فصلنامه مهندسی مدیریت نوین
سال نهم، شماره چهارم، زمستان ۱۴۰۲

ارزیابی بهره‌وری، کارایی و رتبه‌بندی نیروگاه‌های حرارتی: یک رویکرد مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های تصادفی

مهدی خدادادی‌پور[۱]

چکیده

در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) مدل‌های مختلف در زمینه‌های گوناگون با داده‌های مختلف برای ارزیابی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) طراحی شده است. حال آنکه در بسیاری از مسائل کاربردی، مدیران واحدها با داده‌هایی تصادفی روبرو هستند و آنها برای ارزیابی واحدهای تحت نظارت خود به روشی نیاز دارند که بتواند اینگونه DMU ها را ارزیابی و رتبه‌بندی کنند. در کار کردن با داده‌های تصادفی با در نظر گرفتن احتمالی برای وقوع حالت‌های پیش‌بینی نشده (سطح خطا)، که از طرف مدیران ارائه می‌شود، DMU ها ارزیابی می‌شوند. در این مقاله با استفاده تکنیک‌های آمار و احتمالات و توزیع نرمال و مدلBCC دارای خروجی‌های نامطلوب و با در نظر گرفتن خطای مشخص یک مدل تصادفی جدید تحت عنوان معیار رتبه‌بندی میانگین جهت ارزیابی کارایی داده‌های تصادفی پیشنهاد می‌شود. بر اساس آن کارایی متقاطع تصادفی محاسبه گردیده است. از آنجایی که وزن‌های بهینه در ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی منحصر به فرد نیستند برای رتبه‌بندی بهتر و اولویت دادن به آنها روش خودخواهانه پیشنهاد می‌شود. نهایتاً مدل‌های پیشنهاد شده برای ۳۲ واحد نیروگاه حرارتی که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تصادفی هستند پیاده‌سازی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های تصادفی، کارایی متقاطع تصادفی، خروجی نامطلوب تصادفی، معیار رتبه‌بندی میانگین، اولویت رتبه‌بندی تصادفی

۱–مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز و همکاران(۱۹۷۸) به عنوان یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) متجانس که دارای چندین ورودی و چندین خروجی است پیشنهاد شد. مدل ارائه شده به مدل CCR معروف گشت که دارای بازده به مقیاس ثابت است. بنکر و همکاران(۱۹۸۴) با تغییر در مدل، CCR مدل BCC را تعریف کردند، که این مدل دارای بازده به مقیاس متغیر است. گرچه این مدل‌ها می‌توانند کارایی واحدهای تصمیم گیرنده کارا را از ناکارا تشخیص دهند اما قدرت تمیز دادن بین واحدهای کارا را ندارند. به همین دلیل روشهای زیادی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده ارائه شده است. می‌توان به روشهای ابرکارایی ارائه شده توسط اندرسن و پیترسون(۱۹۹۳) و هادی–وینچه و اسماعیل‌زاده (۲۰۱۳)، وزن مشترک ارائه شده توسط کوک و همکاران(۱۹۹۰)، رتبه‌بندی بر مبنای اسلکها ارائه شده توسط سی یوشی (۱۹۹۹)، و کارایی متقاطع ارائه شده توسط سکستون و همکاران(۱۹۸۶) اشاره کرد.

۱– استادیار گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران
mehdikhoda@yahoo.com

تاریخ وصول ۱۴۰۲/۷/۲۴
تاریخ پذیرش ۱۴۰۲/۹/۱۹

در روش کارایی متقاطع به دلیل منحصر به فرد نبودن وزنهای بدست آمده، ماتریس کارایی متقاطع منحصر به فرد نیست. لذا برای این مشکل مفهوم هدف ثانویه مطرح شد که مدلهای خوشبینانه و بدبینانه‌ای که به ترتیب کارایی متقاطع واحدهای دیگر را بیشینه و کمینه می‌کنند ارائه گردید. وانگ و چاین(۲۰۱۰) یک مدل کارایی متقاطع جایگزین، تحت عنوان مدل بی‌طرف برای به دست آوردن یک مجموعه متفاوت از وزن‌های ورودی و خروجی پیشنهاد کردند. همچنین انتخاب وزن‌های متقارن به عنوان یک هدف ثانویه در ارزیابی کارایی متقاطع معرفی شد. سرانجام مدلی پیشنهاد شد که در آن نه تنها کارایی فردی واحد تحت ارزیابی بیشینه شده، بلکه وزن‌های متقارن انتخاب می‌شود. ریوز و سیرونت(۲۰۱۲) اهداف ثانویه را بر اساس مدل کلاسیک کارایی متقاطع برای حذف غیرمنحصر به فردی معرفی کرده و روش تهاجمی و عادلانه را پیشنهاد دادند. وو و همکاران(۲۰۱۶) مدل‌های گزینش اوزان را پیشنهاد کردند که در آنها هدف ثانویه عبارت از بهینه‌سازی وضعیت رتبه‌بندی DMU تحت ارزیابی است. همچنین وانگ و همکاران(۲۰۱۲) مدل کارایی متقاطع را با وزن متعادل ارائه کردند که هدف این روش اجتناب از تفاوت‌های بزرگ ما بین وزن‌های بهینه DMU ها است. حسین‌زاده لطفی و همکاران(۲۰۱۳) یک روش سه مرحله‌ای برای رتبه‌بندی گزینه‌ها ارائه دادند که به منظور حل غیر منحصر به فرد بودن وزن‌ها از هدف ثانویه استفاده شود. به هر حال مدل‌های مطرح شده در DEA همگی در حالتی که مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها همگی قطعی و کاملا مشخص باشند قابل کاربرد هستند. اما امروزه در محاسبه کارایی واحدها باید توجه داشته باشیم که می‌تواند مقدارها غیر قطعی و یا تصادفی باشند. اخیراً مطالعات گسترده‌ای را در حالتی که داده‌ها تصادفی-اند انجام گرفته که می‌توان به روش‌های نظریه فازی و مفهوم ناحیه اطمینان و برنامه‌ریزی قیود تصادفی، قیود توأم احتمالی و برآورد ماکزیمم درست‌نمایی مکانی و روش شبیه‌سازی مونت کارلو را در حالات غیر قطعی اشاره نمود.

در حالتی که متغیرهای ورودی و خروجی تصادفی هستند لاند و همکاران(۱۹۹۳) از مدل برنامه‌ریزی قیود تصادفی که توسط چانز و کوپر(۱۹۵۹) ارائه شده بود به منظور محاسبه کارایی درحالت تصادفی استفاده کردند. آنها توزیع توأم نرمال را توزیع خروجی و ورودیهایDMU ها در نظر گرفته و قیود تصادفی را برای مدل توسعه دادند. همچنین اولیسین و پیترسین(۲۰۱۶) مدل قیود تصادفی در DEA را که فرم آن حالت مضربی بود را توسعه دادند. نهایتاً کوپر و همکاران قیود تصادفی توأم را در فرم مضربی مدل DEA پیشنهاد کردند. در زمینه تصادفی محققین بسیاری مقالاتی ارائه کردند که به عنوان مثال می‌توان به مقالات کوپر و همکاران (۱۹۹۸–۲۰۰۴–۲۰۰۴)، موریتا و سیفورد (۱۹۹۹) خدابخشی(۲۰۱۱)، برونی و همکاران(۲۰۰۹) و حسین‌زاده لطفی و همکاران(۲۰۱۲) و در سال‌های اخیر می‌توان به مقالات اولیسن(۲۰۱۶)، دوتوای و همکاران(۲۰۱۶)، سیمار و همکاران(۲۰۱۷) زانجباو و همکاران(۲۰۱۷) چن و همکاران(۲۰۱۷) و چارلز و کورتینر(۲۰۱۷) و لیو و همکاران(۲۰۱۷) جرادی و روگیرو (۲۰۱۸) پارک و همکاران(۲۰۱۸) داوتالب و همکاران(۲۰۱۹) چین کو و شانگ تایلی(۲۰۱۹)، وانک و همکاران(۲۰۲۰) اشاره نمود.

نگرش کلی در ارزیابی عملکرد واحدها کاهش میزان ورودی و افزایش مقدار خروجی است که موجب بهبود عملکرد و بهترین کارکرد می‌شود. مدلهای CCR و BCC بر این مبنا استوار است. اما باید توجه داشت که سازمانها همواره به دنبال حداکثر کردن خروجی و حداقل کردن ورودی نیستند زیرا خروجی‌ها و ورودی‌ها می-توانند مطلوب یا نامطلوب باشند. برای مثال تعداد کالای معیوب یا میزان آلودگی و ضایعات و یا انتشار گاز CO_2

در مراحل تولید خروجی نامطلوب هستند که باید کاهش یابند. بر این اساس، مدلها با ورودی یا خروجی نامطلوب باید در نظر گرفته شود. در حالتی که مقادیر ورودی و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده قطعی هستند، مندل(۲۰۱۰) نشان داد که در ارزیابی کارایی انرژی در صنعت سیمان هند در صورتی که خروجی نامطلوب چشم‌پوشی شود، نتایج اریب در محاسبات کارایی مشاهده می‌شود. همچنین شی و همکاران(۲۰۱۰) از خروجی نامطلوب در ارزیابی کارایی انرژی در صنایع تولیدی در چین استفاده نمودند. همچنین وسیوشی و گتو(۲۰۱۰) یک دیدگاه جدید در DEA برای اندازه‌گیری کارایی سوخت‌های فسیلی الکتریکی تولید شده با در نظر گرفتن CO2 تولید شده از واحدهای تولیدی پیشنهاد دادند. همچنین لیو و همکاران(۲۰۱۳) برای مطالعه کارایی و کارایی محیطی انرژی تولیدی ملی از DEA استفاده کردند. به علاوه چن و همکاران(۲۰۱۷) کارایی تصادفی شرکت‌های هواپیمایی چین را با وجود انتشار گاز CO2 به عنوان خروجی نامطلوب در پروازهای روزانه هواپیماها به دست آوردند. در حالت تصادفی جین و همکاران(۲۰۱۴) با در نظر گرفتن ورودی مطلوب و خروجی نامطلوب تصادفی با در نظر گرفتن خطا کشورهای عضو APEC را از لحاظ کارایی در تولید ناخالص ملی که تولید گاز CO2 بعنوان خروجی نامطلوب تصادفی در نظر گرفته شده است مقایسه نمودند. همچنین ویو و همکاران(۲۰۱۳) با در نظر گرفتن خروجی نامطلوب تصادفی با یک خطا، چند استان مختلف در چین را از لحاظ تولید ناخالص ملی مورد مقایسه قرار دادند که خروجی‌های نامطلوب هدر رفتن آب و انتشار گازهای سمی و تولید مواد جامد بیهوده در نظر گرفته شده است. در سال‌های اخیر محققین بسیاری در این زمینه مقالات ارائه کردند که به عنوان مثال به مقالات ایزدخواه و ساین(۲۰۱۸)، لیو و همکاران (۲۰۲۰)، رین و همکاران (۲۰۲۰) و امیرتیموری و همکاران (۲۰۲۳)، جی-انگ و همکاران (۲۰۲۱) تاکاهاشی و همکاران (۲۰۲۳)، اویو و همکاران (۲۰۲۲)، عمرانی و همکاران (۲۰۲۳)، اشاره نمود.

هدف از ارائه این مقاله، پیشنهاد یک مدل جدید در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی (SDEA) با حضورخروجی نامطلوب جهت ارزیابی کارایی داده‌های تصادفی است. همچنین پیشنهاد مدلی جدید برای محاسبه کارایی متقاطع تصادفی در رتبه‌بندی بهتر DMU ها و اولویت‌بندی رتبه‌های بدست آمده از روش خودخواهانه است که تا کنون در این زمینه مطالعه‌ای صورت نگرفته و برای اولین بار مطالعه شده است. برای پیاده‌سازی مدل-های پیشنهاد شده و محاسبه کارایی و کارایی متقاطع تصادفی ۳۲ نیروگاه حرارتی، به عنوان DMU ها که دارای ورودی‌های مطلوب و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تصادفی هستند به کار رفت. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است در بخش دوم مقاله در ابتدا خلاصه‌ای از مدل مضربی BCC با خروجی نامطلوب یادآوری شد. سپس در بخش سوم، فرم تصادفی این مدل را با در نظر گرفتن خطای α بدست آمد و یک مدل جدید تحت معیار رتبه‌بندی میانگین پیشنهاد شد. سپس کارایی متقاطع تصادفی طبق این مدل محاسبه شد. در بخش چهارم با توجه به یکتا نبودن جواب‌های کارایی متقاطع تصادفی مدلی با استفاده از روش خودخواهانه، جهت ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی پیشنهاد می‌شود. نهایتاً در بخش پنجم، پیاده‌سازی مدلها برای نیروگاه‌های حرارتی و در بخش ششم نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای تحقیقات آینده ارئه شد.

۲- مدل BCC ورودی‌محور با حضور خروجی مطلوب

مدل در این بخش در ابتدا به طور خلاصه مدل مضربی BCC ورودی محور در حضور خروجی نامطلوب در حالت قطعی را معرفی می‌نماییم. فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیری برای ارزیابی داشته باشیم که هر کدام دارای m ورودی و s تا خروجی باشند ورودی‌ها و خروجی‌های $DMU_j\ (j = 1, \dots, n)$ ها با $x_{ij}\ (j = 1, \dots, m),$ و $y_{rj}\ (r = 1, \dots, s)$ به ترتیب معرفی می‌شوند. فرض کنیم $DMU_d\ d \in \{1, \dots, n\}$ تحت ارزیابی قرار گیرد مدل BCC ورودی محور در فرم خطی و در حالت مضربی به صورت زیر تعریف گردیده:

$$\begin{aligned}
&E^*_{dd} = max \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd} + u_d \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj} - u_d \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \\
&\omega_{id} \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m} \\
&\mu_{rd} \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s \\
&u_d \ \ free.
\end{aligned} \tag{۱}$$

در این مدل $\omega_{id}(i = 1, \dots, m)$ و $\mu_{rd}(r = 1, \dots, s)$ به ترتیب وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. در مدل فوق مقدار E^*_{dd} مقدار کارایی CCR تعریف می‌شود. و در صورتیکه $(\omega^*_{id}, \mu^*_{rd})$ یک جواب بهینه مدل باشند اگر $E^*_{dd} = 1$ و $\omega^*_{id}, \mu^*_{rd} > 0\ \ (\forall\ i, r)$ در این صورت DMU_d را کارا گویند. در مدل (۱) تمام خروجی‌ها مطلوب در نظر گرفته شده و نمی‌توان آن را برای حالتی که خروجی‌ها نامطلوب باشند بکار برد. حال فرض کنیم هر DMU_j دارای m ورودی و s خروجی مطلوب و k خروجی نامطلوب باشند. ورودی‌های مطلوب و خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب به ترتیب با $x_{ij}\ (j = 1, \dots, m),$ $y_{rj}\ (r = 1, \dots, s),$ $z'_{pj}\ (p = 1, \dots, k),$ تعریف می‌شوند. بنابرین مدل (۱) را به مدل (۲) تبدیل و به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&E^*_{dd} = max \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} z'_{pd} + u_d \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} z'_{pj} - u_d \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \\
&\omega_{id} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \\
&\mu_{rd} \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s \\
&\varphi_{pd} \geq 0 \qquad p = 1, \dots, k \\
&u_d \ \ free
\end{aligned} \tag{۲}$$

در مدل (۲) $\omega_{id}(i=1,\dots,m)$ و $\mu_{rd}(r=1,\dots,s)$ و $\varphi_{pd}\ (p=1,\dots,k)$ به ترتیب وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب تعریف می‌شود. با توجه به این که u_d متغییر آزاد در علامت است می‌تواند اغلب بطور پنهان کارایی منفی تولید کند این کارایی خودش را در محاسبه کارایی متقاطع می‌تواند نشان دهد. دملو و همکارن(۲۰۱۳) نشان دادند که می‌توانیم با اضافه کردن یک قید غیر منفی این مشکل را بر طرف کنیم؛ بنابراین مدل ۲ را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
& E^*{}_{dd} = max \textstyle\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} z'_{pd} + u_d \\
& \text{s.t.} \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id} = 1 \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} z'_{pj} - u_d \geq 0 \quad j=1,\dots,n \\
& \textstyle\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} z'_{pj} + u_d \geq 0 \qquad j=1,\dots,n \\
& \omega_{id} \geq 0 \quad i=1,\dots,m \\
& \mu_{rd} \geq 0 \quad r=1,\dots,s \\
& \varphi_{pd} \geq 0 \quad p=1,\dots,k \\
& u_d \ \ free.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

بنابراین با اضافه کردن قید سوم کارایی متقاطع غیر منفی محاسبه خواهد شد.

۳-فرم تصادفی مدل مطرح شده

برنامه‌ریزی تصادفی یک مسأله مدل برنامه‌ریزی ریاضی است که در آن تمام یا تعدادی از پارامترهای مسأله تصادفی هستند. این مدل‌ها با توجه به نیاز مدل‌های بهینه‌سازی در مدل‌های خطی با عدم قطعیت به وجود آمده است. در بسیاری از مدل‌های خطی برخی پارامترها به طور دقیق مشخص نیستند بلکه بطور احتمالی معلوم هستند؛ بنابراین باید دیدگاه تصادفی را به‌جای فرم قطعی جایگزین کرد، با این فرض که ضرایب غیر معلوم متغیرهای تصادفی هستند که دارای تابع توزیع احتمال مشخص هستند. حالت‌های مختلفی برای مسأله برنامه‌ریزی تصادفی وجود دارد. مسأله برنامه‌ریزی با قیود احتمالی یکی از حالت‌های مسائل برنامه‌ریزی تصادفی است که در آن قیود به صورت احتمالی هستند، یعنی احتمالی را برای نقض شدن این قیود در نظر می‌گیریم.

در واقع مدل معرفی شده (۳) قابلیت اندازه‌گیری کارایی DMU ها وقتی ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب به طور تصادفی تغییر می‌کنند را ندارند. پس لازم است مدل‌های جدیدی بر اساس آنها پیشنهاد شود. فرض کنید متغیرهای تصادفی $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}, \widetilde{z'}_{pd}$ به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تصادفی باشند بطوریکه هر کدام دارای توزیع نرمال به صورت زیر باشند.

$$\tilde{x}_{ij} \sim N\left(\bar{x}_{ij}, \left(\sigma_{ij}{}^{x}\right)^2\right) \qquad \forall\ \mathrm{i,j}$$

$$\tilde{y}_{rj} \sim N\left(\bar{y}_{rj}, \left(\sigma_{rj}{}^{y}\right)^2\right) \qquad \forall\, r, j$$

$$\widetilde{z'}_{pd} \sim N\left(\overline{z'}_{pd}, \left(\sigma_{pj}{}^{z}\right)^2\right) \qquad \forall\, p, j$$

$$\sum{}_j = \begin{bmatrix} VAR(\tilde{x}_{1j}) & \cdots & COV(\tilde{x}_{1j}, \tilde{z}_{kj}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ COV(\tilde{z}_{kj}, \tilde{x}_{1j}) & \cdots & VAR(\tilde{z}_{kj}) \end{bmatrix}$$

همچنین هر DMU دارای ماتریس واریانس کوواریانس $\sum$ باشند که قطر اصلی آن واریانس متغیرها و بقیه درایه‌ها کوواریانس بین متغیرها را نشان می‌دهد. $\bar{x}_{ij}$ $\bar{y}_{rj}$, $\overline{z'}_{pd}$ به ترتیب میانگین متغیرهای تصادفی و $\left(\sigma_{ij}{}^{x}\right)^2$ $\left(\sigma_{rj}{}^{y}\right)^2$ $\left(\sigma_{pj}{}^{z}\right)^2$ به ترتیب واریانس متغیرهای تصادفی $\tilde{x}_{ij}$ $\tilde{y}_{rj}$, $\widetilde{z'}_{pd}$ را نشان می‌دهند؛ بنابراین با در نظر گرفتن مقدار خطای α (ضریب اطمینان $(1-\alpha)$) فرم کلی مدل برنامه‌ریزی تصادفی با تابع هدف و قیود تصادفی به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
& E^*{}_{dd} = max\ E\left(\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\tilde{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pd} + u_d\right) \\
& s.t. \\
& E\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\tilde{x}_{id}\right) = 1 \\
& P\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d \geq 0\right) \geq 1-\alpha \quad j = 1, \dots, n \\
& P\left(\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\tilde{y}_{rj} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} + u_d \geq 0\right) \geq 1-\alpha \qquad j = 1, \dots, n \\
& \omega_{id} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \\
& \mu_{rd} \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s \\
& \varphi_{pd} \geq 0 \qquad p = 1, \dots, k \\
& u_d \ free
\end{aligned} \tag{۴}$$

در مدل فوق E و P به ترتیب نشانگر میانگین تابع هدف تصادفی و احتمال قیود تصادفی هستند. طبق مفاهیم احتمال هر چه مقدار میانگین تابع هدف بیشتر باشد نشانگر کاراتر بودن DMU_d خواهد بود و برعکس.

لازم است مدل (۴) را به فرم غیرتصادفی درجه دوم تبدیل نماییم تا بتوانیم جواب‌های بهینه و مقدار کارایی تصادفی را محاسبه کنیم. با توجه به خاصیت خطی میانگین متغیر تصادفی رابطه زیر را داریم.

$$E\left(\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\tilde{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pd} + u_d\right) = \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pd} + u_d$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\tilde{x}_{id}\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{id} = 1$$

همچنین با توجه به این که ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی نرمال دارای توزیع نرمال است. پس عبارت

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d,$$

دارای توزیع نرمال با میانگین E_j و واریانس ${A_j}^2$ به صورت زیر خواهد بود.

$$E_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d$$

$$A_j^{\,2} = Var\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d\right)$$

$$= Cov\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d\,, \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_{id}\omega_{kd}\,cov(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{kj}) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\mu_{rd}\mu_{kd}\,cov(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{kj})$$

$$+ \quad \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\varphi_{pd}\varphi_{qd}\,cov(\widetilde{z'}_{pj},\widetilde{z'}_{qj}) - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\omega_{id}\mu_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij},\tilde{y}_{rj}\right)$$

$$+ \quad 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\omega_{id}\varphi_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij},\widetilde{z'}_{pj}\right)$$

$$-2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k}\mu_{rd}\varphi_{pd}ov\left(\tilde{y}_{rj},\widetilde{z'}_{pj}\right) \quad j = 1,\dots,n$$

جهت محاسبه احتمال در مدل (۴) لازم است ان را به صورت نرمال استاندارد Z تبدیل نماییم؛ بنابراین

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d \geq 0\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\tilde{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\widetilde{z'}_{pj} - u_d - E_j}{A_j} \geq \frac{-E_j}{A_j}\right) \geq 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{-E_j}{A_j}\right) \geq 1-\alpha \Rightarrow p\left(Z \leq -\frac{E_j}{A_j}\right) \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{-E_j}{A_j}\right) \leq \alpha \Rightarrow \Phi^{-1}(\alpha) \geq \frac{-E_j}{A_j}$$

$$\Rightarrow E_j + A_j\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0,$$

در مدل $\Phi(\alpha)$ تابع توزیع نرمال استاندارد و $\Phi^{-1}(\alpha)$ معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد در مقدار α است. پس مدل تصادفی پیشنهادی به صورت زیر خواهد شد. همچنین برای قید سوم با واریانس $B_j^{\,2}$ مراحل فوق را می‌توان بکار برد؛ بنابراین فرم تصادفی مدل ۵ بصورت زیر خواهد بود.

$$E^{*}_{dd} = max\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\overline{z'}_{pd} + u_d$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\bar{x}_{id} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d + A_j\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

$$A_j^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_{id}\omega_{kd}\,cov\left(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{kj}\right) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\mu_{rd}\mu_{kd}\,cov\left(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{kj}\right) +$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\varphi_{pd}\varphi_{qd}\,cov\left(\widetilde{z'}_{pj},\widetilde{z'}_{qj}\right)-2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\omega_{id}\mu_{rd}cov\left(\tilde{x}_{ij},\tilde{y}_{rj}\right)+$$
$$2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\omega_{id}\varphi_{pd}cov\left(\tilde{x}_{ij},\widetilde{z'}_{pj}\right)-2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k}\mu_{rd}\varphi_{pd}cov\left(\tilde{y}_{rj},\widetilde{z'}_{pj}\right)\quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\bar{y}_{rj}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\overline{z'}_{pj}+u_d+B_j\Phi^{-1}(\alpha)\geq 0\quad j=1,\dots,n \tag{۵}$$

$$B_j^{\,2}=\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\mu_{rd}\mu_{kd}\,cov(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{kj})+\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\varphi_{pd}\varphi_{qd}\,cov(\widetilde{z'}_{pj},\widetilde{z'}_{qj})-$$
$$2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k}\mu_{rd}\varphi_{pd}\,Cov\left(\tilde{y}_{rj},\widetilde{z'}_{pj}\right)\qquad j=1,\dots,n$$

$\omega_{id}\geq 0\quad i=1,\dots,m$

$\mu_{rd}\geq 0\quad r=1,\dots,s$

$\varphi_{pd}\geq 0\quad p=1,\dots,k$

$u_d\ free$

$A_j\geq 0\quad j=1,\dots,n$

$B_j\geq 0\quad j=1,\dots,n$

قضیه ۱. مدل (5) یک مسأله برنامه‌ریزی محدب برای $0\leq\alpha\leq 0.5$ است.

اثبات: مقاله خانجانی وهمکاران (۲۰۲۱)

تعریف ۱: جواب شدنی $\left(\omega^*_{id},\mu^*_{rd},\varphi^*_{pd},u^*_d\right)$ را یک جواب بهینه مدل (۵) گویند اگر نامساوی

$\sum_{r=1}^{s}\mu^*_{rd}\bar{y}_{rd}-\sum_{p=1}^{k}\varphi^*_{pd}\overline{z'}_{pd}+u^*_d\geq\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\bar{y}_{rd}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\overline{z'}_{pd}+u_d$

برای هر جواب شدنی $\left(\omega_{id},\mu_{rd},\varphi_{pd},u_d\right)$ برقرار باشد.

در مدل پیشنهادی (۵) معیار زیر را جهت رتبه‌بندی کارایی تصادفی تعریف می‌کنیم.

معیار رتبه‌بندی میانگین : هرچه E^*_{dd} بزرگ‌تر باشد به این معنای این است که واحد تصمیم‌گیری کاراتر و رتبه بهتری دارد.

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار کارایی تصادفی بر خلاف حالت قطعی به نوع توزیع متغییرها، میانگین، واریانس و کوواریانس بین متغییرها و مقدار خطای در نظر گرفته شده دارد که با تغییر مقادیر آنها، مقدار کارایی تصادفی تغییر خواهد کرد.

از حل مدل (۵) برای هر DMU_d می‌توان کارایی تصادفی را به‌دست آورد ولی برای جداسازی بهتر کارایی متقاطع تصادفی را می‌توان درنظر گرفت. اگر جواب‌های بهینه مدل(۵) برای DMU_d $\forall\, i,r,p,$ $\left(\omega^*_{id},\mu^*_{rd},\varphi^*_{pd},u^*_d\right)$باشد کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر حسب DMU_dبه صورت

$$E^*_{dj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}\mu^*_{rd}\bar{y}_{rj}-\sum_{p=1}^{k}\varphi^*_{pd}\overline{z'}_{pj}+u^*_d}{\sum_{i=1}^{m}\omega^*_{id}\bar{x}_{ij}} \tag{۶}$$

محاسبه می‌شود. بنابراین رتبه کارایی متقاطع تصادفی هر DMU_j برابر میانگین E^*_{dj} ها است.

$$E^{*}_{j} = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n} E^{*}_{dj} \qquad (۷)$$

این مقدار به عنوان یک اندازه جدید کارایی تصادفی برای هرDMU خواهد بود.

٤-مدل اولویت‌بندی رتبه‌های تصادفی

با توجه به اینکه جواب‌های بهینه مدل‌ها ممکن است یکتا نباشد در این حالت امتیازهای کارایی متقاطع تصادفی تا حدی دلخواهانه به دست می‌آید. برای حل این مشکل یک مدل جدید برای اولویت‌بندی رتبه‌های تصادفی معرفی می‌شود این مدل نه فقط مقدار کارایی تصادفی را حفظ می‌کند بلکه کارایی متقاطع تصادفی را افزایش می‌دهد.

$$R^{*}_{pd} = min \sum_{j=1}^{n} z_j$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{id} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pd} + u_d = E^{*}_{dd}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d + A_j\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$A_j^{\,2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \omega_{id}\omega_{kd}\, cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} \mu_{rd}\mu_{kd}\, cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}) + \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} \varphi_{pd}\varphi_{qd}\, cov(\widetilde{z'}_{pj}, \widetilde{z'}_{qj}) - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} \omega_{id}\mu_{rd} cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}) + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} \omega_{id}\varphi_{pd} cov(\tilde{x}_{ij}, \widetilde{z'}_{pj}) - 2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k} \mu_{rd}\varphi_{pd} cov(\tilde{y}_{rj}, \widetilde{z'}_{pj}) \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} + u_d + B_j\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \qquad (۸)$$

$$B_j^{\,2} = \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} \mu_{rd}\mu_{kd}\, cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}) + \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} \varphi_{pd}\varphi_{qd}\, cov(\widetilde{z'}_{pj}, \widetilde{z'}_{qj}) - 2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k} \mu_{rd}\varphi_{pd}\, Cov(\tilde{y}_{rj}, \widetilde{z'}_{pj}) \qquad j = 1, \dots, n$$

$$E^{*}_{dd}\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d + s_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$s_j \leq M \times z_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$z_j \epsilon \{0,1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$s_j\ free \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\omega_{id} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\mu_{rd} \geq 0 \qquad r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_{pd} \geq 0 \qquad p = 1, \dots, k$$

$$u_d\ \ free$$

$A_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

$B_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

ایده اصلی مدل (۸) این است که اولین و دومین قید تضمین می‌کند که کارایی تصادفی DMU_d حفظ شود. در هفتمین قید به راحتی مشاهده می‌شود که

$$E^*{}_{dd} \sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d = -s_j$$

اگر $s_j>0$ باشد پس

$$E^*{}_{dd} < \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} + u_d}{\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij}} = E^*{}_{dj}$$

به این معنی که کارایی متقاطع DMU_j بر اساس DMU_d بزرگتر از کارایی تصادفی DMU_d خواهد بود و مشابهاً اگر $s^*{}_j<0$ باشد $E^*{}_{dd}>E^*{}_{dj}$ یعنی کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر اساس DMU_d کوچکتر از کارایی تصادفی DMU_dخواهد شد. در هشتمین قید، مقدار M بزرگترین مقدار مثبت تعریف می‌شود. اگر $s^*{}_j>0$ باشد پس مقدار $z^*{}_j$ یک خواهد بود و اگر $s^*{}_j<0$ مقدار $z^*{}_j$ صفر می‌شود و چون تابع هدف مینیمم است پس بیشترین مقادیر $z^*{}_j$ صفر خواهد شد یعنی $s^*{}_j<0$ بیشتر مشاهده می‌شود. در این صورت کارایی‌های متقاطع تصادفی DMUj ها نسبت به کارایی DMU_dکمتر خواهند شد. در مدل (۸) نیز جواب های بهینه ممکن است یکتا نباشند. پس مدل خودخواهانه زیر را پیشنهاد می کنیم که علاوه براین که کارایی تصادفی حفظ می‌شود، کارایی متقاطع سایر DMU ها را حداقل می نماید. این مدل، انحراف کارایی سایر DMU_j ها را افزایش می دهد تا کارایی متقاطع تصادفی DMU_d نسبت به بقیه افزایش یابد در حالیکه کارایی تصادفی $E^*{}_{dd}$ حفظ می گردد.

$max \sum_{j=1}^{n} \Psi_j$

s.t

$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{id} = 1$

$\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rd} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pd} + u_d = E^*{}_{dd}$

$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d - \Psi_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$

$E^*{}_{dd} \sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d + s_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}\bar{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}\bar{y}_{rj} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}\overline{z'}_{pj} - u_d + A_j\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$

$$A_j{}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \omega_{id}\omega_{kd}\, cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} \mu_{rd}\mu_{kd}\, cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{kj}) + \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} \varphi_{pd}\varphi_{qd}\, cov(\tilde{z'}_{pj}, \tilde{z'}_{qj}) - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} \omega_{id}\mu_{rd} cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}) + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} \omega_{id}\varphi_{pd} cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{z'}_{pj}) - 2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k} \mu_{rd}\varphi_{pd} cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{z'}_{pj}) \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}\bar{y}_{rj}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\overline{z'}_{pj}+u_d+B_j\Phi^{-1}(\alpha)\geq 0 \quad j=1,\dots,n$$

$$B_j^{\,2}=\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\mu_{rd}\mu_{kd}\,cov(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{kj})+\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\varphi_{pd}\varphi_{qd}\,cov(\widetilde{z'}_{pj},\widetilde{z'}_{qj})-2\sum_{r=1}^{s}\sum_{p=1}^{k}\mu_{rd}\varphi_{pd}\,Cov\left(\tilde{y}_{rj},\widetilde{z'}_{pj}\right) \quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j=R^*_{pd}$$

$$s_j\leq M\times z_j \quad j=1,\dots,n \qquad (۹)$$

$$z_j\epsilon\{0,1\} \quad j=1,\dots,n$$

$$s_j\ free \quad j=1,\dots,n$$

$$\omega_{id}\geq 0 \quad i=1,\dots,m$$

$$\mu_{rd}\geq 0 \quad r=1,\dots,s$$

$$\varphi_{pd}\geq 0 \quad p=1,\dots,k$$

$$u_d \quad free$$

در مدل(۹) مقدار R^*_{pd} همان مقداری است که از مدل (۸) بدست آمده است؛ بنابراین اگر $\left(\omega^*_{id}\,,\mu^*_{rd},\varphi^*_{pd},u^*_d\right)$ یک جواب بهینه مدل (۹) باشد کارایی متقاطع تصادفی DMU_j بر اساس DMU_d به صورت زیر است:

$$\theta'_{dj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}\mu^*_{rd}\bar{y}_{rj}-\sum_{p=1}^{k}\varphi^*_{pd}\overline{z'}_{pj}+u^*_d}{\sum_{i=1}^{m}\omega^*_{id}\bar{x}_{ij}}$$

بنابراین برای هر DMU_j میانگین کارایی متقاطع تصادفی برابر

$$\theta_j=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\theta'_{dj} \qquad (۱۰)$$

تعریف شده که یک اندازه جدیدجهت ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی برای DMU_j ها خواهد بود.

۵ –مطالعه موردی

در این بخش مدل‌های پیشنهادی را برای ۳۲ نیروگاه حرارتی درکشور آنگولا بکار برده و آنها را مورد ارزیابی قرار می دهیم. هر نیروگاه حرارتی بعنوان یک واحد تصمیم‌گیری، دو متغیر ورودی مطلوب و سه متغیر خروجی دارد که دو تا از خروجی ها نامطلوب هستند. اولین متغیر ورودی $(\tilde{x}_1)$، ظرفیت تولیدی نیروگاه حرارتی بر حسب MW و دومین متغیر ورودی $(\tilde{x}_2)$، تعداد کارکنان در نیروگاه است. همچنین اولین متغیر خروجی $(\tilde{y}_1)$ مطلوب، مقدار انرژی تولید شده بر حسب MWH و دومین خروجی $(\tilde{z}_1)$ نامطلوب مقدار انتشار گاز CO2 بر حسب تن در سال و سومین خروجی $(\tilde{z}_2)$ نامطلوب میزان آلودگی آب بر حسب لیتر در سال است. طبق جمع‌آوری اطلاعات از سال ۲۰۱۴ تا ۲۰۲۱ در مورد هر نیروگاه حرارتی با استفاده از آزمون نیکویی برازش متغیرها دارای توزیع نرمال هستند. مقادیر میانگین‌ها و واریانس و ماتریس واریانس کوواریانس بر اساس داده‌ها برای هر نیروگاه

تخمین زده شدند که در جدول (۱) و(۲) برآورده های میانگین و واریانس اورده شده است.

جدول (۱):برآوردهای پارامترهای توزیع نرمال ورودی ها

U	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$
۱	N(۷۲.۲,۳.۲)	N(۴۶.۴,۱.۳)
۲	N(۹.۴,۱.۳)	N(۴۲.۸,۳.۷)
۳	N(۱۰.۴,۴.۳)	N(۲۴.۸,۱.۷)
۴	N(۳۶.۲,۱.۷)	N(۱۷.۲,۴.۷)
۵	N(۲۲.۶,۵.۸)	N(۳۲.۴,۴.۳)
۶	N(۳۱.۶,۴.۳)	N(۷۱,۳.۵)
۷	N(۷,۵.۵)	N(۳۲.۶,۳.۳)
۸	N(۱۹.۴,۲۲.۲)	N(۵۰.۲,۱۶.۲)
۹	N(۷,۲.۵)	N(۲۲.۲,۳.۲)
۱۰	N(۱۲.۶,۵.۳)	N(۱۸.۴,۴.۳)
۱۱	N(۳۷.۴,۴.۳)	N(۳۵.۸,۴.۷)
۱۲	N(۸.۴,۱.۳)	N(۴۳.۴,۲.۳)
۱۳	N(۳۲.۶,۵.۸)	N(۲۵.۴,۴.۳)
۱۴	N(۳۲.۴,۶.۸)	N(۵۲.۶,۵.۸)
۱۵	N(۵۵.۲,۲۴.۷)	N(۶۹.۲,۲۰.۲)
۱۶	N(۱۸,۶)	N(۲۵.۸,۶.۷)
۱۷	N(۱۳.۴,۷.۳)	N(۲۸.۴,۷.۴)
۱۸	N(۱۱.۸,۲.۲)	N(۳۶.۴,۱.۸)
۱۹	N(۱۹,۳.۵)	N(۱۹.۶,۲.۳)
۲۰	N(۲۱.۸,۲.۲)	N(۱۷.۶,۸.۳)
۲۱	N(۳۱.۶,۳.۳)	N(۳۹,۲.۵)
۲۲	N(۱۸.۲,۹.۷)	N(۳۲.۸,۵.۲)
۲۳	N(۱۲.۲,۳.۲)	N(۴۷.۲,۲.۲)
۲۴	N(۱۸.۴,۴.۳)	N(۴۴.۴,۴.۲)
۲۵	N(۹.۸,۱.۷)	N(۳۱,۱۱)
۲۶	N(۱۲.۶,۳.۸)	N(۲۲.۶,۵.۸)
۲۷	N(۲۰.۴,۳.۳)	N(۲۷.۲,۳.۷)
۲۸	N(۱۷.۸,۳.۷)	N(۲۲.۴,۴.۳)
۲۹	N(۱۳.۲,۵.۷)	N(۳۷.۸,۳.۷)
۳۰	N(۷۴.۲,۱۶.۲)	N(۱۹,۱۷.۵)
۳۱	N(۲۲.۴,۴.۳)	N(۳۲.۴,۵.۳)
۳۲	N(۴۲.۲,۲.۲)	N(۱۷.۴,۲.۳)

جدول (۲): برآوردهای پارامترهای توزیع نرمال خروجی‌ها

DMU	$\tilde{y}_1$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$
۱	N(۸۲.۴,۵.۸)	N(۱.۸۶,۰.۰۵۹)	N(۱۱۰۰.۵۴,۳۲۲۹.۶۹۹)
۲	N(۱۱.۶,۱.۸)	N(۲.۰۵۸,۰.۰۳۰۵)	N(۱۱۱۱.۶,۳۲۹۴.۹۴۵۸)
۳	N(۱۱.۶,۱.۸)	N(۲.۱۱۸,۰.۰۱۳۲)	N(۱۱۳۴.۰۵,۳۴۲۹.۵۷۳)
۴	N(۴۲.۸,۸.۷)	N(۲.۰۹۸,۰.۰۱۳۲)	N(۱۱۲۲.۷۷,۳۳۶۱.۷۰۱۷)
۵	N(۳۲.۸,۸.۷)	N(۲.۱۴۲,۰.۰۱۳۲)	N(۱۱۲۰.۳,۳۳۴۶.۹۹۳)
۶	N(۴۰.۷۲,۳.۸)	N(۲.۰۸۸,۰.۰۱۴۶)	N(۱۱۱۶.۶۹,۳۳۲۵.۳۸۰۶)
۷	N(۲۲,۳.۵)	N(۲.۰۵۴,۰.۰۱۲۳)	N(۱۰۹۷.۰۱,۲۹۲۳.۷۴۴)
۸	N(۹۴.۴,۲۶.۳)	N(۲.۰۳۲,۰.۰۱۲)	N(۱۱۰۵.۵۹,۳۲۵۹.۴۶)
۹	N(۱۶.۶,۱.۸)	N(۲.۰۲۸,۰.۰۱۱۷)	N(۱۱۰۱.۸۹,۳۲۳۷.۸۲۶)
۱۰	N(۳۲,۳.۵)	N(۱.۹۹۶,۰.۰۱۲۵)	N(۱۱۳۴.۰۵,۳۴۲۹.۵۷۳)
۱۱	N(۴۲.۴,۵.۸)	N(۱.۹۷۴,۰.۰۱۳۲)	N(۱۱۴۵.۴۵,۳۴۹۸.۹۱۷)
۱۲	N(۱۱.۲,۰.۷)	N(۱.۹۵۴,۰.۰۱۱۳)	N(۱۱۳۲.۵۸,۳۴۲۲.۶۲۵)
۱۳	N(۴۲.۴,۵.۸)	N(۱.۹۳۴,۰.۰۱۰۳)	N(۱۱۱۶.۷,۳۳۲۵.۴۵۸)
۱۴	N(۴۲.۴,۵.۸)	N(۱.۹۱۴,۰.۰۱۰۲)	N(۱۱۱۲.۸۳,۳۳۰۲.۵۳۴)
۱۵	N(۸۴,۲۱)	N(۱.۸۹۴,۰.۰۱۰۴)	N(۱۰۹۹.۳۳,۳۲۲۳.۰۸۴)
۱۶	N(۳۲,۳.۵)	N(۱.۸۷۶,۰.۰۰۹۷)	N(۱۱۰۰.۱۸,۳۲۲۷.۸۴۶)
۱۷	N(۳۲.۲,۴.۷)	N(۱.۸۵۸,۰.۰۰۹۹)	N(۱۱۱۱.۵۹,۳۳۳۶.۰۲۶)
۱۸	N(۱۵.۴,۰.۳)	N(۱.۸۵۴,۰.۰۰۹۵)	N(۱۱۱۲.۸۳,۳۳۰۲.۴۴۶)
۱۹	N(۲۱.۶,۱.۸)	N(۱.۱۸,۰.۱۵۵۸)	N(۱۱۱۴.۰۷,۳۳۰۹.۹۳۸)
۲۰	N(۳۶.۲,۲.۷)	N(۱.۶۶۸,۰.۱۴۰۹)	N(۱۱۱۵.۳۱,۳۳۱۷.۲۷۳)
۲۱	N(۳۲,3.5)	N(۱.۸۲۲,۰.۰۰۹۸)	N(۱۱۱۲.۹۷,۳۳۰۳.۴۲۹)
۲۲	N(۳۲.۴,۵.۸)	N(۱.۹۶,۰.۰۱۵۴)	N(۱۱۲۱.۹۷,۳۳۵۲.۷۴۹)
۲۳	N(۲۱.۶,۱.۸)	N(۱.۹۴۸,۰.۰۱۲۵)	N(۱۱۰۵.۳۳,۳۲۵۹.۱۸۱)
۲۴	N(۲۲,۳.۵)	N(۱.۹۰۶,۰.۰۱۱۲)	N(۱۱۲۴.۳۹,۳۳۷۱.۳۸۱)
۲۵	N(۱۱.۴,۰.۳)	N(۱.۸۸۲,۰.۰۱۰۷)	N(۱۱۵۲.۵۱,۳۵۴۴.۰۰۸)
۲۶	N(۱۶.۲,۰.۷)	N(۱.۸۶۴,۰.۰۱۰۳)	N(۱۲۴۷.۲۳,۴۱۴۸.۵۴۶)
۲۷	N(۳۲,۳.۵)	N(۱.۸۴۴,۰.۰۱۰۳)	N(۱۳۱۴.۳۹,۴۶۰۶.۸۷۹)
۲۸	N(۲۱.۶,۱.۸)	N(۱.۸۷,۰.۰۱۰۳)	N(۱۲۵۲.۰۶,۴۱۸۰.۴۵۸)
۲۹	N(۲۲,۳.۵)	N(۱.۸۴۸,۰.۰۱۰۸)	N(۱۲۲۱.۵۶,۳۹۷۹.۱۹۸)
۳۰	N(۹۴.۴,۲۶.۳)	N(۲.۰۶۶,۰.۰۲۵۹)	N(۱۶۹۴.۸,۷۶۶۰.۱۱۶)
۳۱	N(۳۲,۳.۵)	N(۲.۱۱۸,۰.۰۱۱۷)	N(۱۳۰۶.۱۵,۴۵۴۹.۵۸۶)
۳۲	N(۴۲.۲,۰.۷)	N(۱.۹۶۸,۰.۱۲۵۸)	N(۱۱۹۰.۰۴,۳۷۷۹.۰۹)

همچنین برای هرDMU یک ماتریس واریانس کوواریانس متقارن براورد شده که به عنوان مثال برای DMU1 درایه‌های ماتریس در جدول (۳) آمده است. مقدار درایه‌ها نشان دهنده ارتباط مستقیم بین متغییرهای ورودی و خروجی را نشان می‌دهد.

جدول (۳):درایه های ماتریس واریانس کوواریانس$\mathbf{DMU_1}$

کوواریانس	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$
$\tilde{x}_1$	۳.۲	۱.۹	۴.۱۵	۰.۱۴	۹۷.۹۹۶
$\tilde{x}_2$	۱.۹	۱.۳	۲.۵۵	۰.۰۵۵	۵۹.۸۱۷
$\tilde{y}_1$	۴.۱۵	۲.۵۵	۵.۸	۰.۰۳۵	۱۱۹.۰۱۲
$\tilde{z}_1$	۰.۱۴	۰.۰۵۵	۰.۰۳۵	۰.۰۵۹	۷.۲۲۰۵
$\tilde{z}_2$	۹۷.۹۹۶	۵۹.۸۱۷	۱۱۹.۰۱۲	۷.۲۲۰۵	۳۲۲۹.۶۹۹

برای مقادیر مختلف خطا از مدل (۵) کارایی تصادفی محاسبه شده که در جدول (۴) مقدار کارایی تصادفی و رتبه واحدها آمده است.

جدول (٤): مقدارکارایی تصادفی DMU ها

α DMU	۰.۵	رتبه	۰.۴	رتبه	۰.۱	رتبه	۰.۰۵	رتبه
۱	۱	۱	۰.۸۹۱۶۳۰	۹	۰.۸۵۳۰۸۸	۹	۰.۸۴۳۸۱۰	۹
۲	۰.۶۴۴۴۴۶	۱۷	۰.۶۷۲۸۰۹۳	۲۱	۰.۵۷۴۵۹۹	۲۲	۰.۵۶۱۸۰۲	۲۲
۳	۰.۷۵۵۷۶۷	۱۲	۰.۷۴۱۸۰۶	۱۶	۰.۷۲۳۵۷۲	۱۳	۰.۷۲۰۲۵۲	۱۳
۴	۱	۱	۰.۸۹۷۵۸۲	۵	۰.۸۷۵۶۵۶	۶	۰.۸۷۸۰۲۱۳	۶
۵	۰.۵۳۳۴۶۲	۲۲	۰.۵۰۷۳۱۵	۲۶	۰.۴۶۵۵۱۲	۲۶	۰.۴۶۳۱۱۹	۲۶
۶	۰.۲۷۹۹۴۹	۲۸	۰.۲۸۱۹۳۹	۳۲	۰.۲۶۹۰۵۷	۳۲	۰.۲۵۸۰۷۴	۳۲
۷	۱	۱	۰.۸۸۸۵۹۸	۱۰	۰.۸۳۶۷۱۷	۱۰	۰.۸۲۲۶۴۱	۱۰
۸	۱	۱	۰.۸۹۹۹۴۵	۱	۰.۸۸۹۷۴۴	۲	۰.۸۸۹۶۶۸	۲
۹	۰.۹۹۹۹۹۹	۶	۰.۸۹۷۲۱۳	۶	۰.۸۷۵۷۵۴	۵	۰.۸۷۱۸۹۳	۵
۱۰	۱	۱	۰.۸۹۷۸۲۵	۴	۰.۸۷۹۲۰۴	۳	۰.۸۷۶۱۲۷	۳
۱۱	۰.۴۷۳۵۸۱	۲۳	۰.۴۷۲۳۵۹	۲۷	۰.۴۵۷۴۲۱	۲۷	۰.۴۵۵۹۶۵	۲۷
۱۲	۰.۸۵۷۱۸۳	۸	۰.۸۱۹۶۲۲	۱۱	۰.۶۵۸۱۶۲	۱۷	۰.۶۲۶۰۱۲	۱۷
۱۳	۰.۶۸۴۹۴۱	۱۵	۰.۶۸۲۱۵۵	۱۸	۰.۶۵۹۱۳۱	۱۶	۰.۶۵۴۱۵۶	۱۵
۱۴	۰.۳۸۲۸۳۶	۲۷	۰.۳۷۸۲۱۳	۳۱	۰.۳۴۰۷۵۲	۳۱	۰.۳۴۰۳۳۱	۳۱
۱۵	۰.۵۸۳۲۴۴	۲۰	۰.۵۷۳۵۷۴	۲۳	۰.۵۴۹۰۶۵	۲۳	۰.۵۴۴۹۳۸	۲۳
۱۶	۱	۱	۰.۷۵۸۸۷۱	۱۵	۰.۶۳۷۸۴۴	۱۸	۰.۶۲۴۵۶۴	۱۸
۱۷	۰.۸۰۳۹۸۶	۱۰	۰.۷۹۳۹۴۳	۱۲	۰.۷۵۳۵۱۳	۱۲	۰.۷۴۲۷۹۳	۱۲
۱۸	۰.۷۰۱۸۸۴	۱۴	۰.۶۷۷۶۸۵	۱۹	۰.۵۸۷۳۸۸	۱۹	۰.۵۶۵۵۴۰	۲۱
۱۹	۱	۱	۰.۸۹۷۸۸۹	۳	۰.۸۷۸۵۹۷	۴	۰.۸۷۴۸۵۹	۴

۲۰	۰.۸۹۹۹۹۸	۷	۰.۸۹۵۷۹۸	۸	۰.۸۶۹۹۰۸	۷	۰.۸۶۴۵۴۲	۷
۲۱	۰.۴۱۷۷۶۳	۲۶	۰.۴۰۶۷۹۵	۳۰	۰.۳۶۴۸۱۳	۳۰	۰.۳۶۰۵۴۸	۳۰
۲۲	۰.۵۷۰۸۸۷	۲۱	۰.۵۶۰۸۵۲	۲۵	۰.۵۳۲۹۷۳	۲۴	۰.۵۲۶۸۱۹	۲۴
۲۳	۰.۵۹۰۹۶۳	۱۹	۰.۵۶۶۸۰۹	۲۴	۰.۵۱۰۶۳۹	۲۵	۰.۴۹۷۳۹۸	۲۵
۲۴	۰.۴۲۱۰۱۹	۲۵	۰.۴۱۷۹۶۲	۲۹	۰.۳۹۵۶۳۳	۲۹	۰.۴۹۱۷۱۶	۲۹
۲۵	۰.۸۲۵۱۰۴	۹	۰.۷۹۲۱۳۲	۱۴	۰.۶۷۷۳۸۷	۱۵	۰.۶۵۳۰۳۵	۱۶
۲۶	۰.۷۹۶۳۳۲	۱۱	۰.۷۹۲۹۳۰	۱۳	۰.۷۶۶۰۶۲	۱۱	۰.۷۵۹۷۵۶	۱۱
۲۷	۰.۶۰۶۶۹۸	۱۸	۰.۶۰۲۹۷۱	۲۲	۰.۵۷۸۵۳۹	۲۱	۰.۵۷۳۴۸۹	۱۹
۲۸	۰.۷۱۹۶۶۵	۱۳	۰.۷۱۷۴۷۶	۱۷	۰.۶۹۳۳۷۲	۱۴	۰.۶۸۹۸۰۹۹	۱۴
۲۹	۰.۶۵۱۲۷۳	۱۶	۰.۶۳۶۲۸۰	۲۰	۰.۵۷۹۶۸۷	۲۰	۰.۵۶۶۱۴۱	۲۰
۳۰	۱	۱	۰.۸۹۹۸۹۵	۲	۰.۸۸۹۷۷۳	۱	۰.۸۸۹۶۹۹	۱
۳۱	۰.۴۶۷۵۸۹	۲۴	۰.۴۶۶۴۱۲	۲۸	۰.۴۵۲۹۳۰	۲۸	۰.۴۵۱۹۴۶	۲۸
۳۲	۱	۱	۰.۸۹۷۰۶۱	۷	۰.۸۶۴۵۲۱	۸	۰.۸۵۶۷۹۴	۸

با توجه به اینکه تابع معکوس نرمال استاندارد در خطای ۰.۵ برابر صفر است. پس در مدل(۵) نقش واریانس‌ها در محاسبه کارایی تصادفی حذف شده و در واقع کارایی تصادفی فقط بر حسب میانگین متغیرها محاسبه می‌شود. پس با توجه به مقادیر کارایی تصادفی در مقدار خطا ۰.۵ مشاهده می‌شود فقط برخی از واحدها کارا تصادفی هستند و بسیاری غیرکارا هستند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش اطمینان (کاهش خطا) کارایی تصادفی هر واحد کاهش یافته و رتبه برخی واحدها تغییر می‌کند بدلیل اینکه با کاهش مقدار خطا مقدار تابع معکوس نرمال استاندارد در مدل نیز کاهش می‌یابد. همچنین در جدول (۵) به عنوان مثال برای خطای ۰.۰۵ کارایی متقاطع تصادفی از مدل (۷) و از روش خودخواهانه مدل(۱۰) محاسبه شده است و مشاهده می‌شود که رتبه‌های کارایی‌های متقاطع تصادفی از مدل‌های (۷) و(۱۰) در برخی از واحدها تغییر پیدا کرده و رتبه‌بندی و جداسازی واحدها با قدرت بیشتری انجام گرفته است.

جدول (۵): کارایی متقاطع تصادفی DMU ها برای خطای ۰.۰۵

	با استفاده از مدل (۷)		با استفاده از مدل (۱۲)	
DMU	$E^*{}_d$	رتبه	θ_j	رتبه
۱	۰.۵۴۲۹۹۰	۱۱	۰.۵۴۱۵۱۳	۱۱
۲	۰.۲۳۶۴۷۱	۳۲	۰.۲۶۱۶۷۴	۳۲
۳	۰.۲۵۴۰۴۶	۳۱	۰.۳۳۳۷۵۰	۳۰
۴	۰.۵۸۰۵۵۴	۷	۰.۶۲۲۹۶۹	۷
۵	۰.۴۱۴۸۸۹	۱۸	۰.۴۶۰۱۸۹	۱۹
۶	۰.۳۲۳۲۸۳	۲۸	۰.۳۴۱۶۵۶	۲۹
۷	۰.۴۵۰۳۷۹	۱۶	۰.۴۷۶۴۰۷	۱۶
۸	۰.۸۹۶۴۳۷	۱	۰.۸۹۸۸۱۱	۱

۹	۰.۴۵۴۲۶۶	۱۵	.۰.۵۱۵۵۱۲	۱۴
۱۰	۰.۶۹۸۵۸۳	۴	۰.۷۶۵۰۳۷	۳
۱۱	۰.۴۳۸۷۹۷	۱۷	۰.۴۶۳۸۴۸	۱۸
۱۲	۰.۲۶۵۹۹۲	۳۰	۰.۲۷۳۵۴۸	۳۱
۱۳	۰.۵۵۰۹۲۱	۱۰	۰.۵۷۹۲۶۶	۱۰
۱۴	۰.۴۰۵۴۳۱	۲۰	۰.۴۲۰۹۰۵	۲۱
۱۵	۰.۵۰۴۰۶۲	۱۲	۰.۵۰۳۸۴۸	۱۵
۱۶	۰.۵۷۱۲۹۵	۸	۰.۶۰۵۶۸۸	۹
۱۷	۰.۶۰۷۵۰۸	۶	۰.۶۳۶۰۰۹	۶
۱۸	۰.۳۵۱۳۳۲	۲۵	۰.۳۷۳۴۴۴	۲۵
۱۹	۰.۷۰۰۸۴۳	۳	۰.۶۹۸۲۴۱	۴
۲۰	۰.۷۵۳۶۳۱	۲	۰.۷۸۰۷۹۱	۲
۲۱	۰.۳۹۸۹۵۰	۲۱	۰.۴۱۹۶۴۰	۲۲
۲۲	۰.۴۸۳۹۷۵	۱۳	۰.۵۱۸۳۹۰	۱۳
۲۳	۰.۳۵۰۷۹۶	۲۶	۰.۳۶۶۱۷۱	۲۶
۲۴	۰.۳۳۳۳۲۱	۲۷	۰.۳۵۸۳۹۸	۲۷
۲۵	۰.۳۱۵۸۵۳	۲۹	۰.۳۵۰۳۶۸	۲۸
۲۶	۰.۳۷۶۲۲۴	۲۳	۰.۴۴۴۳۵۰	۲۰
۲۷	۰.۴۷۰۷۲۶	۱۴	۰.۵۲۰۱۵۵	۱۲
۲۸	۰.۴۰۵۶۷۹	۱۹	۰.۴۶۸۷۵۵	۱۷
۲۹	۰.۳۸۳۳۷۸	۲۲	۰.۴۱۲۴۴۱	۲۴
۳۰	۰.۶۶۲۲۵۵	۵	۰.۶۸۱۷۷۶	۵
۳۱	۰.۳۶۰۶۸۱	۲۴	۰.۴۱۹۵۲۵	۲۳
۳۲	۰.۵۷۰۳۱۰	۹	۰.۶۰۶۱۰۵	۸

٦- نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای تحقیقات بیشتر

به منظور ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده و رتبه‌بندی واحدهای کارا مدل‌های زیادی در شاخه DEA ارائه شده است. این مدل‌ها عمدتاً برای داده‌های مختلفی از جمله قطعی، بازه‌ای، فازی و ... بسط داده شده‌اند. در دنیای واقعی معمولاً با مسائلی سروکار داریم که داده‌های آن به صورت قطعی و تحت کنترل واحدهای تصمیم‌گیرنده نیستند، به عبارت دیگر ماهیت تصادفی دارند. در چنین شرایطی نیاز به تعمیم و معرفی روش‌هایی برای ارزیابی و رتبه‌بندی واحدها وجود دارد. اخیراً مدل‌هایی به منظور ارزیابی واحدهای تصادفی معرفی شده است. در کلیه روش‌های ارائه شده با درنظر گرفتن سطح خطای α برای حالت‌های پیش‌بینی نشده احتمال وقوع قائل می‌شویم این سطح باید از ابتدای تحلیل‌ها توسط مدیر و بر مبنای میزان حساسیت او به نتایج مشخص شود. نتایج حاصله وابسته به این سطح خطا بوده به طوری که تغییر در این سطح منجر به تغییر در نتایج خواهد شد و بنابراین مدیر باید در انتخاب سطح α دقت ویژه‌ای داشته باشد. باید توجه داشت که هر روش رتبه‌بندی دارای معایب و محاسن مربوط به خود است،

به طوری که نمی‌توان با قطعیت حکم بر برتری یک روش داد؛ بنابراین انتخاب نوع رتبه‌بندی به استراتژی مدیریت و مسأله مورد بررسی، بستگی دارد. هدف در این مقاله پیشنهاد مدلی بود که بر اساس آن کارایی DMU ها را در صورت تصادفی بودن مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها و نیز در صورت داشتن خروجی نامطلوب بتوان محاسبه کرد. با استفاده از مدل مضربی BCC ورودی محور و دارای خروجی نامطلوب، تکنیک‌های آماری و توزیع نرمال مدل‌های تصادفی برای محاسبه کارایی تصادفی پیشنهاد شده و بر اساس آن معیار رتبه‌بندی میانگین تعریف شد. سپس کارایی متقاطع تصادفی برای رتبه‌بندی DMU ها در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی بر اساس برنامه‌ریزی قیود تصادفی و مقدار میانگین تابع هدف تعریف شد و از آنجایی که وزن‌های بهینه منحصر به فرد نیستند جهت رتبه‌بندی بهتر و اولویت دادن به آنها روش خودخواهانه پیشنهاد شد که بتوان با قدرت بیشتری به جداسازی و رتبه‌بندیِ کارایی تصادفی DMU ها پرداخت. نهایتاً مدل‌ها برای ۳۲ واحد نیروگاه حرارتی که تولیدکننده انرژی هستند پیاده‌سازی شد و مشاهده شد که استفاده از مدل‌ها در رتبه‌بندی بهتر واحدها قابل استفاده است. در تحقیقات آینده می‌توان برای مدل های دیگر در DEA و همچنین برای توزیع‌های دیگر آماری از قبیل نرمال چوله و وایبل و رایلی مدل‌های جدیدی را به‌دست آورد. همچنین می‌توان مدل‌ها را برای مدل‌های دیگرUMF ، CCR و مدل‌های غیر شعایی نیز برای داده‌های قطعی و فازی و هیبرید گسترش داد.

References:

Andersen, P., Petersen, N.C., (1993).A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39 (10), 1261-1264.

Amirteimoori, A., Charles, V., & Mehdizadeh, S. (2023). Stochastic data envelopment analysis in the presence of undesirable outputs. *Journal of the Operational Research Society*, 1-14.

Banker RD, Charnes A and Cooper WW (1984). Some method for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science* 30(9): 1078–1092.

Bruni ME, Conforti D, Beraldi P and Tundis E (2009). Probabilistically constrained models for efficiency and dominance in DEA. *International Journal of Production Economics* 117(1): 219–228.

Cooper WW, Huang ZM, Lelas V, Li SX and Olesen OB (1998). Chance constrained programming formulations for stochastic characterizations of efficiency and dominance in DEA. *Journal of Productivity Analysis* 9(1): 530–579.

Cooper WW, Deng H, Huang Z and Li Susan X (2002). Chance constrained programming approaches to technical efficiencies and inefficiencies in stochastic data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society* 53(12): 1347–1356.

Cooper WW, Deng H, Huang ZM and Li SX (2004). Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 155(2):487–501.

Charnes A, Cooper WW and Rhodes E (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2 (6): 429–444.

Cook, W., Roll, Y., Kazakov, A.,(1990). DEA model for measuring the relative efficiencies of highway maintenance patrols. *INFOR 28* (2), 811-818.

Charnes A and Cooper WW (1959). Chance-constrained programming. *Management Science* 6 (1): 73–79.

Chen Z, Wanke P, Antunes JJM, Zhang N (2017). Chinese airline efficiency under CO_2 emissions and flight delays: A stochastic network DEA model. *Energy Economics* 68: 89-108.

Charles V, Cornillier F(2017). Value of the stochastic efficiency in data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications*, Volume 81, Pages 349-357.

Chen Z, Wanke P, Antunes JJM, Zhang N (2017). Chinese airline efficiency under CO_2 emissions and flight delays: A stochastic network DEA model. *Energy Economics* 68: 89-108.

Dotoli M, Epicoco N, Falagario M and Sciancalepore F (2016). A Stochastic cross-efficiency data envelopment analysis approach for supplier selection under uncertainty .*International Transactions in Operational Research* 23, 725-748.

Davtalab-Olyaie M, Asgharian M, Partovi Nia V (2019). Stochastic ranking and dominance in DEA. *International Journal of Production Economics*, Volume 214, Pages 125-138

De Mello JC, Meza LA, da Silveira JQ, Gomes EG (2013). About negative efficiencies in cross evaluation BCC input oriented models. *European Journal of Operational Research* 229(3):732-7.

Hosseinzadeh Lotfi F, Nematollahi N, Behzadi MH, Mirbolouki M and Moghaddas Z (2012). Centralized resource allocation with stochastic data. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236 (7): 1783–1788.

Hosseinzadeh Lotfi, F., RostamyMalkhalifeh, M., Aghayi, N., Ghelej Beigi, Z., Gholami, K., (2013). An improved method for ranking alternatives in multiple criteria decision analysis. *Applied Mathematical Modelling*, 37, (1-2), 25-33

Hadi-Vencheh A, Esmaeilzadeh A (2013). A new super-efficiency model in the presence of negative data. *Journal of the Operational Research Society* 64(3):396-401.

Izadikhah, M., Saen, R.F., 2018. Assessing sustainability of supply chains by chance-constrained two-stage DEA model in the presence of undesirable factors.

Jradi S, Ruggiero J (2018). Stochastic data envelopment analysis: A quantile regression approach to estimate the production frontier. *European Journal of Operational Research*, In press, corrected proof, Available online 9 November 2018.

Jiang, T., Zhang, Y., & Jin, Q. (2021). Sustainability efficiency assessment of listed companies in China: a super-efficiency SBM-DEA model considering undesirable output. *Environmental Science and Pollution Research*, *28*(34), 47588-47604.

Jin J, Zhou D, Zhou P (2014). Measuring environmental performance with stochastic environmental DEA: the case of APEC economies. *Economic Modelling* 38:80-6.

Khanjani Shiraz, R., Tavana, M., & Fukuyama, H. (2021). A joint chance-constrained data envelopment analysis model with random output data. Operational Research, 21(2), 1255-1277.

Khodabakhshi M (2011). Super-efficiency in stochastic data envelopment analysis: An input relaxation approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235(16): 4576–4588.

Kao Ch, Liu Sh (2019). Stochastic efficiency measures for production units with correlated data. *European Journal of Operational Research*, Volume 273, Issue 1, 16, Pages 278-287.

Land KC, Lovell CAK and Thore S (1993). Chance constrained data envelopment analysis. *Managerial and Decision Economics* 14 (6): 541–554.

Liu, J., Fang, M., Jin, F., Wu, C., Chen, H., (2020). Multi-attribute decision making based on stochastic DEA cross-efficiency with ordinal variable and its application to evaluation of banks' sustainable development. *Sustainability* 12 (6), 2375.

Liu W, Wang Y, Lyu Sh (2017). The upper and lower bound evaluation based on the quantile efficiency in stochastic data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications*, Volume 85, Pages 14-24.

Lu, C.C., Chiu, Y.H., Shyu, M.K., Lee, J.H (2013). Measuring CO2 emission efficiency in OECD countries: application of the hybrid efficiency model. *Economical Modeling* 32, 130–135.

Morita H and Seiford LM (1999). Characteristics on stochastic DEA efficiency-Reliability and probability being efficient. *Journal of Operational Research Society of Japan* 42(4): 389–404.

Mandal, S.K (2010). Do undesirable output and environmental regulation matter in energy efficiency analysis? Evidence from Indian cement industry. *Energy Policy* 38(10), 6076–6083.

Park S, Ok Ch, Ha Ch (2018). A stochastic simulation-based holistic evaluation approach with DEA for vendor selection. *Computers & Operations Research*, Volume 100, Pages 368-378.

Takahashi, F. L., & Vasconcelos, M. R. (2023). Bank efficiency and undesirable output: An analysis of non-performing loans in the Brazilian banking sector. *Finance Research Letters*, 104651.

Ren, J., Gao, B., Zhang, J., Chen, C., 2020. Measuring the energy and carbon emission efficiency of regional transportation systems in China:Chance-constrained DEA models. *Math. Probl. Eng*. 2020.

Qu, Y., Li, J., & Wang, S. (2022). Green total factor productivity measurement of industrial enterprises in Zhejiang Province, China: A DEA model with undesirable output approach. *Energy Reports*, *8*, 307-317.

Omrani, H., Oveysi, Z., Emrouznejad, A., & Teplova, T. (2023). A mixed-integer network DEA with shared inputs and undesirable outputs for performance evaluation: Efficiency measurement of bank branches. *Journal of the Operational Research Society*, *74*(4), 1150-1165.

Olesen, OB and Petersen N (2016). Stochastic Data Envelopment Analysis-A review. *Europen Journal of Operational Research* 251(1):1-13.

Olesen OB (2006). Comparing and combining two approaches for chance constrained DEA. *Journal of Productivity Analysis* 26(2): 103–119.

Ruiz, J.L., Sirvent, I., (2012). On the DEA total weight flexibility and the aggregation in cross-efficiency evaluations. *European Journal of Operational Research* 223 (3), 732-738.

Simar L, Keilegom, I and Zelenyuk W (2017). Nonparametric least squares methods for stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis* 47(3):189-204

Sueyoshi, T., (1999). DEA nonparametric ranking test and index measurement: slackadjusted DEA and an application to Japanese agriculture cooperatives. Omega Int. J. *Management Science* 27 (3), 315-326.

Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: an Assessment of Data Envelopment Analysis. Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.

Shi, G.M., Bi, J., Wang, J.N (2010). Chinese regional industrial energy efficiency evaluation based on a DEA model of fixing non-energy inputs. *Energy Policy* 38 (10), 6172–6179.

Sueyoshi, T., Goto, M (2010). Should the US clean air act include CO2 emission control? Examination by data envelopment analysis. *Energy Policy* 38 (10), 5902–5911.

Wang, Y. M., Chin, K. S, (2010). A neutral DEA model for cross-efficiency54-evaluation and its extension, *Expert Systems with Applications* 37, 3666- 3675.

Wanke, P., Y. Tan, J. Antunes, and A. Hadi-Vencheh.(2020). Business environment drivers and technical efficiency in the Chinese energy industry: A robust Bayesian stochastic frontier analysis. *Computers & Industrial Engineering* 106487.

Wu, J., Chu, J., Sun, J., Zhu, Q., (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. *European Journal of Operational Research* 248 (2), 571-579.

Wu, C., Li, Y., Liu, Q., & Wang, K. (2013). A stochastic DEA model considering undesirable outputs with weak disposability. *Mathematical and Computer Modelling*, 58(5-6), 980-989.

Yang F, Ang S, Xia Q and Yang C (2012). Ranking DMUs by using interval DEA cross efficiency matrix with acceptability analysis. *European Journal of Operational Research* 223(2): 483–488.

Zhou Z, Lin L, Xiao H, Ma C and Wu S (2017). Stochastic network DEA model for two-stage systems under the centralized control organization mechanism. *Computers & Industrial Engineering* 110: 404-412.