

طراحی نمودار کنترل تغییرپذیری فرآیندهای دو متغیره نرمال

سید محسن سید علی اکبر^۱

صدیق رئیسی^۲

چکیده

پایش کارای فرآیندهای تولیدی هم‌بسته با بهره‌گیری از نمودارهای کنترلی به شدت مورد توجه محققین مختلف قرار دارد تا از طریق آن بتوانند عملکرد یک فرآیند را در گذر زمان مطالعه کنند. هدف این نوع مطالعه بررسی آماری تحت کنترل بودن در شرایط عدم حضور عوامل اخلال در فرآیندها است.

در این مقاله به نحوه پایش تغییرات یکسان در درایه‌های ماتریس واریانس - کوواریانس فرآیندهای نرمال دو متغیره توجه شده است و در آن با بهره‌گیری از آماره پیرسون و ویلکس نحوه محاسبه حدود نمودار کنترلی L ، ارائه جدول مقادیر کوانتیل‌های آماره مذکور، پیشنهاد شده است. این روش کاربران را به آگاهی از تحت کنترل نبودن فرآیند از طریق ایجاد تغییر در ماتریس واریانس - کوواریانس قادر می‌سازد. به کمک این نمودار کنترلی و نیز با استفاده از نمودار جمع تجمعی چندمتغیره ابزار مناسبی در اختیار کاربران قرار می‌گیرد تا به سهولت علاوه بر نمودار کنترل تغییرات تک متغیره بتوانند موارد چند متغیره را نیز تحلیل نمایند. همچنین مقاله حاضر مشتمل بر خطوط راهنمایی شده می‌باشد تا زمینه بهره‌گیری صحیح این نمودار فراهم شود.

به منظور تعیین چگونگی طراحی نمودار کنترلی، مثال عددی ارائه و برای شبیه‌سازی آن برخی تغییرات معنی‌دار در فرآیند را نیز مورد توجه قرار گرفته است تا تصویر عملکرد این نمودار کنترلی را نشان دهد.

واژگان کلیدی: کنترل کیفیت چند متغیره، نمودارهای کنترل جمع تجمعی، کنترل تغییرپذیری، برآورد کوانتیل‌های

فرآیندهای غیرنرمال.

^۱ عضو هیئت علمی گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب (دکتری مهندسی صنایع - مری) hamid_aliakbar2003@yahoo.com

^۲ استادیار مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

مقدمه

کیفیت عامل اصلی در تصمیم‌گیری مشتریان برای ارزیابی محصول و خدمات محسوب می‌شود از این رو به شدت مورد توجه مدیران صنعتی قرار گرفته است تا بتوانند محصولاتی با بیشترین سطح ارضاء تقاضای مشتریان خود ارائه کنند. با پیشرفت فنون آماری اکنون کنترل کیفیت با بهره‌گیری از ابزارهای قوی نه‌تنها قادر به کنترل فرآیندهای تولید است، بلکه توانایی تحلیل گذشته فرآیند به‌منظور پیش‌بینی آینده و کنترل عوامل غیرتصادفی را فراهم می‌سازد. نمودارهای کنترل کیفیت یکی از ابزارهای قوی آماری در پایش فرآیندهای تولیدی محسوب می‌شود که به کمک آن تغییرات معنی‌دار آماری که بیانگر تاثیر عوامل مهم در فرآیندهای تولیدی است شناسائی و متناسب با آن اقدامات اصلاحی و یا پیشگیرانه دنبال خواهد شد [۱]. معمول‌ترین نمودارهای کنترلی زمانی مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد که مشخصات کیفی مورد مطالعه تک متغیر بوده و از توزیع آماری نرمال تبعیت کند. در این- صورت علاوه بر آزمون مستمر عدم تغییر توزیع آماری، پایش پارامترهای میانگین و پراش فرآیند در گذر زمان اهمیت ویژه‌ای برای مدیران و مهندسين امور کیفیت دارد. در صورتی که مطالعه همزمان چندین مشخصه کیفی اهمیت داشته باشد، روش‌های پایش پارامترهای فرآیندهای چند متغیره مطرح است لیکن این روش‌ها نیاز به دانش آماری بیشتر دارد. بسیاری از تحلیل‌گران ترجیح می‌دهند به دلیل سادگی محاسبات فرض استقلال مشخصه‌های کیفی را در نظر گرفته و مسائل خود را در محیط‌های آماری تک متغیره مورد بررسی قرار دهند [۲].

آشکار است که این فرض در بسیاری موارد مصداق لازم را ندارد ولی متأسفانه مشاهده می‌شود که کاربران به نادرستی آن را مورد استفاده قرار می‌دهند و ممکن است به پشتوانه آن تصمیم‌گیری‌های ناصحیح نیز انجام دهند. محققین مختلفی روش‌های کنترل کیفیت چند متغیره همبسته را توسعه داده‌اند. بسیاری از آنها به پایش میانگین فرآیند مستقل از پایش ماتریس واریانس-کواریانس توجه کرده‌اند [۳].

نخستین روش کنترل آماری فرآیندهای چند متغیره توسط هتلینگ در سال ۱۹۴۷ با طرح مثال‌های متنوعی در خصوص مکان‌هائی که در جنگ دوم جهانی بمباران شدند ارائه شد [۴]. در سال ۱۹۸۵ وودال و همکارانش [۵] نمودار کنترل جمع تجمعی چند متغیره^۳ را ارائه کردند. آنها نشان دادند اگر مشخصه‌های کیفی دارای توزیع نرمال دو متغیره باشند روش پیشنهادی اغلب بهتر از روش هتلینگ عمل می‌کند. همچنین آنها روش‌هایی برای بدست آوردن برآورد متوسط طول دنباله^۴ ارائه کردند. هی‌لی در سال ۱۹۸۷ [۶] روش دیگری از کاربرد نمودار کنترل جمع تجمعی در مسائل چند متغیره را ارائه کرد. روش پیشنهادی او قادر به کشف تغییرات در بردار میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس می‌باشد. برخی نویسندگان روش‌های کنترل چند متغیره را برای پایش تغییر در ماتریس واریانس-کواریانس توسعه داده‌اند که می‌توان به آلت [۷]، لوینسون [۸]، آپاریسی [۹]، خوو [۱۰] و نورالسنا [۱۱].

³ - Multi-variate cumulative sum (MCUMSUM)

⁴ - Average run length (ARL)

اساس نمودار کنترل جمع تجمعی چند متغیره بر مبنای در نظر گرفتن جمع انباشته انحرافات مقادیر کلیه نمونه های مشاهده شده از مقدار هدف ارائه شده است. اگر در حالت دو متغیره فرض شود که در هر بار تعداد نمونه (n) بیش از یک باشد و m مشاهده مستقل از فرآیند انجام شود و $\mathbf{X}_{n,i}$ مقدار مشاهده i ام در نمونه n باشد، دراین حالت برای کشف تغییر در ماتریس واریانس - کوواریانس از رابطه (۱) استفاده می شود.

(۱)

$$S_n = \max \left[S_{n-1} + \sum_{i=1}^m (\mathbf{X}_{n,i} - \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_{n,i} - \boldsymbol{\mu}) - K, 0 \right] > H$$

که در آن S_n مقدار جمع تجمعی بوده و H مقداری اختیاری دارد که متناسب با متوسط طول دنباله قابل تنظیم است. معمولاً در عمل مقدار H عدد ۴ یا ۵ فرض در نظر گرفته می شود. هر چه مقدار H بزرگ تر باشد، مقدار متوسط طول دنباله بیشتر خواهد بود و هر چه مقدار H کوچکتر باشد، مقدار متوسط طول دنباله کمتر خواهد شد. علاقه مندان می توانند برای جزئیات بیشتر به مرجع [۶] مراجعه کنند. برای محاسبه مقدار K می توان از رابطه شماره (۲) استفاده کرد.

(۲)

$$K = m \times 2 \times \ln(C) \left(\frac{C}{C-1} \right)$$

حال اگر \mathbf{S} ماتریس واریانس - کوواریانس نمونه ی n تایی مربوط به یک جامعه ی دو متغیره در نظر گرفته شود بنابراین درجه آزادی \mathbf{S} برابر $U = n - 1$ می باشد و لذا داریم:

اشاره کرد. در این مقاله نمودار جدیدی برای پایش ماتریس واریانس - کوواریانس فرآیندهای دو متغیره مطرح شده است. مفاهیم پایه ای این نمودارها در بخش ۲ ارائه شده و در بخش سوم روش پیشنهادی به همراه مزایای آن معرفی گردیده است.

مفاهیم پایه ای در نمودار کنترل جمع تجمعی

نمودار کنترل جمع تجمعی چند متغیره ابزاری آماری در جهت کشف تغییرات کوچک در ماتریس واریانس - کوواریانس ($\boldsymbol{\Sigma}$) زمانی که فرآیند از توزیع نرمال چند متغیره تبعیت می کند، می باشد. اگر بردار مشاهدات حاصل از یک فرآیند نرمال چند متغیره با ماتریس واریانس -

کوواریانس تحت کنترل مطلوب موسوم به $\boldsymbol{\Sigma}_G$ باشد و این ماتریس دچار تغییر شده و ماتریس جدید را $\boldsymbol{\Sigma}_B$ بنامیم، فرض بر این است که فرآیند تحت کنترل از تابع توزیع احتمال F_G و فرآیند تغییر یافته از توزیع احتمال F_B که هر دو توزیع نرمال چند متغیره هستند تبعیت کنند با این تفاوت که ماتریس های کوواریانس آنها به ترتیب $\boldsymbol{\Sigma}_G$ و $\boldsymbol{\Sigma}_B$ و بردار میانگین مشترک آنها $\boldsymbol{\mu}$ باشد. این نوع تغییر در ماتریس واریانس - کوواریانس از $\boldsymbol{\Sigma}$ به $C\boldsymbol{\Sigma}$ ساده ترین نوع تغییر می باشد و به این معنی است که همه واریانس ها و همبستگی بین متغیرها به یک نسبت افزایش یافته است. این نوع تغییر زمانی رخ می دهد که برخی اتفاقات دریک فرآیند تولید، بر روی همه متغیرها تأثیر یکسان داشته باشد. مثلاً تغییر درجه حرارت که می تواند باعث افزایش انحراف معیار طول، عرض و ارتفاع قطعه و همچنین کوواریانس بین آنها به نسبت ثابت C شود.

ارائه کردند. آنها از آماره L که مطابق رابطه شماره

(۶) تعریف شده است، استفاده کردند.

$$L = \lambda^{2n} \quad (۶)$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{|S_1|^{\frac{n}{2}} |S_2|^{\frac{n}{2}}}{|S_{2l}|^n} = \frac{\prod_{i=1}^2 |S_i|^{\frac{n}{2}}}{|S_{2l}|^n} \quad (۷)$$

آنها توزیع آماره L را به صورت زیر معرفی نمودند:

(۸)

$$\Pi(\Lambda < \gamma) = \frac{\Gamma(2\nu-3)}{\Gamma(\nu-1)\Gamma(\nu-2)2^{2\nu-5}} \times \left\{ \lambda^{2\nu-4} \lambda \gamma \gamma_{10}^{\left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)} + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda^2} \psi^{\nu-3} (1-\psi)^{\frac{1}{2}} \delta \psi \right\}$$

بنابر این فرضیه H_0 و یا تساوی ماتریس واریانس -

کوواریانس تنها زمانی رد می شود که $L > L_\alpha$ باشد. مقدار L_α حد بحرانی آماره L است که به استناد حداکثر خطای نوع اول کوانتیل مربوطه از توزیع آماره L می بایست محاسبه شود. پیرسون و ویلکس چگونگی برآورد کوانتیل های توزیع آماره L را ارائه نکردند.

باکس [۱۳] در سال ۱۹۴۹ در مقاله خود با تغییر مقیاس ادعا کرد که آماره L را می توان به کمک توزیع مربع کای و توزیع فیشر تقریب زد لیکن نورالسنا و سید علی اکبر [۱۴] نشان دادند که توزیع آزمون فوق در حالت کلی مربع کای نبوده و با شبیه سازی مصادیقی برای رد ادعای یاد شده ارائه کردند. آنها همچنین نشان دادند که نمودار کنترلی ارائه شده

(۳)

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'}{n-1}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i}{n}$$

از آنجایی که حجم هر نمونه n_i است ۱ و ۲

بنابراین درجه آزادی S_i برابر $\nu_i = n_i - 1$ می باشد و ماتریس واریانس - کوواریانس ادغامی نمونه^۵ که برآوردگر نا اریب ماتریس واریانس - کوواریانس است از رابطه شماره (۴) قابل محاسبه می باشد.

$$S_{2l} = \frac{\sum_{j=1}^2 \nu_j S_j}{\sum_{j=1}^2 \nu_j} \quad (۴)$$

اگر نمونه های مستقل به حجم n_1 و n_2 باشند

برای انجام آزمون فرض $H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2$ ، می توان از آماره M استفاده کرد که مطابق رابطه شماره (۵) تعریف شده است [۶].

$$M = \frac{|S_1|^{\frac{\nu_1}{2}} |S_2|^{\frac{\nu_2}{2}}}{|S_P|^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{\prod_{i=1}^2 |S_i|^{\frac{\nu_i}{2}}}{|S_P|^{\frac{\nu}{2}}} \quad (۵)$$

اگر $S_1 = S_2$ باشد آنگاه $M = 1$ شده و فرضیه آماری H_0 رد نمی شود. چنانچه اختلاف بین S_1, S_2 افزایش یابد، مقدار M به مقدار صفر نزدیک می شود.

پیرسون و ویلکس در سال ۱۹۳۳ آزمون دیگری را برای پایش تغییر پذیری فرآیندهای دو متغیره نرمال

در مرجع شماره [۸] بر مبنای توزیع مربع کای نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد.

نمودار پیشنهادی

همان طوری که اشاره شد آزمون برابری ماتریس - های واریانس - کوواریانس به کمک آماره L امکان پایش تغییرپذیری در محیط های همبسته دو متغیره نرمال را فراهم می کند و در اجرای آن فرض می شود بردار میانگین تحت کنترل بوده و در گذر زمان تغییرات معنی دار آماری ندارد. اما مشکل اصلی در استفاده از آماره L این است که حدود کنترلی مبتنی بر توزیع آماری L که توسط رابطه شماره ۸ مشخص شده است تا کنون ارائه نشده است. و دلیل این امر مشکلات عملیاتی در محاسبه کوانتیل های مورد نیاز برای حدود بالا و پائین کنترل می باشد. در حالت کلی می توان بر مبنای حداکثر خطای مجاز نوع اول α حدود کنترلی نمودار جمع تجمعی دو متغیره را طبق رابطه شماره (۹) معرفی کرد.

شانس مشاهده مقادیر بیشتر از آن برای آماره L برابر $L_{1-\alpha/2}$ (صدک پائینی) کوانتیلی را نشان می دهد که

باشد و $L_{0.5}$ (صدک پنجاهم) تاکید بر میانه $1-\alpha/2$ مقادیر L دارد. از آنجائیکه برآورد سه کوانتیل یاد شده که مختصات اصلی نمودار کنترلی L را تعیین می کند دشوار است لذا برنامه تولید مقادیر مذکور در محیط نرم افزار MATLAB در پیوست (۱) و جدول مقادیر کوانتیل های اصلی مورد نیاز جهت محاسبه حدود کنترل در پیوست شماره (۲) مقاله حاضر ارائه شده است.

مثال عددی

بمنظور نشان دادن سادگی محاسباتی روش ارائه شده از مثال عددی ارائه شده در مقاله [۹] که مصداقی عملی در کنترل کیفیت فرآیند نرمال دو متغیره است کمک گرفته شده است. در این مثال ۵ نمونه تصادفی ۱۲ تایی اخذ شده است. (نمونه های ۱ تا ۵ جدول ۱) پیرسون و ویلکس آزمون برابری داده اند که ماتریس واریانس - کوواریانس $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4 = \Sigma_5$ را انجام داده و نشان همگن است لذا μ و Σ فرآیند از روی این مقادیر نمونه ای قابل برآورد قابل اطمینان می باشد بنابر شرایط فاز اول در طراحی نمودار کنترلی تامین شده است. بردار میانگین و ماتریس واریانس - کوواریانس برآورد شده برای دو مشخصه کیفی x_1 و x_2 به قرار زیر شده است.

$$\mu = \begin{bmatrix} 31.8294 \\ 69.8240 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 15.8358 & 32.0051 \\ 32.0051 & 138.5754 \end{bmatrix}$$

که در آن بر اساس اطلاعات نمونه ای جمع آوری شده آماره L طبق رابطه شماره (۸) محاسبه و مورد پایش قرار می گیرد و مادامی که مقدار آن با تغییرات تصادفی در محدوده کنترل مشخص شده در رابطه (۹) قرار دارد، تغییر پذیری فرآیند تحت کنترل است. در رابطه مذکور UCL_L حد مجاز بالا و LCL_L حد مجاز پائین برای تغییرات تصادفی آماره L است و CL_L بیانگر خط مرکزی نمودار کنترلی می باشد. $L_{\alpha/2}$ (صدک بالایی) بیانگر مقداری از آماره L است که احتمال مشاهده مقادیر بیشتر تنها $\alpha/2$ شود و

$$\begin{aligned} UCL_L &= L_{\alpha/2} \\ CL_L &= L_{0.5} \\ LCL_L &= L_{1-\alpha/2} \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن بر اساس اطلاعات نمونه ای جمع آوری شده آماره L طبق رابطه شماره (۸) محاسبه و مورد پایش قرار می گیرد و مادامی که مقدار آن با تغییرات تصادفی در محدوده کنترل مشخص شده در رابطه (۹) قرار دارد، تغییر پذیری فرآیند تحت کنترل است. در رابطه مذکور UCL_L حد مجاز بالا و LCL_L حد مجاز پائین برای تغییرات تصادفی آماره L است و CL_L بیانگر خط مرکزی نمودار کنترلی می باشد. $L_{\alpha/2}$ (صدک بالایی) بیانگر مقداری از آماره L است که احتمال مشاهده مقادیر بیشتر تنها $\alpha/2$ شود و

به کاربران کنترل فرآیند ساده بوده و از نظر محاسباتی کاربران با فرمول‌های بسیار ساده کار خواهند نمود و مقادیر به‌راحتی از جدول برآورد کوانتیل‌ها قابل استخراج است. استفاده از جدول کوانتیل‌های ارائه شده در سطوح مختلف اطمینان مورد نظر بسیاری از کاربران سبب می‌شود که به‌راحتی مهندسیین فرآیند بتوانند فرآیندهایی که از کنترل خارج می‌شوند را شناسایی کرده و تولیدات خود را پایش نمایند. برنامه کامپیوتری ارائه شده در ضمیمه مقاله به علاقمندان توسعه جدول و محاسبه آماره L کمک می‌کند تا کوانتیل‌های مورد نظر خود را که در جدول ارائه نشده است را نیز محاسبه نمایند.

با توجه به اطلاعات حاصله به کمک جدول ارائه شده در پیوست شماره ۲ بر مبنای سطح اطمینان ۹۵٪ و یا ($\alpha=0/05$) مبانی اصلی نمودار کنترل تغییر پذیری به صورت زیر خواهد شد.

$$UCL = L_{\alpha/2} = 0.99992$$

$$CL = L_{0.5} = 0.9720$$

$$LCL = L_{1-\alpha/2} = 0.8215$$

حال تصور شود در ۵ نمونه بعدی (نمونه‌های شماره ۶ تا ۱۰) فرآیند تحت کنترل بوده و از نمونه شماره ۱۱ تا ۱۵ ماتریس واریانس - کوواریانس افزایش به مقدار نهائی پنج برابر گذشته و از نمونه ۱۶ تا ۲۰ افزایش با ضریب ۹ برابر تغییر کرده است خلاصه نتایج شبیه‌سازی فرآیند یاد شده و مقادیر آماره L محاسبه شده بر مبنای سطح اطمینان ۹۵ درصد در جدول شماره ۱ ارائه شده است.

مشاهده می‌شود با استفاده از جدول راهنمای ارائه شده در ضمیمه ۲ مقاله حاضر حدود کنترل نمودار L براحتی قابل محاسبه بوده و با ترسیم نمودار کنترلی، عملیات پایش تغییرپذیری فرآیند بسادگی انجام خواهد شد. شکل شماره ۱ وضعیت نمودار کنترل تغییر پذیری را به تصویر کشیده است و در آن پیامد هشدار خارج از کنترل در تغییرات بزرگ کاملاً محسوس مشاهده می‌شود.

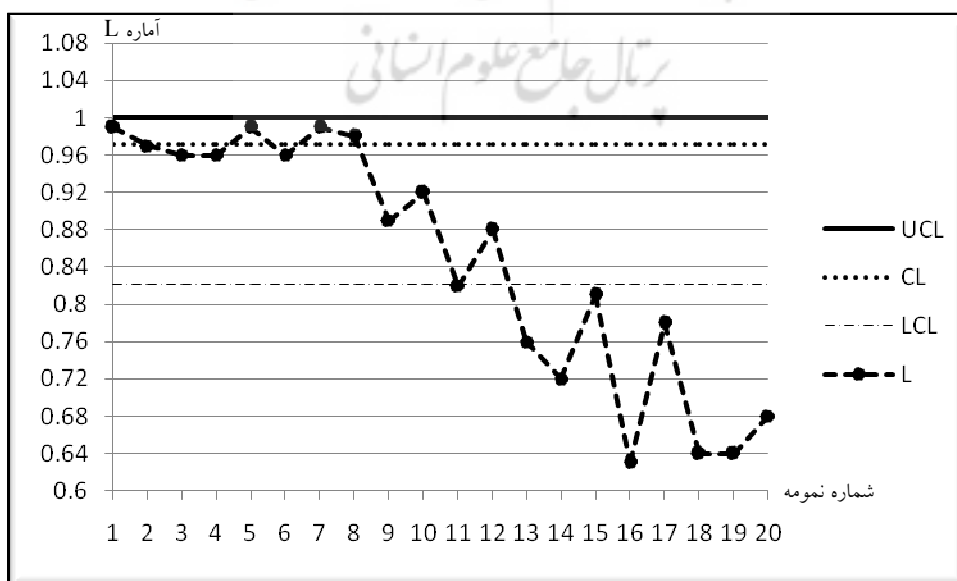
نتیجه‌گیری

باتوجه به توضیحات داده شده برای نمودار جمع‌تجمعی هی‌لی که نمونه‌ای از نمودارهای تغییرپذیری فرآیند می‌باشد ملاحظه می‌شود که محاسبات مورد نیاز برای کارشناسان فرآیندی زیاد و پیچیده محسوب می‌شود این امر سبب می‌گردد که استفاده از نمودارهای جمع‌تجمعی چند متغیره کمتر صورت گیرد. مزیت نمودار جدید این است که آموزش آن

جدول شماره ۱: نتایج شبیه سازی فرآیند نرمال دو متغیره و محاسبه آماره L تحت شرایط تحت ثبات و تغییرپذیری های گوناگون

sample	x_1		x_2		Covariance	L statistic
	Mean	Variance	Mean	Variance		
1	33.40	6.58	68.49	103.84	17.85	0.99
2	28.22	18.65	68.02	209.96	54.81	0.97
3	30.11	4.79	66.57	103.43	15.89	0.96
4	33.15	15.63	76.12	122.77	31.32	0.96
5	34.27	7.37	69.92	97.61	21.59	0.99
6	32.01	10.40	72.39	67.41	10.09	0.96
7	32.74	14.55	70.11	145.79	35.41	0.99
8	31.44	14.58	70.88	92.54	27.02	0.98
9	32.00	10.10	69.04	101.01	28.15	0.89
10	30.81	12.62	64.12	42.10	9.25	0.92
11	30.12	45.19	69.61	742.37	142.29	0.82
12	28.93	21.34	59.65	326.96	24.55	0.88
13	30.12	60.02	69.90	552.85	90.97	0.76
14	33.46	89.48	66.87	712.80	164.40	0.72
15	29.99	77.68	74.07	833.87	227.77	0.81
16	33.46	156.86	64.95	1398.89	379.65	0.63
17	25.56	57.43	57.40	555.85	103.27	0.78
18	34.27	158.06	75.92	1464.86	407.95	0.64
19	30.10	187.05	73.09	1732.46	512.44	0.64
20	26.96	79.83	58.95	1398.53	257.39	0.68

شکل شماره ۱: وضعیت ۲۰ مقدار آماره محاسباتی L در کنترل تغییرات در یک نمونه فرآیند نرمال دو متغیره

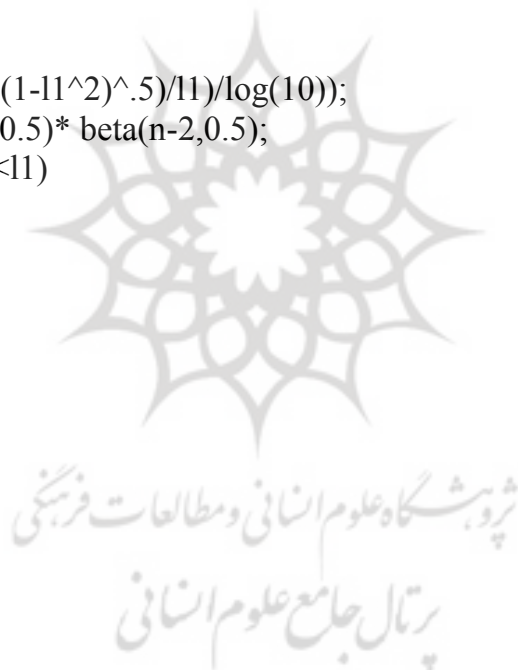


پیوست شماره ۱: برنامه محاسبه کوانتیل های توزیع L

```

clear;clc;tic
L=[];
for n=3:30
l1=0;
N=1e+6;
k=1;
d=[0.005;0.01;0.02;0.025;0.05;0.05;0.95;0.975;0.98;0.99;0.995];
A=gamma(2*n-3)/(gamma(n-1)*gamma(n-2)*2^(2*n-5));
while k<۱۲
l1=l1+1/N;
B=(l1^(2*n-4)*log((1+(1-l1^2)^.5)/l1)/log(10));
C=.5*betainc(l1^2,n-2,0.5)* beta(n-2,0.5);
y=A*(B+C);%y=P(L1<l1)
if y > d(k)
L(n-2,k)=l1;
k=k+1;
end
end%while
end%for
Toc

```



پیوست شماره ۲: جدول کوانتیل‌های توزیع L

n	α										
	0.005	0.01	0.02	0.025	0.05	0.5	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
3	0.04863	0.07169	0.10614	0.12060	0.17979	0.72120	0.99612	0.99903	0.99938	0.99984	0.99996
4	0.23017	0.27877	0.33821	0.36010	0.43809	0.85920	0.99827	0.99957	0.99972	0.99993	0.99998
5	0.38035	0.43171	0.49051	0.51120	0.58186	0.90620	0.99889	0.99972	0.99982	0.99996	0.99999
6	0.48685	0.53510	0.58858	0.60700	0.66851	0.92970	0.99919	0.99980	0.99987	0.99997	0.99999
7	0.56369	0.60781	0.65575	0.67210	0.72580	0.94380	0.99936	0.99984	0.99990	0.99998	0.99999
8	0.62112	0.66127	0.70435	0.71890	0.76635	0.95320	0.99947	0.99987	0.99992	0.99998	1.00000
9	0.66546	0.70210	0.74105	0.75410	0.79651	0.95990	0.99955	0.99989	0.99993	0.99998	1.00000
10	0.70064	0.73423	0.76970	0.78160	0.81980	0.96500	0.99961	0.99990	0.99994	0.99999	1.00000
11	0.72920	0.76016	0.79268	0.80350	0.83833	0.96890	0.99965	0.99991	0.99994	0.99999	1.00000
12	0.75283	0.78151	0.81151	0.82150	0.85340	0.97200	0.99969	0.99992	0.99995	0.99999	1.00000
13	0.77269	0.79938	0.82721	0.83640	0.86592	0.97450	0.99972	0.99993	0.99996	0.99999	1.00000
14	0.78961	0.81457	0.84051	0.84910	0.87646	0.97670	0.99974	0.99994	0.99996	0.99999	1.00000
15	0.80420	0.82762	0.85191	0.85990	0.88548	0.97850	0.99976	0.99994	0.99996	0.99999	1.00000
16	0.81690	0.83896	0.86179	0.86930	0.89326	0.98000	0.99978	0.99995	0.99997	0.99999	1.00000
17	0.82807	0.84891	0.87044	0.87750	0.90006	0.98130	0.99979	0.99995	0.99997	0.99999	1.00000
18	0.83795	0.85770	0.87807	0.88480	0.90604	0.98250	0.99981	0.99995	0.99997	0.99999	1.00000
19	0.84676	0.86553	0.88485	0.89120	0.91135	0.98350	0.99982	0.99996	0.99997	0.99999	1.00000
20	0.85466	0.87254	0.89092	0.89700	0.91609	0.98450	0.99983	0.99996	0.99997	0.99999	1.00000
21	0.86180	0.87886	0.89638	0.90210	0.92035	0.98530	0.99984	0.99996	0.99997	0.99999	1.00000
22	0.86826	0.88458	0.90133	0.90680	0.92420	0.98600	0.99985	0.99996	0.99998	0.99999	1.00000
23	0.87415	0.88978	0.90582	0.91110	0.92770	0.98670	0.99985	0.99996	0.99998	1.00000	1.00000
24	0.87953	0.89454	0.90992	0.91500	0.93088	0.98730	0.99986	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
25	0.88448	0.89891	0.91368	0.91850	0.93380	0.98780	0.99987	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
26	0.88903	0.90292	0.91714	0.92180	0.93648	0.98830	0.99987	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
27	0.89324	0.90663	0.92033	0.92480	0.93895	0.98880	0.99988	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
28	0.89714	0.91007	0.92328	0.92760	0.94124	0.98920	0.99988	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
29	0.90077	0.91327	0.92603	0.93020	0.94336	0.98960	0.99989	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000
30	0.90415	0.91624	0.92858	0.93260	0.94534	0.99000	0.99989	0.99997	0.99998	1.00000	1.00000

منابع

- Theory and Methods, 2002, vol. 31 , No.9 , 1665-1673.
- 12- Pearson, E. S. & Wilks, S. S. "Methods of Statistical Analysis Appropriate For k Samples of Two Variables," in Biometrika, 1933, Vol.25, No.3/4. 353-378.
 - 13- Box, G. E. P. "A General Distribution Theory For A Class of Likelihood Criteria," In Biometrika, 1949, Vol.36, No.3/4. 317-346.
 - 14- Noorossana, R., Seyedaliakbar S. M. "On the Multivariate Variation Control Chart," Journal of Industrial Engineering International, 2007, vol. 3, 59-66.
 - 1- Theodore T. Allen, Introduction to Engineering Statistics and Six Sigma, Springer-Verlag London Limited, 2006
 - 2- Engineering Statistics Handbook, 2009, NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>
 - 3- Pearn W.L. and Chien-Wei Wu, "Production quality and yield assurance for processes with multiple independent characteristics," European Journal of Operational Research, (2006). Vol. 173, No. 2: 637-647.
 - 4- Hotelling, H., Multivariate quality control, Techniques of statistical analysis, Eisenhart, Hastay and Wallis Eds, McGraw-Hill, New York, 1947.
 - 5- Woodall, W. H., and Ncube, M. M., "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures," Technometrics. 1985, vol. 27, 285-292.
 - 6- Healy, J., "A note on multivariate CUSUM procedures," Technometrics. 1987, vol. 29, 409-412.
 - 7- Alt, F. B. "Multivariate Quality Control," in Encyclopedia of Statistical Sciences, 1985, Vol. 6, edited by N. L. Johnson and S. Kotz, John Wiley, New York.
 - 8- Levinson, W. A., Holmes, D. S. And Mergen A. E. "Variation Charts for Multivariate Processes," Quality Engineering, 2002, 14(4), 539-545.
 - 9- Aparisi F. And Bartolucci F. "Power Properties of the S_r^2 Statistic. Application to Monitoring Shifts in The Covariance Matrix," 2003, abril, 27 Congreso Nacional de Estadística e investigación Operativa Lleida.
 - 10- Khoo M. B. C. "A new Bivariate Control to Monitor the Multivariate process Mean and Variance Simultaneously," Quality Engineering. 2005, 17, 109-118.
 - 11- Noorossana, R., W.H. Woodall, and S. Amiriparian, "On the Economic Design of Multivariate Control Charts," Communications in Statistics