

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۲/۲۹  
تاریخ بررسی مقاله: ۱۳۹۲/۰۳/۲۸  
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۰۷

مجله‌ی علوم تربیتی دانشگاه شهید چمران اهواز  
پاییز و زمستان ۱۳۹۳، دوره‌ی ششم، سال ۲۱  
شماره‌ی ۲، صص: ۳۸-۲۳

## ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان در معادله درجه اول<sup>۱</sup>

الهه امینی فر\*

خدیدجه کریمی کیا\*\*

### چکیده

این پژوهش به منظور ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان در مبحث معادله درجه اول با توجه به اشتباهات مفهومی آن‌ها در این موضوع انجام گرفته است. در مطالعه مقدماتی آزمونی شامل ۴۵ سؤال مطابق با جدول هدف-محتوایی که بر اساس طبقه‌بندی بلوم بود، طرح شد. این آزمون بر روی ۳۰ نفر از دانش‌آموزان پایه اول متوسطه شهرستان پاکدشت اجرا شد. با استفاده از ضریب دشواری، ضریب تمیز و ضریب هماهنگی درونی سؤالات، ۱۹ سؤال نامناسب حذف گردید و آزمونی شامل ۲۶ سؤال، با مقدار آلفای کرونباخ (۰/۸۷۲) باقی ماند که نشان دهنده پایایی و انطباق سؤالات طرح شده با اهداف آموزشی است. با استفاده از نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای ۱۲۷ دانش‌آموز سال اول پایه متوسطه شهرستان پاکدشت انتخاب و در آزمون نهایی شرکت کردند. با استفاده از نتایج به‌دست آمده، مدل تجربی یادگیرنده تدوین گردید. تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از روش مدل‌یابی معادلات ساختاری، نشان می‌دهد که اثر مجموع «شناسایی معادله» بر شکل‌گیری «حل معادله» و «معادلات هم‌ارز» به ترتیب  $t=2/439$  و  $t=2/307$  است که از نظر آماری در سطح  $p<0/05$  معنادار می‌باشند. لذا «شناسایی معادله» موجب افزایش مؤلفه‌های «حل معادله» و «معادلات هم‌ارز» در یادگیرنده می‌شود. اثر مجموع «شناسایی معادله» و «حل معادله» بر شکل‌گیری «کاربرد» به ترتیب  $t=2/600$  و  $t=3/215$  است که از نظر آماری در سطح  $p<0/01$  معنادار می‌باشند. لذا این دو مؤلفه تسهیل‌ساز «کاربرد» در یادگیرنده می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: معادله درجه اول، اشتباهات مفهومی، یادگیری.

۱. این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی انجام گردیده است.

\* استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی (نویسنده مسئول) [elaheaminifar@srttu.edu](mailto:elaheaminifar@srttu.edu)

\*\* دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی،

[asie.karimi.kia@gmail.com](mailto:asie.karimi.kia@gmail.com)

## مقدمه

در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، ایده‌های اساسی جبر به منظور استدلال در مورد پدیده‌های مختلف و همچنین مدل‌سازی آن‌ها استفاده می‌شوند (اسکویت<sup>۱</sup>، ۲۰۰۷). مفاهیم جبری نقش مهمی را در برنامه درسی ریاضی ایفا می‌کنند که از مهمترین مباحث آن، معادلات و حل آن است (شلیمن<sup>۲</sup> و همکاران، ۲۰۱۳). در ریاضی و علوم دیگر از جمله فیزیک و شیمی لازم است دانش‌آموزان، خود معادلات را بسازند و حل کنند. معمولاً در حل یک مسئله، طرح یک معادله مورد نیاز است. لذا دانش‌آموزان باید درک مناسبی از معادلات داشته باشند.

مفهوم معادله از مفاهیم دیگری از جمله اعداد، عملگرهای محاسباتی، عبارات جبری، نماد تساوی و متغیر تشکیل می‌شود (نتسوهی<sup>۳</sup>، ۲۰۰۵). پس معادله یک مفهوم انتزاعی است و چند مرحله از انتزاع جهت شکل‌گیری آن لازم است. بنابراین در هر کدام از مراحل شکل‌گیری این مفهوم، ممکن است بین مفاهیمی که در ذهن دانش‌آموزان تشکیل می‌شود و آن مفاهیمی که باید یاد بگیرد، مغایرت وجود داشته باشد که باعث ایجاد اشتباهات مفهومی گسترده در این مبحث می‌شود. اوزکان<sup>۴</sup> (۲۰۱۱) بیان می‌کند که اشتباهات مفهومی می‌تواند به عنوان دانشی که از یادگیری حقایق علمی جلوگیری می‌کند، تعریف شود. همچنین حسام (۱۳۸۴) بیان می‌کند که در ریاضی مفاهیم به صورت سلسله مراتبی شکل گرفته و این ویژگی موجب می‌شود تا یادگیری هر مفهوم، به درک و برداشت دانش‌آموز از مفاهیم پیش‌نیاز آن وابسته باشد. آگاهی معلم از دانش قبلی دانش‌آموزان و ساخت شناختی آن‌ها به او کمک می‌نماید تا اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان و ماهیت این اشتباهات و نحوه تفکر آن‌ها را شناسایی نموده و مورد بررسی قرار دهد (کانسیز<sup>۵</sup> و همکاران، ۲۰۱۱). شولمن<sup>۶</sup> (۱۹۸۶) معتقد است کار معلمان چیزی بیشتر از معرفی و انتقال حقایق پذیرفته شده یک موضوع به دانش‌آموزان است. یک معلم نیازمند دانش پداگوژیکی<sup>۷</sup>، دانش محتوای موضوع مرتبط، برنامه‌ریزی و اشتباهات ممکن،

- 
- 1- Asquith
  - 2- Schliemann
  - 3- Ntsohi
  - 4- Ozkan
  - 5- Cansiz
  - 6- Shulman
  - 7- Pedagogical Knowledge

سنجش و ارزشیابی، استراتژی‌ها و تکنیک‌های یاددهی است (به نقل از دورکایا<sup>۱</sup>، ۲۰۱۱). اشتباهات مفهومی به وسیله آگاه کردن دانش‌آموزان با روش سخنرانی از بین نمی‌روند. بلکه باید سیستم باور دانش‌آموزان و تا حدودی ساخت شناختی آن‌ها تغییر کند (آلن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۷). تحقیقات نشان می‌دهند بسیاری از دانش‌آموزان در رابطه با درک و حل معادله مشکل دارند. (نتسوهی، ۲۰۰۵). دانش‌آموزان اشتباهات مفهومی متعددی در مبحث معادله از جمله تعریف معادله، نماد تساوی، متغیر، حل معادله، تبدیل مسائل کلامی و هم‌ارزی معادلات دارند (کریمی‌کیا و همکاران، ۱۳۹۱). از سوی دیگر، ایجاد درک مفهوم معادله در دانش‌آموزان مهم و ضروری است. بنابراین لازم است که تلاش‌هایی برای ایجاد درک مفهومی از معادلات انجام شود (توساوینن<sup>۳</sup> و همکاران، ۲۰۱۱).

میچلمور و وایت<sup>۴</sup> (۲۰۰۷) بیان می‌کنند که اغلب دانش‌آموزان مفاهیم انتزاعی را به‌طور جداگانه بدون درگیر شدن در یک فرآیند انتزاعی یاد می‌گیرند. بنابراین، چنین مفاهیمی به‌طور ضعیف درک شده، به‌ندرت مورد استفاده قرار گرفته و به آسانی فراموش می‌گردند. آن‌ها نظریه یاددهی مفاهیم انتزاعی که شامل چهار مرحله<sup>۲</sup> آشنایی، تشابهات، مفهوم‌سازی و کاربرد<sup>۳</sup> است، در نظر می‌گیرند. بر اساس این نظریه، آموزش معادله در این پژوهش به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

- ۱- دانش‌آموز ابتدا باید با انواع معادله آشنا شود.
  - ۲- تشابهات بین معادلات را شناسایی کند.
  - ۳- تشابهات شناخته شده را به یک مفهوم کلی تبدیل کند.
  - ۴- مفهوم کلی به وسیله استفاده در مسائل ریاضی و روزمره تثبیت می‌شود.
- ابارشی و حسینی (۱۳۹۱) بیان می‌کنند مدل در برگیرنده سه ویژگی است: مدل بر پایه یک واقعیت بنا شده است، تنها منعکس‌کننده ویژگی‌های مهم آن موضوع است و برای استفاده عملی در دنیای واقعی تدوین شده است.

مدل یادگیری یکی از مشخصه‌های فردی و مؤلفه‌ای اساسی در هر سیستم یادگیری

- 
- 1- Durkaya
  - 2- Allen
  - 3- Tossavainen
  - 4- Mitchelmore & White

تطبیق‌پذیر<sup>۱</sup> است. این مدل شامل اطلاعات ضروری یادگیرنده است که در سیستم‌های یادگیری یا به صورت صریح و یا از طریق آزمون استخراج می‌شود (نورانی و همکاران، ۱۳۸۸). تطبیق یک سیستم یادگیری الکترونیکی عمدتاً شامل انتخاب و ارائه هر فعالیت یاددهی موفق بر اساس دانش یادگیرنده و ویژگی‌های دیگر یادگیرنده است که در یک مدل یادگیری ذکر می‌شود (شیامالا<sup>۲</sup> و همکاران، ۲۰۱۱). در واقع، مدل یادگیری یک مدل از دانش و اشتباهات مفهومی یادگیرنده است. هنگامی که دانش‌آموز مطالب مورد نظر را یاد می‌گیرد، اطلاعات مدل یادگیری او در مورد درک مطالبی است که با دانش و اشتباهات مفهومی وی مطابقت دارد (بول<sup>۳</sup>، ۲۰۰۴). به علاوه، درک این‌که یادگیرنده‌ها چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند، می‌تواند به معلمان ریاضی در انتخاب شیوه‌های تدریس کمک کند. در واقع این درک درست و واقعی، معلمان را قادر می‌سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم مناسب علمی در انتخاب عنوان‌های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه‌های آموزشی را داشته باشند و در رفع موانع یادگیری یادگیرنده‌ها بکوشند (علم‌الهدایی، ۱۳۸۳، ص ۱۴).

بر اساس آنچه بیان شد پژوهش حاضر در پی آن است که مفاهیم تشکیل‌دهنده مبحث معادله درجه اول را شناسایی و روابط بین آن‌ها را به کمک یک مدل ساختاری مورد بررسی قرار دهد. از آنجایی که جستجوی محققان به یافتن پیشینه‌ای از این مدل تحقیق منجر نگردید، بنابراین مدل نظری این پژوهش با توجه به چارچوبی که در کتاب‌های درسی برای یاددهی این بحث در نظر گرفته شده و همچنین نظریه یاددهی مفاهیم انتزاعی میچلمور و وایت (۲۰۰۷) و نیز نظرات سه نفر از اساتید گروه ریاضی و پنج دبیر ریاضی طراحی شده است (شکل ۱). در کتاب درسی ریاضی دوم و سوم راهنمایی و ریاضیات (۱)، معادله و حل آن به روش جبری بیان و آموزش داده می‌شود. در این پژوهش نیز روش حل معادله به روش جبری، در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های این مدل همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱- شناسایی معادله: اجزاء این مؤلفه شامل شناخت ویژگی‌های صوری و ساختاری

- 
- 1- adaptive educational system
  - 2- Shyamala
  - 3- Bull

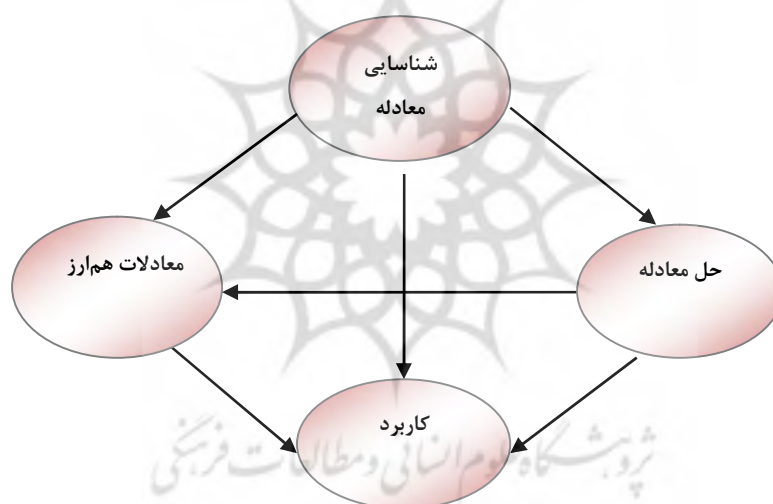
معادله، تعریف معادله، تشخیص معادله از سایر عبارات ریاضی و تشخیص معادلات خاص (غیرممکن و مبهم) هستند. ویژگی‌های صورتی شامل یک عبارت جبری است که دارای نماد تساوی است و ممکن است دارای مجهول باشد. ویژگی‌های ساختاری شامل درک برابری دو طرف تساوی در معادله، انجام عملگرهای یکسان در دو طرف معادله و نیز شامل ویژگی‌های هم‌ارزی نماد تساوی (انعکاسی، تقارنی و تعدی) است.

۲- حل معادله: فرآیندی برای پیدا کردن مقدار عددی مجهول معادله است.

۳- معادلات هم‌ارز: معادلاتی که با عملیات جبری ساده از روی هم به دست می‌آیند.

۴- کاربرد: استفاده از معادله درجه اول برای حل مسائل کلامی (مسائل مربوط به وقایع

روزمره و مسائل ریاضی) و برای حل معادلات پیچیده‌تر، این مؤلفه را شامل می‌شوند.



شکل ۱. مدل نظری معادله درجه اول طبق نظریه یاددهی مفاهیم انتزاعی میچلمور و وایت (۲۰۰۷) و کتب درسی

بر اساس آنچه بحث شد سؤالات پژوهش حاضر عبارتند از:

- آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «حل معادله» رابطه وجود دارد؟
- آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «معادلات هم‌ارز» رابطه وجود دارد؟
- آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «کاربرد» رابطه وجود دارد؟

- آیا در مبحث معادله درجه اول بین «حل معادله» و «کاربرد» رابطه وجود دارد؟

## روش‌شناسی پژوهش

### جامعه، نمونه و فرآیند تهیه آزمون

پژوهش حاضر از جمله تحقیقات بنیادی و از نوع همبستگی است. جامعه آماری پژوهش، کلیه دانش‌آموزان سال اول پایه متوسطه شهرستان پاکدشت در سال تحصیلی ۹۱-۹۰ است. اهداف آموزشی معادله درجه اول پس از مطالعه مبانی نظری و کتب درسی مربوطه تنظیم گردید. این اهداف توسط سه نفر از اساتید گروه ریاضی و پنج دبیر ریاضی تأیید شد. سپس این اهداف با توجه به حیطه شناختی از طبقه‌بندی حیطه‌های یادگیری شناختی بلوم<sup>۱</sup> و همکاران (۱۹۵۶) در سه بخش عملیات جبری ساده کردن، معادله درجه اول و معادلات هم‌ارز در قالب جدول هدف-محتوا دسته‌بندی و از آن‌ها ۴۵ سؤال چهارگزینه‌ای مطابق با اهداف مذکور طرح گردید. در یک مطالعه مقدماتی<sup>۲</sup> ۳۰ نفر از دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در سال اول پایه متوسطه شهرستان پاکدشت در سال ۹۱-۹۰ مورد آزمون قرار گرفتند. با استفاده از ضریب دشواری، ضریب تمیز و ضریب هماهنگی درونی سؤالات، ۱۹ سؤال نامناسب حذف گردید و آزمونی شامل ۲۶ سؤال با مقدار آلفای کرونباخ (۰/۸۷۲) تشکیل گردید که نشان دهنده پایایی و انطباق سؤالات طرح شده با اهداف آموزشی است. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های ابزارهای سنجش، روایی است. در این پژوهش از جدول هدف-محتوا استفاده گردید که بنا بر نظر سیف (۱۳۸۷) بهترین روش برای تضمین روایی محتوایی است. برای تعیین روایی صوری و تأیید این که آیا سؤالات طرح شده برای سنجیدن اهداف مورد نظر مناسب هستند یا خیر، از نظر ۳ نفر از اساتید گروه ریاضی و اساتید راهنما و مشاور دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران و همچنین چهار دبیر ریاضی استفاده شد. با استفاده از نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای ۱۲۷ دانش‌آموز سال اول پایه متوسطه شهرستان پاکدشت انتخاب و در آزمون نهایی شرکت کردند و داده‌های لازم جهت کشف مدل تجربی یادگیرنده در این بحث جمع‌آوری گردید.

1- Bloom

2- Pilot study

## تجزیه و تحلیل داده‌ها

با توجه به اینکه روش پژوهش حاضر همبستگی است، برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از روش مدل‌یابی معادلات ساختاری استفاده شده است. از این روش به منظور بررسی و آزمودن روابط ساختاری مجموعه‌ای از متغیرهای آشکار (مشاهده شده) و مکنون (مشاهده نشده) استفاده می‌شود تا بتوان مجموعه‌ای از فرضیه‌ها را در قالب یک مدل بررسی کرد (نوسیر و هوا، ۲۰۱۰، نقل شده در امینی‌فر و همکاران، ۲۰۱۲).

سرمد و همکاران (۱۳۷۹) بیان می‌کنند که ماتریس همبستگی مؤلفه‌های موجود در مدل که ابتدا محاسبه می‌شود به عنوان داده‌های اولیه تحلیل مدل معادلات ساختاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقادیر موجود در جدول ۱ میزان همبستگی بین مؤلفه‌های موجود در مدل را نمایش می‌دهد. ارتباط بین این مؤلفه‌ها به صورت فلش‌های یک طرفه از سمت مؤلفه‌های سطر اول به سمت مؤلفه‌های ستون اول جدول، و خانه‌های خالی نشان دهنده عدم ارتباط بین مؤلفه‌ها است.

جدول ۱. ماتریس همبستگی مؤلفه‌ها

مؤلفه	شناسایی معادله	حل معادله	معادلات هم‌ارز	کاربرد
حل معادله	۰/۴۹۹*	-	-	-
معادلات هم‌ارز	۰/۳۸۴*	۰/۳۳۷*	-	-
کاربرد	۰/۰۵۶	۰/۴۷۴*	۰/۴۶۴*	-
شناسایی معادله	-	-	-	-

\* $p < 0.01$ 

با توجه به شکل ۱ و جدول ۱ مدل تجربی زیر تدوین گردید. در این شکل مؤلفه‌های مکنون در داخل بیضی و میزان خطای حاصل از تقریب در هر مؤلفه درون دایره قرار گرفته‌اند. اعداد روی پیکان‌ها نیز نشان دهنده میزان روابط مستقیم بین مؤلفه‌ها می‌باشند.

با توجه به اطلاعات مدل تجربی حاصل (شکل ۲) و مقادیر استاندارد روابط مستقیم بین مؤلفه‌ها (جدول ۲) مشاهده می‌شود که بین «شناسایی معادله» و «حل معادله»  $\beta = 0.499$  و





معادله» و «معادلات هم‌ارز» ( $\beta=0/337$  و  $t=1/918$ ) و نیز بین «معادلات هم‌ارز» و «کاربرد» معادله» ( $\beta=0/464$  و  $t=1/894$ ) رابطه مستقیمی وجود دارد که از نظر آماری ( $p>0/05$ ) معنادار نیست.

جدول ۳. اثر غیرمستقیم بین مؤلفه‌ها در مدل

اثر غیرمستقیم بین مؤلفه‌ها در مدل	مقدار برآورد	خطای استاندارد	مقدار استاندارد شده (لامبدا $\beta$ )	مقدار $t$	سطح معناداری
شناسایی معادله با حل معادله	۰/۰۰۰	۰/۵۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	$p>0/05$
شناسایی معادله با معادلات هم‌ارز	۰/۲۴۵	۰/۳۴۹	۰/۱۶۸	۰/۷۰۲	$p>0/05$
شناسایی معادله با کاربرد	۱/۰۰۷	۰/۴۷۰	۰/۴۹۳	۲/۱۴۳	$p<0/05$
حل معادله با معادلات هم‌ارز	۰/۰۰۰	۰/۱۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	$p>0/05$
حل معادله با کاربرد	۰/۱۳۰	۰/۱۶۳	۰/۱۵۷	۰/۷۹۸	$p>0/05$
معادلات هم‌ارز با کاربرد	۰/۰۰۰	۰/۳۴۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	$p>0/05$

با توجه به مقادیر استاندارد روابط غیرمستقیم بین مؤلفه‌ها (جدول ۳) «شناسایی معادله» و «حل معادله» ( $\beta=0/000$  و  $t=0/000$ )، «شناسایی معادله» و «معادلات هم‌ارز» ( $\beta=0/168$  و  $t=0/702$ )، «حل معادله» و «معادلات هم‌ارز» ( $\beta=0/000$  و  $t=0/000$ )، «حل معادله» و «کاربرد» ( $\beta=0/157$  و  $t=0/798$ ) و همچنین «معادلات هم‌ارز» و «کاربرد» ( $\beta=0/000$  و  $t=0/000$ ) یک رابطه غیرمستقیم دارند که از نظر آماری ( $p>0/05$ ) معنادار نمی‌باشد. «شناسایی معادله» و «کاربرد» ( $\beta=0/493$  و  $t=2/143$ ) رابطه غیرمستقیمی دارند که از نظر آماری ( $p<0/05$ ) معنادار است.

با توجه به مقادیر استاندارد اثر مجموع (مستقیم و غیرمستقیم) بین مؤلفه‌ها در مدل (جدول ۴) اثر مجموع بین «شناسایی معادله» و «حل معادله» ( $\beta=0/499$  و  $t=2/439$ ) و همچنین «شناسایی معادله» و «معادلات هم‌ارز» ( $\beta=0/552$  و  $t=2/307$ ) از نظر آماری ( $p<0/05$ ) معنادار است. اثر مجموع بین «شناسایی معادله» و «کاربرد» ( $\beta=0/549$  و  $t=2/600$ ) و همچنین بین «حل معادله» و «کاربرد» ( $\beta=0/631$  و  $t=3/215$ ) از نظر آماری ( $p<0/01$ ) معنادار است. اثر مجموع بین «حل معادله» و «معادلات هم‌ارز» ( $\beta=0/337$  و  $t=1/923$ ) و همچنین «معادلات هم‌ارز» و «کاربرد» ( $\beta=0/464$  و  $t=1/895$ ) از نظر آماری ( $p>0/05$ )

معنادار نیست.

جدول ۴. اثر مجموع بین مؤلفه‌ها در مدل

سطح معناداری	مقدار t	مقدار استاندارد شده (لامبدا $\beta$ )	خطای استاندارد	مقدار برآورد	اثر مجموع بین مؤلفه‌ها در مدل
$p < 0/05$	۲/۴۳۹	۰/۴۹۹	۰/۵۰۳	۱/۲۲۷	شناسایی معادله با حل معادله
$p < 0/05$	۲/۳۰۷	۰/۵۵۲	۰/۳۴۹	۰/۸۰۵	شناسایی معادله با معادلات هم‌ارز
$p < 0/01$	۲/۶۰۰	۰/۵۴۹	۰/۴۷۰	۱/۱۲۲	شناسایی معادله با کاربرد
$p > 0/05$	۱/۹۲۳	۰/۳۳۷	۰/۱۰۴	۰/۲۰۰	حل معادله با معادلات هم‌ارز
$p < 0/01$	۳/۲۱۵	۰/۶۳۱	۰/۱۶۳	۰/۵۲۴	حل معادله با کاربرد
$p > 0/05$	۱/۸۹۵	۰/۴۶۴	۰/۳۴۳	۰/۶۵۰	معادلات هم‌ارز با کاربرد

خطای اندازه‌گیری خطایی است که اکثر روش‌های آماری مقدماتی توانایی کنترل آن را ندارند و معمولاً آن را در نظر نمی‌گیرند. این در حالی است که مدل‌یابی معادلات ساختاری، خطاهای اندازه‌گیری و حتی خطاهای حاصل از تقریب (برآورد) را نیز به حساب می‌آورد (بیرنه، ۲۰۰۲). جدول ۵ میزان خطای تقریب را در آزمون مورد استفاده در پژوهش نشان می‌دهد.

جدول ۵. میزان خطای حاصل از تقریب در هر مؤلفه

سطح معناداری	مقدار p	مقدار برآورد	ضرایب استاندارد
$p < 0/01$	***	۰/۵۶۲	$a_1$ ضریب ثابت مربوط به مؤلفه «حل معادله»
$p < 0/05$	۰/۰۱۲	۰/۱۶۱	$a_2$ ضریب ثابت مربوط به مؤلفه «معادلات هم‌ارز»
$p > 0/05$	۰/۳۲۵	۰/۱۳۸	$a_3$ ضریب ثابت مربوط به مؤلفه «کاربرد»

با توجه به جدول فوق اگر مقدار  $p$  از ۰/۰۵ بیشتر باشد، نشان دهنده آن است که تمامی متغیرهای مورد نیاز برای تولید هر مؤلفه در این مدل در نظر گرفته شده است و هیچ متغیر دیگری برای تبیین هر یک از این مفاهیم مورد نیاز نیست یا به عبارت دیگر مدل از طرف آن مفهوم قابل گسترش نمی‌باشد (بیرنه، ۲۰۰۲). با توجه به جدول فوق، این مدل از طرف «حل معادله» و «معادلات هم‌ارز»، قابل گسترش می‌باشد.

پس از تدوین مدل، روش‌های متعددی برای برآورد نیکویی برازش کلی مدل با داده‌های مشاهده شده وجود دارد. به طور کلی چندین شاخص برای سنجش برازش مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی معمولاً برای تأیید مدل، استفاده از سه تا پنج شاخص کافی است (قاضی طباطبایی، ۱۳۸۱). این شاخص‌ها به شیوه‌های مختلفی طبقه‌بندی شده‌اند که یکی از عمده‌ترین آن‌ها طبقه‌بندی به صورت مطلق، نسبی و تعدیل یافته می‌باشد. شاخص‌های مربوط به برازش مدل در جدول ۶ نشان داده شده است.

جدول ۶. شاخص‌های برازش مدل

نتیجه	دامنه مورد قبول	مقدار	شاخص	
تأیید مدل	$< 2$	۰/۵۹۰	$\chi^2/df$	مطلق
تأیید مدل	نزدیکتر به صفر	۰/۰۲۲	RMR	
تأیید مدل	$> 0/9$	۰/۹۸۵	GFI	
تأیید مدل	$> 0/9$	۰/۹۶۰	AGFI	
تأیید مدل	$> 0/9$	۱/۰۶۴	TLI	نسبی
تأیید مدل	$> 0/9$	۱/۰۳۰	IFI	
تأیید مدل	$> 0/9$	۱/۰۰۰	CFI	
تأیید مدل	$< 0/09$	۰/۰۰۰	RMSEA	تعدیل یافته
تأیید مدل	$> 0/05$	۰/۹۶۳	PCLOSE	
تأیید مدل	نزدیکتر به صفر	۵۲/۲۶۲	AIC	
تأیید مدل	نزدیکتر به صفر	۱۳۶/۸۳۴	CAIC	
تأیید مدل	$> 0/05$	۰/۸۷۵	p	

با توجه به جدول فوق، شاخص‌های اندازه‌گیری برازش بیانگر این مطلب است که این مدل با توجه به نوع داده‌ها در بهترین حالت برازش است و مدل نهایی به‌طور کاملاً مطلوبی برازش یافته است.

با بررسی سؤال اول که «آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «حل معادله» رابطه وجود دارد؟»، ابتدا با استفاده از مدل تجربی به‌دست آمده، با بررسی اثر مستقیم، غیرمستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه (جدول ۲، ۳ و ۴) مشخص شد که اثر مستقیم و اثر مجموع بین این دو مؤلفه معنادار است و در نتیجه فرض صفر در سطح  $(p < 0/05)$  رد شده و

بنابراین، مؤلفه «شناسایی معادله» بر «حل معادله»، به‌طور مستقیم و در مجموع تأثیرگذار است. به منظور بررسی سؤال دوم «آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «معادلات هم‌ارز» رابطه وجود دارد؟»، با استفاده از مدل تجربی به‌دست آمده، با بررسی اثر مستقیم، غیرمستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه (جداول ۲، ۳ و ۴) مشخص شد که متغیر «شناسایی معادله» بر «معادلات هم‌ارز» به‌طور مستقیم و یا از طریق متغیرهای دیگر تأثیرگذار نیست، ولی اثر مجموع بین این دو مؤلفه معنادار است و بنابراین فرض صفر در سطح  $(p < 0/05)$  رد شده و در مجموع این مؤلفه بر «معادلات هم‌ارز» تأثیر می‌گذارد.

به منظور بررسی سؤال سوم «آیا در مبحث معادله درجه اول بین «شناسایی معادله» و «کاربرد» رابطه وجود دارد؟»، با استفاده از مدل تجربی به‌دست آمده، نتایج آماری حاصل از بررسی اثر مستقیم، غیرمستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه (جداول ۲، ۳ و ۴) نشان داد که اثر غیرمستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه معنادار است. لذا فرض صفر در سطح  $(p < 0/05)$  رد شده و «شناسایی معادله» بر «کاربرد» به‌طور مستقیم تأثیر ندارد، ولی از طریق متغیرهای دیگر و در مجموع تأثیر می‌گذارد.

به منظور بررسی سؤال چهارم «آیا در مبحث معادله درجه اول بین «حل معادله» و «کاربرد» رابطه وجود دارد؟»، با استفاده از مدل تجربی به‌دست آمده، با بررسی اثر مستقیم، غیرمستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه (جداول ۲، ۳ و ۴) مشخص شد که اثر مستقیم و مجموع بین این دو مؤلفه معنادار است و در نتیجه فرض صفر در سطح  $(p < 0/05)$  رد شده و بنابراین، مؤلفه «حل معادله» بر «کاربرد»، به‌طور مستقیم و در مجموع تأثیرگذار می‌باشد.

### بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر با توجه به نتایج سؤال اول، می‌توان نتیجه گرفت که «شناسایی معادله» موجب افزایش مؤلفه «حل معادله» در یادگیرنده می‌شود. بر اساس نظریه میچلمور و وایت (۲۰۰۷) برای یاددهی مفاهیم انتزاعی، دانش‌آموز قبل از مراحل حل معادله بایستی مراحل آشنایی با انواع معادلات و تشابهات بین معادلات را یاد گرفته باشد. یادگیرنده با عبور از مراحل آشنایی و تشابهات، در واقع ویژگی‌های معادله را شناسایی می‌کند. سپس وارد حل معادله می‌شود. کریمی‌کیا و همکاران (۱۳۹۱) نیز نشان دادند که عدم شناسایی درست معادله

باعث ایجاد اشتباهات متعددی در حل معادله گردیده است.

همچنین با توجه به نتایج حاکی از بررسی سؤال دوم، «شناسایی معادله» موجب افزایش «معادلات هم‌ارز» در یادگیرنده می‌شود. در ریاضیات (۱) بعد از معرفی ویژگی‌های معادله و بعد از حل معادله، به معرفی «معادلات هم‌ارز» پرداخته شده است. با توجه به نتایج این پژوهش، عدم شناسایی صحیح ویژگی‌های معادله از جمله تشخیص معادله و متغیر باعث عدم توانایی دانش‌آموزان در درک و تشخیص معادلات هم‌ارز شده است. می‌توان نتیجه گرفت که درک عمیق این مؤلفه از برخی از اشتباهات مفهومی در «معادلات هم‌ارز» جلوگیری خواهد کرد.

بررسی سؤال سوم پژوهش نشان داد که «شناسایی معادله» تسهیل‌ساز مؤلفه «کاربرد» در یادگیرنده می‌شود. در واقع مؤلفه «کاربرد» همان مرحله کاربرد نظریه یاددهی مفاهیم انتزاعی میچلمور و وایت (۲۰۰۷) است. در این مرحله دانش‌آموزان آنچه را که برای آن‌ها مفهوم‌سازی شده است در مسائل پیچیده ریاضی و در حل مسائل کلامی استفاده می‌کنند. به‌علاوه زمانی که ویژگی‌های معادله عمیقاً یادگرفته شود دانش‌آموز می‌تواند راحت‌تر مسائل کلامی را به شکل نمادین تبدیل کرده و معادله را حل کند. همچنین، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد اشتباهات مفهومی متعدد در شناسایی معادله باعث می‌شود که دانش‌آموزان در حل درست مسائل کلامی ناتوان باشند. بنابراین یادگیری عمیق این مؤلفه و درک ویژگی‌های ساختاری معادله از بسیاری اشتباهات مفهومی در حل مسائل کلامی جلوگیری خواهد کرد.

نتایج حاصل از بررسی سؤال چهارم نشان داد، برای افزایش مؤلفه «کاربرد» در یادگیرنده، آشنایی با «حل معادله» تأثیرگذار است. مؤلفه «کاربرد» خود شامل حل معادله نیز می‌شود یعنی یادگیرنده پس از انجام مهارت‌های مربوط به ساده‌تر کردن مسائل پیچیده و یا تبدیل مسائل کلامی به شکل نمادین معادله باید به حل معادله نیز بپردازد. به‌علاوه بر اساس نظریه یاددهی مفاهیم انتزاعی میچلمور و وایت (۲۰۰۷) مرحله کاربرد بعد از مرحله مفهوم‌سازی که در این مبحث همان حل معادله است، عنوان شده است. در ریاضیات (۱) نیز بعد از حل معادله چندین تمرین مربوط به مسائل کلامی مطرح شده است.

از بررسی عملکرد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون این پژوهش، مشاهده می‌شود که آن‌ها در «حل معادله» نسبت به مؤلفه‌های دیگر موفق‌تر بوده‌اند، که نشان دهنده درک سطحی از

مفهوم معادله است. لذا دانش‌آموزان درک کاملی از ساختار یک معادله و ویژگی‌های آن ندارند. این مسئله به دلیل تأکید بیش از حد بر الگوریتم‌ها و رویه‌ها و عدم توجه به یادگیری مفهومی این درس است. ارائه ویژگی‌های معادله و انواع سؤالات کاربردی و نشان دادن کاربرد این درس در علوم دیگر، می‌تواند تا حد زیادی این مشکلات را مرتفع سازد. با توجه به مدل تجربی به دست آمده و همچنین برای جلوگیری از ایجاد اشتباهات مفهومی، می‌توان یک چارچوب کلی آموزش را در فرآیند تدریس معادله درجه اول بر اساس این چهار مؤلفه ارائه نمود که یادگیرنده با دریافت پیش‌خورد و بازخورد از این مؤلفه‌ها به ارتباط بین آن‌ها به صورت یک شبکه منسجم و منظم پی می‌برد و یادگیری آن‌ها در این مبحث ارتقاء می‌یابد.

### منابع

- ابارشی، احمد و حسینی، سیدیعقوب (۱۳۹۱). *مدل‌سازی معادلات ساختاری*. چاپ اول، تهران: انتشارات جامعه‌شناسان.
- حسام، عبدالله (۱۳۸۴). *بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان و نقش طراحواره‌های ذهنی در ایجاد آن‌ها*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، چاپ شده، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.
- سرمد، زهره؛ بازرگان، عباس و حجازی، الهه (۱۳۷۹). *روش‌های تحقیق در علوم رفتاری*. چاپ چهارم، تهران: انتشارات آگاه.
- سیف، علی‌اکبر (۱۳۸۷). *روان‌شناسی پرورشی نوین: روان‌شناسی یادگیری و آموزش*. ویرایش ششم، چاپ چهارم، تهران: نشر دوران.
- علم‌الهدایی، سیدحسن (۱۳۸۳). *روان‌شناسی یادگیری ریاضی، مجله رشد آموزش ریاضی*، شماره ۵۵، ص ۱۴.

- قاضی طباطبایی، سید محمود (۱۳۸۱). *فرآیند تدوین و اجرا و تفسیر ستاده‌های یک مدل لیزرل*. یک مثال عینی. دانشگاه تبریز. سال‌نامه پژوهشی، شماره ۱، صص ۸۵-۱۲۵.
- کریمی‌کیا، خدیجه؛ امینی‌فر، الهه و کمالی، فرحبخش (۱۳۹۱). اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در حل معادله‌ی درجه اول و معادله‌ی خط، *چهارمین همایش ملی آموزش*، تهران، ایران، ۱۳۹۱.
- نورانی، سیده‌فاطمه؛ کاردان، احمد و مدبری، سمانه (۱۳۸۸). روش‌های نمایش و به‌روزرسانی مدل یادگیرنده در سیستم‌های آموزش الکترونیکی. *چهارمین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی یادگیری الکترونیکی*. تهران: دانشگاه علم و صنعت.
- Allen, G. D. (2007). *Misconceptions in Mathematics*, Department of Mathematics, Texas A & M University, College Station. Available on: 11/02/2012, <http://www.math.tamu.edu/~snite/MisMath.pdf>
- Aminifar, E., Aqili, N., & Zaeembashi, A. (2012). The Structural Relationships between Conceptual and Procedural Knowledge in Differential Equations. *Quarterly Journal of Research*, 28, 5-24.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Journal of Mathematical Thinking and Learning*, 9 (3), 249-272.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goal*, Handbook1 Cognitive Domain, David Mckay Company, New York.
- Bull, S. (2004). Supporting Learning with Open Learner Models. 4<sup>th</sup> *Hellenic Conference with International Participation: Information and Communication Technologies in Education*, Athens. Educational Technology Research Group, Electronic, Electrical and Computer Engineering, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham B15 2TT, U.K.
- Byrne, B. M. (2002). *Structural Equation Modeling with Amos: Basic concepts, Applications, and Programming*. Mahwah, New Jersey. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 51(3), 408-409.
- Cansiz, S., Küçük, B. & Isleyen, T. (2011). Identifying the Secondary School Students' Misconceptions about Functions. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, Turkey, 15, 3837-3842.

- Durkaya, M., Aksu, Z., Öçal, M. F., Senel, E. Ö., Konyalioglu, A.C., Hizarci, S. & Kaplan, A. (2011). Secondary School Mathematics Teachers' Approaches to Students' Possible Mistakes. Elsevier Ltd. Wolfram MathWorld. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15, 2569–2573.
- Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in Mathematics Learning. *Mathematics Education Research Journal*, 19 (2), 1–9.
- Ntsohi, M. M. E. (2005). An Investigation into the Problems Encountered by Learners and Teachers of Grade 9 Algebra on Understanding Linear Equations: A Critical Analysis. MA Thesis. accessed 03/02/2012, <http://uir.unisa.ac.za/bitstream/handle/10500/2509/00front.pdf?sequence=1>.
- Nusair, K. & Hua, N. (2010). Comparative Assessment of Structural Equation Modeling and Multiple Regression Research Methodologies. *Tourism Management*, 31, 314-324.
- Özkan, E. M. (2011). Misconceptions in Radicals in High School Mathematics, Elsevier Ltd. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 120–127.
- Schliemann, A. D., Carraher, D.W., Goodrow, A., Caddle, M. C., & Porter, M. (2013). *Equations in Elementary School*, Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lindmeier, A. M. & Heinze, A., (Eds.); Kiel, Germany: PME. 4, 161-168.
- Shyamala, R., Sunitha, R., & Aghila, D. G. (2011). Towards Learner Model Sharing Among Heterogeneous E-Learning Environments. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*. 3 (4), 2034-2040.
- Tossavainen, T., Attorps, I., & Vaisanen, P. (2011). On Mathematics Students Understanding of the Equation Concept. *Journal of Mathematical Education*, 6 (2), 127-147.