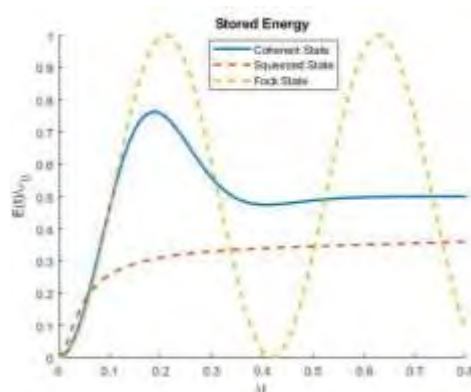
در این صورت، رابطه تنها در شرایطی برقرار خواهد بود که

زمان  $t_E$  که همان حداقل زمان لازم برای رسیدن به شارژ حداکثری است، خواهیم داشت:

$$t_E = \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{\lambda\sqrt{n(n-1)}}$$

در نمودار زیر در حالتی که  $N=8$  است، رفتار انرژی ذخیره‌شده در باتری را نسبت به فرکانس اتمی  $\omega_a$  و در سه حالت

مختلف بیان شده بررسی می‌کنیم.



نمودار ۱: مقایسه انرژی ذخیره شده در باتری در سه حالت مختلف عددی، همدوس و چلانده

طبق نمودار بالا، حالت کامل شارژ تنها در شرایطی امکان پذیر است که حالت کاواک به صورت عددی باشد. در مقابل، حالت همدوس با همان مقدار متوسط تعداد فوتون‌ها می‌تواند به صورت نسبی نیز به انرژی قابل قبولی دست پیدا کند اما در نهایت حالت چلانده نتوانسته نسبت به بقیه حالت‌ها برتری پیدا نموده و از همه آن‌ها وضعیت بدتری در ذخیره کردن انرژی دارد. با این حال، از دو مورد دیگر می‌توانیم پایداری بهتری را مشاهده کنیم.

در مورد تحلیل نمودار بالا نیز می‌توانیم زمان شارژ باتری در هر سه حالت را بررسی کنیم. زمانی که باتری در دو حالت همدوس و عددی قرار گرفته، مدت زمان شارژ آن‌ها را می‌توان همراه با حالت چلانده بررسی کرد. از معادله ۰ برای حالت عددی  $t_E^F \approx 0.21$  و همچنین، برای حالت همدوس این مقدار برابر با  $t_E^C \approx 0.19$  به دست خواهد آمد. در مقابل، در

حالت اسکوییزد، مدت زمانی که باتری می‌تواند به حداکثر شارژ ممکن خود برسد، بیشتر از  $t_E^S \approx 1.53$  خواهد بود.

از بحث بالا می‌توانیم به این نتیجه برسیم که حالت عددی، بهترین گزینه برای حالت اولیه کاواک است. در مقابل، حالت اسکوییزد را داریم که چه از نظر مدت زمان شارژ و چه از نظر میزان شارژ قابل ذخیره در باتری از همه حالت‌های دیگر وضعیت بدتری را دارد.

توان شارژ باتری دو فوتونه

در این قسمت توان شارژ باتری را باز در همان سه حالت یاد شده، بررسی می‌کنیم. همانگونه که گفته شد، توان شارژ در واقع، مشخص می‌کند که یک باتری چقدر می‌تواند سریع شارژ و یا تخلیه شود. بدین صورت که:

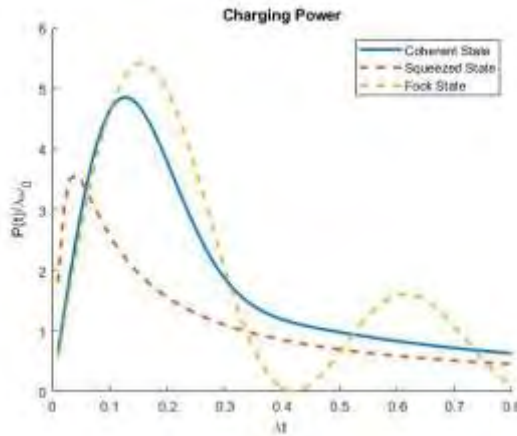
$$P(t) = \frac{E(t)}{t}$$

بر اساس اظهار نظر بالا در مورد توان شارژ، حداکثر این مقدار مد نظر می‌باشد. یعنی به این صورت که:

$$\max_t [P(t)] \equiv P(t_p)$$

که در بالا  $t_p$  نشان دهنده مقدار زمانی است که باتری به حداکثر توان خود رسیده است.

در نمودار زیر، ما  $P(t_p)$  را برای سه حالت مشخص شده بررسی خواهیم کرد. همانطور که نمودار نشان می‌دهد، در ابتدا می‌توانید به این نتیجه برسید که کاواک وقتی در حالت عددی قرار گرفته باشد می‌تواند به حداکثر توان شارژ خود دست یابد و به ترتیب هم همانند انرژی ذخیره شده در باتری، وقتی کاواک در حالت همدوس باشد، توان شارژ آن کمتر از حالت قبل و برای حالت چلانده هم کمتر از حالت همدوس، خواهد بود.



نمودار ۲: مقایسه توان شارژ باتری در سه حالت مختلف عددی، همدوس و چلانده

### ارگوتروپی باتری دو فوتونه

یکی دیگر از سنج‌های مهم برای تعیین بهره‌وری باتری، ارگوتروپی است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، ارگوتروپی یا حداکثر کار قابل استخراج از یک فرایند چرخه‌ای یکانی است. باید به این نکته توجه داشت که مقدار این کمیت با مقدار انرژی ذخیره‌شده در باتری متفاوت است زیرا مقداری از انرژی ذخیره‌شده ممکن است در همبستگی‌های بین شارژر و باتری ذخیره‌شده باشد که قابل استخراج نیست. ما می‌توانیم رابطه حاصل در قسمت ارگوتروپی را جهت حل این مسئله به صورت مؤثر، به شکلی دیگر نیز بنویسیم. اگر فرض کنیم که تجزیه طیفی هامیلتونی سامانه کوانتومی ما به صورت:

$$H_{QB} = \sum_{j,k} \varepsilon_k |\varepsilon_k\rangle \langle \varepsilon_k|$$

$$=_{TLS} \sum_{j,k} r_j(t) |r_j(t)\rangle \langle r_j(t)|$$

که در آن ویژه‌مقادیر انرژی به صورت  $\varepsilon_k < \varepsilon_{k+1}$  متناسب با هر ویژه‌بردار  $|\varepsilon_k\rangle$  و همچنین، ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی نیز به صورت  $r_j > r_{j+1}$  متناظر با هر ویژه‌بردار  $|r_j(t)\rangle$  باشد، حال، با جایگذاری در معادله ۰، می‌توانیم به رابطه زیر جهت محاسبه ارگوتروپی دست پیدا کنیم:

$$\varepsilon_{(t)} = \sum_{j,k} r_j(t) \varepsilon_k \left( \left| \langle r_j(t) | \varepsilon_k \rangle \right|^2 - \delta_{i,j} \right)$$

در بخش تعیین حداکثر کار قابل استخراج از باتری مطرح شد که این اتفاق زمانی خواهد افتاد که حالت پایانی سامانه، حالت تعادل گرمایی باشد:

$$W_{\max} \leq \text{Tr}(\rho H) - \text{Tr}(\omega_{\beta} H)$$

حال به خاطر اینکه مقدار رابطه ۰ را بررسی کنیم، باید ماتریس مربوط به هامیلتونی و ماتریس چگالی آن را قطری نماییم. مشکل موجود این است که ماتریس چگالی به دست آمده بر حسب کل سامانه متشکل از باتری و شارژر بود. اما ما برای انجام محاسبات فقط ماتریس چگالی باتری را نیاز داریم. به همین خاطر می‌توانیم ماتریس چگالی کاهش‌یافته سامانه را با استفاده از تریس جزئی به دست آوریم:

$$\rho_{\text{TLS}} = \text{Tr}_C(\rho)$$

در نهایت، با انجام محاسبات جبری می‌توانیم به رابطه زیر برای ماتریس چگالی باتری بر حسب پایه‌های فضای هیلبرت دست پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{TLS}} = & \sum_n P_n [(\cos^2 \lambda \sqrt{n(n-1)t}) |g\rangle\langle g| + (\sin^2 \lambda \sqrt{n(n-1)t}) |e\rangle\langle e|] \\ & + e^{i\omega_a t} [(i\sqrt{P_{n+2}P_n} \sin \lambda \sqrt{(n+1)(n+2)t} \cos \lambda \sqrt{n(n-1)t}) |g\rangle\langle e| \\ & - e^{i\omega_a t} [(i\sqrt{P_{n+2}P_n} \sin \lambda \sqrt{(n+1)(n+2)t} \cos \lambda \sqrt{n(n-1)t}) |e\rangle\langle g|] \end{aligned}$$

که ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی بالا برابر خواهند بود:

$$\hat{r}_s(t) = \frac{1 + (-1)^s \sqrt{1 - 4 \det(\rho_{\text{TLS}}(t))}}{2}$$

چون در اینجا ما باتری را یک اتم دو ترازه فرض کرده‌ایم که هامیلتونی آن برابر  $H_{\text{QB}} \sigma \frac{\omega_a}{2} \sigma_z$  است؛ بنابراین،

به راحتی ویژه‌مقادیر این هامیلتونی نیز که برابر با  $E_{\pm} \pm \frac{\omega_0}{2}$  هستند، به دست خواهد آمد. حال اگر ویژه‌مقادیر به دست آمده از ماتریس چگالی و هامیلتونی باتری را در رابطه ۰ جایگذاری کنیم، می‌توانیم به مقدار ارگوتروپی زیر دست پیدا کنیم:

$$\varepsilon_{(t)} = E(t) - \frac{\omega_a}{2} \sqrt{1 - 4 \det(\rho_{\text{TLS}}(t))}$$

بحث و نتیجه‌گیری

منابع ذخیره‌سازی انرژی همواره عضو جدایی‌ناپذیر از زندگی انسان‌ها بوده‌اند. ما در طول روز با لوازمی در ارتباط هستیم که در ساخت آنها حداقل یک باتری برای ذخیره‌سازی اطلاعات استفاده شده است. این باتری‌ها بر اساس فرایندهای الکتروشیمیایی، شارژ و یا تخلیه می‌شوند و در ابعاد میکروسکوپییک ساخته می‌شوند. اما اگر این ابزار مهم را به صورت میکروسکوپییک در نظر بگیریم، آیا دانش قبلی ما در مورد باتری‌های عادی می‌تواند در مطالعه آن‌ها مفید واقع شود؟ جواب خیر است. چرا که وقتی به ابعاد اتم سفر می‌کنیم، فیزیک کلاسیک نمی‌تواند تحول سامانه را به درسی بررسی کند و محکوم به شکست است و مکانیک کوانتومی جای خود را به فیزیک کلاسیک می‌دهد. در این مقاله سعی کردیم مفاهیم پایه‌ای مربوط به مطالعه باتری‌های کوانتومی بسته را که در طول مسیر می‌خواستیم از آنها استفاده کنیم، به طور خلاصه شرح دادیم. سپس در قدم بعد جهت واضح شدن توضیحات نیز یک مثال برای مطالعه باتری‌های کوانتومی بسته، ارائه دادیم. در این مثال، فرایند شارژ و تخلیه یک باتری کوانتومی دو ترازه در سه حالت مختلف شارژ مورد بررسی قرار داده شد. در نهایت با توجه به محاسبات انجام داده شده به این نتیجه رسیدیم که کاواکی که باتری کوانتومی در آن واقع شده بود، اگر در حالت همدوس قرار داشته باشد می‌تواند کاندیدای بهتری از نظر پایداری و میزان انرژی که می‌تواند در باتری ذخیره کند، باشد. هرچند این انرژی ذخیره شده از حالت عددی کمتر است اما از پایداری بهتری نسبت به حالت عدد برخوردار است. و در نهایت در حالت چلانده، با وجود پایداری نسبتاً خوب نمی‌تواند گزینه مناسبی جهت شارژ باتری از نظر میزان انرژی ذخیره شده باشد.

## منابع

- Alicki, R., & Fannes, M. (۲۰۱۳). Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries. *Physical Review E*, ۸۷(۴), ۰۴۳۱۰۳.
- Allahverdyan, A. E., Balian, R., & Nieuwenhuizen, T. M. (۲۰۱۳). Maximal work extraction from finite quantum systems. *EPL (Europhysics Letters)*, ۹۷(۴), ۰۴۰۰۰۱.
- Binder, F. C., Vinjanampathy, S., Modi, K., & Goold, J. (۲۰۱۵). Quantacell: powerful charging of quantum batteries. *New Journal of Physics*, ۱۷(۷), ۰۷۳۰۰۱.
- Breuer, H.-P. (۲۰۱۵). Foundations and measures of quantum non-Markovianity. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, ۴۸(۵۵), ۱۱۱۱۱۱.
- Breuer, H.-P., & Petruccione, F. (۲۰۱۱). *The theory of open quantum systems*: Oxford University Press on Demand.
- Deffner, S., & Campbell, S. (۲۰۱۷). Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, ۵۰(۵۵), ۳۳۳۱۱۱.
- Delmonte, A., Crescente, A., Carrega, M., Ferraro, D., & Sassetti, M. (۲۰۱۱). Characterization of a Two-Photon Quantum Battery: Initial Conditions, Stability and Work Extraction. *Entropy*, ۲۳(۵), ۲۲۲.
- Gemme, G., Grossi, M., Ferraro, D., Vallecorsa, S., & Sassetti, M. (۲۰۲۲). IBM quantum platforms: a quantum battery perspective. *Batteries*, ۸(۵), ۳۳.
- Giovannetti, V., Lloyd, S., & Maccone, L. (۲۰۰۳). The role of entanglement in dynamical evolution. *EPL (Europhysics Letters)*, ۶۲(۵), ۰۵۰۰۰۱.
- Kamin, F., Tabesh, F., Salimi, S., Kheirandish, F., & Santos, A. C. (۲۰۲۰). Non-Markovian effects on charging and self-discharging process of quantum batteries. *New Journal of Physics*, ۲۲(۸), ۰۸۳۰۰۱.
- Vimi, ,, popi, D, Kneževi, G, & Pelin, D. (۲۰۱۱). Battery energy storage technologies overview. *International journal of electrical and computer engineering systems*, ۲۲(۱), ۳۳-۵۵.
- R. Loudon, *The quantum theory of light*, OUP Oxford ۲۰۰۰.