




Research in Production and Operations Management
University of Isfahan E-ISSN: 2423-6950
Vol. 14, Issue 2, No. 33, Summer 2023

 <https://doi.org/10.22108/pom.2023.136414.1490>

(Research paper)

Optimal BTS location for coverage and traffic of cellular wireless networks

Elham Mousavi Kiasari

Faculty of Science, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran,
e.mousavi.9340@gmail.com

Akbar Hashemi Borzabadi*

Faculty of Science, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran,
borzabadi@mazust.ac.ir

Maryam Najimi

Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Science and Technology of
Mazandaran, Behshahr, Iran, m.najimi@mazust.ac.ir

Maria Afsharirad

Faculty of Science, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran,
m.afsharirad@mazust.ac.ir

Purpose: This paper aims to efficiently find the number and optimal placement of BTSs in the coverage area such that the implementation cost is minimized, while the user's traffic in the corresponding area and the channel interference constraints are satisfied.

Design/methodology/approach: An integer linear mathematical model has been proposed to assign all customer points to transceiver-based stations. The objective function has been assumed to minimize fixed costs while considering a penalty for reducing interference. An optimization solver has been applied to solve the model.

Findings: The proposed mathematical model was compared to another existing model in the literature from three points of view: coverage cost, construction costs, and running time. The results indicated that the proposed model has the appropriate efficiency to find solutions to real practical problems. In more detail, the proposed model succeeded to find solutions with less coverage or construction cost in a shorter time, compared with the model in literature, which has been referred to as the SSH model in

* Corresponding author, Orcid: 0000-0003-0514-3433 2423-6950 / © University of Isfahan
This is an open access article under the CC-BY-NC-ND 4.0 License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)



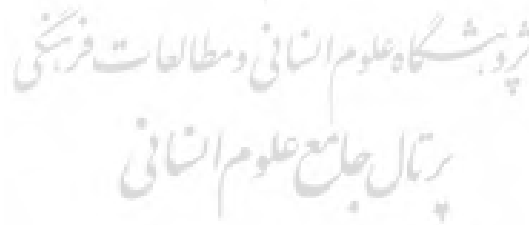
the paper. However, there have been some samples in which the SSH model overtakes the proposed model in one or two mentioned aspects for comparison.

Research limitations/implications: The limitation of this study is that the channel model was considered based on the simple free space path loss model, while the real channel model based on the environmental effects can be suggested for future work. Another important issue is that for BTS localization design, knowing the status of the real environment leads to the proper design in such networks.

Social/practical implications: BTS localization is the most important issue in mobile networks' design. In a practical situation, there is not any software available to design a mobile network in the corresponding coverage area. Therefore, this paper can help communication engineers to implement the proposed approach in a real environment.

Originality/value: In this paper, the problem of the optimal location of transceiver-based stations (BTS) in different models in the coverage area has been addressed such that the implementation cost is minimized, while the user's traffic in the corresponding area and the channel interference constraints are satisfied. This has not been considered in the literature. Any of the existing models focus on one aspect to optimize, such as maximizing the coverage, minimizing the interference, and minimizing coverage or construction costs. The novelties of the proposed model are twofold: i) two goals were considered in the objective function, i.e., minimizing construction costs and minimizing interference. Since interference with full coverage is unavoidable, the model added a penalty to the objective function to reduce the interference as much as possible; and ii) it was assumed that there is more than one single type BTS, any of which has different power, radius, and capacity. This makes the model more real and indeed more complicated to solve.

Keywords: BTS, localization, overlap, traffic





پژوهش در مدیریت تولید و عملیات، دوره ۱۴، شماره ۲، پیاپی ۳۳، تابستان ۱۴۰۲

دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۴ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۶ ص ۸۳-۹۸



<https://doi.org/10.22108/pom.2023.136414.1490>

(مقاله پژوهشی)

مکان‌یابی بهینه *BTS* برای پوشش و ترافیک شبکه‌های سلولی بی‌سیم

الهام موسوی کیاسری^۱، اکبر هاشمی برزآبادی^{۲*}، مریم نجیمی^۳، ماریا افشاری راد^۴

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران، e.mousavi.9340@gmail.com

۲- دانشیار دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران، borzabadi@mazust.ac.ir

۳- استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران، m.najimi@mazust.ac.ir

۴- استادیار دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران، m.afsharirad@mazust.ac.ir

چکیده: با توجه به اینکه قرارگیری مکان مناسب ایستگاه‌های پایه^۱ (*BTS*) از جهت بهبود همپوشانی، هزینه، برقراری ترافیک مدنظر و کنترل تداخل در شبکه‌های بی‌سیم، از اهمیت بسزایی برخوردار است، در این مقاله، هدف بهینه‌سازی تعداد ایستگاه‌های پایه و مکان آنها در محیط مدنظر، برای کاهش هزینه و پوشش دهی کامل آن، با توجه به تعداد کاربران موجود است؛ به طوری که ترافیک منطقه تأمین و تداخل ناشی از برقراری ارتباطات کنترل شود. توجه به این نکته ضروری است که ابزارهای طراحی واقعی موجود در صنعت، توانایی انتخاب مکان بهینه ایستگاه‌های پایه را با در نظر گرفتن احتیاجات تعریف شده در شبکه ندارند. به این منظور مدلی بر مبنای برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای پوشش برخی از عوامل تأثیرگذار بر مکان‌یابی تدوین شده است. در این مدل حداقل هزینه، توان، شعاع تحت پوشش، حداکثر ظرفیت هر آنتن، فاصله ایستگاه‌های مجاور با در نظر گرفتن امکان انتخاب نوع ایستگاه و فاصله بین هر کاربر و ایستگاه لحاظ شده است. عملکرد مدل پیشنهادی با ایجاد یک نمونه تصادفی از کاربران و ایستگاه‌ها بررسی و با مدل ارائه شده دیگری، مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی، *BTS*، همپوشانی، ترافیک



۱- مقدمه

امروزه استفاده از شبکه‌های بی‌سیم نسل پنجم، به‌طور فزاینده‌ای در حال افزایش است. در حالی که این شبکه‌ها تأخیر کمی دارند، دارای قابلیت گذردهی بالایی برای انواع مختلفی از سرویس‌ها هستند. همچنین این شبکه‌ها می‌توانند به انواع مختلفی از کاربردهای IOT^۲ مانند سیستم امنیتی، روشنایی در خانه‌های هوشمند، حسگرهای آشکارساز و غیره خدمت‌رسانی کنند (آراندا و همکاران^۳، ۲۰۱۹). همان‌طور که انتظار می‌رود، در آینده تمام شبکه‌های بی‌سیم، با استفاده از شبکه‌های نسل پنجم به یکدیگر متصل می‌شوند؛ به همین جهت، طراحی و یافتن مکان مناسب ایستگاه‌های پایه در این شبکه‌ها، اهمیت بسزایی دارد. در واقع، ایستگاه پایه در شبکه‌های نسل پنجم، وظیفه ارسال و دریافت را در ارتباطات بی‌سیم، بین کاربر و شبکه موبایل بر عهده دارد (شن و همکاران^۴، ۲۰۲۰). به عبارت دیگر، در یک منطقه جغرافیایی، موقعیت مناسب ایستگاه پایه در یک سلول، پارامتر بسیار مهمی در افزایش شاخص‌های بهبود کیفیت خدمات (QoS)^۵ شبکه است که عبارت‌اند از کاهش تداخل و بهبود ترافیک (حنیف و همکاران^۶، ۱۹۹۶). یکی از ابزارهای استفاده‌شده برای طراحی شبکه در صنعت، ARPS^۷ است که یک مکان برای ایستگاه پایه در نظر می‌گیرد و پوشش آن مشخص می‌شود. هدف از این مقاله، پیاده‌سازی یک مدل ریاضی برای بهینه‌کردن تعداد ایستگاه‌های پایه و یافتن مکان مناسب آنها در محیط مدنظر است؛ به‌نحوی که هزینه‌ها کاهش یابد و پوشش‌دهی کامل با توجه به تعداد کاربران موجود انجام گیرد، ضمن آنکه ترافیک منطقه تأمین و تداخل ناشی از برقراری ارتباطات کنترل شود. برای پیاده‌سازی مدل پیشنهادی، باید به چهار پارامتر توجه شود که عبارت‌اند از: ارسال رادیویی (بازه ارسال و فرکانس)، تخصیص منابع (هزینه در نظر گرفته شده برای توزیع مناسب)، ساختار شبکه (نوع ایستگاه‌های پایه استفاده‌شده و محدودیت‌های محیط) و کاربران متحرک (تعداد کاربران در محیط و متوسط ترافیک هر کاربر). در ادامه، ساختار کلی مقاله این‌گونه است که در بخش دوم، پیشینه تحقیق بیان شده و در بخش سوم، معرفی مسئله، محدودیت‌ها و اهداف ارائه شده است، در بخش چهارم نیز نتایج حاصل از عملکرد مدل، بررسی و با مدل دیگر معرفی شده برای این منظور، مقایسه و به‌همراه تحلیلی از نتایج بیان شده است.

۲- پیشینه تحقیق

در مقاله آسوناکو و همکاران^۸ (۲۰۰۱)، یک روش الگوهای استفاده مجدد چندگانه (MRP) برای کاهش تداخل کانال مشترک، بدون در نظر گرفتن ظرفیت ترافیک بررسی شده است. با این حال، با نیاز به استقرار سریع سیستم بی‌سیم، بهترین مکان BTS برای کارایی طیفی نیز بسیار مهم تلقی می‌شود (ماتار و نیستن^۹، ۲۰۰۰). در مقاله آواستی و آرورا^{۱۰} (۲۰۱۴)، بهترین مکان BTS برای برآوردن تقاضای ترافیک به کمک الگوریتمی براساس الگوریتم کلونی زنبورعسل مصنوعی (ABC) و الگوریتم ژنتیک استخراج شده است. در مقاله آلوگنا و همکاران^{۱۱} (۲۰۱۳)، یک الگوریتم هوشمند مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای مکان‌یابی BTS پیشنهاد شده است، در حالی که شرایط همسایگان در نظر گرفته می‌شود. در مقاله چن و همکاران^{۱۲} (۲۰۱۱)، روشی مبتنی بر یادگیری تجربی با هدف به حداقل رساندن خطای ارائه شده است که در فاصله برآوردشده بین نقطه مدنظر و هر BTS وجود دارد.

در مقاله ایجیتل و همکاران^{۱۳} (۲۰۱۶)، به بهینه‌سازی توزیع ایستگاه پایه به‌منظور بهبود عملکرد پوشش‌دهی و کیفیت سرویس (QoS) توجه شده است. در مقاله سوئی و همکاران^{۱۴} (۲۰۱۷)، چندین روش برای توزیع ایستگاه پایه، استفاده شده است؛ اما در این الگوریتم‌ها، تنها تأثیر مکان بر عملکرد شبکه در نظر گرفته شده و به تأثیر پارامترهای دیگر توجه نشده است. برای حل مسئله نیز از روش جست‌وجوی فراگیر استفاده شده است که پیچیدگی بسیاری زیادی دارد. در مقاله ماتوس و همکاران^{۱۵} (۲۰۱۹)، پارامترهای مختلف ایستگاه پایه، در یک فضای وسیع مدنظر در سیستم‌های LTE^{۱۶} بهینه می‌شود. همچنین، کارآمدی روش پیشنهادی در محیط واقعی آزموده شده است. تیگ و همکاران^{۱۷} (۲۰۱۹)، مسئله انتخاب ایستگاه‌های پایه را برای برآورده کردن تقاضای یک سرویس، با استفاده از الگوریتم ژنتیک در نظر گرفته‌اند، در حالی که طیال و همکاران^{۱۸} (۲۰۲۰)، مسئله مکان‌یابی بهینه تعدادی از ایستگاه‌های پایه را در یک شبکه در نظر گرفته و نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی را با روش‌های مختلف دیگر مقایسه کرده‌اند. در مقاله آفوزگانی و سویانتو^{۱۹} (۲۰۲۰)، از الگوریتم کرم شب‌تاب تکاملی^{۲۰} برای توزیع ایستگاه‌های پایه، به‌منظور پوشش منطقه مدنظر استفاده می‌کند. همچنین در مقاله دای و ژانگ^{۲۱} (۲۰۲۰)، یک پیش‌بینی‌کننده توان سیگنال دریافتی براساس مدل فضای آزاد، با استفاده از مدل یادگیری ماشین^{۲۲} (ML) آموزش داده شده است؛ سپس با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک، مسئله کاهش تعداد ایستگاه‌های پایه، با توجه به قید پوشش حل می‌شود. در مقاله سدا و همکاران^{۲۳} (۲۰۲۰)، یک مدل ریاضی به‌منظور توزیع ایستگاه‌های پایه در شبکه‌های بی‌سیم ارائه می‌شود و هدف این پژوهش، بهینه‌سازی تعداد ایستگاه‌های پایه به‌منظور پوشش کاربران در منطقه مدنظر است.

در حالت کلی، مسئله مکان‌یابی تسهیلات، نوعی مسئله بهینه‌سازی است که هدف آن انتخاب زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه محل‌های کاندید برای قراردادن تسهیلات است که بیشترین خدمت‌دهی و کمترین هزینه را فراهم کند. از ماهیت مسئله مکان‌یابی BTS ها پیداست که این مسئله در زمره مسائل مکان‌یابی تسهیلات قرار می‌گیرد؛ بنابراین استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی با اعداد صحیح مختلط، می‌تواند برای یافتن مکان بهینه BTS ها با لحاظ برخی موارد، نظیر پوشش مطلوب و ترافیک مشترکان کارساز باشد. استفاده از مدل‌های ریاضی، از این جهت ارزشمند است که امکان تحلیل حساسیت و همچنین به‌کارگیری الگوریتم‌های ابتکاری و کلاسیک متنوع و کارآمد را برای حل این مدل‌ها فراهم می‌آورد. همان‌طور که در کارهای قبلی مشخص است، هزینه اجرا، محدوده پوشش، ترافیک مشترکان و تداخل کانال مشترک در شبکه بی‌سیم، به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته نمی‌شود. در این مقاله، هدف به حداقل رساندن هزینه اجرای BTS در ناحیه تحت پوشش، با تعیین تعداد BTS ها و مکان مناسب آنهاست، در حالی که به قیود تقاضای ترافیک کاربران و همچنین محدودیت‌های تداخل کانال نیز توجه شده است.

۳- معرفی مسئله، محدودیت‌ها و اهداف

مسئله مکان‌یابی ایستگاه‌های پایه، عبارت است از پیدا کردن مکان‌های مناسب برای قراردادن ایستگاه‌های پایه در یک منطقه، به‌طوری که همه کاربران مدنظر تحت پوشش قرار گیرند و هم‌پوشانی مابین ایستگاه‌ها کمینه شود و همچنین با توجه به هزینه‌های احداث ایستگاه‌های پایه، حداقل هزینه‌های نصب نیز در نظر گرفته شود. بدون تردید این مسئله در مدل‌بندی‌های ریاضی در رده مسائل مکان‌یابی ارائه خدمات قرار می‌گیرد؛ بنابراین کلیه مدل‌ها و

روش‌های ارائه‌شده برای این رده از مسائل، قابلیت تعمیم برای مسئله مطرح‌شده در این پژوهش را دارد. امروزه به دلیل بازار رقابتی ارائه‌کنندگان خدمات برای تلفن‌های همراه و از ماهیت مسئله، مشخص است که پوشش تقاضای کاربران مهم‌ترین محدودیت‌های این مسئله محسوب می‌شود و باید در مدل‌بندی به‌عنوان محدودیت سخت لحاظ شود. به‌علاوه با افزایش تعداد کاربران، چاره‌ای به‌جز افزایش تعداد ایستگاه‌ها وجود ندارد و همین مسئله به افزایش همپوشانی ایستگاه‌ها منجر می‌شود که این موضوع نیز با توجه به ایجاد اختلال و همچنین ارتباط مستقیم با تعداد ایستگاه‌ها، که البته تأثیر بسزایی در هزینه‌های نصب خواهد گذاشت، از محدودیت‌های مهم و البته نرم مسئله محسوب می‌شود. البته بدون تردید، تخمین موقعیت کاربران نیز از مسائل فرعی و حائز اهمیت است؛ اما نظر به اینکه در روند مدل‌سازی، دخالت مستقیمی بر موضوعات مسئله ندارد، بنابراین از ابتدا تعداد کاربران در هر منطقه، که امکان احداث ایستگاه را دارند، دانسته فرض می‌شود.

در مدل‌بندی، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- ۱- کاربران در حال جابه‌جایی از منطقه خود به منطقه‌های دیگر نیستند. به عبارتی تعداد سرویس‌گیرندگان از هر ایستگاه و از هر نوع در آن مشخص است؛
- ۲- یک BTS منطقه محل استقرار خود را به‌طور کامل پوشش می‌دهد؛
- ۳- میزان تقاضای تمامی کاربران یکسان است. به عبارتی میزان تقاضای متغیر با زمان نیست؛
- ۴- فرض بر آن است که BTS در مرکز ناحیه محل استقرار قرار دارد و ناحیه پیرامون خود را تا شعاع مشخصی به‌طور کامل پوشش می‌دهد.

اکنون مجموعه اندیس‌ها، پارامترها و متغیرها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مجموعه اندیس‌ها

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$ - مجموعه کاربران

- $J = \{1, 2, \dots, m\}$ - مجموعه ایستگاه‌ها

- $K = \{1, 2, \dots, l\}$ - مجموعه اندیس انواع ایستگاه‌ها

پارامترها

- $P_k, k \in K$ - توان ایستگاه نوع k ام

- $r_k, k \in K$ - شعاع پوشش ایستگاه نوع k ام

- $w_i, i \in I$ - میزان تقاضای کاربر i ام

- $c_{jk}, j \in J, k \in K$ - هزینه احداث ایستگاه k ام از نوع j ام

- $d_{ij}, i \in I, j \in J$ - فاصله کاربر i ام از ایستگاه j ام

- $d_{jj}, j, j' \in J$ - فاصله دو ایستگاه j و j'

- $a_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$ - یک است، اگر کاربر i ام از ایستگاه j ام از نوع k ام پوشش داده شود و در غیر

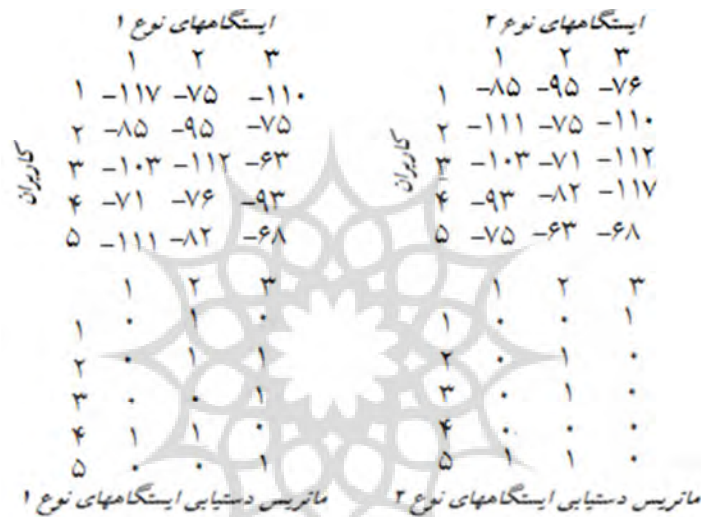
این صورت، صفر است.

پارامتر a_{ijk} ، $i \in I, j \in J, k \in K$ عموماً به‌عنوان درایه‌های ماتریسی با عنوان ماتریس دستیابی لحاظ و به قدرت دریافت سیگنال مرجع (RSRP) از ایستگاه، با نوع مشخص مربوط می‌شود و می‌تواند با رابطه زیر نیز تعیین شود:

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & d_{ij} \leq r_k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در عمل، عموماً RSRP با dBm بزرگ‌تر از -80 سیگنال پذیرفتنی تلقی می‌شود.

مثال ۱: در ماتریس‌های زیر، رابطه بین دو نوع از ایستگاه‌های ۱ تا ۳ و ۵ کاربر و ماتریس‌های دستیابی، با توجه به سیگنال پذیرفتنی، نمایش داده شده است.



شکل ۱- ماتریس دستیابی سه ایستگاه در دو نوع با ۵ کاربر

Fig. 1- Access matrix of three stations in two types with 5 users

متغیرهای تصمیم‌گیری

بدیهی است که متغیرهای تصمیم‌گیری، مهم‌ترین نقش را در مدل‌بندی دارند. آنها باید بتوانند به‌خوبی، تمامی قیود را پوشش دهند و معیار مناسبی در تعیین تابع هدف باشند. نظر به اینکه این مسئله، یک نوع مسئله مکان‌یابی است، متغیرهای تصمیم‌گیری مربوط باید بیانگر به‌کارگیری یا عدم به‌کارگیری ایستگاه نوعی i باشند. از طرفی چون نوع ایستگاه نوعی i در تعیین مدل و هزینه‌های نصب تأثیرگذار فرض شده است، بنابراین متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ایستگاه } j \text{ از نوع } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1)$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مشتری } i \text{ از ایستگاه } j \text{ سرویس بگیرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2)$$

۳-۱ مدل‌بندی پوشش شبکه

مسئله پوشش، بخش مهمی از مسئله مطرح شده در این پژوهش تلقی می‌شود. مدل پایه‌ای پوشش با لحاظ صرفاً یک نوع ایستگاه و با فرض اینکه $K = \{l\}$ به صورت مسئله کمینه‌سازی هزینه احداث ایستگاه‌ها، با شرط برآوردن تقاضای سرویس کاربران، به شکل زیر خواهد بود:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} c_{jl} x_{jl} \quad (3)$$

$$\text{s. t} \sum_{j \in J} a_{ijl} x_{jl} \geq 1, \forall i \in I \quad (4)$$

که در اینجا متغیرهای تصمیم‌گیری، همان متغیرهای (۱)، با فرض یک نوع ایستگاه‌اند. این مدل بسیار فراگیر است و در بیشتر مدل‌بندی‌ها از آن استفاده می‌شود؛ اما مشکل بزرگ این مدل پایه، برای ارائه خدمت ایستگاه‌ها، لحاظ نکردن تنوع توانمندی ایستگاه‌هاست. در ضمن ظرفیت خدمات‌دهی ایستگاه‌ها نیز در این مدل لحاظ نمی‌شود و باید به نحو مقتضی بررسی شود؛ بنابراین در ادامه، محدودیت‌هایی با توجه به متغیرهای تصمیم‌گیری (۱) و (۲)، به شکل زیر بیان و به آن توجه می‌شود. ابتدا به محدودیتی نیاز داریم که تضمین کند همه کاربران حداقل با یک ایستگاه پوشش داده می‌شوند و این محدودیت به صورت:

$$\sum_{j \in J} z_{ij} \geq 1, \forall i \in I \quad (5)$$

به‌خوبی بیان‌شدنی است. اگر قرار باشد هر کاربر فقط از یک ایستگاه استفاده کند، محدودیت (۵) به صورت تساوی خواهد بود. تضمین اینکه کاربر i توسط دستگاه z از نوع k پوشش داده شود، منوط به این خاصیت است که $a_{ijk} = 1$ باشد. برای برآوردن این تضمین شرط

$$a_{ijk} \geq z_{ij} + x_{jk} - 1, \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (6)$$

در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است اگر $a_{ijk} = 0$ نگاه محدودیت (۶) به $z_{ij} + x_{jk} \leq 1$ تبدیل می‌شود و این به آن معنی است که ایستگاه z از نوع k نیست و یا کاربر i توسط دستگاه z پوشش داده نمی‌شود. اکنون به این شرط نیاز داریم که نشان دهد کاربر i نمی‌تواند توسط دستگاه z پوشش داده شود، مگر اینکه ایستگاه z از نوع k باشد. این مهم با محدودیت

$$\sum_{k \in K} x_{jk} \geq z_{ij}, \forall i \in I, j \in J, \quad (7)$$

حاصل می‌شود؛ اما لازم است فقط از یکی از انواع ایستگاه‌ها استفاده شود تا محدودیت (۷) عملکرد مناسبی داشته باشد؛ بنابراین محدودیت زیر برای تضمین استفاده از یکی از انواع ایستگاه‌ها بیان می‌شود.

$$\sum_{k \in K} x_{jk} \leq 1, \forall j \in J, \quad (8)$$

اکنون بنا داریم محدودیت ظرفیت سرویس‌دهی ایستگاه‌ها را مدنظر قرار دهیم. بدیهی است که میزان تقاضای هر کاربری که از یک ایستگاه، سرویس دریافت می‌کند، نمی‌تواند از ظرفیت نوعی از ایستگاه تجاوز کند که مدنظر قرار گرفته است؛ بنابراین محدودیت زیر اعمال‌شدنی است و برای تضمین رعایت سقف ظرفیت نوع ایستگاه به کار گرفته شده است.

$$\sum_{i \in I} w_i z_{ij} \leq \sum_{k \in K} t_k x_{jk}, \forall j \in J, \quad (9)$$

اعمال محدودیت‌های (۵) تا (۹) به‌جای محدودیت (۴)، به‌خوبی محدودیت‌های پوشش را با لحاظ تنوع ایستگاه‌ها و همچنین در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت نوع ایستگاه به کار گرفته شده، بیان می‌کند و به‌منظور کمینه‌کردن هزینه، تابع هدف زیر می‌تواند باعث جست‌وجو در انواع ایستگاه‌های استفاده‌شدنی، برای یافتن بهترین ایستگاه‌ها برای پوشش تمام کاربران و همچنین کاهش هزینه‌ها شود.

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk} x_{jk} \quad (10)$$

۲-۳ همپوشانی و محدودیت‌های متناظر

همان‌طور که در ابتدای بخش بیان شد، همپوشانی یک محدودیت نرم عاملی برای کاهش کیفیت ارائه خدمت ایستگاه‌ها به کاربرهاست. در واقع با افزایش همپوشانی ایستگاه‌ها، امواج ارسالی دستگاه‌های استفاده‌شده کاربران دچار اختلال بیشتری خواهد شد. ایستگاه‌ها در ناحیه‌ای دایره‌ای شکل با شعاع مشخص $r_k, k \in K$ متناسب با ایستگاه از نوع k ام لحاظ شده‌اند. نحوه محاسبه شعاع پوشش براساس رابطه افت مسیر در فضای آزاد، با توجه به توان گیرنده در اختیار کاربر، p^r ، و همچنین توان ارسالی ایستگاه نوع k ام، p_k^t از فرمول زیر محاسبه می‌شود (رپاپورت^{۲۴}، ۲۰۰۲)

$$p^r = p_k^t h_t h_r \left(\frac{c}{4\pi f r_k} \right)^2 \quad (11)$$

که در این فرمول h_t ارتفاع ایستگاه فرستنده، h_r ارتفاع گیرنده، c سرعت نور و f فرکانس تشعشع رادیویی و برحسب مگاهرتز است. برای در نظر گرفتن عدم همپوشانی، راهبردهای متنوعی در پژوهش‌ها انجام شده است. با توجه به اینکه عدم همپوشانی یک محدودیت نرم تلقی می‌شود، بنابراین به‌طور منطقی می‌تواند با لحاظ یک آستانه فرضی، به‌عنوان حداقل فاصله برای تداخل‌نداشتن دو ایستگاه و یا به‌صورت یک هدف در نظر گرفته شود. در مقاله سدا و همکاران (۲۰۲۰) به کمک یک محدودیت غیرخطی و با فرض در نظر گرفتن یک آستانه $\tau = \min_{j, j' \in J} \{d_{jj'}\}$ و لحاظ یک نوع آنتن با فرض $K = \{k\}$ محدودیت به شکل زیر

$$\tau(x_{jk} + x_{j'k}) \leq d_{jj'}, \forall j, j' \in J,$$

در نظر گرفته شده و همچنین تابع هدف پیشنهادی به‌صورت

$$\text{Max} \left(\sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \min(x_{jk}, x_{j'k}) \right) / \left(\sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} d_{jj'} \right)$$

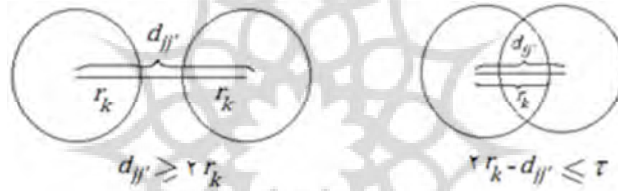
لحاظ شده است. با توجه به هدف کمینه‌سازی هزینه در موضوع پوشش، هدف بالا به‌صورت یک مسئله چند هدفه در نظر گرفته شده و در نهایت با شیوه عددسازی، با در نظر گرفتن وزن‌های دلخواه، به یک مسئله تک هدفه تبدیل شده است.

به دو دلیل در مدل‌بندی ارائه‌شده در این پژوهش، از شیوه بالا استفاده نشده است. نخست اینکه در مدل‌سازی ارائه‌شده، انواع ایستگاه‌ها و به تبع آن متغیرهای تصمیم‌گیری جدیدی اتخاذ شده و به‌علاوه به هدف دیگری توجه شده است که دوری از چالش انتخاب وزن‌های مؤثر در تعیین اهمیت تابع هدف مسئله است.

بنابراین به‌منظور در نظر گرفتن عدم همپوشانی و کاهش تداخل، راهبرد زیر مدنظر قرار گرفته است. با در نظر گرفتن پارامتر آستانه τ ، محدودیت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{k \in K} r_k x_{jk} + \sum_{k \in K} r_k x_{j'k} - d_{jj'} \leq \tau, \forall j, j' \in J, j \neq j' \quad (12)$$

که در آن پارامتر τ باید حداقل به میزان $\max_{j, j' \in J, k \in K} \{2r_k - d_{jj'}\}$ باشد. در شکل زیر نحوه عملکرد این محدودیت با فرض اینکه ایستگاه‌های j و j' از نوع k باشند و $x_{jk} = x_{j'k} = 1$ به‌وضوح نمایش داده شده است.



شکل ۲- نحوه عملکرد محدودیت ۱۲

تصویر سمت چپ نشان می‌دهد وقتی تداخلی در دو ایستگاه نباشد، محدودیت (۱۱) بی‌فایده خواهد بود و تصویر سمت راست مشخص می‌کند آستانه تعریف‌شده، باعث کاهش همپوشانی به میزان آستانه تعیین‌شده است.

Fig. 2- How the restriction works 12

The figure on the left shows that when there is no interference in the station, the restriction (11) will be useless, and the figure on the right shows that the defined threshold has reduced the overlap to the amount of the determined threshold

با توجه به اینکه مکان جایگذاری ایستگاه‌ها و شعاع پوشش آنها از ابتدا مشخص است، قبل از حل مسئله می‌توان محدودیت‌هایی را در نظر گرفت که امکان ایجاد تداخل را دارند و نیز تعداد زیادی از محدودیت‌های نوع (۱۲) را برای بررسی الگوریتم بهینه‌سازی کاهش داد.

به‌منظور نقش‌پذیری کاهش تداخل در تابع هدف، عبارت زیر را به‌عنوان یک جریمه به تابع هدف اضافه می‌کنیم که در آن M یک عدد بزرگ است:

$$M \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} z_{ij} - 1 \right). \quad (13)$$

۳-۳ مدل‌بندی کلی و ملاحظات پیچیدگی مسئله

اکنون با در نظر گرفتن معیارهای هدف و همچنین محدودیت‌های تعریف‌شده در بخش قبل، مسئله کمینه‌سازی هزینه نصب ایستگاه‌ها با لحاظ کاهش تداخل را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk} x_{jk} + M \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} z_{ij} - 1 \right) \quad (14)$$

با شرایط

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} z_{ij} &\geq 1, \forall i \in I, \\ a_{ijk} &\geq z_{ij} + x_{jk} - 1, \forall i \in I, j \in J, k \in K, \\ \sum_{k \in K} x_{jk} &\geq z_{ij}, \forall i \in I, j \in J, \\ \sum_{k \in K} x_{jk} &\leq 1, \forall j \in J, \\ \sum_{i \in I} w_i z_{ij} &\leq \sum_{k \in K} t_k x_{jk}, \forall j \in J, \end{aligned} \quad (15)$$

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ایستگاه } j \text{ ام نوع } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مشتری } i \text{ ام از ایستگاه } j \text{ سرویس گیرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای حل مدل بالا می‌توان از روش‌های متعددی استفاده کرد. در این مقاله از نسخه نرم‌افزار *GAMS* استفاده شده است که الگوریتمی مبتنی بر شاخه و کران را برای حل این مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک به کار می‌گیرد. در حالت کلی، مسئله پوشش مجموعه، یک مسئله NP-hard است (گاری و جانسون^{۲۵}، ۱۹۹۷). اندازه فضای جست‌وجو به تعداد تمام انتخاب‌های کاربران است؛ بنابراین با فرض وجود n کاربر، تعداد تمام این انتخاب‌ها براساس قضیه بسط دو جمله‌ای از قاعده زیر پیروی می‌کند (سدا و همکاران، ۲۰۲۰):

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n - 1 = O(2^n),$$

نظر به اینکه تعداد کل عملیات جبری در مسئله بهینه‌سازی (۱۴) با قیود (۱۵) حداکثر از مرتبه mn است، می‌توان گفت که پیچیدگی مدل ارائه‌شده از مرتبه $O(2^n mn)$ است.

۴ نتایج عددی و تحلیل آن

در این بخش نتایج عددی حاصل از مدل‌سازی انجام‌شده، بررسی شده است. با توجه به اینکه داده‌های حاصل از یک مسئله واقعی، قابلیت تغییر و بررسی‌های مختلف را میسر نمی‌کند، بنابراین به کمک نرم‌افزاری که جواب‌های مدل را می‌توان از آن استخراج کرد، امکان تولید داده‌های تصادفی برای مختصات استقرار کاربران و همچنین نواحی

ممکن برای نصب فراهم آورده شده است. در جدول ۱، اطلاعات مربوط به پارامترهای رابطه (۱۱) قید شده است. اطلاعات داده شده تا حدود زیادی به اطلاعات یک مسئله واقعی نزدیک است.

جدول ۱- پارامترهای مرتبط با رابطه (۱۱)

Table 1- Parameters related to the relationship (11)

$[-60, -80]$	p^r	توان دریافتی
20 m	h_t	ارتفاع فرستنده
1 m	h_r	ارتفاع گیرنده
$900 \times 10^6 \text{ Hz}$	f	فرکانس
$3 \times 10^6 \frac{m}{s}$	c	سرعت
$[500, 1200]$	r_k	شعاع

اکنون پارامترهای مرتبط با مدل ارائه شده در این مقاله را در جدول ۲ به شکل زیر معرفی می‌کنیم. به منظور امکان مقایسه نتایج حاصل از مدل، با نتایج به دست آمده از مدل ارائه شده در مقاله سدا و همکاران (۲۰۲۰)، صرفاً اطلاعات مربوط به یک نوع ایستگاه ذکر شده است؛ زیرا در پژوهش یادشده، انواع ایستگاه‌ها در مدل‌بندی لحاظ نشده است. به منظور سهولت در اشاره بر نتایج مدل‌های ارائه شده در این مقاله و مدل ارائه شده در سدا و همکاران (۲۰۲۰)، به ترتیب عناوین «مدل MBNA» و «مدل SSH» استفاده شده است. همچنین اطلاعات مربوط به کاربران به کمک نرم‌افزار، کاملاً به صورت تصادفی در ناحیه بررسی شده و با ابعاد ایرادشده در گستره مشخصی در نظر گرفته شده است که با توجه به حجم بالای داده‌ها، گزارش دادنی نیست. بدیهی است به منظور امکان یک مقایسه امکان‌پذیر، درست و انکاشدنی، صرفاً اطلاعات مربوط به قیود دو مسئله با داده‌های یکسان ارزیابی شده و همچنین بخشی از تابع هدف مربوط به هزینه احداث، یعنی (۱۰)، در هر دو مدل نیز، یکسان در نظر گرفته شده است. به علاوه به منظور محاسبه میزان تداخل و همپوشانی، به محاسبه کمیته یکسان در هر دو مدل نیاز است. به این منظور از کمیته

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} z_{ij} \quad (16)$$

استفاده شده است که در هر دو مدل می‌تواند معیار مناسبی برای محاسبه میزان تداخل باشد. در جدول زیر، کمیته‌های مربوط به پارامترهای مسئله (۱۵)–(۱۴) نمایش داده شده است.

جدول ۲- پارامترهای استفاده شده در هر دو مدل MBNA و SSH

Table 2- Parameters used in both MBNA and SSH models

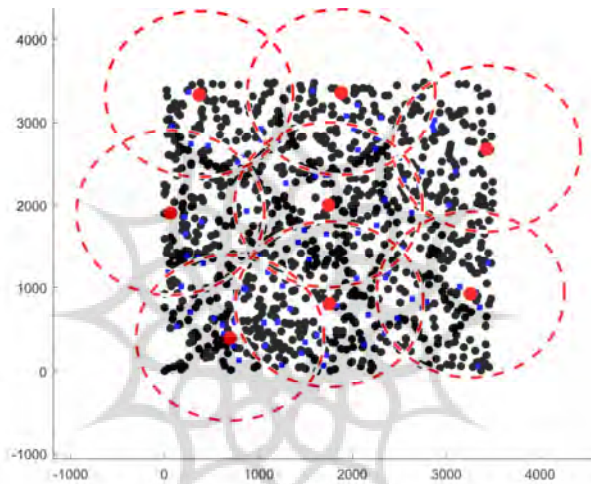
100	m	تعداد ایستگاه‌ها
1000	n	تعداد کاربران
$1000 m$	r_k	شعاع پوشش
$25 \times 10^3 E$	w_i	تقاضای کاربر
$71.06 w$	p_k	توان ایستگاه
$3500 \times 3500 m^2$		ابعاد محیط فرضی

هزینه جایگذاری هر ایستگاه کمیتی در بازه [100,200] و به صورت تصادفی تعیین شده است. هر دو مدل بر یک رایانه با پردازشگر Intel(R)Core(TM)i3-2350M CPU@2.30GHz و RAM : 4.00GB و به کمک نرم‌افزار GAMSDistribution23.7.3 اجرا و نتایج حاصل در جدول زیر، درج شده است.

جدول ۳- میانگین نتایج حاصل از ده نمونه تصادفی و اجرای مدل‌های MBNA و SSH
Table 3- Average results from ten random samples and running MBNA and SSH models

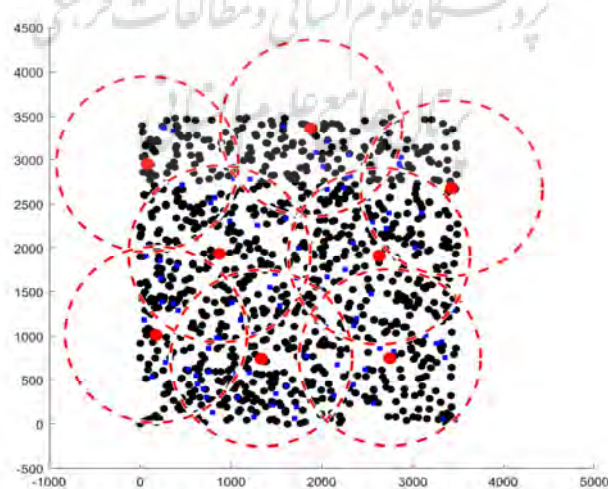
هزینه پوشش براساس مدل (۱۶)	هزینه احداث	زمان حل به ثانیه	
8.5811×10^4	1.5819×10^3	16.8689	نتایج حاصل از مدل MBNA
8.6952×10^4	1.5838×10^3	16.7697	نتایج حاصل از مدل SSH

در شکل‌های ۳ و ۴ نحوه توزیع کاربران و چینش ایستگاه با به‌کارگیری به ترتیب مدل MBNA و همچنین مدل SSH برای یک نمونه‌های تصادفی یکسان نمایش داده شده‌اند.



شکل ۳- توزیع ایستگاه‌ها در یک نمونه تصادفی در مدل MBNA

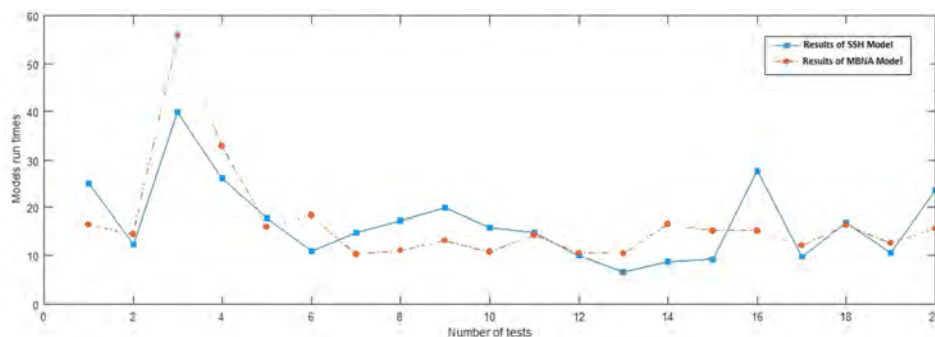
Fig. 3- Distribution of stations in a random sample in the MBNA model



شکل ۴. توزیع ایستگاه‌ها در یک نمونه تصادفی در مدل SSH

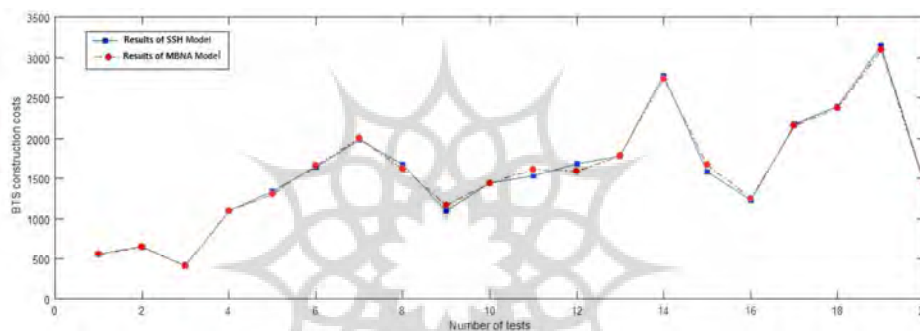
Fig. 4- Distribution of stations in a random sample in the SSH model

در شکل‌های ۵، ۶ و ۷ به ترتیب نمودارهای حاصل از زمان اجرای حل، هزینه‌های احداث BTSها و هزینه پوشش براساس معیار (۱۶)، ناشی از پیاده‌سازی مدل‌های MBNA و SSH در ۲۰ نمونه تصادفی نمایش داده شده است.



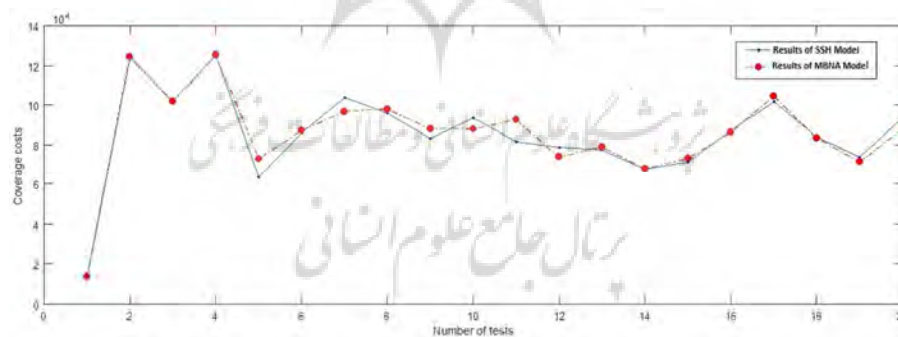
شکل ۵- نمودارهای حاصل از زمان اجرای حل مدل‌های MBNA و SSH در ۲۰ نمونه تصادفی

Fig. 5- Graphs resulting from the execution time of solving the MBNA and SSH models in 20 random samples



شکل ۶- نمودارهای حاصل از هزینه احداث BTSها در مدل‌های MBNA و SSH در ۲۰ نمونه تصادفی

Fig. 6- Graphs resulting from the construction cost of BTSs in MBNA and SSH models in 20 random samples



شکل ۷- نمودارهای حاصل از هزینه پوشش در مدل‌های MBNA و SSH در ۲۰ نمونه تصادفی

Fig. 7- Graphs of coverage cost in MBNA and SSH models in 20 random samples

به منظور مقایسه دو مدل ریاضی MBNA و SSH، ده مثال با پارامترهای تصادفی ساخته شده و جزئیات دقیق این مثال‌ها در بخش قبل آورده شده است. سه کمیت زمان اجرا، هزینه احداث و هزینه پوشش برای مقایسه دو مدل یادشده در نظر گرفته شده‌اند. شکل‌های ۵ تا ۷ به ترتیب مقدار سه کمیت زمان اجرا، هزینه احداث و هزینه پوشش را برای هر ۱۰ نمونه تصادفی گزارش می‌کند. همان‌گونه که از این شکل‌ها برمی‌آید، زمان اجرای مدل پیشنهادی MBNA در برخی نمونه‌ها کمتر از مقدار مشابه در مدل SSH بوده است، حال آنکه در حالت میانگین این مقدار

بیشتر است. از سوی دیگر هزینه‌های احداث و هزینه پوشش مدل SSH در برخی نمونه‌ها بهتر از مدل پیشنهادی است؛ اما میانگین هر دو هزینه در مدل پیشنهادی بهتر است. به‌طور خلاصه، جدول ۳ میانگین سه کمیت مقایسه‌شده را در دو مدل نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل پیشنهادی MBNA توانسته است به‌طور میانگین، هزینه پوشش و احداث را در مقایسه با مدل SSH کاهش دهد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شد چگونگی مکان‌یابی بهینه ایستگاه‌های مخابراتی ارائه‌دهنده خدمات شبکه به کاربران، در قالب مدل برنامه‌ریزی صفر و یک بررسی شود، به‌نحوی که میزان تداخل شبکه ناشی از همپوشانی ایستگاه‌ها تا حدود زیادی، مهار و به‌طور هم‌زمان، کاهش هزینه‌های ناشی از احداث ایستگاه‌ها و پوشش‌دهی آنها نیز لحاظ شود. مقایسه مدل ارائه‌شده در این مقاله نشان می‌دهد نحوه کار این مدل مطلوب است و عموماً از دیدگاه محاسباتی به بهبود کیفیت جواب‌ها نسبت به دیگر مدل ارائه‌شده در پیشینه پژوهش می‌انجامد. در نظر گرفتن هم‌زمان اهداف مهم در مسئله مکان‌یابی بهینه ایستگاه‌های مخابراتی شامل پوشش‌دهی، ترافیک منطقه و تداخل‌ناشتن ناشی از آن و همچنین هزینه‌های احداث در مدل ارائه‌شده، از نقاط قوت آن است.

افزون بر این، تنوع ناشی از به‌کارگیری انواع ایستگاه‌ها نیز در این مدل در نظر گرفته شده است که نشان از توانمندی مدل در امکان به‌کارگیری و تنوع‌بخشی در استفاده از انواع ایستگاه‌ها از لحاظ فنی است. بدیهی است در صورتی که ایستگاه قابلیت ارتقا را نیز داشته باشد، مدل ارائه‌شده قادر خواهد بود با تغییر بسیار ساده، حساسیت جواب‌ها را نسبت به تغییر داده‌شده بیازماید. برای توسعه پژوهش ارائه‌شده در مقاله، می‌توان در آینده به‌لحاظ پارامترهایی نظیر شرایط جغرافیایی منطقه، در نظر گرفتن شرایط بحرانی منطقه و همچنین مدل‌های پویایی توجه کرد که تغییرات جمعیتی را در ناحیه بررسی شده در نظر می‌گیرند.

References

- Afuzagani, D. & Suyanto, S. (2020). Optimizing BTS Placement Using Hybrid Evolutionary Firefly Algorithm. In *Proceedings of the 8th International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*, Yogyakarta, Indonesia, 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICoICT49345.2020.9166273>
- Alenoghena, C.O., Emagbetere, J.O. & Aibinu, A.M. (2013). Artificial intelligence based technique for BTS placement. *5th International Conference on Mechatronics (ICOM13)*, 53. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/53/1/012056>
- Aranda, D.A., Fernández, D.A. & Stantchev, V. (2019). Integration of Internet of Things (IoT) and Blockchain to increase humanitarian aid supply chains performance. In *Proceedings of the 2019 5th International Conference on Transportation Information and Safety (ICTIS)*, Liverpool, UK, 140–145. <https://doi.org/10.1109/ICTIS.2019.8883757>
- Assunaco, P., Estevinho, R. & Correja, L.M. (2001). Assessment of cellular planning methods for GSM, *12th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*. PIMRC 2001. Proceedings (Cat. No.01TH8598), San Diego, CA, USA, 2001, pp. C-C, <https://doi.org/10.1109/PIMRC.2001.965475>.
- Awasthi, A. & Arora, N. (2014). An approach to BTS localization using optimization techniques. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 3(4), 747-751. <https://doi.org/10.17577/IJERTV3IS041043>
- Chen, K., Pissnou, N. & Makki, K. (2011). Cellular network location estimation via RSS-based data clean enhanced scheme, *IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC)*, 924-930, <https://doi.org/10.1109/ISCC.2011.5983960>

- Dai, L. & Zhang, H. (2020). Propagation-Model-Free Base Station Deployment for Mobile Networks: Integrating Machine Learning and Heuristic Methods. *IEEE Access*, 8, 83375–83386. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2990631>
- Garey, M. & Johnson, D. (1997). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman and Company. New York.
- Hanif, D.S., Chandra M.P. & Theodore, S.R. (1996). Optimal location of transmitters for micro-cellular radio communication system design. *IEEE journal on selected areas in communications*, 14(4), 662-673. <https://doi.org/10.1109/49.490417>
- Mathar, R. & Niessen, T. (2000). Optimum positioning of base stations for cellular radio networks. *Wireless Networks*, 6(6): 421-428.
- Mattos, D.I., Bosch, J., Olsson, H.H., Dakkak, A. & Bergh, K. (2019). Automated optimization of software parameters in a long term evolution radio base station. In *Proceedings of the 2019 IEEE International Systems Conference (SysCon)*, Orlando, FL, USA, 1–8. <https://doi.org/10.1109/SYSCON.2019.8836830>
- Rappaport, T.S. (2002). *Wireless Communications—Principles and Practice (the book end)*. *Microwave Journal*, 45(12), 128-129.
- Seda, P., Seda, M. & Hosek, J. (2020). On mathematical modelling automatic coverage optimization in wireless 5G and beyond deployment. *Applied Sciences*, 10(24), 8853. <https://doi.org/10.3390/app10248853>
- Shen, C., Yun, M., Arora, A. & Choi, H.A. (2020). Efficient Mobile Base Station Placement for First Responders in Public Safety Networks. In: *Arai, K., Bhatia, R. (eds) Advances in Information and Communication*. FICC 2019. Lecture Notes in Networks and Systems, 70, 634-644, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12385-7_46
- Sui, X., Zhang, H. & Lv, Y. (2017). Coverage performance analysis of grid distribution in heterogeneous network. In *Proceedings of the 2017 IEEE 17th International Conference on Communication Technology (ICCT)*, Chengdu, China, 1424–1428. <https://doi.org/10.1109/ICCT.2017.8359867>
- Tayal, S., Garg, P. & Vijay, S. (2020). *Sites for Cellular Network Planning: In Applications of Geomatics in Civil Engineering*. Springer, Berlin/Heidelberg, Germany, 637–647.
- Teague, K., Abdel-Rahman, M.J. & Mac Kenzie, A.B. (2019). Joint base station selection and adaptive slicing in virtualized wireless networks: A stochastic optimization framework. In *Proceedings of the 2019 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC)*, Honolulu, HI, USA, 859–863.
- Yigitel, M.A., Incel, O.D. & Ersoy, C. (2016). Dynamic BS topology management for green next generation HetNets: An urban case study. *IEEE J. Sel. Areas Commun*, 34, 3482–3498. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2016.2621419>

¹ Base Transceiver Station

² Internet of Things

³ Aranda et al.

⁴ Shen et al.

⁵ Quality of Service

⁶ Hanif et al.

⁷ Atoll Radio Planning Software

⁸ Assunanco et al.

⁹ Mathar & Niessen

¹⁰ Awasthi & Arora

¹¹ Alenoghena et al.

¹² Chen et al.

¹³ Yigitel et al.

¹⁴ Sui et al.

¹⁵ Mattos et al.

¹⁶ Long Term Evolution

¹⁷ Teague et al.

¹⁸ Tayal et al.

¹⁹ Afuzagani & Suyanto

²⁰ Evolutionary firefly algorithm

²¹ Dai & Zhang

²² Machine Learning

²³ Seda et al.

²⁴ Rappaport

²⁵ Garey & Johnson