New Educational Approaches

New Educational Approaches
E-ISSN: 2423-6780
Vol. 16, Issue 1, No.35, Spring and Summer 2022, P:59-84
Received: 13/07/2022 Accepted: 31/12/2022

Research Article

Investigating the Frameworks of Students' Understanding of the relationship between the Derivative and Antiderivative Function graphs: A Qualitative Meta-analysis

Saeid Haghjoo: Ph.D. student of Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran,Iran.
s.haghjoo@sru.ac.ir

Ebrahim Reyhani*: Associate Professor of Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

e_reyhani@yahoo.com

Abstract
The derivative is one of the most important topics in calculus that is used in various sciences. One of the topics in this field is the interpretation of the derivative function graph with the help of its antiderivative function and vice versa. Research shows that because students understanding of derivative graphs requires high-level thinking skills, students have difficulty in understanding the relationship. The present study investigates the methodology and content of these studies to determine their underlying theory. This study is a descriptive study and qualitative meta-analysis method to show an insight into the coherence of these studies. The research field included all related research that were done by regularly searching for keywords and also by searching among citations of articles in national and international databases based on PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses). Based on the inclusion criteria, 182 studies were identified between 1992 and 2022 and finally, based on the exclusion criteria, 26 studies were selected for final review and analysis. The qualitative meta-analytic findings identified 13 main frameworks among the research that focuses on the three Krutetskii thinkers (analytical, visual, and harmonic), Dubinsky APOS (action-process-object-schema) theory and the three layers of graph disclosure (objects-relationships- functional relationships) is Swidan. The new method used in the qualitative meta-analysis of the present study can be used by researchers in different fields of education. Also, the findings of this meta-analysis for teaching and learning the relationship between the graph of the derivative function and its antiderivative function for teachers, and professors; will be useful for authors of textbooks and researchers.

Keywords: Derivative, Derivative graph, Antiderivative, Qualitative meta-analysis.

* Corresponding Author

10.22108/NEA.2023.134241.1791 20.1001.1.24763608.1401.17.1.3.3

رویکردهای نوین آموزشی
دانشکدهٔ علوم تربیتی و روان‌شناسی دانشگاه اصفهان
سال شانزدهم، شمارهٔ ۱، شمارهٔ پیاپی ۳۵، بهار و تابستان ۱۴۰۱، ص: ۸۴-۵۹
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

مقاله پژوهشی

بررسی چارچوب‌های درک شاگردان از رابطهٔ بین نمودارهای تابع مشتق و ضد مشتق: فراتحلیل کیفی

سعید حق‌جو: دانشجوی دکتری آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
s.haghjoo@sru.ac.ir

ابراهیم ریحانی*: دانشیار آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
e_reyhani@yahoo.com

چکیده
مشتق یکی از مباحث مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که کاربردهای زیادی در علوم مختلف دارد. یکی از موضوعات مطرح در این حوزه، تفسیر نمودار تابع مشتق به کمک تابع اولیهٔ آن و بالعکس است. پژوهش‌ها نشان‌دهندهٔ آن است که درک نموداری مشتق نیازمند مهارت‌های مرتبهٔ زیاد تفکر است و شاگردان در درک رابطه‌ای این موضوع مشکل دارند. پژوهش حاضر، به بررسی روش‌شناختی و محتوایی این پژوهش‌ها توجه دارد تا نظریهٔ زیربنایی آنها را مشخص کند. این پژوهش توصیفی و به روش فراتحلیل کیفی است تا بینشی از کلیت این پژوهش‌ها را نشان دهد. میدان پژوهش شامل کلیهٔ پژوهش‌های مرتبط بود که با جستجوی منظم کلیدواژه‌ها و از طریق جستجو میان استنادات مقاله‌ها در پایگاه‌های اطلاعاتی ملی و بین‌المللی مطابق با پریزما انجام شده است. براساس معیارهای ورود تعداد ۱۸۲ پژوهش بین سال‌های ۱۹۹۲ تا ۲۰۲۲ (فوریه) شناسایی و درنهایت، براساس معیارهای خروج تعداد ۲۶ تحقیق برای بررسی و تحلیل نهایی انتخاب شده است. یافته‌های فراتحلیل ۱۳ چارچوب اصلی را بین پژوهش‌ها مشخص می‌کنند که محوریت اصلی آنها حول سه متفکر کروتتسکی (تحلیلی، بصری و هارمونیک)، نظریهٔ APOS دوبینسکی و سه لایهٔ آشکارسازی نمودار (اشیا، روابط و روابط تابعی) سوییدان است. روش نوین استفاده‌شده در فراتحلیل کیفی پژوهش حاضر قابل‌استفاده برای محققان حوزه‌های مختلف آموزش است؛ همچنین یافته‌های حاصل از این فراتحلیل برای یاددهی و یادگیری رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیهٔ آن برای معلمان، اساتید، مؤلفان کتاب‌های درسی و پژوهشگران مفید خواهد بود.

واژگان کلیدی: مشتق، نمودار مشتق، ضد مشتق، فراتحلیل کیفی.

* نویسندهٔ مسئول:

10.22108/NEA.2023.134241.1791
20.1001.1.24763608.1401.17.1.3.3

مقدمه

مشتق یکی از مفاهیم کلیدی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که کاربردهای زیادی در علوم مختلف دارد؛ ولی در عین حال شاگردان در درک رابطه‌ای و مفاهیم مرتبط با آن یعنی مشتق در یک نقطه و مشتق به‌عنوان تابع با مشکلاتی مواجه هستند(حق‌جو[1] و همکاران، ۲۰۲۲؛ حق‌جو و ریحانی[2]، ۲۰۲۱؛ زندیه[3]،۲۰۰۰). تبدیل و ترجمهٔ نمودارهای تابع مشتق و اولیه و بالعکس، از جمله فرایندهای مهم در این حوزه است. از طرفی، درک رابطه‌ای مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به درک کاملی از رابطهٔ بین توابع و نمودار آنها نیاز دارد (آسپینوال[4]، ۱۹۹۴). اگر درک درستی از رابطهٔ بین نمودار تابع و مشتق آن نباشد، این امر ممکن است به درک ناکافی از مفاهیم مرتبط با مشتق نظیر مفهوم سرعت و آهنگ تغییر در علوم یا مفهوم سود و هزینهٔ نهایی در اقتصاد منجر شود (فئودل و بیهلر[5]، ۲۰۲۱). هنگامی که شاگردان رابطهٔ بین نمودار تابع و مشتق آن را بررسی می‌کنند، مشکلاتی دارند و اغلب مرتکب خطا می‌شوند (زندیه، ۱۹۹۷؛ حق‌جو و ریحانی، ۲۰۲۱؛ هاکیومروگلو[6] و همکاران، ۲۰۱۰). بیشتر دانش‌آموزان و دانشجویان بین شیب خط قاطع و مماس بر منحنی و ارتباط آنها بدفهمی دارند (فئودل و بیهلر، ۲۰۲۱؛ فئودل[7]، ۲۰۱۹؛ اوبوز[8]، ۲۰۰۷؛ آسیالا[9] و همکاران، ۱۹۹۷)؛ همچنین بیشتر شاگردان قادر به هماهنگی و ارتباط بین دو ویژگی تابع مشتق و تابع اولیهٔ آن نیستند (حق‌جو و همکاران، ۲۰۲۰؛ هاکیومروگلو و چیکن[10]، ۲۰۱۲). برای فهم بهتر و اصلاح بدفهمی‌ها لازم است، برخی از مؤلفه‌های مهم در یاددهی و یادگیری درک نمودارها شناسایی شود.

یکی از استانداردهای فرایندی که به درک نمودارها کمک می‌کند، بازنمایی[11] است. در یاددهی و یادگیری ریاضی بازنمایی مؤلفه‌ای مهم در ریاضیات است که استفاده از آن باعث افزایش یاددهی و یادگیری ریاضیات می‌شود(شورای ملی معلمان ریاضی[12]، ۲۰۰۰). بازنمایی نشانه یا ترکیبی از علائم، شکل‌ها، اشیا، تصاویر یا نمودارهاست. به‌طور معمول، چهار حالت دارد: کلامی، نموداری، جبری و عددی (مینالی[13]، ۲۰۲۱). اغلب نوع خاصی از بازنمایی‌ها در یاددهی و یادگیری ریاضیات غالب است؛ با این حال، برای درک رابطه‌ای[14]، بازنمایی‌ها باید از یک حالت به حالت دیگر ترجمه و تبدیل شوند. ترجمهٔ بازنمایی‌ها و حرکت بین آنها، مهارت مهمی است که فراگیران باید آن را توسعه دهند تا در یادگیری ریاضیات تبحر بیشتری داشته باشند (دووال[15]، ۲۰۱۷). سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه (شورای ملی معلمان یاضی، ۲۰۰۰) بر ایجاد بازنمایی‌های ریاضی توسط فراگیران به‌عنوان روش‌های یادگیری با درک رابطه‌ای

1. Haghjoo
2. Haghjoo & Reyhani
3. Zandieh
4. Aspinwall
5. Feudel & Biehler
6. Haciomeroglu
7. Feudel
8. Ubuz
9. Asiala
10. Haciomeroglu & Chicken
11. Reprezentation
12. NCTM
13. Mainali
14. Relational understanding
15. Duval

تمرکز دارد و بر اهمیت توانایی‌های شاگردان برای «انتخاب، به کار بردن و حرکت بین بازنمایی‌های ریاضی» به‌منظور حل مسائل تأکید می‌کند (ص ۳۶۰). بازنمایی‌های نموداری اطلاعات ریاضی را به‌صورت بصری منتقل می‌کند و درک کشف روابط بین بازنمایی‌ها در این حالت برای شاگردان مشکل است؛ در حالی که عباراتی که به‌صورت نمادین نمایش داده، آسان‌تر دستکاری، تجزیه‌وتحلیل یا تبدیل می‌شوند (زندیه، ۲۰۰۰).

مؤلفهٔ مهم دیگر در ریاضیات برای درک نمودارها، تجسم[۱] است. تجسم، توانایی بازتاب بر روی تصاویر، شکل‌ها و نمودارها در ذهن، روی کاغذ یا با ابزارهای فناوری است. هدف از آن، تصویرسازی و برقراری ارتباط با اطلاعات، تفکر دربارهٔ ایده‌های ناشناختهٔ قبلی و توسعهٔ درک و فهم است (زیات‌دینوف و والس[۲]، ۲۰۲۲). با این تعریف، تجسم طیفی از فرایندهای شناختی است که یکی از آنها استدلال بصری[۳] است. استدلال بصری، به‌کارگیری مؤثر شکل‌ها، تصاویر و نمودارها برای حل تکالیف تفکر مرتبهٔ بالاتر است (زیمرمان[۴]، ۱۹۹۱). مؤلفهٔ مهم دیگر در ریاضیات، شهود[۵] است. شهود در ریاضی، فرایند شکل‌گیری تصورها (ذهنی یا به کمک فناوری) و استفاده از چنین تصورهایی به‌طور مؤثر برای کشف و درک مفاهیم ریاضی است (زیات‌دینوف و والس[۶]، ۲۰۲۲). درواقع، بازنمایی، تجسم و شهود سه مؤلفهٔ کلیدی هستند که برای رسم و ترجمهٔ نمودار توابع و کشف روابط بین نمودار و عبارات ریاضی کمک می‌کنند (جی‌سی‌سی و تورنوکلو[۷]، ۲۰۲۱).

در برنامهٔ درسی ریاضی فعلی ایران، مبحث مشتق و کاربردهای آن در سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه در رشتهٔ ریاضی- فیزیک و علوم تجربی ارائه شده است. ازنظر مفهوم‌سازی، نقش استدلال بصری برای درک حساب دیفرانسیل و انتگرال بسیار اساسی است. به‌طوری که تصور یک دورهٔ آموزشی حساب دیفرانسیل و انتگرال موفق که تأکید بر مؤلفه‌های شهودی ندارد، دشوار است (هاگس-هالت[۸] و همکاران، ۲۰۲۰؛ زیمرمان، ۱۹۹۱). گفته‌های زیمرمان (۱۹۹۱) دربارهٔ استفاده از عناصر شهودی به‌عنوان ابزاری برای درک حساب دیفرانسیل، انتگرال، ریاضیات و حل مسائل ریاضی مسیر پژوهشگران، آموزشگران و ریاضی‌دانان را در سطح بین‌المللی به‌سمت توسعهٔ مهارت‌های استدلال بصری سوق داده است. به نظر می‌رسد، جامعهٔ آموزش ریاضی در این خصوص توافق نظر دارند که یادگیری ریاضیات به‌ویژه حساب دیفرانسیل و انتگرال، فقط از طریق دست‌ورزی نمادین بر مبنای فرمول‌های داده‌شده بی‌معنی است (یان[۹] و همکاران، ۲۰۲۱).

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، دست‌ورزی نمادین و کار با فرمول‌ها به‌طور گسترده‌ای موردتوجه قرار گرفته و ارزش حساب دیفرانسیل با توجه بیش از حد به رویه‌ها، از بین رفته است (زیمرمان و کانینگهام[۱۰]، ۱۹۹۱). دانشجویانی که با یک تصور ذهنی کار می‌کنند، اطلاعی ندارند که یادگیری ریاضیات چیست. شاگردان زیادی وجود دارند که مشتق

1. Visualization
2. Ziatdinov & Valles
3. Visual reasoning
4. Zimmermann
5. Intuition
6. Ziatdinov & Valles
7. Geçici & Türnüklü
8. Hughes-Hallett
9. Yan
10. Zimmermann & Cunningham

توابع پیچیده را محاسبه می‌کنند؛ اما نمی‌توانند به یک نمودار نگاه کنند و به شما بگویند، کجا مشتق آن مثبت و کجا منفی است؛ حتی کمتر می‌توانند به‌صورت نموداری بگویند، درکجا مشتق افزایش یا کاهش می‌یابد (سوییدان[1]، ۲۰۲۲). درمان این مشکل، این است که حساب دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از «قانون سه[2]» تدریس شود. قانون سه می‌گوید که هر موضوعی به‌صورت نموداری، عددی و تحلیلی آموزش داده می‌شود (هاگس-هالت، ۱۹۹۵). به این ترتیب، آنها هر ایدهٔ اصلی را از چندین زاویه می‌بینند. این ایدهٔ مهمی است که دانشجویان وقتی شهود را وارد کارشان می‌کنند، باعث تعادلشان می‌شود و به‌درستی درک می‌کنند. در حساب دیفرانسیل و انتگرال اصلاح‌شده، نقش شهود و استدلال بصری به‌خوبی دیده شده است (زیمرمان، ۱۹۹۱).

با توجه به آنچه مطرح شد، محققان این پژوهش به‌دنبال این هستند که با فراتحلیل مطالعات موجود بررسی کنند که وقتی شاگردان (دانش‌آموزان یا دانشجویان) می‌خواهند از روی نمودارهای تابع مشتق، تابع اولیهٔ آن را رسم کنند، چگونه فکر می‌کنند و چه فرایندهای ریاضی را انجام می‌دهند. بررسی فرایندهای تفکر فراگیران، دربارهٔ محتوای مرتبط با نمودار مشتق به آموزشگران کمک می‌کند، شیوهٔ آموزشی خود را به‌گونه‌ای انتخاب کنند که بیشترین دانش محتوا و درک مفهوم با آنها کسب و کم‌ترین بدفهمی ایجاد شود. آگاهی نسبت به این مفاهیم باعث یاددهی و یادگیری بهتر رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه خواهد شد. به دلیل خلأ مطالعاتی در این زمینه و با توجه به مشکلاتی که محققان این پژوهش حین تحقیق و تدریس با آن مواجه بوده‌اند[3]، این مطالعه با فراتحلیل مطالعات موجود، در پی فهم درک و فرایندهای تفکر دانشجویان از رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه است. اهمیت این موضوع و کاربردی‌بودن آن در شاخه های دیگر علوم، توجیه مناسبی است که با نگاهی جامع‌تر، پژوهش‌های گذشته در این زمینه واکاوی شود؛ بنابراین محققان در این پژوهش قصد دارند، نوع ابزار پژوهش، انواع رویکردها، روش‌های تحقیق و چارچوب‌های رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه را در مطالعات مرتبط بررسی کرده و علاوه بر آن، چارچوبی نوین برای یاددهی و یادگیری رابطهٔ بین نمودار تابع اولیه و مشتق پیشنهاد کنند. بدین منظور با فراتحلیل کیفی چارچوب‌های نظری و روش‌شناسی رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیهٔ آن در پژوهش‌های موجود بررسی خواهد شد.

روش پژوهش

هدف از پژوهش حاضر، بررسی چارچوب‌های درک شاگردان از رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیهٔ آن است. روش تحقیق کیفی است و به‌منظور مرور نظام‌مند مطالعات انجام‌شده از فراتحلیل کیفی استفاده شده است. هدف از فراتحلیل کیفی، ارائهٔ تصویری جامع و تفسیری از داده‌ها و پژوهش‌هایی است که تاکنون به موضوع خاصی توجه کرده‌اند (تیمولاک[4]، ۲۰۰۹). فراتحلیل کیفی درصدد است تا با یکپارچه‌کردن و ترکیب نظریه‌ها، روش‌ها و یافته‌های پژوهش های انجام‌گرفته، مؤلفه‌های اساسی آن پژوهش‌ها را کشف کرده و نتایج و کلیت آنها را در فرم جدیدی مفهوم‌سازی

1. Swidan
2. Rule of Three
۳. محققان دو مطالعهٔ دیگر در این خصوص به چاپ رسانده‌اند (Haghjoo & Reyhani, 2021؛2020; Haghjoo, et al., 2022).
4. Timulak

کند و درنهایت، به تفسیر و تبیین آن یافته‌ها توجه کند (گاروود[1] و همکاران، ۲۰۲۱؛ عالی[2] و همکاران، ۲۰۱۹). چیزی که بر اهمیت و کاربرد این روش تحقیق اضافه کرده، نقش آن در ترکیب و هماهنگی پژوهش‌هایی است که به‌صورت انفرادی و غیر متمرکز صورت گرفته است. فراتحلیل کیفی به‌وضوح نشان‌دهندهٔ خلأها، مشکلات و نواقص پژوهش‌ها و مطالعات انجام‌شده است (تیمولاک، ۲۰۱۴؛ حق‌جو و ریحانی، ۲۰۲۲؛ تیمولاک، ۲۰۰۹). در فراتحلیل کیفی، نقش تفسیر برجسته‌تر است و پژوهشگر فقط به توصیف آماری و کمی داده‌های پژوهش توجه نمی‌کند، بلکه تلاش دارد تا با توجه به زمینه‌های اجتماعی و فرهنگی که موضوع پژوهش در آن شکل گرفته است، پژوهش‌های انجام‌شده را تفسیر و تحلیل کند[3] (حق‌جو و ریحانی، ۲۰۲۱؛ تیمولاک، ۲۰۰۹؛ طرخان و مصطفوی[4]، ۲۰۲۰).

بریمن (۲۰۱۲)، برای پژوهش‌هایی مانند فراقوم‌نگاری، ۷ مرحله برای پژوهش پیشنهاد داده که در این پژوهش نیز استفاده شده است. مرحلهٔ اول، شروع‌کردن یا گام آغازین[5]: مرحلهٔ اول به یافتن عنوان تحقیق یا موضوع موردعلاقهٔ[6] پژوهش تأکید دارد. عنوان باید در حیطهٔ کار محقق بوده و ارزش کافی داشته باشد. در این پژوهش با توجه به ضرورت و اهمیت تحقیق، عنوان آن رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه در نظر گرفته شده است. مرحلهٔ دوم: تصمیم‌گیری دربارهٔ آنچه با علاقهٔ اولیهٔ محقق مرتبط[7] و درواقع، انتخاب مطالعات واجد شرایط برای ورود به مرحلهٔ دوم فراتحلیل است. در این مرحله معیارهای ورود و خروج از مطالعه مشخص می‌شود. در این مطالعه میدان پژوهش شامل کلیهٔ پژوهش‌های مرتبط است که با جستجوی منظم کلیدواژه‌های «رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه»، «نمودار تابع مشتق»، «نمودار تابع مشتق و انتگرال»، «مشتق، تابع ضد مشتق» و "derivative and antiderivative graph" ، derived function "graph of derivative function" ، "relation between derivative function and the original function original function" و "anti-derivative function and indefinite integral graph" و جستجو میان استنادات مقالات پژوهشگران در پایگاه‌های اطلاعاتی داخلی و خارجی انجام شده است که درواقع، یکی از معیارهای ورود است. داشتن ساختار کامل، قابل دانلودبودن متن کامل مقاله یا پایان‌نامه و اعتبار زیاد پژوهش از دیگر معیارهای اصلی ورود به اطلاعات در نظر گرفته شدند. پایگاه‌های اطلاعاتی معتبر در آموزش ریاضی شامل موارد زیر در نظر گرفته شده است:

"Journal for Research in Mathematics Education (JRME), For the Learning Mathematics (FLM), Mathematics thinking and Learning (MTL), Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE), Zenttralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Mathematics Education Research Journal (MERJ), Journal of Mathematics Behavior (JMB), Educational Studies in Mathematics (ESM), Magiran, ScienceDirect,Library Genesis ,Scopus ،ERIC ،Springer link، JSTOR"

---

1. Garwood
2. Aali

۳. «پرکاربردترین اصطلاح، برای آنچه به‌عنوان فراتحلیل کیفی از آن یاد می‌شود، فراسنتز کیفی است. نویسندگانی که اصطلاح فراسنتز را ترجیح می‌دهند، استدلال می‌کنند که رویهٔ فراتحلیل، دربارهٔ فراتحلیل کیفی، بیشتر تفسیری است تا گردآوری (فینفگلد، ۲۰۰۳)؛ بنابراین اصطلاح «سنتز» مناسب‌تر است. در عوض، استدلال برای استفاده از اصطلاح فراتحلیل کیفی، به‌کارگیری این اصطلاح به همان صورتی پیشنهاد می‌شود که در تحقیقات کمی استفاده شده است(تیمولاک، ۲۰۰۹).

4. Tarkhan & Mostafavi
5. Getting started
6. Intellectual interest
7. Deciding what is relevant to the initial interest

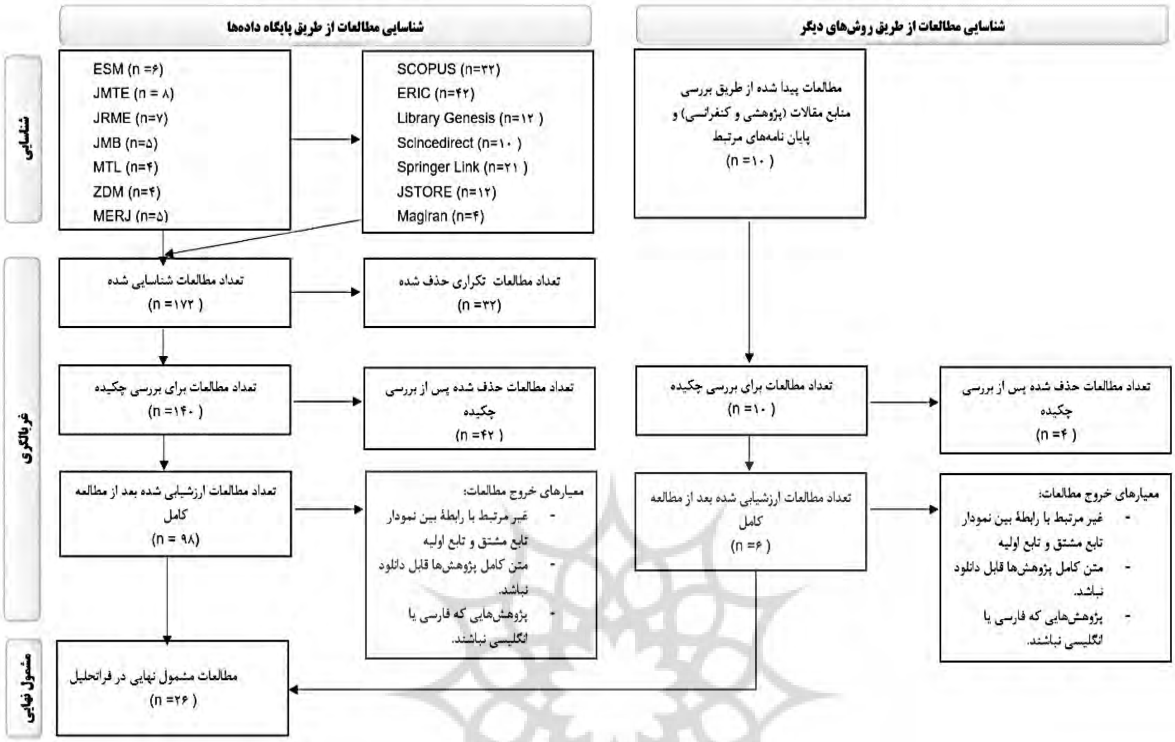
براساس معیارهای ورود تعداد ۱۸۲ پژوهش (مقالات علمی-پژوهشی، کنفرانسی، پایان‌نامه‌ها) بین سال‌های ۱۹۹۲ تا ۲۰۲۲ (فوریه) شناسایی و درنهایت، براساس معیارهای خروج تعداد ۱۵۶ پژوهش حذف و ۲۶ پژوهش برای بررسی و تحلیل نهایی انتخاب شده‌اند. معیارهای خروج شامل پژوهش‌هایی بود که دربارهٔ مشتق بحث شده بود؛ ولی رابطهٔ بین نمودار تابع و تابع مشتق مدنظر آنها نبود یا متن کامل آنها قابل دانلود نبود و نیز پژوهش‌هایی که فارسی یا انگلیسی نبودند. نمودار جریانی پریزما[۱] بر مبنای مطالعهٔ پیج و همکاران (۲۰۲۱) برای بررسی روش پژوهش اسناد فراتحلیل انتخاب شده است (شکل۱). مرحلهٔ سوم، خواندن پژوهش‌ها[۲]: در مرحلهٔ سوم مطالعات انتخاب‌شده به دقت خوانده و مرور می شود تا مفاهیم کلیدی و تم‌های آنها مشخص شود (لاوسون و پارکر[۳]، ۲۰۱۹). مرحلهٔ چهارم: تعیین اینکه چگونه مطالعات به یکدیگر مرتبط می‌شوند[۴]. در مرحلهٔ چهارم، محققان ارتباط مطالعات را با یکدیگر و استعاره‌های استفاده‌شده را در آنها بررسی کردند. تعیین ارتباط بین مطالعات با استخراج مفاهیم کلیدی و کنار هم گذاشتن آنها انجام می‌شود.

مرحلهٔ پنجم: ترجمهٔ مطالعات به یکدیگر[۵]: در این مرحله مطالعات به یکدیگر ترجمه و به سه شکل با یکدیگر مرتبط می‌شوند: اول، اینکه ترجمهٔ متقابل از یکدیگر محسوب می‌شوند[۶]. به عبارت دیگر، مطالعات به هم شبیه هستند و مستقیم به زبان یکدیگر ترجمه می‌شوند. از سوی دیگر، ممکن است مطالعات با یکدیگر همخوانی نداشته یا متضاد باشند. درنهایت، مطالعات ممکن است تا اندازه‌ای به هم شبیه باشند؛ ولی حدودی تناقض در آنها دیده شود[۷]. منظور از ترجمهٔ مطالعات به یکدیگر تبدیل مفاهیم کلیدی آنها به هم است. در روند ترجمهٔ مفاهیم به یکدیگر، مفاهیم کلیدی یک مطالعه باید در ارتباط تنگاتنگ با مفاهیم کلیدی مطالعات دیگر باقی بمانند؛ همچنین در روند ترجمه، مفاهیم کلیدی هر یک از مطالعات با مفاهیم کلیدی مطالعات دیگر مقایسه شده و در فراتحلیل قرار داده می‌شوند.

مرحلهٔ ششم: ترکیب یا سنتز ترجمه‌ها[۸]: در مرحلهٔ ششم محقق از مطالعات اولیه، یک کل ایجاد می‌کند. این کل که نتیجهٔ نهایی فراتحلیل است، تفسیری فراتر از هر یک از مطالعات گنجانده‌شده در فراتحلیل از پدیده مدنظر ارائه می‌کند و در عین حال در برگیرندهٔ همهٔ آنهاست. به‌گونه‌ای که هر یک از مطالعات اولیه در این کل جستجو می‌شود. مرحلهٔ هفتم: بیان ترکیب یا سنتز[۹]: این مرحلهٔ انتشار تحقیق است؛ یعنی ترجمهٔ ترکیب یا سنتز ایجادشده به شکلی است که برای مخاطب قابل‌درک باشد (بریمن[۱۰]، ۲۰۱۲).

۱. موارد ترجیحی در گزارش مقالات مروری نظام‌مند و فراتحلیل

2. Reading the studies
3. Lawson & Parker
4. Determining if and how the studies are related
5. Translating the studies into one another
6. Reciprocal Translation
7. Line of arguments
8. Synthesising translations
9. Expressing the synthesis
10. Bryman



شکل ۱: نمودار جریانی پریزما برای فراتحلیل انجام‌شده بر مبنای پیج و همکاران (۲۰۲۱)

به‌منظور دستیابی به داده‌های موردنیاز پژوهش، چک لیستی با ۱۳ سؤال طراحی و تنظیم شد که تکمیل آن مستلزم مطالعهٔ دقیق هر اثر و کشف دیدگاه‌های زیربنایی آن بود (پیوست)؛ از این رو، پس از مطالعهٔ دقیق هر پژوهش و بر مبنای کدگذاری‌ها، مؤلفه‌های چک لیست در ارتباط با هر اثر تکمیل شد (حق‌جو و ریحانی، ۲۰۲۲). بعد از ارزیابی از سوی دو نفر، ضریب کاپای کوهن[1] ۰/۹۸ به دست آمد که نشان‌دهندهٔ توافق خوب بین ارزیابان است؛ بنابراین روایی و پایایی فراتحلیل معتبر است (شکل ۲).

شکل ۲: روش‌شناسی پژوهش

یافته‌ها

1. Cohen’s kappa coefficient

یافته‌های این پژوهش در سه بخش سیمای شکلی، روش‌شناختی پژوهش‌ها و تحلیل آنها، تحلیلی بر چارچوب‌ها و ترکیب چارچوب‌ها بیان شده است. در بخش یافته‌ها، گزارش آماری از پژوهش‌های بررسی‌شده ارائه شده است. در ادامه، پژوهش‌ها از جنبۀ محتوا و کیفیت تحلیل شده و درنهایت، به جمع‌بندی یافته‌های توصیفی و تحلیلی و ترکیب کلی چارچوب‌ها توجه شده است.

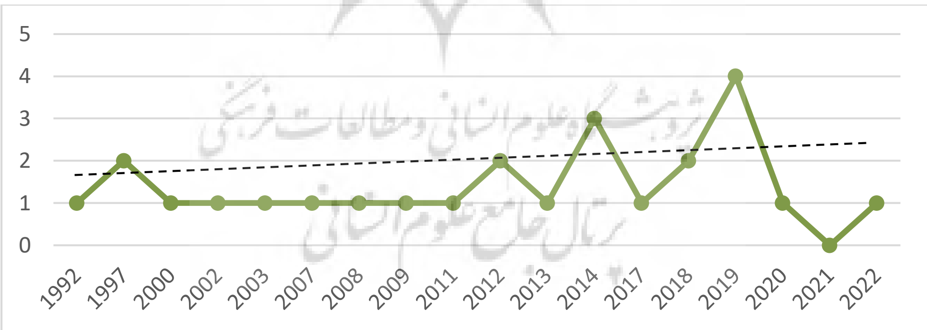
الف) سیمای شکلی و روش‌شناختی پژوهش‌ها و تحلیل آنها: در این قسمت، ۹ شاخص دربارۀ پژوهش‌ها بررسی شده که عبارت است از: قالب مقاله‌ها، دورۀ زمانی آثار، سنخ‌شناسی پژوهشگران، توزیع جغرافیایی، روش پژوهش، نمونۀ موردبررسی، موضوعات مورد پژوهش، مثال‌های برگزیدۀ استفاده‌شده و خلاصۀ نتایج حاصل از پژوهش‌ها.

قالب مقاله‌ها: منظور از قالب مقاله‌ها، نحوۀ انتشار مقاله در قالب‌های گزارش کارشناسی، علمی پژوهشی، پایان‌نامه و کنفرانس است. در این مطالعه ۷۶ درصد علمی پژوهشی، ۱۲ درصد کنفرانسی و ۱۲ درصد پایان‌نامه هستند. درصد زیاد علمی‌پژوهشی نشان از درجۀ علمی مناسب مقاله‌ها دارد (جدول ۱).

جدول ۱: قالب آثار منتشرشده در حوزۀ نمودار تابع و مشتق آن

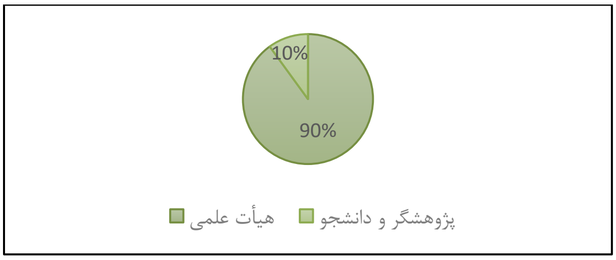
قالب	علمی پژوهشی	کنفرانسی	پایان‌نامه	کل
فراوانی	۲۰	۳	۳	۲۶
درصد	٪۷۶	٪۱۲	٪۱۲	٪۱۰۰

دورۀ زمانی آثار: منظور از دورۀ زمانی، تاریخ انتشار مقاله بوده است. پژوهش‌ها در فاصلۀ سال‌های **۱۹۹۲ تا ۲۰۲۲** (فوریه) بررسی شده‌اند. شکل (۳) نشان‌دهندۀ توزیع مقاله‌ها و رگرسیون آنهاست؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود، پژوهش‌های منتشرشده با مضمون رابطۀ بین نموار تابع مشتق و اولیه طی این ۳۱ سال به‌جز سال ۲۰۲۱ رشد نسبی داشته‌اند. به‌خصوص در ۹ سال اخیر تعداد این مقالات به‌صورت نسبی افزایش یافته است.



شکل۳: سری زمانی مقالات منتشرشده در حوزۀ نمودار یک تابع و مشتق آن

سنخ‌شناسی پژوهشگران: ۲۶ پژوهش انتخاب‌شده، درمجموع از سوی ۴۴ پژوهشگر به نگارش درآمده‌اند که شکل ۴ نشان‌دهندۀ فراوانی توزیع آنهاست؛ همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ۹۰ درصد پژوهش‌ها از سوی اعضای هیئت‌علمی و ۱۰ درصد از سوی پژوهشگران و دانشجویان انجام شده‌اند. سهم بالای اعضای هیئت‌علمی در انجام این پژوهش‌ها نشان‌دهندۀ سطح کیفی زیاد پژوهش‌های حوزۀ رابطۀ بین نمودار تابع و مشتق آن است.



شکل۴: درصد فراوانی پژوهشگران در حوزهٔ رابطهٔ بین تابع و مشتق آن

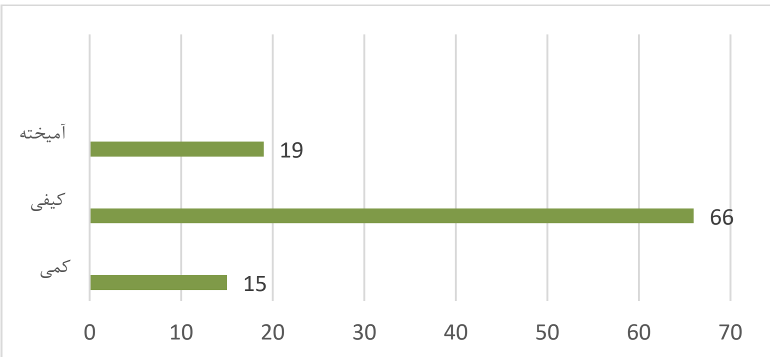
توزیع جغرافیایی: براساس جدول (۲)، ۳۰ درصد تحقیقات در آمریکا، ۱۹ درصد در ترکیه و ۱۱ درصد به‌صورت مشترک از سوی چین و آمریکا انجام شده است.

جدول۲: توزیع جغرافیایی کشورهایی که دربارهٔ نمودار تابع مشتق و اولیهٔ آن پژوهش انجام داده‌اند

کشور	فراوانی	درصد
مکزیک	۱	۴
آمریکا	۸	۳۰
آفریقای جنوبی	۱	۴
اسرائیل	۱	۴
برزیل	۱	۴
استرالیا	۱	۴
ترکیه	۵	۱۹
ایران	۲	۸
اندونزی	۲	۸
سوئد	۱	۴
چین و آمریکا	۳	۱۱
جمع	۲۶	۱۰۰

نتایج جدول (۵) نشان‌دهندهٔ آن است که کشورهای آمریکا، ترکیه و چین بیش از کشورهای دیگر روی این مقوله متمرکز شده‌اند.

روش‌های پژوهش مورداستفاده در آثار: ازلحاظ روش استفاده‌شده در پژوهش‌ها، ۶۶ درصد مقاله‌ها از روش پژوهش کیفی، ۱۹ درصد آمیخته و ۱۵ درصد کمی استفاده کرده‌اند (شکل ۵). در شکل (۴) نمودار میله‌ای درصد انواع تحقیق موردمطالعه آورده شده است.



شکل ۵: درصد انواع تحقیقات موردبررسی

بررسی‌ها نشان‌دهندهٔ آن است که پژوهشگران به تحقیقات کیفی و درک عمیق پدیده‌ها علاقه دارند. جدول (۳) حاکی از انواع تحقیق تجربی در این پژوهش است. مطالعهٔ موردی با ۵۰ درصد بیشترین روش تحقیق بوده است.

جدول ۳: انواع تحقیق تجربی بررسی‌شده در این مطالعه

نوع تحقیق	کمی		کیفی					آمیخته	کل
	آزمایشی	پیمایشی	مطالعهٔ موردی یا چند موردی	داده بنیاد	تحلیل محتوا	قوم نگاری	پدیدارشناسی	کمی و کیفی	
فراوانی	۱	۳	۱۳	۱	۱	۱	۱	۵	۲۶
درصد	۴	۱۱	۵۰	۴	۴	۴	۴	۱۹	۱۰۰

نمونه‌های موردبررسی در آثار: جدول (۴) نشان‌دهندهٔ توزیع نوع نمونهٔ موردبررسی در پژوهش‌هاست.

جدول ۴: توزیع نوع نمونهٔ موردبررسی در پژوهش‌ها

	دانشجو	دانش‌آموز	جمع
فراوانی	۲۲	۴	۲۶
درصد	۸۵	۱۵	۱۰۰

نتایج حاصل از پژوهش‌ها: در این بخش خلاصهٔ نتایج حاصل از پژوهش‌های انجام‌شده در فراتحلیل و گزیدهٔ پیشنهادهای پژوهشگران از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۲۲ ارائه شده است. در جدول (۵) مشکلاتی که پژوهشگران حین بررسی رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه مشاهده کردند، به‌همراه پیشنهاد برای رفع این موارد ارائه شده است.

جدول ۵: مشکلات مطرح‌شده از سوی پژوهشگران به‌همراه راهکار در رابطه با رسم نمودار تابع مشتق و اولیه

پژوهشگران	مشکلات	پیشنهاد برای رفع مشکل رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه
نیمروسکی و روبین (۱۹۹۲)	معادل گرفتن شیب با ارتفاع	آموزش ویژگی‌های مشتق و تشخیص رابطهٔ دوسویه بین نمودارها.
	نابرابری واحدها روی محورها	یکسانی واحدها
آسیالا و همکاران (۱۹۹۷)	نبودِ تصور پویا (تصور پویا زمانی است که تصاویر به‌طور ذهنی تغییر شکل داده و دست‌کاری شوند) و حرکت بین بازنمایی‌ها	به‌کارگیری چرخهٔ ACE نظریهٔ APOS به شاگردان کمک می‌کند.
بیکر و کولی تریگوروس (۲۰۰۰) فائونتیلبا و همکاران (۲۰۱۷)	نقطهٔ عطف و نقاط مشتق‌ناپذیر (عطف قائم، گوشه) محاسبه‌نشدن تقریبی مشتق عددی به کمک جدول	یافتن درک ویژگی‌ها (درک هر شرط به‌صورت جبری و ارتباط آن با خاصیت نموداری توابع و هماهنگی شرط‌ها با هم) و درک بازه‌ای (درک تعیین علامت یک بازه، پیوستگی روی بازه و هماهنگی برای بررسی مشتق روی

پژوهشگران	مشکلات	پیشنهاد برای رفع مشکل رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه
برجی و همکاران (۲۰۱۸، الف) (برجی و همکاران، ۲۰۱۸ ب)		یک بازه). هماهنگی این دو درک و به‌کارگیری چرخهٔ ACE و تجزیهٔ ژنتیکی به کمک نرم‌افزار میپل برای آموزش مفید است.
بری و نیمن (۲۰۰۳)	درک ابزاری نسبت به نمودار تابع مشتق و تابع اولیه	استفاده از ماشین‌حساب گرافیکی و بحث گروهی به عبور از درک ابزاری به رابطه‌ای منجر شد.
اوبوز (۲۰۰۷)	تشخیص نقطهٔ عطف	استفاده از رایانه و نرم‌افزار
زازکیس (۲۰۱۳)	تفسیر نمودار تابع مشتق مانند تابع اولیه- نبودِ اتصال بین نمودارها	هماهنگی بین استدلال هندسی و تحلیلی با نرم‌افزار اسکچ پد
ناتاشه و کارستلی (۲۰۱۴)	رسم نمودار تابع مشتق	استفاده از فناوری به تعادل بین درک رویه‌ای و رابطه‌ای کمک کند. آموزش حرکت بین تفکر هندسی و تحلیلی. مورد تأیید دانشمندان علوم اعصاب
سوییدان (۲۰۲۲)		استفاده از ابزارهای دیجیتالی برای اثبات و توجیه استدلال- استفاده از استدلال‌های اعضای گروه یا کلاس
آسپینوال و شاو (۲۰۰۲) هاکیومروگلو و چیکن (۲۰۱۲)	هر دو متفکر هندسی و تحلیلی در رسم مشکلاتی داشتند.	آشنایی شاگردان با دو نوع متفکر هندسی و تحلیلی
هاکیومروگلو، آسپینوال و پرسمگ (۲۰۱۰)	رسم نمودار تابع اولیه	اهمیت فرایند ذهنی توصیفی-کلامی
آسپینوال و همکاران (۱۹۹۷) آسپینوال و همکاران (۲۰۰۸) هاکیومروگلو و همکاران (۲۰۰۹)		اهمیت هماهنگی و ترکیب تفکر هندسی و تحلیلی
استرینگر (۲۰۱۱) گارسیا- گارسیا و دولارس- فلورس (۲۰۲۱)	نقاط گوشه، عطف قائم و نقاط دارای مجانب قائم و ناپیوستگی	استفاده از بازنمایی نموداری و تحلیلی باعث می‌شود، دانش رویه‌ای و مفهومی به هم متصل شوند.
استالی (۲۰۱۱)	الف) رسم نمودار مشتق با رفتاری متضاد با تابع اولیه؛ ب) فرایند رسم‌کردن از چپ به راست، در بیشتر مواقع درست رسم می‌شود؛ ولی برخی مواقع دانشجویان در یک نقطه خطا می‌کنند و نمودار در کل اشتباه رسم می‌شود؛ ج) در رسم مشتق دوم تابع مشکل داشتند و اغلب تابع خطی رسم می‌کردند.	هماهنگی تصورهای ذهنی پرسمگ (پرسمگ ۵ نوع تصور ریاضی مرتبط با تفکر بصری دسته‌بندی کرده است: تصور عینی-تصور حافظه- تصور الگویی- تصور حرکتی- تصور پویا).
عبدالحمید و ادریس (۲۰۱۴) عبدالحمید و همکاران (۲۰۱۹)	درک رویه‌ای	تقویت استدلال بصری شاگردان
(دیوید و همکاران، ۲۰۱۷؛ ۲۰۱۹)	تفکر شاگرد از نقاط روی نمودار	شاگردان تفکر نقطه‌ای و سرتاسری را با هم داشته باشند.

پژوهشگران	مشکلات	پیشنهاد برای رفع مشکل رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و اولیه
مارتین و گومز (۲۰۱۹)	رسم نمودار تابع مشتق	استفاده از مساحت زیر نمودار تابع مشتق برای یافتن مقادیر تابع اولیه در کتاب‌های درسی
ایکرام و همکاران (۲۰۲۰)	رسم نمودار تابع مشتق	به‌کارگیری استدلال مستقیم، معکوس و ترکیبی در رسم نمودارها

با توجه به جدول (۵) مشکلات شاگردان در رابطه با رسم نمودار تابع مشتق و اولیه شامل این موارد است: معادل‌گرفتن شیب با ارتفاع؛ یکسان‌نبودن واحدها روی محور؛ نبودِ تصور پویا و ناتوانی در حرکت بین بازنمایی‌ها؛ نبودِ تشخیص رفتار تابع در نقاط عطف قائم، عطف، گوشه، ناپیوسته و نقاط دارای مجانب روی نمودار تابع و متناظر آن روی نمودار تابع مشتق و بالعکس؛ ناتوانی در محاسبهٔ مشتق تقریبی در یک نقطه به کمک جدول مقادیر؛ توجه صرف به ضابطه و داشتن درک ابزاری یا رویه‌ای؛ به‌طور کلی رسم نمودار تابع مشتق یا اولیه.

به‌دنبال آن راهکارهایی که پژوهشگران توصیه کرده‌اند، عبارت است از: استفاده از ابزارهای آموزشی و نرم‌افزارها برای درک بهتر شاگرد؛ هماهنگی بین تفکر هندسی و تحلیلی برای رسم بیشتر توابع؛ هماهنگی بین تفکر نقطه‌ای و سرتاسری؛ تقویت استدلال بصری شاگردان، هماهنگی بین تصورهای ذهنی؛ به‌کارگیری تجزیهٔ ژنتیکی و چرخهٔ ACE؛ توجه به فرایند ذهنی توصیفی-کلامی؛ به‌کارگیری استدلال مستقیم و معکوس و ترکیبی در رسم نمودارهای تابع اولیه؛ استفاده از مساحت زیر نمودار تابع مشتق برای یافتن مقادیر تابع اولیه در کتاب‌های درسی؛ تقویت استدلال بصری شاگردان؛ آموزش ویژگی‌های مشتق و تشخیص رابطهٔ دوسویه بین نمودارها.

ب) تحلیلی بر چارچوب‌ها: چارچوب‌های ارائه‌شده از سوی پژوهشگران هرکدام دارای ویژگی‌های مختلفی هستند و اشتراکات زیادی نیز بین برخی از آنها وجود دارد. ۱۳ چارچوب اصلی از بین آنها شناسایی شد که البته برخی هم پوشانی دارند (جدول ۶).

جدول (٦) چارچوب‌های پژوهشگران در رابطهٔ بین نمودار تابع و مشتق آن

پژوهشگران	چارچوب		مثال
آسپینوال و شاو (۲۰۰۲)- هاکیومروگلو و همکاران (۲۰۰۹)- استرینگر (۲۰۱۱)- هاکیومروگلو و چیکن (۲۰۱۲)	انواع متفکر: تحلیلی: کلامی-منطقی هندسی: بصری هارمونیک: تصویری-مجرد	انواع متفکر کروتتسکی	- متفکر تحلیلی: استفاده از فرمول‌های مشتق و انتگرال‌گیری - متفکر هندسی: استفاده از شهود و ویژگی‌های نمودار - متفکر هارمونیک: ترکیبی از هر دو پرسمگ پنج نوع تصور ریاضی مرتبط با تفکر بصری دسته‌بندی می‌کند:
آسپینوال، هاکیومروگلو و پرسمگ (۲۰۰۸)		انواع متفکر کروتتسکی+ توصیف کلامی	تصور عینی-تصاویر حافظه از فرمول‌ها- تصور الگویی- تصور ایستا- تصور پویا
آسپینوال (۱۹۹۴)- آسپینوال، شاو و پرسمگ (۱۹۹۷)- هاکیومروگلو و همکاران (۲۰۱۰)		انواع متفکر کروتتسکی+ تصورهای پرسمگ	

پژوهشگران	چارچوب	مثال
زازکیس (۲۰۱۳)	انواع متفکر کروتتسکی+ نرم افزار اسکچ پد	
عبدالحمید و ادریس (۲۰۱۴)	درک جبری و نموداری (زندیه، ۲۰۰۰)	درک جبری و نموداری مشتق در لایه‌های فرایند و شیء علامت نمودار (بازه‌ای که علامت مشتق تغییر می‌کند)- رسم نمودار تابع اولیه- دست‌ورزی جبری (استفاده از مشتق اول و دوم)
استالی (۲۰۱۱)	درک دانشجویان: نقطه‌ای: درک نقطه به نقطه در طول زمان: درک سرتاسری	-درک نقطه‌ای: مانند محاسبهٔ شیب خط قاطع -درک در طول زمان: درک وقتی یک نقطه به نقطه دیگر نزدیک می‌شود، شیب افزایش یا کاهش می‌یابد؟
عبدالحمید و همکاران (۲۰۱۹)	درک نقطه‌ی و درک در طول زمان استالی (۲۰۱۱)- درک جبری و نموداری زندیه (۲۰۰۰)	مشابه پژوهش استالی (۲۰۱۱)
ناتاشه و کارسنتی (۲۰۱۴)	نقش‌ها و عملکردهای شهود در یاددهی و یادگیری ریاضیات: -نمایش‌های بصری: نمایش اشیا در یک، دو یا سه بعد که براساس آنها اعمال بصری خاصی انجام داده می‌شود. -اعمال بصری: فرایندها و فعالیت‌های مختلفی که یک شخص روی نمایشی بصری انجام می‌دهد. -اهداف بصری: اهدافی که اعمال بصری روی نمایش‌های تصویری اجرا می‌کنند.	-تصاویر، عکس‌ها، نمودارها و شکل‌ها -شخص یک نمایش بصری را نگاه می‌کند، اطلاعات آن را می‌خواند، اندازه‌گیری و مقایسه می‌کند. -مانند جایگزینی اطلاعات، توصیف و اثبات.
دیوید و همکاران (۲۰۱۹؛ ۲۰۱۷)	چارچوب تشخیص مفاهیم نمودار بر مبنای دیدگاه ساخت و سازگرایی تفکر مقداری-تفکر مکانی	در این چارچوب، اگر دانش‌آموز یا دانشجو به زوج‌های مرتب که نقاط را نشان می‌دهند، توجه کند، به این روش تفکر مقداری گفته می‌شود. از طرف دیگر، اگر دانش‌آموز یا دانشجو به موقعیت مکانی نقاط در دستگاه دکارتی توجه کند، به این روش تفکر به‌عنوان تفکر مکانی گفته می‌شود.
آسیالا و همکاران (۱۹۹۷)- اوبوز (۲۰۰۷)	چارچوب APOS	نظریهٔ APOS درواقع، اقتباسی از ایده‌های پیاژه برای مطالعهٔ توسعهٔ دانش ریاضی در افراد از طریق مراحلی شامل عمل، فرآیند، شیء و طرح‌واره است. بر مبنای تحلیل نظری یک تجزیه ژنتیکی[1] ارائه می‌شود.
برجی و همکاران (۲۰۱۸ الف)	چارچوب APOS-ACE	بر مبنای تحلیل نظری و تجزیهٔ ژنتیکی اولیه و چرخهٔ ACE به کمک دانشجویان آموزش ارائه می‌شود.
بیکر و کولی تریگوروس (۲۰۰۰)- فونتیلبا و	چارچوب APOS-traid سطوح توسعهٔ طرحواره: Intra: اشیای ریاضی در حال ساخته‌شدن	-روابط منطقی بین عناصر ریاضی برقرار نیست و خطاهایی (نوع اتصال منطقی) بین آنها به اشتباه ساخته می‌شود.

1 Genetic decomposition

پژوهشگران	چارچوب	مثال
همکاران (۲۰۱۷)	است؛ ولی مجزا Inter: شناسایی ارتباط بین فرایندها و اشیای مختلف و انتقال بین آنها در حال شروع‌شدن است. Trans:ارتباط‌های‌شناسایی‌شده‌منسجم می‌شوند.	- تا حدودی روابط منطقی بین عناصر ریاضی برقرار شده است. -ترکیبی از حالت‌های بازنمایی رخ می‌دهد.
برجی و همکاران (۲۰۱۸ ب)	ترکیبی از چارچوب APOS-Traid و OSA	رویکرد هستی‌شناسی-نشانه‌شناسی نقطهٔ شروع برای رویکرد هستی‌شناسی-نشانه‌شناسی، یک هستی‌شناسی از اشیای ریاضی است که بعد سه‌گانهٔ ریاضیات به‌عنوان فعالیت حل مسئلهٔ مشترک اجتماعی، زبانی نمادین و سیستم مفهومی سازمان‌دهی‌شده منطقی را در نظر می‌گیرد. با در نظر گرفتن موقعیت مسئله به‌عنوان مفهومی ابتدایی، مفاهیم نظری شیوهٔ آموزشی، معنا و شیء (شخصی و گروهی) را با هدف آشکار و مؤثرسازی هر دو مورد ویژگی سه‌گانهٔ ریاضیات و تکوین شخصی و گروهی دانش ریاضی و همچنین وابستگی متقابل آنها تعریف می‌شود.
هونگ و توماس (۲۰۱۴)	ترکیبی از سه جهان ریاضی تال و APOS	مدل سه جهانی تال شامل مجسم‌کردن، فرهومی و صوری-اصول موضوعه است. جهان اول، یعنی مجسم‌ساختن، با درک پدیده‌ها و اشیا از طریق تفکر در اعمال شکل می‌گیرد و بدون داشتن حس روشنی از نتیجهٔ عمل شروع می‌شود. در جهان فرهومی، اعمال رویه‌ای و مرحله به مرحله روی تصورات ذهنی از جهان اول انجام می‌شود. مرحلهٔ نهایی (جهان صوری) که از تجارب دو مرحلهٔ قبل شکل می‌گیرد، دارای ماهیت استقرایی یا قیاسی بوده و مبتنی بر ارائه‌ای منطقی و کلامی است.
گارسیا-گارسیا و دولارس-فلورس (۲۰۲۱)	انواع اتصالات ریاضی به همراه باورها -رویه‌ای -بازنمایی‌های مختلف -جزء کل -ویژگی -برگشت‌پذیری	-از فرمول مشتق استفاده می‌کند. - بازنمایی‌های مختلف استفاده می‌شود. -کل با مجموع اجزای آن ساخته می‌شود. -مشخصهٔ خاصی که برخی مفاهیم را از یکدیگر مجزا می‌کند. -عملیات ریاضی دارای متناظری معکوس نیز هستند که اثر هم را خنثی می‌کنند.
ایکرام و همکاران (۲۰۲۰)	انواع استدلال‌های ریاضی مستقیم معکوس ترکیبی	نمودار تابع مشتق داده شده و نمودار تابع اولیه را می‌خواهند. - از روی نمودار مشتق و با انتگرال‌گیری نمودار تابع را پیدا می‌کند. - از ویژگی‌های مشتق به نمودار تابع اولیه می‌رسد. - از دو راهبرد بالا کمک می‌گیرد.
نیمروسکی و روبین (۱۹۹۲)	چارچوب گفتمان	به کمک مصاحبه با دانش‌آموزان استدلال‌ها و بدفهمی‌ها مشخص می‌شود.
اورهان (۲۰۱۲)	درک معرفت‌شناسی مشتق	به کمک مصاحبه با دانش‌آموزان درک عمیقی از اشتباهات آنها به دست می‌آید.

پژوهشگران	چارچوب	مثال
مارتین و گومز (۲۰۱۹)	ATD (anthropological theory of the didactic) [$T/\tau/\theta/\Theta$] نظریهٔ انسان‌شناسی تعلیمی	دانش دربارهٔ فعالیت‌های انسانی و این که چرا آنها مهم هستند. یکی از عناصر اصلی ATD، در تجزیه‌وتحلیل، مفهوم عمل شناسی است (دربارهٔ مطالعهٔ فعالیت ریاضی). یک عمل‌شناسی [T / τ / θ / Θ] با چهار عنصر تشکیل می‌شود: نوعی تکلیف T برای انجام، تکنیک τ که اجازه می‌دهد کار به پایان برسد، منطق (فناوری) θ که روش را توضیح می‌دهد و توجیه می‌کند و یک تئوری Θ که شامل منطق است. این عناصر در بلوک عملی [T / τ] (یا دانش فنی) و بلوک دانش [θ / Θ] که آنچه را انجام شده است، توصیف، توضیح و توجیه می‌کند.
بری و نیمن (۲۰۰۳)	تصور مفهوم و تعریف مفهوم (تال و وینر، ۱۹۸۱)	این مدل برای توضیح چگونگی شکل‌گیری مفاهیم ریاضی و نشان دادن نقشی که ساختار مفهومی ذهن شخص در این ساخت و ساز دارد و نیز برای تحلیل درک دانش‌آموزان و تعریف‌های آنها از مفاهیم مختلف ارائه شد.
سوییدان (۲۰۲۲)	سه لایهٔ آشکارسازی در نمودار بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیهٔ آن	این چارچوب بر مبنای پدیدارشناسی به‌دنبال کشف لایه‌های سلسله‌مراتبی اشیا، روابط و روابط تابعی است. لایهٔ آشکارسازی اشیا: هر یک از نمودارها را به طور مجزا معناسازی می‌کند؛ به‌طور مثال، نمودار تابع صعودی است. لایهٔ آشکارسازی روابط: اتصال بین نمودار تابع و تابع مشتق را درک می‌کند؛ به‌عنوان نمونه نمودار تابع مشتق محورطول‌ها را قطع می‌کند، پس نمودار تابع اکسترمم دارد. لایهٔ آشکارسازی تابعی: رابطهٔ کلی بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه را درک می‌کند؛ به عنوان مثال، تشخیص می‌دهد که این نمودار تابع و این نمودار تابع مشتق است.

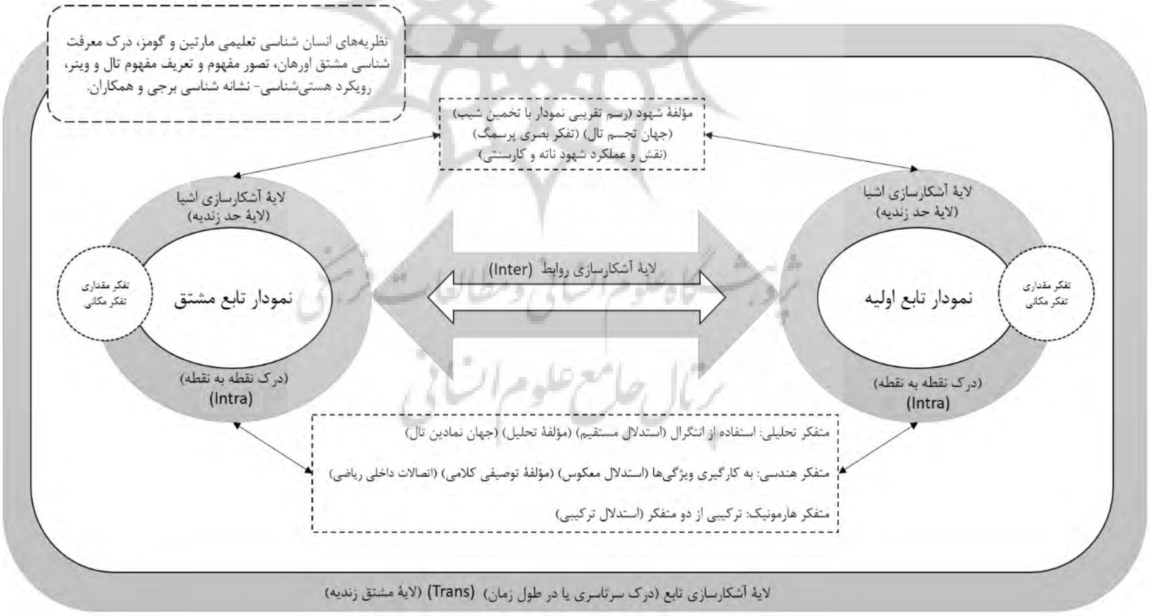
آنچه در جدول (۶) قابل‌مشاهده است، ۱۳ چارچوب اصلی در بین پژوهش‌ها مشخص شده است که عبارت است از سه نوع متفکر کروتتسکی (پرسمگ و کروتتسکی، کروتتسکی با نرم افزار اسکچ پد، کروتتسکی با توصیف کلامی)، انواع استدلال‌های ریاضی، درک جبری و نموداری (زندیه)، درک نقطه‌ای و در طول زمان (درک جبری و نموداری؛ با درک نقطه‌ای و در طول زمان)، انواع اتصالات ریاضی، درک معرفت‌شناسی مشتق، APOS (APOS-traid، APOS-traid و OSA، APOS-ACE، APOS و سه جهان ریاضی تال)، چارچوب گفتمان، نقش و عملکرد شهود در یاددهی و یادگیری، تفکر مقداری و مکانی، ATD، تصور مفهوم و تعریف مفهوم و سه لایهٔ آشکارسازی نمودارها. ۳۱ درصد چارچوب‌ها بر مبنای سه متفکر کروتتسکی، ۲۳ درصد بر مبنای APOS و ۷ درصد بر مبنای درک نقطه‌ای و جبری انجام شده‌اند.

ج) ترکیب یا سنتز چارچوب‌ها: براساس تحلیل انجام‌شده و مطالعهٔ پیشینهٔ تحقیق ترکیب چارچوب‌ها برای بررسی نمودار تابع مشتق و نمودار تابع اولیه انجام شده است (شکل ۶)؛ همان‌طور که در شکل (۵) دیده می‌شود، هدف بررسی تفکر و رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه است. چارچوب‌ها از منظرهای مختلف به این موضوع نگاه کرده‌اند و برخی اشتراکاتی نیز دارند. درک ارتباطات و تشابهات بین چارچوب‌ها و شکل (۶) به یاددهی و یادگیری رابطهٔ بین

نمودار تابع مشتق و تابع اولیه کمک کند. در ادامه، به تشریح بیشتر شکل (۶) از منظرهای جنبهٔ تفکر شاگردان، جنبهٔ لایه‌های اشکارسازی نمودار و به‌کارگیری نظریه‌های آموزش ریاضی توجه شده است.

جنبهٔ تفکر فراگیران: سه نوع متفکر کروتتسکی (۱۹۷۶) و آسپینوال (۱۹۹۵) شامل تحلیلی، هندسی و هارمونیک با استدلال دانشجویان برای کشف رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه یعنی استدلال مستقیم، معکوس و ترکیبی ایکرام و همکاران (2020) نظیر می‌شود؛ همچنین مؤلفهٔ تحلیل آسپینوال و همکاران (۱۹۹۷)، جهان نمادین تال (۲۰۰۸) و اتصالات درونی ریاضی گارسیا-گارسیا و دولارس-فلورس (۲۰۲۱) متناظر با متفکر تحلیلی کروتتسکی (۱۹۷۶) و آسپینوال (۱۹۹۵) هستند. مؤلفهٔ توصیفی کلامی چارچوب آسپینوال و همکاران (۲۰۰۸؛ ۱۹۹۷) با متفکر هندسی کروتتسکی (۱۹۷۶) و آسپینوال (۱۹۹۵) نظیر هستند. مؤلفهٔ شهود چارچوب آسپینوال و همکاران (۱۹۹۷) با جهان تجسم تال (۲۰۰۸)، تفکر بصری پرسمگ در مطالعهٔ هاکیومروگلو و همکاران (۲۰۱۰) و نقش‌ها و عملکردهای شهود ناتشه و کارسنتی (۲۰۱۴) همخوانی دارد. از منظر تفکر مقداری و مکانی دیوید و همکاران (۲۰۱۷، ۲۰۱۹) نیز تفکر شاگردان برای هر یک از نمودار تابع اولیه و نمودار تابع مشتق بررسی می‌شود.

جنبهٔ لایهٔهای آشکارسازی نمودار: سه لایهٔ مهم و سلسله‌مراتبی برای درک رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه وجود دارد که با آشکارشدن این سه لایه شاگردان به‌راحتی از نمودار تابع اولیه به نمودار تابع مشتق و بالعکس حرکت می‌کنند. سه لایهٔ نموداری که در شکل (۶) با سایه نشان داده شده است، عبارت است از لایهٔ آشکارسازی اشیا، روابط و تابع (سوییدان، ۲۰۲۲).



شکل ۶: ترکیب چارچوب‌های بررسی رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه

لایهٔ آشکارسازی اشیا برای نمودار تابع اولیه یا مشتق است. این لایه متناظر با لایهٔ حد زندیه (۲۰۰۰) در مطالعهٔ عبدالحمید و ادریس (۲۰۱۴)، درک نقطه به نقطهٔ پژوهش عبدالحمید و همکاران (۲۰۱۹)، استالی (۲۰۱۱)، سطح Intra چارچوب APOS-traid بیکر و کولی تریگوروس (۲۰۰۰)، فونتیلبا و همکاران (۲۰۱۷)، برجی و همکاران (a; b۲۰۱۸) باشد. پس از اینکه این لایه برای شاگرد آشکار شد، وارد لایهٔ بعد یعنی آشکارسازی روابط شود. لایهٔ آشکارسازی

روابط سوییدان (۲۰۲۲) با سطح Inter چارچوب APOS-traid، بیکر و کولی تریگوروس (۲۰۰۰)، فونتیلبا و همکاران (۲۰۱۷)، برجی و همکاران (a & b ۲۰۱۸) نظیر شده است. این لایه نیز اهمیت دارد و شاگرد باید رابطه و ویژگی‌های متناظر بین نمودارهای تابع مشتق و تابع اولیه را تشخیص دهد تا بین این دو نمودار حرکت کند. شاگردان اغلب در این لایه مشکلاتی دارند که پژوهشگران برای تسهیل آشکارسازی این لایه، به‌کارگیری نرم‌افزار را توصیه می‌کنند؛ به‌عنوان نمونه، (زازکیس[1]، ۲۰۱۳؛ سوییدان، ۲۰۲۲).

لایهٔ سوم و آخرین لایه از منظر سوییدان (۲۰۲۲) همان لایهٔ تابع است. این لایه متناظر با مرحله‌ای است که شاگردان به درک سرتاسری عبدالحمید و همکاران (۲۰۱۹) و استالی (۲۰۱۱) برسند؛ همچنین معادل لایهٔ مشتق زندیه (۲۰۰۰) در مطالعهٔ عبدالحمید و ادریس (۲۰۱۴) و سطح Trans چارچوب APOS-traid، بیکر و کولی تریگوروس (۲۰۰۰)، فونتیلبا و همکاران (۲۰۱۷)، برجی و همکاران (a; b ۲۰۱۸) است. شاگردی که به این مرحله رسیده باشد، با داشتن نمودار تابع اولیه، تابع مشتق آن را رسم می‌کند و بالعکس.

به‌کارگیری نظریه‌های آموزش ریاضی: برخی از پژوهشگران به کمک نظریه‌های مختلف آموزش ریاضی درصدد بودند تا جنبه‌ای از درک رابطهٔ بین نمودار تابع و تابع مشتق را برای یاددهی و یادگیری آشکار کنند. ازجمله به نظریه‌های انسان‌شناسی تعلیمی مارتین و گومز (۲۰۱۹)، درک معرفت‌شناسی مشتق اورهان (۲۰۱۲)، تصور مفهوم و تعریف مفهوم تال و وینر (۱۹۸۸) در مطالعهٔ بری و نیمن (۲۰۰۳)، رویکرد هستی‌شناسی- نشانه‌شناسی در مطالعهٔ برجی و همکاران (b۲۰۱۸) اشاره می‌شود.

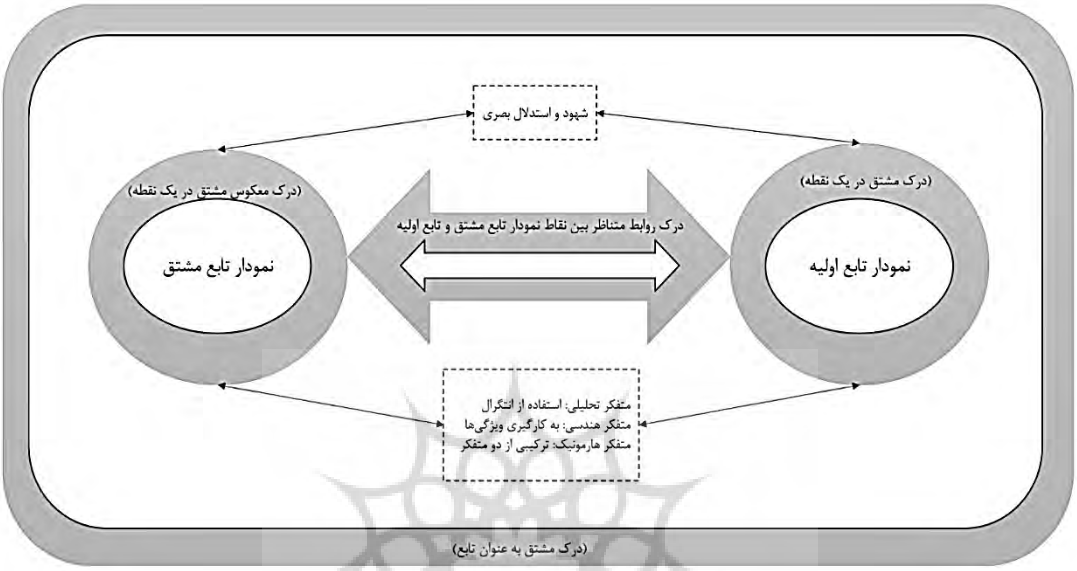
با توجه به جمع‌بندی استنتاج‌شده در شکل (۷) چارچوب خلاصه‌تری برای بررسی درک فراگیران از رابطهٔ بین نمودار تابع و نمودار تابع مشتق مشاهده می‌شود. این چارچوب از دو قسمت تشکیل شده است: انواع متفکر (تحلیلی، هندسی، هارمونیک) و فرایند درک شاگردان طی سه لایه درک (مشتق در یک نقطه، رابطهٔ متناظر نقاط نمودار تابع مشتق و تابع اولیه و مشتق به‌عنوان تابع). البته در رسم نمودار تابع مشتق یا اولیه نقش شهود را نباید نادیده گرفت. برای فهم بهتر در دو مرحله این چارچوب تشریح می‌شود:

مرحلهٔ اول: نمودار تابع مشتق داده شده است. اگر ضابطهٔ تابع مشتق قابل‌محاسبه یا داده شده باشد، متفکر تحلیلی به سراغ انتگرال رفته و ضابطهٔ تابع اولیه را پیدا کرده و یکی از نمودارها را دقیق رسم می‌کند. متفکر بصری از ویژگی‌ها شامل یکنوایی، نقاط بحرانی، تقعر، اکسترمم، عطف و نقاط مشتق‌ناپذیر کمک گرفته است و متناظر آن در تابع اولیهٔ یکی از نمودارهای تقریبی رسم خواهد کرد. منظور از لایهٔ مشتق در یک نقطه درک شاگرد از نقاط مشتق‌پذیر و ناپذیر، نقطهٔ اکسترمم، نقطهٔ عطف و بحرانی است. در لایهٔ دوم شاگرد باید رابطهٔ بین نقاط تابع مشتق را در لایهٔ اول با نقاط متناظر در نمودار تابع اولیه بداند و نظیر کند؛ به‌عنوان مثال، مثبت یا منفی بودن نمودار مشتق متناظر یکنوایی تابع اولیه است. سپس در لایهٔ سوم به‌عنوان یک کل باید نمودار تابع اولیه را با توجه به لایه‌های اول و دوم ترسیم کند.

مرحلهٔ دوم: نمودار تابع اولیه داده شده است. اگر ضابطهٔ تابع اولیه قابل‌محاسبه یا داده شده باشد، متفکر تحلیلی به سراغ فرمول مشتق می‌رود و ضابطهٔ تابع مشتق را پیدا کرده و نمودار تابع مشتق را دقیق رسم می‌کند. متفکر بصری از ویژگی‌ها شامل یکنوایی، نقاط بحرانی، تقعر، اکسترمم، عطف و نقاط مشتق‌ناپذیر کمک گرفته (جدول تغییرات تابع) و

1. Zazkis

متناظر آن در تابع مشتق نمودار تقریبی را رسم خواهد کرد. منظور از لایهٔ مشتق در یک نقطه درک شاگرد از نقاط مشتق‌پذیر و ناپذیر، نقطهٔ اکسترمم، نقطهٔ عطف و نقطهٔ بحرانی است. در لایهٔ دوم شاگرد باید رابطهٔ بین نقاط تابع اولیه در لایهٔ اول را با نقاط متناظر در نمودار تابع مشتق بداند و نظیر کند. سپس در لایهٔ سوم به‌عنوان یک کل باید نمودار تابع مشتق را با توجه به لایه‌های اول و دوم ترسیم کند. برخی شاگردان به‌صورت ترکیبی یعنی هم از ضابطه و هم از ویژگی‌ها برای رسم بهره می‌برند. برخی نیز به‌صورت بصری یا بر مبنای تصور خود نمودار را رسم می‌کنند.



شکل ۷: چارچوب استنتاج‌شدهٔ رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه بر مبنای پژوهش‌ها

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر به بررسی ۲۶ پژوهش انجام‌شده دربارهٔ نمودار تابع مشتق و اولیهٔ آن به روش فراتحلیل کیفی توجه کرده تا نظریهٔ اساسی آنها را مشخص کند. ۱۳ چارچوب اصلی بین بیشتر محققان تعیین شد که شامل سه نوع متفکر کروتتسکی (پرسمگ و کروتتسکی، کروتتسکی با نرم‌افزار اسکچ پد، کروتتسکی با توصیف کلامی)، انواع استدلال‌های ریاضی، درک جبری و نموداری (زندیه)، درک نقطه‌ای و در طول زمان (درک جبری و نموداری؛ با درک نقطه‌ای و در طول زمان)، انواع اتصالات ریاضی، درک معرفت‌شناسی مشتق، APOS (APOS-traid، APOS-traid و OSA، APOS-ACE، APOS و سه جهان ریاضی تال)، چارچوب گفتمان، نقش و عملکرد شهود در یاددهی و یادگیری، تفکر مقداری و مکانی، ATD، سه لایهٔ آشکارسازی نمودار و تصور مفهوم و تعریف مفهوم هستند. هر یک از چارچوب‌ها شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با هم دارند. در بررسی فراتحلیل انجام‌شده از سال ۱۹۹۲ به بعد، تمرکز بیشتر پژوهشگران بر چارچوب‌های شامل سه متفکر کروتتسکی (۱۹۷۶) و نظریهٔ APOS بوده است.

نه پژوهش با شروع از پایان‌نامهٔ آسپینوال (۱۹۹۴) و استاد راهنمای او پرسمگ با محوریت سه متفکر کروتتسکی انجام شده است. وقتی شاگردان با نمودار تابع مشتق مواجه می‌شوند، ممکن است تفکر تحلیلی، بصری و هارمونیک داشته باشند. بررسی‌ها نشان‌دهندهٔ آن است که این نوع تفکر در بیشتر پژوهش‌های دیگر نیز با نام‌های دیگری تکرار شده‌اند؛ به‌عنوان نمونه، انواع استدلال‌های ریاضی ایکرام و همکاران (۲۰۲۰) نیز مشابه این سه نوع تفکر است.

همچنین هفت پژوهش با محوریت نظریهٔ APOS به مشکلات شاگردان در زمینهٔ درک نموداری تابع مشتق و تابع اولیه توجه کرده‌اند. پژوهشگران معتقدند که درمان بدفهمی‌های شاگردان در این حوزه به کمک تجزیهٔ ژنتیکی و چرخهٔ ACE مرتفع می‌شود. در تحلیل چارچوب‌ها به نظر می‌رسد، پژوهشگران به‌وضوح مفهوم مشتق در یک نقطه و مشتق به‌عنوان تابع و رابطهٔ بین آنها را در چارچوبشان مشخص نکرده‌اند. محققان تبیین نکرده‌اند که وقتی نمودار تابع مشتق باشد و نمودار تابع اولیه پیدا شود، چه فرایندهایی باید انجام شود. برای درک نموداری تابع مشتق، شاگردان باید دامنهٔ تابع، پیوستگی، مجانب، بازه‌های یکنوایی و تقعر، نقاط مشتق‌ناپذیر، نقاط اکسترمم، بحرانی و عطف را هم در نمودار تابع مشتق و هم نقاط متناظر در نمودار تابع اولیه و نیز ارتباط بین آنها را به‌خوبی بفهمند و بین بازنمایی‌های مختلف جبری، نموداری و عددی حرکت کنند. با وجود تلاش پژوهشگران، همچنان مشکلات شاگردان در این زمینه باقی مانده است و رد پای این پژوهش‌ها در کتاب‌های درسی یا تدریس معلمان و اساتید کمتر دیده می‌شود. در پژوهش حاضر سعی شده است، روی این موضوع تمرکز و این اشتراکات و تفاوت‌ها نشان داده شود تا هم پژوهشگران در مطالعات آیندهٔ خود چارچوب مناسب انتخاب و هم مؤلفان در ارائهٔ این مطلب در کتاب‌های درسی ریاضی تجدیدنظر کنند. علاوه بر آن معلمان و اساتید نیز برای یاددهی بهتر این موضوع از آن بهره ببرند.

آسپینوال (۱۹۹۴) در تحقیق خود اشاره می‌کند که بیشتر پژوهش‌های مرتبط با درک نموداری بر فرایندهای مفهومی و ادراکی به‌خصوص بر استخراج اطلاعات جاسازی‌شده در نمودارها تمرکز دارند. استدلال بصری شاگردان تعیین می‌کند که چگونه نمودارها، اطلاعات را در خود جاسازی می‌کنند. براساس فرضیهٔ استدلال بصری، اثربخشی نمودارها براساس ویژگی‌های بصری- فضایی است و مزیت اصلی آنها پردازش شناختی کمتر در مقایسه با متن است. مطالعهٔ حق‌جو و ریحانی (۲۰۱۹) دربارهٔ توانایی فضایی شاگردان همسو با این مطلب است، به این صورت که دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مطالعه برای حل مسئله سعی در کشیدن رسم شکل و استفاده از تصویر به جای متن داشتند. به‌طور خاص، نمودارها اطلاعات را از طریق مؤلفه‌های جداگانهٔ خود و نحوهٔ چیدمان عناصر در فضا به یکدیگر منتقل می‌کنند.

کوسلین (1994) اجزای ساختاری نمودارها را به‌عنوان چارچوب، مشخص‌کننده‌ها، برچسب و پس‌زمینه معرفی کرده است. چارچوب مانند محورهای مختصات، اطلاعاتی را دربارهٔ انواع داده‌های اندازه‌گیری ارائه می‌دهد. مشخص‌کننده‌ها مانند خط یا منحنی، نشان‌دهندهٔ روابط بین داده‌های نمایش داده‌شده در چارچوب هستند. برچسب به‌عنوان خط یا منحنی یا محورها اطلاق می‌شود. پس‌زمینهٔ نمودارها مانند شبکه یا رنگ‌ها و تصاویر هستند که به شفاف‌ترکردن، خواندن و تفسیر داده‌ها کمک می‌کنند. اجزای ساختاری نمودارها بازنمایی‌های مؤثری را تولید می‌کنند که درک روابط موجود را در داده‌ها برای شاگردان آسان‌تر می‌کنند. نمودارها در مقایسه با متن به‌تنهایی مزیت محاسباتی دارند؛ زیرا به شاگردان در بازیابی و استخراج اطلاعات از طریق فرایندهای ادراکی کمک می‌کنند. برای حل مسائل ریاضی در برخورد با متن به تنهایی، فراگیران باید قبل از ذخیره‌کردن آنها در حافظهٔ فعال، کل متن را برای یافتن اطلاعات مرتبط و مهم بخوانند یا مرور کنند و در عین حال، به جستجوی سایر بخش‌های مرتبط توجه کنند. فرایندها تا زمانی که تمام اطلاعات در حافظهٔ فعال جمع‌آوری شوند، ادامه می‌یابند. حافظهٔ فعال به دلیل ظرفیت محدود خود شناخته شده است؛ زیرا قادر به نگهداری داده‌ها برای مدت طولانی نیست؛ بنابراین این فرایندها مستعد خطا هستند. از سوی دیگر، نمودارها، به‌طور نظام‌مند اطلاعات را به‌صورت مکانی سازمان‌دهی می‌کنند تا خواندن آنها آسان‌تر شود. شاگردان ممکن است فرایند ذخیره‌سازی

داده‌ها را در حافظهٔ فعال نادیده بگیرند؛ زیرا آنها از قبل به‌صورت بصری برای بازیابی و تفسیر در دسترس هستند. این موضوع یکی از دلایلی است که شاگردان در رابطه با ارتباط بین نمودار تابع مشتق و اولیه مرتکب خطا می‌شوند (آسیالا و همکاران، ۱۹۹۷؛ اوبوز، ۲۰۰۷). در چارچوب‌های معرفی‌شده فقط دیوید و همکاران (۲۰۱۷؛ ۲۰۱۹) به این موضوع اشاره کرده‌اند. البته ممکن است به‌طور پیش‌فرض محققان دیگر آن را در نظر گرفته باشند؛ اما اشاره‌ای مستقیم به آن نکرده باشند.

نتایج بررسی پژوهش‌هایی مانند عبدالحمید و همکاران (۲۰۱۹) نشان‌دهندهٔ آن است که دانشجویان هنگام بررسی نمودار تابع مشتق اول، سعی در پیداکردن یک فرمول برای آن نمودار می‌کنند و سپس به کمک معادله و انتگرال‌گیری نمودار تابع اولیه را تشخیص می‌دهند. بیشتر دانشجویان مانند مشارکت‌کنندگان فونتیلبا و همکاران (۲۰۱۷) وقتی نمودار تابع مشتق به آنها داده می‌شود، از چپ به راست حرکت می‌کنند. برخی شاگردان مانند مشارکت‌کنندگان برجی و همکاران (2018a) وقتی که نمودار تابع مشتق دارای پیچیدگی بود، یعنی نقطهٔ ناپیوستگی یا گوشه یا مجانب یا اکسترمم داشت، دچار سردرگمی می‌شدند و از آن نقطه به سمت راست آن نمودار را اشتباه رسم می‌کردند. شاگردان در رسم نمودارهای به غیر از توابع درجه یک در تابع مشتق و پیداکردن تابع اولیه اشتباهات زیادی داشتند. نقاط مشتق‌ناپذیر را به‌درستی تشخیص نمی‌دادند و نمی‌توانستند وضعیت تناظر بین نقاط مشتق‌ناپذیر و تابع اولیهٔ آن را شناسایی کنند. مشتق در یک نقطه را بهتر تشخیص می‌دادند؛ ولی در بررسی مشتق روی بازه با مشکلاتی مواجه بودند. دانشجویانی که تفکر بصری و تحلیلی متعادلی داشتند (تفکر هارمونیک) بیشتر مسائل مرتبط با رسم را به‌درستی حل می‌کردند.

تحقیقات آسپینوال (۱۹۹۴)، آسپینوال، شاو و پرسمگ (۱۹۹۷) و هاکیومروگلو، آسپینوال و پرسمگ (۲۰۱۰) به این موضوع توجه کرده‌اند که تصور عینی منشأ مشکلات دانشجویان است و داشتن تصور پویا به درک آنها کمک می‌کند. روابط بین علامت مشتق اول و صعودی / نزولی تابع، علامت مشتق دوم و تقعر تابع و پیوستگی و مشتق‌پذیری در بررسی نمودار تابع مشتق بسیار مهم هستند و دانشجویان در این موارد اشتباهات مفهومی و بدفهمی داشتند. در اتصالات و ارتباطات بین مفاهیم مختلف ریاضی و یا دنیای واقعی و همچنین باورهای آنها مشکلات فراوانی وجود دارد. بازنمایی‌های مختلف مشتق را به‌خوبی شناسایی نمی‌کنند. از لحاظ زبان‌شناسی و درکی که دانشجویان از مشتق در ذهن خود دارند (تصورمفهوم از مشتق)، باعث می‌شود، کلمهٔ ضد مشتق را به معنی رسم نموداری متضاد با نمودار تابع مشتق داده‌شده در نظر بگیرند یا از شباهت بین نمودارهای مشتق و تابع اولیه استفاده کنند. بیشتر شاگردان وجود نقطهٔ عطف در نمودارها، مشکلاتی برایشان ایجاد می‌کند. دلیل این امر شاید نبودِ درک کافی از مفهوم نقطهٔ عطف و به‌طور کلی مشتق در یک نقطه باشد. بر مبنای تحقیقات در کتاب‌های درسی دانشگاهی نیز به مقولهٔ رابطهٔ بین نمودار تابع و نمودار تابع مشتق به خوبی پرداخته نشده است. با توجه به خلاصه ترکیب چارچوب‌ها و پیداکردن شباهت‌ها و تفاوت‌ها به نظر می‌رسد، چارچوب‌های سه متفکر و سه لایه به یاددهی و یادگیری رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه کمک کند. با توجه به فراتحلیل انجام‌شده برای بهبود یاددهی و یادگیری رابطهٔ بین نمودار تابع مشتق و تابع اولیه بهتر است، شاگردان مشتق در یک نقطه، مشتق به‌عنوان تابع و اتصال و هماهنگی بین ویژگی‌های نمودار تابع اولیه و مشتق را به‌خوبی بشناسند.

منابع

حق‌جو، سعید و ریحانی، ابراهیم. (۱۳۹۸). مطالعهٔ عملکرد دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه در حل یک تکلیف توانایی فضایی با استفاده از نظریه SOLO. ***فناوری آموزش***، ۱۳(۳)، ۴۹۸-۴۸۷. doi: 10.22061/jte.2018.3687.1918

حق‌جو، سعید و ریحانی، ابراهیم. (۱۴۰۰). فراتحلیل کیفی چارچوب‌های ارزیابی مهارت‌های طرح مسئلهٔ ریاضی. ***فصلنامهٔ علمی پژوهش در یادگیری آموزشگاهی و مجازی***، ۹(۳)، ۲۸-۹. doi: 10.30473/etl.2022.58505.3483

طرخان، رضا علی و مصطفوی، زینب. (۱۳۹۹). ارائهٔ چهارچوب مفهومی برای تسهیل روند تعامل در محیط یادگیری الکترونیکی با استفاده از روش فراترکیب. ***رویکردهای نوین آموزش***، ۱۵(۲)، ۱۳۶-۱۱۳. doi: 10.22108/nea.2021.116797.1365

عالی، آمنه و همکاران. (۱۳۹۷). چه موقع یادگیری مسئله‌محور اثربخش‌تر است: یک فراتحلیل. ***رویکردهای نوین آموزشی***، ۱۳ (۲)، ۹۴-۷۷. 13(2) ، 94–77. doi: 10.22108/nea.2019.105216.1104

Abd Hamid, H., & Idris, N. (2014). Student’s visual reasoning of the connection between function and its derivative: A graphical approach. ***Jurnal Pendidikan Sains dan Matematik Malaysia***, 4(2), 39–48.

Abd Hamid, H., Idris, N., & Tapsir, R. (2019). Students’ use of graphs in understanding the concepts of derivatives. ***Southeast Asian Mathematics Education Journal***, *9*(1), 3–16.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. ***The Journal of Mathematical Behavior***, 16(4), 399–431.

Aspinwall, L. N. (1994). ***The role of graphic representation and students' images in understanding the derivative in calculus: Critical case studies*** (Doctoral dissertation, The Florida State University).

Aspinwall, L., & Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: Two contrasting cases. ***The Mathematics Teacher***, 95(6), 434.

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. S., & Presmeg, N. (2008). Students’ verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. ***Proceedings of PME 32 and PME-NA 30***, 2, 97–104.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. ***Educational studies in mathematics***, *33*(3), 301–317.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. ***Journal for Research in Mathematics Education***, 31(5), 557–578.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students’ graphical understanding of the calculus. ***The Journal of Mathematical Behavior***, 22(4), 479–495.

Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018a). Application of the APOS-ACE theory to improve students’ graphical understanding of derivative. ***EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education***, 14(7), 2947–2967.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018b). Application of the complementarities of two theories, apos and osa, for the analysis of the university students’ understanding on the graph of the function and its derivative. ***EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education***, 14(6), 2301–2315.

Bryman, A. (2012). Social research methods (4th ed.). Oxford university press.

Çetin, N. (2009). The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. ***Primus***, 19(3), 232–244.

David, E. J., Roh, K. H., & Sellers, M. E. (2019). Value-thinking and location-thinking: Two ways students visualize points and think about graphs. ***The Journal of Mathematical Behavior***, 54, 100675.

Dreyfus, T., & Halevi, T. (1991). QuadFun--A case study of pupil computer interaction. ***Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching***, 10(2), 43–48.

Duval, R. (2017). ***Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations***. Cham: Springer International Publishing.

Feudel, F. (2019). ***Die ableitung in der mathematik für wirtschaftswissenschaftler***. Wiesbaden: Springer.

Feudel, F., & Biehler, R. (2021). Students' understanding of the derivative concept in the context of mathematics for economics. ***Journal für Mathematik-Didaktik***, 42(1), 273–305. doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Finfgeld, D. L. (2003). Metasynthesis: The state of the art—so far. ***Qualitative Health Research***, 13(7), 893-904.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment—A literature review. ***Educational Studies in Mathematics***, 84(3), 413–438.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***, 48(3), 374–392.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. ***Mathematics Education Research Journal***, 33(1), 1–22.

Garwood, J. D., McKenna, J. W., Roberts, G. J., Ciullo, S., & Shin, M. (2021). Social studies content knowledge interventions for students with emotional and behavioral disorders: A meta-analysis. ***Behavior modification***, 45(1), 147–176.

Geçici, M. E., & Türnüklü, E. (2021). Visual reasoning in mathematics education: a conceptual framework proposal. ***Acta Didactica Napocensia***, 14(1), 115–126.

Gonzalez-Martin, A., & Hernandes-Gomes, G. (2019, February). The graph of a function and its antiderivative: A praxeological analysis in the context of mechanics of solids for engineering. ***In Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (No. 20).*** Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Haciomeroglu, E. S., & Chicken, E. (2012). Visual thinking and gender differences in high school calculus. ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***, 43(3), 303–313.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2009). Connecting research to teaching: visual and analytic thinking in calculus. ***The Mathematics Teacher***, 103(2), 140–145.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. ***Mathematical Thinking and Learning***, 12(2), 152–176.

Haghjoo, S. & Reyhani, E. (2020). How has the derivative been presented in Iranian mathematics textbooks over four decades?- *ETEST 2020*: Emerging Trends In Engineering Science and Technology - Ankara, Turkey, Feb, 16–17, 2020.

Haghjoo, S. Radmehr, F. & Reyhani, E. (2022). Analyzing the written discourse in calculus textbooks over 42 years: The case of primary objects, concrete discursive objects, and a realization tree of the derivative at a point - ***Educational Studies in Mathematics***. [Accepted]

Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2021). Undergraduate basic sciences and engineering students' understanding of the concept of derivative. ***JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)***, 6(4), 277–298.

Haghjoo, S., Reyhani, E., & Kolahdouz, F. (2020). Evaluating the understanding of the university students (basic sciences and engineering) about the numerical representation of the average rate of change. ***International Journal of Educational and Pedagogical Sciences***, 14(2), 111–121.

Hähkiöniemi, M. (2006). ***The role of representations in learning the derivative***. University of Jyväskylä.

Hallett, D. H. (1994). for precalculus reform. ***In Preparing for a New Calculus: Conference Proceedings*** (No. 36, p. 111). Mathematical Assn of Amer.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. ***Journal for Research in Mathematics Education***, 19(1), 3–-25.

Hong, Y. Y., & Thomas, M. O. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. ***Mathematics Education Research Journal***, 27(2), 183–200.

Hughes-Hallett, D. (1995). Changes in the teaching of undergraduate mathematics: The role of technology. **In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*** (pp. 1546-1550). Birkhäuser, Basel.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W. G. (2020). ***Calculus: Single and multivariable***. John Wiley & Sons.

Ikram, M., Purwanto, P., Parta, I. N., & Susanto, H. (2020). Mathematical reasoning required when students seek the original graph from a derivative graph. ***Acta Scientiae***, 22(6), 45–64.

Kastberg, S. E. (2002). ***Understanding mathematical concepts: The case of the logarithmic function***.Doctoral dissertation, University of Georgia.

Kosslyn, S. M. (1994). ***Elements of graph design***. WH Freeman.

Krutetskii, V. A. (1976). ***The psychology of mathematical abilities in schoolchildren***. Chicago: University of Chicago Press.

Lawson, K., & Parker, R. (2019). How do young people with special educational needs experience the transition from school to further education? A review of literature. ***Pastoral Care in Education***, 37(2), 143–161.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. ***International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology***, 9(1), 1–21.

Monk, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. ***Humanistic Mathematics Network Journal***, 1(9), 7.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers**.** ***ZDM***, *46*(1), 109–122.

.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: Derivative functions and students’ difficulties. ***Procedia-Social and Behavioral Sciences***, 55, 679–684.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. ***Educational Studies in Mathematics***, 14(3), 235–250.

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., ... & Moher, D. (2021). Updating guidance for reporting systematic reviews: Development of the PRISMA 2020 statement. ***Journal of Clinical Epidemiology, 134,* 103–112.**

Piaget, J., & García, R. (1983). ***Psychogenesis and the history of science***. New York: Columbia University Press.

Pinto-Vergara, A., Soto, D., & Gaete-Peralta, C. (2022). Meaning of the derivative as a rate of change through a graphic argumentation. A case with chilean students. ***Journal of Physics: Conference Series*** (Vol. 2159, No. 1, p. 012016). IOP Publishing.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. ***Handbook of research on the psychology of mathematics education*** (pp. 205–235). Brill Sense.

Presmeg, N. (2020). Visualization and learning in mathematics education. ***Encyclopedia of mathematics education***, 900–904.

Presmeg, N. C. (1985). ***The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation***.Doctoral dissertation, University of Cambridge.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. ***Educational Studies in Mathematics***, 17(3), 297–311.

Radovic, D., Black, L., Williams, J., & Salas, C. E. (2018). Towards conceptual coherence in the research on mathematics learner identity: A systematic review of the literature. ***Educational Studies in Mathematics***, 99(1), 21–42.

Swidan, O. (2022). Meaning making through collective argumentation: The role of students' argumentative discourse in their exploration of the graphic relationship between a function and its anti-derivative. ***Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA***, 41(2), 92–-109.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. ***Mathematics Education Research Journal***, 20(2), 5–24.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. ***Educational Studies in Mathematics***, 12(2), 151–169.

Timulak, L. (2009). Meta-analysis of qualitative studies: A tool for reviewing qualitative research findings in psychotherapy. ***Psychotherapy Research***, 19(4-5), 591–600.

Timulak, L. (2014). ***Qualitative meta-analysis***. SAGE.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: Stability and change in students' conceptions. ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***, 38(5), 609–637.

Yan, X., Marmur, O., & Zazkis, R. (2020). Calculus for teachers: Perspectives and considerations of mathematicians. ***Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education***, 20(2), 10–1007.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. ***CBMS Issues in Mathematics Education***, 8, 103–127.

Zazkis, D. (2013). Fostering students' understanding of the connection between function and derivative: a dynamic geometry approach. **In** ***Proceedings of the Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education.***

Ziatdinov, R., & Valles, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in geogebra as an effective approach for teaching and learning stem topics. ***Mathematics***, 10(3), 398.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. ***Visualization in teaching and learning mathematics***, 1–7.

پیوست:

چک لیست مورد استفاده در پژوهش ۱) قالب اثر مدنظر چیست؟ مقالهٔ ژورنالی یا پایان‌نامه ۲) تمرکز موضوعی این اثر بر چیست؟ ۳) دورهٔ زمانی انتشار اثر مربوط به چه تاریخی است؟ ۴) رویکرد تحقیق چیست؟ ۵) روش تحقیق چه بوده است؟ ۶) میدان مطالعه کجا بوده است؟	۷) ابزار گردآوری داده‌ها چه بوده است؟ ۸) ابزار تحلیل داده‌ها چه بوده است؟ کمی، کیفی یا هر دو با توصیف دقیق ابزار ۹) نوع سؤالات پژوهش چگونه بوده است. چیستی، چرایی، چگونگی؟ ۱۰) آیا تحقیق دربردارندهٔ نظریه یا آموزه نظری خاصی است؟ ۱۱) رویکرد یا تئوری نهفته در تحقیق چیست؟ اگر کمی است از چه نظریه‌ای استفاده شده و اگر کیفی است به چه نظریه‌ای منجر شده است؟ ۱۲) نتیجهٔ کلی که از این تحقیق به دست آمده است، چیست؟ ۱۳) آیا نتایج تحقیق با اهداف پژوهش هماهنگی داشته است؟ نکات حائز اهمیتی که در این اثر مدنظر و تحلیل قرار داده می‌شود، کدام است؟