

کاربرد مسأله ممانعت از حداکثر جریان در بازی جنگ زمینی مهدی کبیری^۱، جواد طیبی^۲

چکیده

هدف این مقاله، مدلسازی ریاضی مسأله ممانعت از حرکت حداکثری قوای دشمن در پدافند زمینی می‌باشد، تا با حل مدل ارائه شده بهترین راهبرد برای کمک به فرماندهان نیروی زمینی ارتش جهت جلوگیری از انتقال حداکثری نیرو و تجهیزات دشمن داده شود. این مسأله را می‌توان به عنوان یک مسأله از بازی جنگ در نظر گرفت که شامل دو بازیکن است. بازیکن اول سعی در جا به جایی حداکثری قوای خود و بازیکن دوم سعی در آسیب زدن یا محدود کردن مسیرهای حرکت دشمن با حداقل هزینه انسانی و تجهیزات را دارند تا بتواند از انتقال نیرو و تجهیزات دشمن تا حد ممکن جلوگیری کند. برای این مسئله مدل‌های مختلفی براساس فرضیات دنیای واقعی ارائه می‌شود. در نهایت کارایی مدل نهایی ارائه شده با استفاده از شبیه‌سازی جنگ بین عراق و کویت بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد استفاده از این رویکرد ریاضی تاثیر خوبی در استفاده بهینه از تجهیزات جهت متوقف کردن و تضعیف حرکت دشمن دارد.

واژه‌های کلیدی: بازی جنگ، پدافند زمینی، مسأله ممانعت، بیشترین جریان.

۱ پژوهشگر پژوهشکده عالی جنگ دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا

۲ استادیار گروه مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی بیرجند

Application of maximum flow interdiction problem in land wargame

Kabiri M.^۱, Tayyebi J.^۲

ABSTRACT

The purpose of this paper is to mathematically model the problem of interdiction the maximum movement of enemy forces in ground defense. Solving the proposed model gives the best strategy to help army ground commanders for preventing the maximum transfer of enemy forces and equipment. This can be regarded as a significant matter of the wargame involving two players. The first player tries to move his maximum forces whereas the second player tries to damage or limit the enemy's movement routes with the least cost and equipment in order to prevent the transfer of enemy forces as much as possible. Different models for this problem are presented based on real-world assumptions. Finally, the performance of the final model is evaluated using the simulation of the war between Iraq and Kuwait. The results show that the use of the mathematical approach has a good performance to stop and to weaken the enemy.

KEYWORDS: wargaming, ground defense, interdiction problem, maximum flow

¹ Researcher, Institute for the study of war, Aja Command and Staff University

² Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology

۱- مقدمه

در مسأله پدافند زمینی دشمن می‌خواهد انتقال حداکثری نیرو به سمت هدف مورد نظر را داشته باشد در حالی که نیروهای خودی می‌خواهند این انتقال نیرو را به وسیله تخریب یا محدود کردن مسیرهای حرکت با استفاده از منابع در دسترس (مین گذاری، استقرار نیرو، موشک‌های کروژ، هواپیماهای جنگی و ...) حداقل کنند. این مسأله در طراحی‌های نظامی بازی جنگ اهمیت ویژه‌ای داشته و همچنین در ممانعت از قاچاق دارو و محافظت از زیرساخت‌های شهری در برابر حملات تروریستی نیز کاربرد دارد [۱]-[۲]-[۳]-[۴].

هرودوتز توصیف می‌کند چگونه سواره نظام پارسی در سال ۴۷۹ قبل از میلاد خطوط و مسیرهای یونان را در نبرد در نزدیکی شهر پلاتای یونان قطع کردند [۵]. لیوی گزارش می‌دهد که در سال ۲۱۸ پیش از میلاد سنای روم دستور داد تا پل‌ها در نزدیکی این شهر را از بین ببرند تا سرعت پیشرفت هانیبال و سربازانش کند شود [۶]. دو هزاره بعد، جنگ داخلی آمریکا با حمله نیروهای کنفدراسیون و اتحادیه به جاده‌ها، پل‌ها، خطوط ریلی و خطوط تلگراف شدت گرفت تا مانع از تأمین نیرو، حرکت و ارتباطات دشمن شوند [۷]. در جنگ جهانی دوم، زیردریایی‌های آلمان صدها تانکر نفتی متفقین را که در حال عبور از خطوط دریایی اقیانوس اطلس و دریاهای دیگر بودند، متوقف می‌کند [۸]. حملات بمباران متفقین در طول جنگ جهانی دوم به پالایشگاه‌های نفتی تحت کنترل آلمان و نیروگاه‌های سوخت مصنوعی، نوع دیگری از ممانعت سیستم در جنگ اقتصادی را نشان می‌دهد. ارتش آلمان به دلیل کمبود سوخت فلج شد و این نقشه، به عنوان راهبرد حمله نامیده شد. در راهبردی دیگر، تخریب خطوط ریلی و سایر تجهیزات حمل و نقل در اروپا حرکت سربازان و تجهیزات آلمانی را محدود کرد تا با حمله آلمان‌ها مقابله کند [۹].

بازی جنگ بخش مهمی از جنگ مدرن است که در یکی از مجموعه‌های آن حمله به زیرساخت‌های کلیدی غیرنظامی و نظامی می‌تواند به کاهش اثربخشی مبارزات دشمن کمک کند، در حالی که فقط تلفات محدودی به نیروهای خودی

وارد می‌شود. هنگام برنامه‌ریزی برای پدافند، نیروهای خودی معمولاً با این سؤال روبرو می‌شوند که با توجه به محدودیت منابع و احتمالاً محدودیت‌های دیگر (به عنوان مثال ملاحظات سیاسی)، به کدام قسمت از مسیر دشمن باید حمله کرد تا بتوان به طور موثر قابلیت‌های جنگی دشمن را کاهش داد. مسأله ممانعت در شبکه به این سوال پاسخ می‌دهد [۱۰].

مسأله ممانعت در شبکه تعداد زیادی از مسائل مهم تخصیص منابع در دنیای واقعی را به زبان ریاضی بیان می‌کند از جمله هماهنگی تاکتیکی حملات هوایی [۱۱]، مبارزه با قاچاق مواد مخدر [۱]، کنترل عفونت در یک بیمارستان [۱۲] و کنترل سیلاب‌ها [۱۳]. مطالعه مسأله ممانعت از حداکثر جریان که موضوع این مقاله نیز می‌باشد به طور خاص از جنگ سرد سرچشمه می‌گیرد، هنگامی که تحلیلگران شرکت رند بررسی می‌کردند که چگونه ترافیک راه‌آهن اتحاد جماهیر شوروی به اروپای شرقی را با استفاده از حداقل منابع متوقف کنند [۱۴]. آن‌ها این مسأله را با حل کردن مسأله حداقل ظرفیت برش که مدل ریاضی مسأله مورد نظر بود پاسخ دادند. این اولین مدل‌سازی ریاضی برای این مسأله اساسی شناخته شده بود [۱۵]. از سال ۱۹۶۰ میلادی تا اوایل قرن ۲۱ میلادی، تعداد زیادی مقاله در حوزه مسأله ممانعت در شبکه وجود داشت که بسیاری از آن‌ها در [۱۶] لیست شده‌اند. چهارچوب اصلی برای مسأله ممانعت از حداکثر جریان در شبکه با محدودیت بودجه برای اولین بار در [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفت. در اوایل دهه ۹۰ میلادی، وود [۱] با معرفی مسأله ممانعت از حداکثر جریان در شبکه، علاقه به ممانعت در شبکه را دوباره در محافل علمی زنده کرد.

عبدالله زاده و همکاران [۱۸] یک مسئله ممانعت جدید به نام ممانعت از حداقل $S-t$ برش ارائه دادند که در آن مهاجم می‌خواهد حداقل $S-t$ برش را انتخاب کند تا هر مسیر ممکن بین منبع و مقصد را قطع کند در حالی که مدافع می‌خواهد ظرفیت کمان‌ها را تحت بودجه مشخص افزایش دهد تا مقدار حداقل برش را تا حد ممکن افزایش دهد. در [۱۹] یک مدل دو هدفه برای مسئله ممانعت از کوتاه‌ترین مسیر شبکه با ممانعت از گره ارائه شده است. اتمتورک و همکاران

[۲۰] یک کران بالای درجه دو برای مسئله ممانعت از شبکه گسسته به دست آورد. فرقانی و همکاران [۲۱] یک مدل دوهدفه همراه با روش حل برای مسئله ممانعت جزئی روی تسهیلات سلسله مراتبی ظرفیت دار ارائه دادند. جبارزاده و همکاران [۲۲] ممانعت از توزیع غیرقانونی محصول را در یک شبکه با چند منبع و مقصد مطالع کردند. محدی و طیبی [۲۳] مسئله ممانعت از مسیر با حداکثر ظرفیت تحت بودجه ثابت را مورد بررسی قرار دادند. مدل‌ها و الگوریتم‌های مسئله ممانعت در [۲۴] مرور شده‌اند.

در این مقاله ابتدا یک مدل ریاضی برای مسأله ممانعت از حداکثر جریان در شبکه ارائه می‌شود، سپس بر پایه مدل ریاضی یک شبکه نمونه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از نرم‌افزار گمز و از حل‌کننده سیپلکس برای حل مدل ریاضی شبکه نمونه استفاده می‌شود. ادامه مقاله به صورت زیر می‌باشد: در بخش ۲ پیش‌نیازهای مورد نیاز مرور می‌شوند. در بخش ۳ مدل‌های ریاضی ارائه می‌شوند. در بخش ۴ به تحلیل مدل با استفاده از یک مثال پرداخته می‌شود. در بخش ۵ نتیجه‌گیری مقاله ارائه می‌شود.

۲- مفاهیم مقدماتی شبکه

گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ که در آن N مجموعه گره‌ها و A مجموعه کمان‌ها است را در نظر بگیرید. فرض کنید هر کمان $(i, j) \in A$ دارای ظرفیت نامنفی u_{ij} می‌باشد. در مسأله حداکثر جریان، هدف فرستادن بیشترین جریان از گره مبدا S به گره مقصد t با توجه به ظرفیت کمان‌های شبکه می‌باشد. این مسأله به صورت ریاضی زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max x_{ts} \\ \text{s.t. } & \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} x_{ts} & i = s, \\ 0 & i \in N - \{s, t\} \\ -x_{ts} & i = t, \end{cases} \end{aligned}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

که در آن جریان از گره i به گره j و v مقدار جریان می‌باشد. اولین محدودیت، قید شار می‌باشد و برقراری جریان در شبکه را تضمین می‌کند. دومین محدودیت، محدودیت ظرفیت می‌باشد. به تجزیه مجموعه گره‌های N به دو زیرمجموعه S و $\bar{S} = N-S$ یک برش می‌گویند و آن را با $[S, \bar{S}]$ نشان می‌دهند. یک برش را $s-t$ برش می‌نامند هرگاه $s \in S$ و $t \in \bar{S}$ باشد. کمان (i,j) با $i \in S$ و $j \in \bar{S}$ را یک کمان پیش‌رو و کمان (i,j) با $j \in S$ و $i \in \bar{S}$ را پس‌رو می‌نامند. مجموعه کمان‌های پیش‌رو را با (S, \bar{S}) و مجموعه کمان‌های پس‌رو را با (\bar{S}, S) نشان می‌دهند. ظرفیت یک $s-t$ برش $[S, \bar{S}]$ به صورت جمع ظرفیت‌های کمان‌های پیش‌رو در برش تعریف می‌شوند. به بیان ریاضی

$$u[S, \bar{S}] = \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} u_{ij}$$

واضح است که ظرفیت یک برش یک کران بالا بر بیشترین جریانی که با توجه به ظرفیت کمان‌ها می‌توان از گره‌های S به گره‌های \bar{S} فرستاد، می‌باشد. یک $s-t$ برش را که ظرفیتش در بین تمام $s-t$ برش‌ها کمترین مقدار باشد، حداقل برش می‌نامند.

قضیه (حداکثر جریان - حداقل برش): حداکثر مقدار جریانی که می‌توان در یک شبکه از گره مبدا S به گره مقصد t فرستاد برابر با ظرفیت حداقل برش در آن شبکه است [۲۵].

۳- توصیف مدل ریاضی

با استفاده از قضیه حداکثر جریان- حداقل برش می‌توان مسأله ممانعت شبکه را به صورت ساده زیر بیان کرد. مهاجم می‌خواهد از مبدأ S به مقصد t در یک شبکه حرکت کند در حالی که مدافع می‌خواهد با استفاده از آسیب زدن به کمان‌های شبکه همه مسیرهای ممکن برای عبور دشمن را از بین ببرد. مطابق با هر کمان (i, j) یک عدد نامنفی r_{ij} متناظر است که هزینه لازم برای تخریب آن کمان می‌باشد و مدافع می‌خواهد با حداقل هزینه تمام مسیرها از مبدأ S به مقصد t را از بین ببرد. برای پاسخ به مسأله فرض کنید r_{ij} همان ظرفیت کمان (i, j) است، حداکثر جریان از مبدأ S به مقصد t مشروط به محدودیت ظرفیت کمان‌ها را پیدا می‌کنیم، با استفاده از این جواب برش با حداقل ظرفیت را پیدا می‌کنیم. طبق قضیه حداکثر جریان- حداقل برش، این جواب متناظر با کمان‌هایی است که باید توسط مدافع تخریب شوند تا با حداقل هزینه بتوانند تمام مسیرهای دشمن را از بین ببرند. تامیمی از مسأله بیان شده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

مسأله ۱: دشمن می‌خواهد حداکثر انتقال را در یک شبکه از مبدأ S به مقصد t با فرض این که هر کمان (i, j) دارای ظرفیت u_{ij} است، داشته باشد. ممانعت کننده بایستی r_{ij} واحد از منبع خود را صرف کند تا بتواند کمان (i, j) را به طور کامل نابود کند. در این‌جا فرض می‌شود تخریب جزئی امکان ندارد. یعنی در صورت صرف هزینه r_{ij} کمان (i, j) به طور کامل تخریب شده و دشمن نمی‌تواند از آن برای انتقال نیرو استفاده کند. مسأله از دیدگاه ممانعت کننده کمینه کردن، بیشترین جریانی است که دشمن می‌خواهد از طریق کمان‌های تخریب

نشده عبور دهد. در این مسأله محدودیت دشمن متناهی بودن ظرفیت کمان‌های باقی مانده و محدودیت ممانعت کننده محدودیت در منبع (بودجه) می‌باشد زیرا نمی‌تواند بیشتر از R واحد از منبع خود را استفاده کند. این مسأله را می‌توان به صورت مدل دوسطحی زیر بیان کرد:

$$\min_{y \in T} \max_x x_{ts}$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{sj} - \sum_j x_{js} - x_{ts} = 0,$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N - \{s, t\},$$

$$\sum_j x_{tj} - \sum_j x_{jt} - x_{ts} = 0, \quad (1)$$

$$x_{ij} - u_{ij}(1 - y_{ij}) \leq 0, \quad \forall (i, j) \in A,$$

$$x_{jt} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A \cup \{(t, s)\},$$

که مجموعه T به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \{y_{ij}: y_{ij} \in \{0, 1\} \forall (i, j) \in A, \sum_{(i, j) \in A} r_{ij} y_{ij} \leq R\}.$$

مدل (۱) یک مدل دو سطحی است. در سطح اول محدودیت‌ها همان محدودیت‌های مجموعه T می‌باشد. متغیر صفر و یک y_{ij} مقدار یک می‌گیرد هرگاه کمان (i, j) تخریب شود و در غیر این صورت صفر می‌باشد. مجموعه T مجموعه محدودیت‌های سطح اول مسأله می‌باشد که شامل صفر و یک بودن متغیرهای تصمیم‌گیری سطح اول y_{ij} و محدودیت بودجه می‌باشد که بیان می‌کند مجموع هزینه‌های اختصاص داده شده به کمان‌ها نباید بیشتر از بودجه R شود. سه محدودیت اول سطح دو بیان کننده بقای جریان در شبکه می‌باشند.

محدودیت چهارم قید ظرفیت و ارتباط دهنده دو متغیر سطح اول y_{ij} و سطح دوم x_{ij} است. آخرین محدودیت نامنفی بودن متغیرهای جریان را نشان می‌دهد.

حال با ثابت در نظر گرفتن y_{ij} و گرفتن دوگان از مسأله سطح دوم، می‌توان مدل (۱) را به صورت معادل زیر نوشت:

$$\min_{\alpha, \theta} \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} (1 - y_{ij}) \theta_{ij}$$

$$\text{s.t. } \alpha_i - \alpha_j + \theta_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\alpha_t - \alpha_s \geq 1,$$

$$\alpha_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N,$$

(۲)

$$\theta_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\sum_{(i,j) \in A} r_{ij} y_{ij} \leq R$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

که α_i و θ_{ij} به ترتیب متغیرهای دوگان محدودیت‌های بقای جریان و محدودیت‌های سطح دوم بوده و می‌توانند صفر و یک در نظر گرفته شوند زیرا ثابت می‌شود متغیرهای دوگان مسأله حداکثر جریان در بهینگی برای مقادیر صفر و یک هستند [۱]. به خاطر وجود عبارت $\theta_{ij} (1 - y_{ij})$ در تابع هدف این مدل غیر خطی می‌باشد. با جایگذاری متغیر صفر و یک β_{ij} به جای

و اضافه کردن قید $\beta_{ij} \geq \theta_{ij} - y_{ij}$ می‌توان مدل (۲) را به صورت خطی زیر بازنویسی کرد:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \beta_{ij} \quad (۳)$$

$$\text{s.t. } \alpha_i - \alpha_j + \theta_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\alpha_t - \alpha_s \geq 1,$$

$$\beta_{ij} + y_{ij} - \theta_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A, \quad (۳-۱)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} r_{ij} y_{ij} \leq R$$

$$\alpha_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N,$$

$$\theta_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\beta_{ij}, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

در ادامه نشان داده می‌شود که محدودیت (۳-۱) را می‌توان در جواب بهینه به صورت تساوی در نظر گرفت. θ_{ij} در هر جواب بهینه می‌تواند دو مقدار صفر یا یک را بگیرد. اگر مقدار صفر را بگیرد، طبق قیود مسأله به منظور رعایت شدنی بودن، β_{ij} و y_{ij} می‌توانند مقدار صفر یا یک بگیرند. اگر β_{ij} مقدار یک بگیرد، باعث افزایش مقدار تابع هدف می‌شود پس باید برابر صفر باشد. امکان دارد که در یک جواب بهینه y_{ij} مقدار یک بگیرد اما چون تاثیری در تابع هدف ندارد، با صفر قرار دادن آن شدنی بودن حفظ می‌شود و از طریق محدودیت بودجه باز هم برآورده می‌گردند پس جواب بهینه دیگری به دست می‌آید. بنابراین اگر θ_{ij}

مقدار صفر بگیرد، می‌توان فرض کرد که $\beta_{ij} = \gamma_{ij} = 0$ یا به طور معادل، $\beta_{ij} + \gamma_{ij} - \theta_{ij} = 0$. حال فرض کنید که در یک جواب بهینه θ_{ij} مقدار یک را بگیرد. در این حالت به منظور برقراری شدنی بودن باید β_{ij} ، γ_{ij} یا هر دو برابر یک باشند. اگر β_{ij} برابر یک باشد آنگاه محدودیت (۳-۱) برقرار می‌باشد و اگر در این حالت γ_{ij} برابر یک باشد با صفر قرار دادن آن جواب بهینه دیگری به دست می‌آید. بنابراین می‌توان فرض کرد که هنگامی که θ_{ij} برابر یک است فقط یکی از دو متغیر β_{ij} و γ_{ij} برابر یک هستند، به طور معادل $\beta_{ij} + \gamma_{ij} - \theta_{ij} = 0$. بنابراین می‌توان محدودیت (۳-۱) را با تساوی جایگزین کرد. چون $\beta_{ij} + \gamma_{ij} - \theta_{ij} = 0$ نتیجه می‌دهد که $\theta_{ij} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$. پس می‌توان از این تساوی استفاده کرده و متغیر θ_{ij} را از مدل حذف کرد. با این کار مدل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \beta_{ij} \quad (۴)$$

$$\text{s.t. } \alpha_i - \alpha_j + \beta_{ij} + \gamma_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A,$$

$$\alpha_t - \alpha_s \geq 1, \quad (۱-)$$

۴)

$$\sum_{(i,j) \in A} r_{ij} \gamma_{ij} \leq R \quad (۴-۲)$$

$$\alpha_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in N,$$

$$\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

مسأله ۱ را می‌توان با اضافه کردن مفروضاتی، به دنیای واقعی نزدیک‌تر کرد که در ادامه این مفروضات و نحوه اعمال کردن آن‌ها در مدل (۴) توضیح داده می‌شود.

مسأله ۲ (ممانعت جزئی): در دنیای واقعی هنگام حمله به یک مسیر ممکن است بخشی از آن آسیب دیده و به طور کامل از بین نرود، یا ممانعت کننده فقط بخواهد برای تخریب بخشی از مسیر هزینه کند. به طور ریاضی با فرض f_{ij} به عنوان عددی پیوسته بین صفر و یک، مدافع می‌خواهد $f_{ij} \gamma_{ij}$ واحد از منبع را به کمان (i, j) اختصاص بدهد. این کار باعث کاهش ظرفیت کمان به مقدار $(1-f_{ij}) u_{ij}$ می‌شود. تنها با اعمال این که β_{ij} و γ_{ij} می‌توانند مقادیر بین صفر و یک را بگیرند، می‌توان این فرض را در مدل (۴) اعمال کرد.

مسأله ۳ (چند مبدا و مقصد): در دنیای واقعی معمولاً حرکت دشمن از چند مبدا مختلف به چند مقصد مختلف می‌باشد. برای اعمال این فرض در مدل یک راس مبدا جدید و یک راس مقصد جدید به مدل اضافه می‌شود. راس منبع جدید با کمان‌هایی که بدون ظرفیت و غیر قابل تخریب می‌باشند به رئوس مبدا وصل می‌شود و همه رئوس مقصد نیز با چنین کمان‌هایی که (بدون ظرفیت و غیر قابل تخریب می‌باشند) به راس مقصد جدید وصل می‌شوند. فرض بدون ظرفیت بودن کمان‌ها و غیر قابل تخریب بودن آن‌ها باعث می‌شود که در برش بهینه برای مسأله، راس منبع جدید در یک طرف برش و راس مقصد جدید در طرف دیگر برش باشد. بنابراین با صفر قرار دادن α_{st} برای هر مبدا s' و $\alpha_{t't} = 1$ برای هر مقصد t' و حذف محدودیت (۴-۱) می‌توان این فرض را در مدل اعمال کرد.

مساله ۴ (چند منبع): در دنیای واقعی ممکن است چند منبع برای تخریب یک کمان وجود داشته باشد، مثلاً سه نوع هواپیما برای تخریب یک کمان قابل استفاده باشند. به بیان ریاضی تخریب کمان (i,j) نیاز به r_{ijl} واحد از منبع $l \in A$ دارد و در مجموع R_l واحد از هر منبع l در اختیار ممانعت کننده است. این فرض را با تعویض محدودیت (۲-۴) با محدودیت‌های $\sum_{(i,j) \in A} r_{ijl} y_{ij} \leq R_l \quad \forall l \in L$ می‌توان در مدل اعمال کرد.

با اعمال این سه فرض به طور همزمان، مدل نهایی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \beta_{ij} \\
 \text{s.t. } & \alpha_i - \alpha_j + \beta_{ij} + y_{ij} \geq 0, & \forall (i,j) \in A, \\
 & \alpha_i = 0, & \forall i \in N^s, \\
 & \alpha_i = 1, & \forall i \in N^t, \\
 & \sum_{(i,j) \in A} r_{ijl} y_{ij} \leq R_l & \forall l \in L, \\
 & \alpha_i \in \{0,1\}, & \forall i \in N, \\
 & 0 \leq y_{ij} \leq 1, & \forall (i,j) \in A, \\
 & 0 \leq \beta_{ij} \leq 1, & \forall (i,j) \in A,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

که N^s مجموعه رئوس مبدا به غیر از مبدا جدید و N^t مجموعه رئوس مقصد به جز مقصد جدید می‌باشند.

۴- نتایج محاسباتی

در این بخش به ارزیابی مدل ارائه شده با استفاده از یک مثال واقعی (جنگ بین عراق و کویت) پرداخته می‌شود. در این جنگ نیروهای عراقی می‌خواستند که با حداکثر قوا خاک کویت را تصرف کنند و در عمل هم موفق به این امر در مدت چند روز شدند. اگر نیروهای کویتی می‌توانستند راه‌های مواصلاتی بین عراق و خاک خودشان را با توجه به تجهیزاتی که در دسترس داشتند از بین ببرند یا صدمه بزنند شاید می‌توانستند از تجاوز عراق جلوگیری کنند. در این جا این موضوع با توجه به مدل ریاضی ارائه شده در بخش قبل بررسی می‌شود.

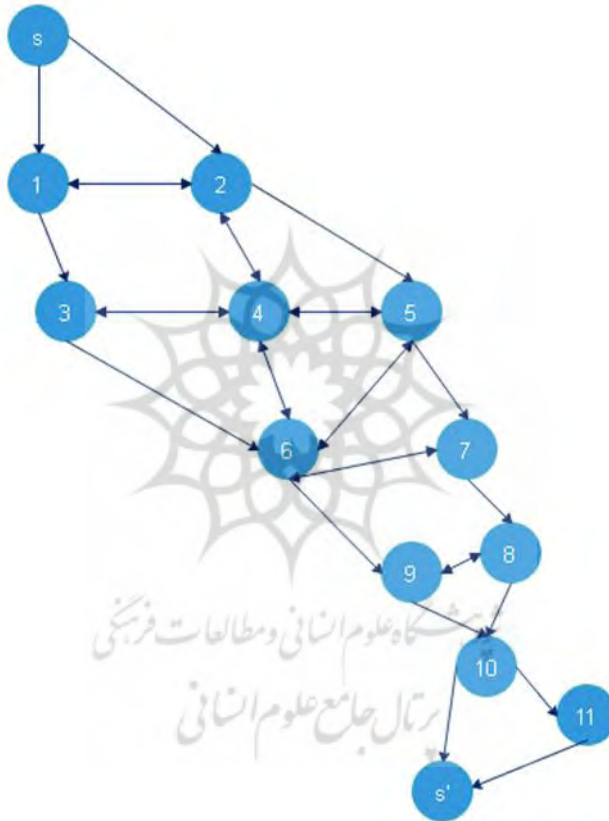
نقشه مسیرهای زمینی بین عراق و کویت در جنگ سال ۱۹۹۰ در شکل ۱ نمایش داده شده است. در شکل (۲) شبکه حاصل از این نقشه نشان داده شده است. S مبدا حرکت نیروهای عراقی در خاک عراق و S' مقصد آن‌ها در خاک کویت می‌باشد. مقادیر پارامترهای مسأله به صورت تصادفی در نظر گرفته شده و در جدول ۱ نمایش داده شده است. مقادیر دقیق پارامترهایی که به صورت تصادفی در نظر گرفته شده در جدول‌های ۲ و ۳ در ضمیمه آورده شده است.



شکل ۱: نقشه مسیرهای زمینی بین دو کشور عراق و کویت

جدول ۱: مقادیر پارامترها

u_{ij}	اعداد صحیح تصادفی بین ۶۰ و ۱۰۰
r_{ijl}	اعداد صحیح تصادفی بین ۴۰ و ۸۰
R_1	۳۰
R_2	۳۵
R_3	۴۰



شکل ۲: شبکه راه‌های مواصلاتی زمینی بین عراق و کویت

مدل مورد نظر در یک رایانه شخصی با پردازنده ۳ هسته‌ای و حافظه تصادفی ۸ گیگابایتی در نرم‌افزار گمز کدنویسی شده و از حل‌کننده سیپلکس^۱ برای حل آن استفاده شده است. مقدار بهینه تابع هدف ۱۰۷,۴۱۵ به دست آمده و مقادیر بهینه متغیرها در جدول‌های ۴، ۵ و ۶ در ضمیمه نمایش داده شده است.

نتایج نشان می‌دهد که اگر کویت با توجه به منابع محدود خود آسیب جزئی به کمان (۶,۹) به مقدار ۰,۵۶۶ به ترتیب می‌زد، می‌توانست ظرفیت حرکت نیروهای عراقی را به اندازه قابل توجه ۱۰۷,۴۱۵ کاهش دهد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کاربرد مسأله ممانعت از حداکثر جریان در پدافند زمینی مورد مطالعه قرار گرفت. ابتدا یک مدل پایه‌ای برای مسئله بیان شده، سپس با توجه به شرایط دنیای واقعی مدل بهبود پیدا کرده و در نهایت مدل نهایی ارائه شد. برای ارزیابی مدل ارائه شده، جنگ بین عراق و کویت در سال ۱۹۹۰ به عنوان یک مثال واقعی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به دست آمده تجزیه و تحلیل شد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که استفاده از این رویکرد ریاضی می‌تواند کمک قابل توجهی به تصمیم‌گیران پدافند زمینی در مواجهه با تهاجم دشمن و پاسخ به آن با استفاده بهینه از منابع داشته باشد.

به عنوان کارهای آتی در این زمینه پیشنهاد می‌گردد که به کاربرد دیگر مسایل ممانعت شبکه از جمله مسأله ممانعت از کوتاهترین مسیر، مسأله ممانعت از بیشترین درخت فراگیر در حوزه‌های نظامی پرداخته شود. این مسایل می‌توانند

¹ Cplex

به عنوان یک ابزار علمی در اختیار فرماندهان جنگی قرار گیرند تا در تصمیم گیری‌ها از آنها استفاده گردد.

۶- ضمیمه

جدول ۲: ظرفیت کمان‌های شبکه

ظرفیت	کمان	ظرفیت	کمان
۸۶	(5,7)	67	(s, 1)
77	(6,9)	94	(s, 2)
66	(6,4)	82	(1,2)
70	(6,5)	87	(1,3)
87	(6,7)	71	(2,1)
74	(7,8)	69	(2,4)
74	(7,6)	74	(2,5)
65	(8,9)	95	(3,4)
66	(8,10)	62	(3,6)
84	(9,8)	80	(4,2)
94	(9,10)	100	(4,3)
69	(10,11)	83	(4,5)
87	(10,12)	100	(4,6)
91	(11, s')	91	(5,4)

(5,6)	65		
-------	----	--	--

جدول ۳: مقدار واحد مورد نیاز از هر منبع برای تخریب هر کمان

کمان	مقدار واحد مورد نیاز از منبع اول برای تخریب کمان	مقدار واحد مورد نیاز از منبع دوم برای تخریب کمان	مقدار واحد مورد نیاز از منبع سوم برای تخریب کمان
(s, 1)	52	44	60
(s, 2)	46	75	50
(1,2)	51	64	69
(1,3)	65	59	56
(2,1)	44	52	41
(2,4)	53	47	66
(2,5)	62	71	52
(3,4)	67	70	65
(3,6)	51	43	44
(4,2)	66	62	41
(4,3)	72	42	47
(4,5)	61	70	47
(4,6)	41	63	65
(5,4)	55	54	49

(5,6)	50	45	78
(5,7)	55	72	52
(6,9)	53	52	53
(6,4)	45	70	42
(6,5)	48	40	51
(6,7)	60	46	47
(7,8)	55	71	56
(7,6)	79	80	55
(8,9)	77	44	70
(8,10)	42	63	42
(9,8)	40	56	61
(9,10)	65	49	56
(10,11)	51	46	78
(10,12)	57	45	55
(11, s')	55	51	78

جدول ۴: مقادیر متغیر α_i

گره i	α_i
s	0

1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	1
9	1
10	1
11	1
s'	1

پروفسور کاظم انانزاده
 جدول ۵: مقادیر ناصفر متغیرهای y_{ij}

کمان (i, j)	y_{ij}
(6,9)	0.566

جدول ۶: مقادیر ناصفر متغیرهای β_{ij}

کمان (i, j)	β_{ij}
(6,9)	0.434
(7,8)	1



مراجع

- Wood, R. K. (1993). Deterministic network interdiction. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(2), 1-18. [1]
- Whiteman, P. S. B. (1999). Improving single strike effectiveness for network interdiction. *Military Operations Research*, 15-30. [2]
- Steinrauf, R. L. (1991). Network interdiction models. Naval Postgraduate School Monterey Ca. [3]
- Salmeron, J., Wood, K., & Baldick, R. (2004). Analysis of electric grid security under terrorist threat. *IEEE Transactions on power systems*, 19(2), 905-912. [4]
- Herodotus. (2006). The history. ReadHowYouWant. com. [5]
- Livy (Titus Livius). Translated by de S'elincourt A, editor. The war with Hannibal. Middlesex, England: Penguin Books; 1965. [6]
- Foote, S. (1865). The Civil War. A Narrative, 1, 69-70. [7]
- Blair, C. (2010). Hitler's U-boat War: The hunters, 1939-1942. Modern Library. [8]
- Maclsaac, D. (1976). Strategic Bombing in World War Two: The Story of the United States Strategic Bombing Survey. Dissertations-G. [9]
- Wood, R. K. (2010). Bilevel network interdiction models: Formulations and solutions. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*. [10]

- McMasters, A. W., & Mustin, T. M. (1970). Optimal interdiction of a supply network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 17(3), 261-268. [11]
- Phillips, C. A. (1993, June). The network inhibition problem. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing* (pp. 776-785). [12]
- Ratliff, H. D., Sicilia, G. T., & Lubore, S. H. (1975). Finding the n most vital links in flow networks. *Management Science*, 21(5), 531-539. [13]
- Harris, T. E., & Ross, F. S. (1955). Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (No. RM-1573). RAND CORP SANTA MONICA CA. [14]
- [15] Schrijver, A. (2002). On the history of the transportation and maximum flow problems. *Mathematical Programming*, 91(3), 437-445. [15]
- Church, R. L., Scaparra, M. P., & Middleton, R. S. (2004). Identifying critical infrastructure: the median and covering facility interdiction problems. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(3), 491-502. [16]
- McMasters, A. W., & Mustin, T. M. (1970). Optimal interdiction of a supply network. *Naval Research Logistics Quarterly*, 17(3), 261-268. [17]
- Abdolazadeh, A., Aman, M., & Tayyebi, J. (2020). Minimum st-cut interdiction problem. *Computers & Industrial Engineering*, 148, 106708. [18]
- Xiao, K., Zhu, C., Zhang, W., & Wei, X. (2020). The Bi-Objective Shortest Path Network Interdiction Problem: Subgraph Algorithm and Saturation Property. *IEEE Access*, 8, 146535-146547. [19]
- Atamtürk, A., Deck, C., & Jeon, H. (2020). Successive quadratic upper-bounding for discrete mean-risk minimization and network interdiction. [20]

INFORMS Journal on Computing, 32(2), 346-355.

- Forghani, A., Dehghanian, F., Salari, M., & Ghiami, Y. (2020). A bi-level model and solution methods for partial interdiction problem on capacitated hierarchical facilities. *Computers & Operations Research*, 114, 104831. [21]
- Jabarzare, Z., Zolfagharinia, H., & Najafi, M. (2020). Dynamic interdiction networks with applications in illicit supply chains. *Omega*, 96, 102069. [22]
- Mohammadi, A., & Tayyebi, J. (2019). Maximum Capacity Path Interdiction Problem with Fixed Costs. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 36(04), 1950018. [23]
- Smith, J. C., & Song, Y. (2020). A survey of network interdiction models and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 283(3), 797-811. [24]
- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Flows, J. O. N. (1993). Theory, algorithms, and applications. In *Network flows*.. [25]