Journal of Industrial Management Studies
Vol. 20, No.66, Fall 2022; p73-110
jims.atu.ac.ir
DOI: 10.22054/jims.2022.62190.2677

ATU PRESS

Original Research Accepted: 13/07/2022 Received: 15/07/2021 eISSN: 2476-602X ISSN: 2251/8029

Average Revenue Efficiency and Optimal Scale Sizes in Stochastic Data Envelopment Analysis: The Case: Post Offices

Leila Parhizkar Miyandehi — Ph.D. Candidate, Department of Applied Mathematics, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran

Alireza Amirteimoori — Professor, Department of Applied Mathematics, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran

Sohrab Kordrostami * — Professor, Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran

Mansour Soufi — Assistant Professor, Department of Management, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran

Abstract

Estimating the revenue efficiency of entities under evaluation is one of the most important evaluations that can give valuable information about organizations provided that the output prices are known. In this research, a new definition of optimal scale size (OSS) based on maximizing the average revenue efficiency (ARE) is presented. Also, the ARE is defined in both convex and non-convex sets, which is independent of returns to scale and the assumption that the vector of input-output prices of units is uniform. Next, due to the presence of uncertain data in many real applications, the introduced ARE model is extended to evaluate systems with random inputs and outputs, and approaches are provided to calculate it. Finally, the proposed method is used in an experimental example and the ARE is calculated for a data set of postal areas in Iran.

Keywords: Optimal Scale Size, Efficiency, Average Revenue Efficiency, Stochastic Data Envelopment Analysis.

* Corresponding Author: kordrostami@liau.ac.ir

How to Cite: Parhizkar Miyandehi, L., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Soufi , M. (2022). Average Revenue Efficiency and Optimal Scale Sizes in Stochastic Data Envelopment Analysis: A Case Study of Post Offices, *Journal of Industrial Management Studies*, 20(66), 73-110.

مقاله پژوهشی

فصلنامه مطالعات مدیریت صنعتی
سال بیستم، شماره ٦٦، پاییز ١٤٠١، ص ٧٣ تا ١١٠
jims.atu.ac.ir
DOI: 10.22054/jims.2022.62190.2677

متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی: مطالعه موردی مراکز پستی

لیلا پرهیزکار میاندهی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

علیرضا امیرتیموری استاد، گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

سهراب کردرستمی استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

منصور صوفی * استادیار، گروه مدیریت، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

چکیده

اگر قیمت‌های خروجی‌های واحدهای تحت ارزیابی مشخص باشد، ارزیابی کارایی درآمد واحدها یکی از مهم‌ترین ارزیابی‌هایی است که می‌تواند اطلاعات ارزشمندی را در مورد واحدها ارائه دهد. در این مقاله، ابتدا تعریف جدیدی از اندازه مقیاس بهینه، بر اساس بیشینه‌سازی اندازه متوسط کارایی درآمد ارائه می‌شود و سپس اندازه متوسط کارایی درآمد در دو فضای محدب و نامحدب تعریف می‌شود که این اندازه، مستقل از بازده به مقیاس و فرض یکسان بودن بردار قیمت‌های ورودی و خروجی واحدها است. در ادامه، اندازه متوسط کارایی درآمد برای ارزیابی واحدهایی با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی به کار گرفته‌شده و مدل‌هایی جهت محاسبه آن در فضای تصادفی ارائه می‌شود. در پایان نیز، روش پیشنهادی، در یک مثال تجربی برای محاسبه اندازه متوسط کارایی درآمد مجموعه‌ای از مناطق پستی ایران مورداستفاده قرار می‌گیرد.

کلیدواژه‌ها: اندازه مقیاس بهینه، کارایی، متوسط کارایی درآمد، تحلیل پوششی داده‌های تصادفی.

تاریخ ارسال: ۱۴۰۰/۰۴/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲
ISSN: 2251/8029
eISSN: 2476-602X

* نویسنده مسئول: kordrostami@liau.ac.ir

مقدمه

یکی از مفاهیمی که در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها[1] موردبررسی و پژوهش قرار گرفته است مفهوم اندازه مقیاس بهینه[2] است. بر اساس پژوهش انجام‌شده توسط جیووانولا و سسارونی (۲۰۱۵)، اندازه مقیاس بهینه در فضای نامحدب پوسته دسترسی‌پذیری آزاد[3]، یک نقطه در فضای امکان تولید است که متوسط کارایی هزینه[4] را حداقل می‌کند. همچنین اندازه متوسط کارایی هزینه، معیار جدیدی از کارایی هزینه است که با ترکیب دو کارایی مقیاس و تخصیصی، یک اندازه از صرفه‌جویی اقتصادی را در تحلیل کارایی تعریف می‌کند که این اندازه یک معیار عملکرد دقیق‌تر از کارایی‌های هزینه و مقیاس است. در این پژوهش، نشان داده می‌شود که متوسط کارایی هزینه در فضای محدب با بازده به مقیاس متغیر هم‌ارز کارایی هزینه با بازده به مقیاس ثابت است. بنابراین می‌توان به محاسبه متوسط کارایی هزینه در هر دو فضای محدب و نامحدب بدون هیچ پیش فرضی در مورد بازده به مقیاس پرداخت. علاوه بر این، در این پژوهش ارتباط بین اندازه مقیاس بهینه و بهره‌ورترین اندازه مقیاس[5] بیان می‌شود و نشان داده می‌شود که اندازه مقیاس بهینه معیار سخت‌گیرانه‌تری نسبت به بهره‌ورترین اندازه مقیاس است زیرا بهره‌ورترین اندازه مقیاس بودن شرط لازم و نه کافی برای اندازه مقیاس بهینه بودن است.

زمانی که به‌جای قیمت ورودی‌ها، قیمت خروجی‌های واحدهای تحت ارزیابی را داشته باشیم ارزیابی کارایی درآمد واحدها می‌تواند حاوی اطلاعات ارزشمندتری از واحدها نسبت به متوسط کارایی هزینه آن‌ها باشد. حتی اگر قیمت‌های ورودی‌ها هم موجود باشند در بعضی از موارد تأکید روی درآمد واحدهای تحت بررسی بیشتر از هزینه آن‌ها است. به‌عنوان‌مثال در ارزیابی عملکرد شعب بانک‌ها، و یا ارزیابی عملکرد مناطق پستی، ارزیابی کارایی درآمد شامل اطلاعات ارزشمندتری نسبت به کارایی هزینه واحدها

---

1. Data envelopment analysis (DEA)
2. Optimal scale size (OSS)
3. Free disposal hull (FDH)
4. Average cost efficiency (ACE)
5. Most productive scale size (MPSS)

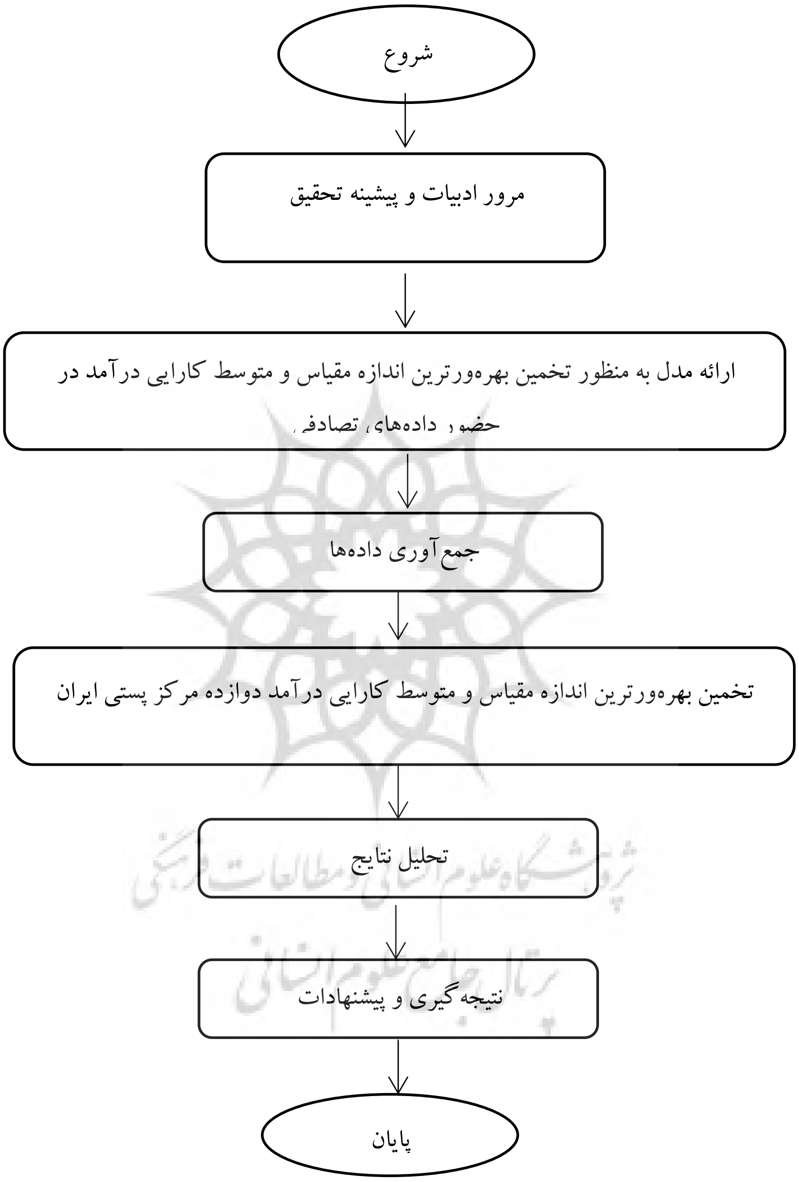
خواهد بود. ازاین‌رو، در این مقاله، ابتدا مفاهیم متوسط کارایی درآمد[1] و اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد[2] تعریف می‌شوند. این مفاهیم، توسعه‌ای از پژوهش انجام‌شده در مورد هزینه واحدهای تحت ارزیابی است که در اینجا در مورد درآمد واحدهای تحت بررسی ارائه می‌شوند. بنابراین، مفهوم اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد به‌عنوان نقطه‌ای از فضای امکان تولید که متوسط درآمد شعاعی را برای واحد تحت بررسی بیشینه می‌کند تعریف می‌شود و بر این اساس، اندازه کارایی متوسط کارایی درآمد، یک معیار ارزیابی از درآمد واحدهاست که به‌مراتب عملکرد دقیق‌تری نسبت به کارایی‌های درآمد و مقیاس دارد.

در ادامه، روش‌های محاسبه متوسط کارایی درآمد در دو فضای محدب و نامحدب موردبررسی قرار گرفته شده و نشان داده می‌شود که مدل متوسط کارایی درآمد در فضای محدب با بازده به مقیاس متغیر هم‌ارز با مدل درآمد با بازده به مقیاس ثابت است. ارتباط بین نقاط اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد و بهره‌ورترین اندازه مقیاس بیان می‌شود و مشابه حالت هزینه، نشان داده می‌شود که بهره‌ورترین اندازه مقیاس بودن یک واحد شرط لازم و نه کافی برای اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد بودن یک نقطه از فضای امکان تولید است. بعد از محاسبه متوسط کارایی درآمد در فضای محدب، مدل متوسط کارایی درآمد در فضای تصادفی و با حضور داده‌های تصادفی ارائه می‌شود. این مدل که روشی با محدودیت‌های احتمالی است ابتدا به‌صورت قطعی تبدیل‌شده و سپس با در نظر گرفتن مفروضاتی به حالت خطی تبدیل می‌شود تا به کمک آن بتوان متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد واحدهایی با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی را محاسبه نمود. در پایان نیز، در یک نمونه کاربردی، روش پیشنهادی برای ارزیابی متوسط کارایی درآمد مجموعه‌ای از مناطق پستی ایران به کار گرفته می‌شود.

در ادامه پس از مرور مهم‌ترین پژوهش‌های انجام‌شده در حوزه تحقیق، مراحل

1. Average revenue efficiency (ARE)
2..Optimal scale size based on maximizing revenue (OSSR)

مدل‌بندی، پیاده‌سازی و بحث و بررسی نتایج مطرح می‌شود. شکل ۱ کلیات پژوهش این تحقیق را نشان می‌دهد.



شکل ۱. کلیات پژوهش

پیشینه پژوهش

تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک رویکرد غیرپارامتری، ابزاری قدرتمند جهت ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده[1] است که توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) ارائه شد و سپس به‌سرعت در زمینه‌های مختلف توسعه پیدا کرد. یکی از این توسعه‌ها، لحاظ نمودن خطاهای اندازه‌گیری در ارزیابی واحدهاست. ازآنجاکه در دنیای واقعی با داده‌های غیرقطعی و تصادفی مواجه هستیم؛ مدل مرز تصادفی توسط اکثر اقتصاددانان موردحمایت قرارگرفت به‌طوری‌که هم‌زمان با ارائه مدل تحلیل پوششی داده‌ها در سال ۱۹۷۸، آینر و همکاران (۱۹۷۷) برای ارزیابی مجموعه‌ای از واحدهای تحت ارزیابی، تحلیل مرز تصادفی را مطرح نمودند. این روش برای داده‌های غیرقطعی و دارای خطای اندازه‌گیری، مورداستفاده قرار گرفت. پس‌ازاین پژوهش، موضوع تحلیل پوششی داده‌ها با مقادیر تصادفی در پژوهش‌های زیادی موردبررسی قرار گرفت. گونگ و سیکنز (۱۹۹۲) برای ارزیابی کارایی واحدها، دوره‌های زمانی تعریف کرده و با در نظر گرفتن خطاهای اندازه‌گیری و نویزهای آماری برای هردوره زمانی، نتایج را به‌صورت میانگین برای واحدهای تصمیم‌گیرنده محاسبه کردند. رجیرو (۲۰۰۴) علاوه بر در نظر گرفتن خطاهای اندازه‌گیری در دوره‌های زمانی، خطاهای اندازه‌گیری واحدهای مرزی را نیز به‌صورت میانگین در نظر گرفت و با در نظرگرفتن تأثیر خطاهای اندازه‌گیری روی تخمین مرزتابع تولید به این نتیجه رسید که استفاده از مدل‌ها بر پایه متوسط داده‌ها می‌تواند منجر به نتایج واقعی‌تری گردد. چارنز و کوپر (۱۹۶۳) مدل‌های برنامه‌ریزی با محدودیت‌های احتمالی را مطرح کردند. راهکارهایی به‌منظور تبدیل مدل برنامه‌ریزی تصادفی به‌صورت قطعی ارائه شد و یک مدل غیرخطی حاصل گردید. لند و همکاران (۱۹۹۳) تحلیل پوششی داده‌ها با محدودیت‌های احتمالی را به‌منظور محاسبه کارایی واحدها با ورودی‌های قطعی و خروجی‌های تصادفی که دارای توزیع نرمال بودند توسعه دادند. کوپر و همکاران (۱۹۹۸) مفهوم تصادفی کارا را با استفاده از محدودیت‌های احتمالی برای ورودی‌ها و خروجی‌های احتمالی توسعه دادند. آن‌ها تأکید داشتند به‌منظور محاسبه کارایی توزیع آماری و

1. Decision Making Unit (DMU)

پراکندگی داده‌ها الزامی است. ناصری و همکاران (۲۰۱۶) یک روش جدید در حل مسائل تحلیل پوششی داده‌ها با پارامترهای تصادفی فازی ارائه دادند که در این روش، مدل تحلیل پوششی داده‌ها استاندارد در محیطی تصادفی-فازی گسترش داده‌شده که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها از نوع متغیرهای فازی مثلثی و میانه‌های تصادفی از نوع توزیع نرمال می‌باشند. لئو و همکاران (۲۰۱۷) از یک مدل تحلیل پوششی داده‌های توسعه‌یافته با محدودیت‌های احتمالی برای مدیریت ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی استفاده نمودند. هدف آن‌ها اندازه‌گیری کارایی نسبی از دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه بود. پیری و همکاران (۲۰۱۸) با به‌کارگیری مدل مضربی و روش برنامه‌ریزی محدودیت شانس به ارزیابی واحدها با داده‌های تصادفی پرداختند. همچنین معادل قطعی آن را که یک برنامه غیرخطی بود توسعه و سپس ثابت کردند معادل قطعی مدل مضربی را می‌توان به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم تبدیل کرد. کائو و همکاران (۲۰۱۹) با استفاده از تبدیل نرمال استاندارد یک مدل تحلیل پوششی داده‌های تصادفی را توسعه دادند که می‌تواند هم‌بستگی بین عوامل ورودی و خروجی هر واحد تولیدی را برای یافتن توزیع کارایی تصادفی در نظر بگیرد. مهدی‌زاده و همکاران (۲۰۱۹) به مطالعه فرایندهای دو مرحله‌ای با داده‌های تصادفی پرداخته‌اند. درواقع، مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای دومرحله‌ای تصادفی بر اساس مفاهیم تئوری بازی‌های غیرمشارکتی ارائه کردند. در مطالعه میتروپولوس و همکاران (۲۰۲۰)، ضمن اشاره به حضور نویز در داده‌های دنیای واقعی، از روشی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های تصادفی استفاده شده است به‌منظور اندازه‌گیری عملکرد، زمانی که متغیرهای درون‌زا (کارایی) و برون‌زا (دیدگاه رضایت بیمار) به‌طور معکوس مرتبط هستند. جهانی و همکاران (۲۰۲۱) با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها به ارزیابی پایداری و تخمین بهره‌ورترین اندازه مقیاس پرداختند درحالی‌که داده‌های تصادفی حضور دارند. کارایی از دو منظر خوش‌بینانه و بدبینانه و همچنین با استفاده از معیار هورویکز[1] بررسی شد.

فیش (۱۹۶۵) از اولین افرادی بود که به محاسبه اندازه مقیاس بهینه پرداخت. او اندازه مقیاس بهینه را به‌عنوان مقیاسی که متوسط بهره‌وری فیزیکی را حداکثر می‌کند در نظر

1. Hurwicz

گرفت. واحدهای تحت ارزیابی در آن بررسی شامل چند ورودی و یک خروجی بودند که افزایش یک خروجی نسبت به افزایش نسبی همه ورودی‌ها، به‌عنوان معیار محاسبه اندازه مقیاس بهینه در نظر گرفته شده بود. بامول و همکاران (۱۹۸۳) با به‌کارگیری واحدهای ارزیابی چند خروجی نظریه فیش را گسترش دادند. فار و گروسکوف (۱۹۸۵) در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی مقیاس یک واحد تحت ارزیابی را نسبت کارایی هزینه بازده به مقیاس ثابت به کارایی هزینه بازده به مقیاس متغیر تعریف نمودند. سوییشی (۱۹۹۹) در کارایی مقیاس تعریف‌شده توسط فار و گروسکوف (۱۹۸۵)، مفهوم اندازه مقیاس اقتصادی را نیز گنجاند. فورساند و هالمارسون (۲۰۰۴) عنوان کردند باوجود تلاش‌های قابل‌توجهی که در خصوص طبقه‌بندی و اندازه‌گیری اندازه مقیاس بهینه در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها انجام‌شده، تعداد اندکی از این پژوهش‌ها به دنبال محاسبه و ارزیابی بهترین معیار برای اندازه مقیاس بهینه در تجزیه‌وتحلیل کارایی بوده‌اند. یافته‌های این پژوهش مؤید این حقیقت است که تا آن زمان مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی اندازه مقیاس بهینه که نیاز به تغییرات در ورودی‌ها و خروجی‌ها دارد، به‌خوبی جوابگو نیست. آسانی و همکاران (۲۰۱۹) مفهوم بهره‌ورترین اندازه مقیاس را برای سیستم‌های تولیدی متشکل از چندین زیرسیستم که به‌طور موازی متصل هستند بررسی کردند. جیوانولا و سسارونی (۲۰۱۵) برای اولین بار مفهوم اندازه مقیاس بهینه را در فضای تکنولوژی غیرمحدب پوسته دسترسی‌پذیری آزاد بیان کردند و به بیان ویژگی‌های متوسط کارایی هزینه و اندازه مقیاس بهینه در این فضا پرداختند. حقیقت‌پیشه و همکاران (۲۰۱۹) با استفاده هم‌زمان ورودی‌ها و خروجی‌ها مدل متوسط هزینه را برای محاسبه متوسط درآمد و متوسط سودآوری توسعه دادند و با ارائه یک روش ابتکاری عددی به محاسبه تقریبی اندازه مقیاس بهینه پرداختند.

یکی دیگر از مفاهیم مهمی که از همان ابتدا در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها موردتوجه قرار گرفت مفاهیم کارایی هزینه و درآمد بود. فارل (۱۹۵۷) به اندازه‌گیری کارایی درآمد و هزینه پرداخت. او کارایی درآمد را توانایی به حداکثر رساندن کل درآمد

حاصل‌شده به ازای سطوح ورودی معین در نظر گرفت که این ظرفیت را دارد که هم جنبه‌های فنی و هم تخصیصی را شامل شود. همچنین او کارایی هزینه یک واحدهای تصمیم‌گیرنده را توانایی رسیدن آن واحدهای تصمیم‌گیرنده به سطح خروجی مطلوب با به حداقل رساندن کل هزینه بیان نمود. این کارایی به‌عنوان یک کارایی کلی شامل جنبه‌های فنی و تخصیصی بود. ساهو (۲۰۱۴) مدل‌های کارایی درآمد، هزینه و سود را با رویکردی مبتنی بر تابع فاصله جهت‌دار ارائه دادند و ثابت کردند یک فناوری مبتنی بر ارزش به یک فناوری مرجع مناسب تبدیل می‌شود که می‌توان کارایی آن را تعیین کرد. پوری و همکاران (۲۰۱۶) مدل‌های متعارف کارایی هزینه و کارایی درآمد را در محیط‌های کاملاً فازی توسعه دادند تا کارایی در موقعیت‌های واقعی که داده‌های ورودی و خروجی و قیمت‌های متناظر آن‌ها به‌طور دقیق مشخص نیستند مورد ارزیابی قرار گیرند. همچنین نظر به اهمیت وجود خروجی‌های نامطلوب در فرایند تولید، آن‌ها نیز در مدل‌های پیشنهادی گنجانده شدند. بهاتیا و مهندرو (۲۰۱۸) به ارزیابی کارایی درآمد و بازده به مقیاس در بانک‌های تجاری هند پرداختند که هدف از این پژوهش، تجزیه‌وتحلیل کارایی درآمد بانک‌های تجاری هند دریک دوره زمانی ۲۲ ساله در فاصله سال‌های ۱۹۹۱ تا ۲۰۱۳ بود. خانجانی شیراز و همکاران (۲۰۲۰) روشی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های تصادفی به‌منظور تخمین کارایی هزینه واحدهای تصمیم‌گیری با ورودی و خروجی‌های تصادفی ارائه دادند. اما همان‌طور که مرور ادبیات نشان می‌دهد روشی به‌منظور تخمین اندازه مقیاس بهینه و متوسط کارایی درآمد در حضور داده‌های تصادفی موجود نمی‌باشد؛ بنابراین در این بررسی این موضوع رسیدگی می‌شود. .

روش تحقیق

مفاهیم متوسط کارایی هزینه و اندازه مقیاس بهینه اولین بار توسط سسارونی و جیوونولا (۲۰۱۵) ارائه شد. در این پژوهش نشان داده شد که متوسط کارایی هزینه با ترکیب دو کارایی مقیاس و تخصیصی، یک اندازه کارایی جدید از واحدها ارائه می‌دهد که این اندازه، یک اندازه قابل‌اعتماد از کارایی مقیاس بر اساس هزینه است که اندازه کارایی

شعاعی مقیاس و تکنیکی[1] ارائه‌شده توسط بنکر و ترال (۱۹۹۲) را تولید می‌کند. با توجه به این ترکیب، متوسط کارایی هزینه یک اندازه عملکرد بسیار دقیق‌تر از کارایی‌های هزینه و مقیاس ارائه می‌دهد که منحصراً بر مبنای میانگین بهره‌وری است. همچنین متوسط کارایی هزینه زمانی که بردار قیمت‌های ورودی برای واحدها متفاوت باشد نیز قابل‌محاسبه خواهد بود.

مادامی‌که به‌جای قیمت‌های ورودی، قیمت‌های خروجی واحدها در دسترس باشند، کارایی درآمد واحدها می‌تواند اطلاعات ارزشمندتری به نسبت کارایی هزینه ارائه دهد. در این شرایط مفاهیم اندازه مقیاس بهینه و متوسط کارایی هزینه ارائه‌شده توسط جیونولا و سسارونی (۲۰۱۵) دیگر کاربرد نخواهد داشت؛ زیرا مبنای محاسبه این اندازه‌ها، تنها هزینه واحدهاست این در حالی است که در بسیاری از نمونه‌های واقعی، تأکید بر روی افزایش درآمد به‌جای کاهش هزینه مدنظر است. بنابراین، در ادامه ابتدا مفاهیم اندازه مقیاس بهینه و متوسط کارایی هزینه ارائه‌شده توسط جیونولا و سسارونی (۲۰۱۵) برای کارایی درآمد توسعه داده می‌شوند و سپس ویژگی‌های ارائه‌شده در خصوص این دو مفهوم در حالت درآمد اثبات‌شده و در پایان این مفاهیم در فضای تصادفی تعمیم داده می‌شوند.

فضای امکان تولید پوسته دسترسی‌پذیری آزاد، متشکل از همه واحدهای مشاهده‌شده تحت اصل دسترسی‌پذیری آزاد را در نظر بگیرید. دراین فضا، هر ترکیب ورودی-خروجی با ورودی ناکمتر از ورودی‌های مشاهده‌شده و همان خروجی و هر ترکیب ورودی – خروجی با خروجی نابیشتر از خروجی‌های مشاهده‌شده و همان ورودی نیز وجود دارند. همچنین بازده به مقیاس فضا را متغیر فرض می‌کنیم تا هیچ فرضی را در مورد بازده به مقیاس اعمال نکرده باشیم.

فرض می‌کنیم n واحد تصمیم‌گیرنده داریم که $DMU_j\,(j=1,2,...,n)$، m ورودی $x_{ij}\,(i=1,...,m)$ را برای تولید s خروجی $y_{rj}\,(r=1,2,...,s)$ استفاده می‌کند. همچنین فرض کنید ورودی و خروجی واحدها همگی نامنفی می‌باشند و بردارهای ورودی و خروجی به‌صورت $x_j=(x_{1j},x_{2j},...,x_{mj})^T$ و $y_j=(y_{1j},y_{2j},...,y_{sj})^T$

1. Technical and scale radial efficiency (TSRE)

باشند که در آن T نشان‌دهنده ترانهاده است. اکنون اگر ماتریس ورودی‌ها و خروجی‌ها را به‌صورت $X=[x_1,x_2,...,x_n]_{m\times n}$ و $Y=[y_1,y_2,...,y_n]_{s\times n}$ در نظر بگیریم فضای امکان تولید پوسته دسترسی‌پذیری آزاد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^{FDH}=\left\{(x,y)\mid X\lambda\le x, Y\lambda\ge y, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1, \lambda_j\in\{0,1\}, j\in J\right\} \qquad (۱)$$

در رابطه فوق λ برداری است $n\times1$ شامل λ_jها و $J=\{1,2,...,n\}$.

فضای امکان تولید T^{FDH} با اضافه شدن اصل تحدب به فضای امکان تولید محدب با بازده به مقیاس متغیر[1] (VRS) تبدیل می‌شود که آن را فضای VRS محدب نامیده و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$T^{VRS}=\left\{(x,y)\mid X\lambda\le x\ ,\ Y\lambda\ge y\ ,\ \sum\lambda_j=1\ ,\ \lambda_j\ge0\ ,\ j\in J\right\} \qquad (۲)$$

اکنون فرض کنید مقادیر قیمت‌های خروجی‌های همه واحدها یکسان و به‌صورت بردار $q=(q_1,....,q_s)>0$ باشد. بنابراین qy_j درآمد کلی DMU_j حاصل از به‌کارگیری x_j است. فرض یکسان بودن قیمت‌های خروجی برای همه واحدها فقط برای راحتی علامت‌گذاری است و نتایج حاصله برای حالاتی که قیمت‌های خروجی واحدها متفاوت باشند نیز قابل‌تعمیم است.

اکنون مفهوم متوسط کارایی درآمد را بر اساس نسبت متوسط درآمد شعایی به درآمد واحد تحت بررسی تعریف می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر فرض کنید متوسط درآمد شعاعی DMU_j به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$RAR(x_j)=\frac{R(tx_j)}{t} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، $R(tx_j)$ درآمد کلی حاصل از تولید و $t\neq1$ یک اسکالر مثبت است که باعث انبساط یا انقباض هم‌زمان در ترکیب ورودی‌های x_j می‌شود. با تقسیم رابطه (۳) بر درآمد کلی واحد j داریم:

1. Variable Returns to Scale (VRS)

$$\frac{RAR(x_j)}{R(x_j)} = \frac{R(tx_j)}{R(x_j)} \times \frac{1}{t} \qquad (۴)$$

اکنون فرض کنید $(x_h, y_h) \in T$ یک واحد مرجع دلخواه باشد. قرار دهید

$$\rho_{j,h} = \min_i \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{ih}} \right\} \;\; ; \;\; \rho_{j,h} \in (0,\infty) \qquad (۵)$$

با قراردادن $t = \frac{1}{\rho_{j,h}}$ داریم $tx_j = \frac{1}{\rho_{j,h}} x_j = \max_i \left\{ \frac{x_{ih}}{x_{ij}} \right\} x_j \geq x_h$، لذا بنا به اصل دسترسی‌پذیری آزاد داریم $R(tx_j) = R(x_h) = qy_h$. بنابراین نسبت متوسط کارایی درآمد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_j = \frac{R(tx_j)}{R(x_j)} . \frac{1}{t} = \frac{qy_h}{qy_j} . \rho_{j,h} \qquad (۶)$$

در رابطه فوق، $\rho_{j,h}$ فاکتور مقیاس شعاعی به‌دست‌آمده از مقایسه بین بردارهای ورودی DMU_j و واحد مرجع h است. همچنین R_j میزان تصویر شعاعی بردار ورودی بر روی اندازه مقیاس بهینه آن یعنی tx_j است. برای اینکه بتوان از R_j به‌عنوان یک اندازه کارایی استفاده کرد، مفهوم اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد به‌عنوان مقیاسی که متوسط درآمد شعاعی را بیشینه می‌کند، تعریف می‌شود. این تعریف، توسعه‌ای از تعریف اندازه مقیاس بهینه توسط سسارونی و جیوانولا (۲۰۱۵) برای حالت درآمد است که در زیر می‌آید:

تعریف ۱- برای هر DMU_j، یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد واحدی از فضای امکان تولید است که R_j را بیشینه می‌کند.

بر اساس تعریف ۱، یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد جواب بهینه‌ای برای مدل زیر است.

$$\begin{aligned} \max\ & R_j = \frac{qy_h}{qy_j}.\rho_{j,h} \\ s.t.\ & \left(x_h, y_h\right) \in T \end{aligned} \tag{۷}$$

مدل (۷) یک مدل همواره شدنی است زیرا هر واحد می‌تواند نقطه مرجع خودش باشد. از طرفی این مدل بی‌کران نخواهد شد زیرا بنا به فرضیات اولیه واحدها، $qy_j > 0,\ \rho_{j,h} < \infty,\ qy_h < \infty$. همچنین اگر جواب بهینه مدل (۷) را به‌صورت R_j^* در نظر بگیریم آنگاه به‌وضوح $1 \le R_j^* < \infty$ خواهد بود زیرا هر واحد می‌تواند به‌عنوان نقطه مرجع خودش قرار گیرد. بر این اساس، اندازه متوسط کارایی درآمد به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲- اندازه متوسط کارایی درآمد برای یک واحد تصمیم‌گیرنده، بیشینه مقداری است که توسط مدل (۸) ایجاد می‌شود؛ یعنی:

$$ARE_j = R_j^* = \max_{(x_h, y_h)} R_j = \max_{(x_h, y_h)} \frac{qy_h}{qy_j}.\rho_{j,h} \tag{۸}$$

همان‌طور که پیش‌تر توضیح داده شد این مقدار بزرگ‌تر از یک است. بنابراین اگر بخواهیم همانند کارایی خروجی محور، مقداری بین صفر و یک را به آن اختصاص دهیم می‌توان از معکوس آن یعنی $1/ARE_j$ به‌عنوان اندازه متوسط کارایی درآمد استفاده کرد.

در ادامه ویژگی‌های بیشتری از اندازه متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد نشان داده می‌شوند.

ویژگی‌های اندازه مقیاس بهینه درآمدی و متوسط کارایی درآمد

با توجه به رابطه (۷) به‌راحتی می‌توان به این نتیجه رسید که تعیین متوسط کارایی درآمد برای هر واحد به تعیین اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد آن واحد بستگی دارد و بنابراین اغلب ویژگی‌های متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس

بیشینه‌سازی درآمد به یکدیگر وابسته‌اند که در ادامه به بعضی از این ویژگی‌ها اشاره می‌شود. درواقع این ویژگی‌ها، همان ویژگی‌های متوسط کارایی هزینه و اندازه مقیاس بهینه است که توسط سسارونی و جیوونولا (۲۰۱۵) برای حالت هزینه ارائه‌شده و در اینجا برای حالت درآمد توسعه داده شده‌اند.

تعریف ۳- نقطه (x_h, y_h) از فضای امکان تولید را کارای درآمد می‌گوییم هرگاه هیچ نقطه دیگری در فضای امکان تولید T وجود نداشته باشد که با هزینه کمتر از x_h، درآمدی بیشتر یا مساوی qy_h تولید کند.

تعریف فوق، تعریف کارایی درآمد ارائه‌شده توسط فارل (۱۹۵۷) است. بر اساس این تعریف، اولین قضیه مربوط به متوسط کارایی درآمد به‌صورت زیر خواهد بود.

قضیه ۱- اندازه متوسط کارایی درآمد یک واحد، بزرگ‌تر یا مساوی اندازه کارایی درآمد آن واحد است.

اثبات: کارایی درآمد یک واحد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\max \ \frac{qy_h}{qy_j} \\ &s.t. \quad x_h \leq x_j \end{aligned}$$

اگر $x_h \leq x_j$ آنگاه $1 \geq \rho_{j,h} = \min_i \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{ih}} \right\}$ و لذا

$$\blacksquare \ . \max \ \frac{qy_h}{qy_j} \leq \max \ \frac{qy_h}{qy_j} . \rho_{j,h} = ARE_j$$

قضیه ۱ نشان می‌دهد که اندازه متوسط کارایی درآمد یک واحد، نسبت به کارایی درآمد آن واحد، معیار دقیق‌تری است زیرا هر واحد کارای متوسط درآمد حتماً کارای درآمد نیز خواهد بود ولی هر واحد کارای درآمد لزوماً کارای متوسط درآمد نخواهد بود. این نتیجه به این دلیل است که در محاسبه کارایی درآمد، محدودیت $\rho_{j,h} = ۱$ وجود دارد درحالی‌که این محدودیت در محاسبه اندازه متوسط کارایی درآمد وجود ندارد.

قضیه ۲- اگر (x_h, y_h) یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد باشد آنگاه $ARE_h = 1$.

اثبات: کافی است نشان دهیم به ازای هر واحد دلخواهی مثل o، $R_h = \frac{qy_o}{qy_h}.\rho_{h,o} \leq 1$. فرض کنید (x_h, y_h) یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد برای واحد (x_j, y_j) باشد. همچنین فرض کنید (x_o, y_o) یک نقطه دلخواه از فضای امکان تولید باشد. مطابق رابطه (۷) داریم:

$$\frac{qy_h}{qy_j}.\rho_{j,h} \geq \frac{qy_o}{qy_j}.\rho_{j,o}$$

با جابجایی رابطه فوق داریم:

$$\frac{qy_o}{qy_h}.\frac{\rho_{j,o}}{\rho_{j,h}} \leq 1$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\rho_{j,o}}{\rho_{j,h}} = \min_i \left\{\frac{x_{ij}}{x_{io}}\right\}.\max_i \left\{\frac{x_{ih}}{x_{ij}}\right\} \geq \min_i \left\{\frac{x_{ih}}{x_{io}}\right\} = \rho_{h,o}$$

لذا $R_h = \frac{qy_o}{qy_h}.\rho_{h,o} \leq \frac{qy_o}{qy_h}.\frac{\rho_{j,o}}{\rho_{j,h}} \leq 1$. ■

مطابق قضیه ۲، هر واحدی که اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد باشد دارای اندازه کارایی $ARE = 1$ خواهد بود و لذا کارای متوسط درآمد است. به‌بیان‌دیگر هر واحد اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد، بیشترین متوسط کارایی درآمد را برای ترکیب ورودی‌های خود نتیجه می‌دهد. از طرفی بنا به مطلبی که پیش‌تر گفته شد، ازآنجاکه هر واحد کارای متوسط درآمد، کارای درآمد نیز هست؛ لذا هراندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد کارای درآمد نیز هست.

این مطلب را از زاویه دیگری نیز می‌توان بیان کرد. اگر اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد کارای درآمد نباشد آنگاه نقطه مرجع آن به‌عنوان اندازه مقیاس بهینه بر

اساس بیشینه‌سازی درآمد شناخته می‌شود و لذا تناقضی در تعریف اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد که بیشینه‌کننده رابطه (۷) هست، می‌باشد. بر این اساس، در ارزیابی واحدها توسط اندازه متوسط کارایی درآمد، مقایسه واحدها با واحدهای اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد انجام می‌شود که این واحدها خود کارای متوسط درآمد هستند و قاعدتاً مراجع واحدهای ناکارا نیز اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد هستند.

در ادامه به تعیین ارتباط اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد و بهره‌ورترین اندازه مقیاس می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا تعریفی از متوسط بهره‌دهی شعاعی بر اساس پژوهش سسارونی و جیووانولا (۲۰۱۵) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$RAR_{j,h}=\delta_{j,h}\cdot\gamma_{j,h} \qquad \delta_{j,h}=\max_i\left\{\frac{x_{ih}}{x_{ij}}\right\},\quad \gamma_{j,h}=\max_r\left\{\frac{y_{rj}}{y_{rh}}\right\} \tag{۹}$$

بر اساس تعریف فوق، پودینوفسکی (۲۰۰۴) فرمول زیر را برای تعریف بهره‌ورترین اندازه مقیاس ارائه داد: ترکیب $R_h=\frac{qy_o}{qy_h}.\rho_{h,o}\le\frac{qy_o}{qy_h}.\frac{\rho_{j,o}}{\rho_{j,h}}\le 1$ یک بهره‌ورترین اندازه مقیاس است اگر و تنها اگر:

$$\min_m(\delta_{h,m}\cdot\gamma_{h,m})=1 \tag{۱۰}$$

که در آن m نشان‌دهنده همه نقاط فضای امکان تولید T است و نقطه بهینه m^* ممکن است منحصربه‌فرد نباشد.

بر اساس رابطه (۱۰)، ارتباط اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد و بهره‌ورترین اندازه مقیاس در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۳- هراندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد یک بهره‌ورترین اندازه مقیاس است.

اثبات: برای اثبات این مطلب، ابتدا تجزیه‌ای از R_j به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

فرض کنید $(x_j, y_j) \in T$ یک نقطه از فضای امکان تولید و $(x_h, y_h) \in T$ نقطه اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد آن باشد، در این صورت با توجه به رابطه (۹)، ترکیب $(\frac{1}{\rho_{j,h}} x_j, \frac{1}{\gamma_{j,h}} y_j)$ عضوی از T خواهد بود زیرا $\frac{1}{\gamma_{j,h}} y_j \le y_h$ ، $\frac{1}{\rho_{j,h}} x_j \ge x_h$.

از رابطه $\frac{1}{\gamma_{j,h}} y_j \le y_h$ و معرفی متغیرهای کمبود s_j داریم:

$$y_h = s_j + \frac{y_j}{\gamma_{j,h}}$$

با اعمال قیمت‌های خروجی در رابطه فوق به رابطه زیر می‌رسیم:

$$qy_h = qs_j + \frac{qy_j}{\gamma_{j,h}}$$

اکنون با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۶)، تجزیه‌ای از R_j به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$R_j = \frac{qy_h}{qy_j}.\rho_{j,h} = \frac{qs_j + \frac{qy_j}{\gamma_{j,h}}}{qy_j}.\rho_{j,h} = \left(\frac{qs_j}{qy_j} + \frac{1}{\gamma_{j,h}}\right).\frac{1}{\delta_{j,h}}$$

حال فرض کنید (x_h, y_h) بهره‌ورترین اندازه مقیاس نباشد. لذا $\delta_{h,m^*}.\gamma_{h,m^*} < 1$ که در آن m^* جواب بهینه رابطه (۱۰) است. از طرفی با توجه به رابطه $\frac{qs_h}{qy_h}.\rho_{h,m^*} \ge 0$ داریم:

$$R_h = \left(\frac{qs_h}{qy_h} + \frac{1}{\gamma_{h,m^*}}\right).\frac{1}{\delta_{h,m^*}} = \frac{qs_h}{qy_h}.\rho_{h,m^*} + \frac{1}{\gamma_{h,m^*}.\delta_{h,m^*}} > 1$$

که این متناقض با اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد بودن (x_h, y_h) است.

قضیه ۳ نشان می‌دهد که بهره‌ورترین اندازه مقیاس بودن شرط لازم برای اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد بودن یک واحد است این در حالی است که عکس این قضیه برقرار نیست. به‌عبارت‌دیگر همان‌طور که در نمونه کاربردی خواهیم دید

یک واحد می‌تواند بهره‌ورترین اندازه مقیاس باشد ولی اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد نباشد. بنابراین اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد بودن ویژگی دقیق‌تری نسبت به بهره‌ورترین اندازه مقیاس است که در ارزیابی واحدها می‌تواند موردبررسی قرار گیرد.

در ادامه به معرفی اندازه متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد در فضاهای محدب با بازده به مقیاس متغیر می‌پردازیم. قضیه ۴، اندازه متوسط کارایی درآمد را در این فضا به دست می‌دهد.

قضیه ۴- اندازه متوسط کارایی درآمد یک واحد در فضای محدب با بازده به مقیاس متغیر، هم‌ارز اندازه کارایی درآمد آن واحد تحت بازده به مقیاس ثابت است.

اثبات: در رابطه (۸) فرض کنید T^{VRS} جایگزین T^{FDH} شود؛ داریم:

$$\begin{aligned} R_j^* = \max \frac{qy_h}{qy_j} . \frac{1}{t} \\ s.t. \quad tx_j \geq x_h \\ (x_h, y_h) \in T^{VRS} \end{aligned}$$

با توجه به محدودیت‌های فضای T^{VRS} محدودیت‌های زیر در مدل فوق اعمال می‌شوند:

$$(x_h, y_h) \in T^{VRS} \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j \leq x_h \\ \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j \geq y_h \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases}$$

با تقسیم محدودیت‌ها بر $t > 0, t \neq 1$ مدل غیرخطی زیر نتیجه می‌شود:

$$R_j^* = \max \frac{q\frac{y_h}{t}}{qy_j}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_j \geq \frac{x_h}{t} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\lambda_j}{t} \leq \frac{x_h}{t} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\lambda_j}{t} \geq \frac{y_h}{t} \\ & \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{t} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

اکنون با تغییر متغیرهای $\frac{1}{t} = s^*, \frac{\lambda_j}{t} = \lambda_j^*, \frac{x_h}{t} = x^*$ مدل فوق به‌صورت خطی زیر خواهد بود:

$$R_j^* = \max \frac{qy^*}{qy_j}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j^* \leq x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j^* \geq y^* \end{aligned}$$

دقت شود که با توجه به اینکه $t > 0, t \neq 1$، در مدل فوق محدودیت $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = s^*$ محدودیتی اضافه است که از مجموعه محدودیت‌ها حذف‌شده است. ■

قضیه ۴ نشان می‌دهد که یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد در فضای محدب و تحت بازده به مقیاس متغیر، ترکیبی از ورودی‌ها و خروجی‌هاست که مقدار درآمد کلی را تحت بازده به مقیاس ثابت بیشینه می‌کند. همچنین اندازه متوسط

کارایی درآمد یک واحد در فضای محدب و تحت تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر، همان اندازه کارایی درآمد تحت تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت خواهد بود.

بنا بر قضیه ۴ و آنچه در فضای T^{FDH} گفته شد؛ برای محاسبه متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد یک واحدهای تصمیم‌گیرنده در فضاهای محدب و نامحدب به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) در فضای نامحدب:

مقدار تابع هدف رابطه (۷) را به ازای تمامی واحدهای تحت بررسی محاسبه کرده و واحدی که بیشترین مقدار تابع هدف را برای DMU_j فراهم می‌کند به‌عنوان $OSSR_j$ و مقدار محاسبه‌شده را به‌عنوان ARE_j در نظر می‌گیریم.

ب): در فضای محدب و تحت تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر:

مدل درآمد زیر را حل کرده و مقادیر λ_j^* و y_{rh}^* را محاسبه می‌کنیم.

(۱۱)

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh} \\
&s.t. \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \le x_{io}, \quad i=1,2,\dots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \ge y_{rh}, \quad r=1,2,\dots,s \\
&\qquad \lambda_j \ge 0,\ y_{rh} \ge 0, \quad r=1,2,\dots,s,\ j=1,2,\dots,n.
\end{aligned}$$

در این‌صورت مقدار ARE_o از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ARE_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh}^*}{\sum_{r=1}^{s} q_r y_{ro}} \qquad (۱۲)$$

همچنین ترکیب محدب نقطه مرجع DMU_o با وزن‌های $\frac{\lambda_j^*}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*}$ را به‌عنوان $OSSR_o$ قرار می‌دهیم.

متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه در فضای تصادفی

با توجه به اینکه در دنیای واقعی با داده‌های غیرقطعی سروکار داریم استفاده از روش برنامه‌ریزی تصادفی که در آن ورودی‌ها، خروجی‌ها و یا هردوی آن‌ها تحت تأثیر عوامل اقتصادی، عوامل سیاسی، تأثیر تصمیمات غیرمنتظره دولت، نوسان ارز، عوامل محیطی و کشاورزی خارج از کنترل مدیر می‌باشد الزامی به نظر می‌رسد. آنچه در استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی بسیار حائز اهمیت است این است که تابع توزیع احتمال داده‌ها باید مشخص و یا قابل‌اندازه‌گیری باشد؛ زیرا با داشتن توزیع و پراکندگی داده‌ها امکان حادث شدن رویدادها بسیار زیاد می‌شود.

یکی از مهم‌ترین روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی تصادفی، استفاده از روش محدودیت‌های احتمالی است که در این مدل، محدودیت‌ها به‌صورت احتمالی در نظر گرفته می‌شود (Huang, & Li, 2001).

برای استفاده از این مدل، فرض کنید DMU_j، m ورودی تصادفی $\tilde{x}_j=\left(\tilde{x}_{1j},...,\tilde{x}_{mj}\right)$ را برای تولید s خروجی تصادفی $\tilde{y}_j=\left(\tilde{y}_{1j},...,\tilde{y}_{sj}\right)$ به کار گیرد. همچنین بردارهای $x_j=\left(x_{1j},...,x_{mj}\right)$ و $y_j=\left(y_{1j},...,y_{sj}\right)$ نیز به ترتیب بردارهای امید ریاضی متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌ها در نظر گرفته شوند که نامنفی و ناصفر هستند. در این صورت مدل درآمد با محدودیت‌های احتمالی برای تعیین ARE_o به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh} \\
&s.t.\ \ P(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j \le \tilde{x}_{io}) \ge 1-\alpha, \qquad i=1,2,...,m \\
&\quad P(\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_{rj}\lambda_j \ge y_{rh}) \ge 1-\alpha, \qquad r=1,2,...,s \\
&\quad \lambda_j \ge 0,\ y_{rh} \ge 0, \quad r=1,2,...,s, \quad j=1,2,...,n
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

برای ارزیابی واحد تحت بررسی به کمک مدل (۱۳) نیاز است که این مدل به یک مدل قطعی تبدیل شود. برای این منظور روش ارائه‌شده توسط هوانگ و لی (۲۰۰۱) را استفاده کرده تا مدل قطعی حاصل از مدل (۱۳) به دست آید. جزئیات کار در ادامه می‌آید:

محدودیت $P(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j \le \tilde{x}_{io}) \ge 1-\alpha$ را در نظر بگیرید. با تعریف متغیرهای کمکی $s_i^- \ge 0$ داریم:

$$P(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io} \le -s_i^-) = 1-\alpha \tag{۱۴}$$

قرار می‌دهیم: $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io}$

ازآنجاکه هر ترکیب خطی از متغیرهای نرمال، دارای توزیع نرمال است داریم:

$$\tilde{d}_i \sim N\left(d_i, \sigma_i^2(\lambda)\right)$$

که در آن:

$$d_i = E(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io}) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - x_{io}$$

$$\sigma_i^2(\lambda) = \mathrm{var}(\tilde{d}_i) = \mathrm{var}(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j\lambda_k Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{ik}) + \mathrm{var}(\tilde{x}_{io}) - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\lambda_o Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{io})$$

با در نظر گرفتن متغیر تصادفی $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io}$ در رابطه (۱۴) داریم:

$$P(\tilde{d}_i \le -s_i^-) = 1-\alpha$$

و یا:

$$P(\frac{\tilde{d}_i - d_i}{\sigma_i(\lambda)} \le \frac{-s_i^- - d_i}{\sigma_i(\lambda)}) = 1-\alpha$$

از طرفی با قرار دادن $\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{d}_i - d_i}{\sigma_i(\lambda)}$ و با توجه به اینکه متغیر $\tilde{Z}_i$ دارای توزیع نرمال استاندارد است داریم:

$$P(\tilde{Z}_i \le \frac{-s_i^- - d_i}{\sigma_i(\lambda)}) = 1-\alpha$$

$$P(\tilde{Z}_i \ge \frac{s_i^- + d_i}{\sigma_i(\lambda)}) = \alpha$$

$$\varphi(\frac{s_i^- + d_i}{\sigma_i(\lambda)}) = \alpha$$

در رابطه فوق φ تابع توزیع تجمیعی نرمال استاندارد است. لذا داریم:

$$\frac{s_i^- + d_i}{\sigma_i(\lambda)} = \varphi^{-1}(\alpha) \to s_i^- + d_i - \varphi^{-1}(\alpha).\sigma_i(\lambda) = 0$$

بنابراین فرم قطعی محدودیت (۱۴) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - \varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i(\lambda) \le x_{io}$$

$$\sigma_i^2(\lambda) = \mathrm{var}(\tilde{d}_i) = \mathrm{var}(\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{io}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j\lambda_k Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{ik}) + \mathrm{var}(\tilde{x}_{io}) - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\lambda_o Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{io})$$

با انجام فرایندی مشابه برای محدودیت‌های $P(\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_{rj}\lambda_j \ge y_{rh}) \ge 1-\alpha$ و با توجه به قطعی بودن مقادیر y_{rh}، صورت قطعی این دسته از محدودیت‌ها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \varphi^{-1}(\alpha)\delta_r(\lambda) \geq y_{rh}$$

$$\delta_r^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j\lambda_k Cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{rk})$$

بنابراین مدل درآمد در حالت تصادفی به مدل درجه دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh} \\ &s.t. \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - \varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i(\lambda) \leq x_{io}, \quad i=1,2,...,m \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \varphi^{-1}(\alpha)\delta_r(\lambda) \geq y_{rh}, \quad r=1,2,...,s \\ &\quad \lambda_j \geq 0,\ y_{rh} \geq 0 \quad r=1,2,...,s, \quad j=1,2,...,n. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در مدل (۱۵)، $\varphi(\alpha)$ تابع تجمیعی توزیع احتمال نرمال استاندارد و $\varphi^{-1}(\alpha)$ تابع معکوس آن است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} &\delta_r^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j\lambda_k Cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{rk}), \quad r=1,2,...,s, \\ &\sigma_i^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j\lambda_k Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{ik}) + \mathrm{var}(\tilde{x}_{io}) - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{io}), \quad i=1,2,...,m. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

مدل (۱۵) به دلیل وجود قیود درجه دوم که در (۱۶) توضیح داده شد، یک مدل غیرخطی درجه دوم است. اما اگر متغیرهای ورودی و خروجی را ناهمبسته فرض کنیم از طریق ساختار خطای ارائه‌شده توسط هوانگ و لی (۲۰۰۱)، می‌توان مدلی خطی برای محاسبه متوسط کارایی درآمد واحدهای تصادفی به دست آورد. برای جزئیات بیشتر فرض کنید ورودی‌ها و خروجی‌های واحد jام به‌صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_{ij} = x_{ij} + a_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad i=1,2,...,m \\ &\tilde{y}_{rj} = y_{rj} + b_{rj}\tilde{\zeta}_{rj}, \quad r=1,2,...,s. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن a_{ij} و b_{rj} مقادیری نامنفی می‌باشند و $\tilde{\varepsilon}_{ij}$و $\tilde{\zeta}_{rj}$ متغیرهای تصادفی نرمال می‌باشند به‌طوری‌که $\tilde{\varepsilon}_{ij} \sim N(0,\bar{\sigma}^2),\ \tilde{\zeta}_{rj} \sim N(0,\bar{\delta}^2)$. در این صورت $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ها و $\tilde{\zeta}_{rj}$ها خطاهای متغیرهای تصادفی ورودی و خروجی می‌باشند. بر اساس روابط (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_{ij} \sim N(x_{ij},\bar{\sigma}^2 a_{ij}^2) \\ &\tilde{y}_{rj} \sim N(y_{rj},\bar{\delta}^2 b_{rj}^2) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

اکنون اگر متغیرهای ورودی و خروجی را ناهمبسته فرض کنیم آنگاه $Cov(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{rk})=0,\ Cov(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{ik})=0$. همچنین می‌توان فرض کرد $\tilde{\varepsilon}_{ij}=\tilde{\varepsilon}_i$ و $\tilde{\zeta}_{rj}=\tilde{\zeta}_r$. با این مفروضات، فرایند قطعی‌سازی مدل (۱۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

محدودیت‌های $P(\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}\lambda_j \le \tilde{x}_{io}) \ge 1-\alpha$ را در نظر بگیرید. با معرفی $\tilde{d}_i=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}\lambda_j-\tilde{x}_{io}$ و با توجه به خواص تابع توزیع نرمال، ساختار خطا و مفروضات فوق داریم:

$$\tilde{d}_i=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}\lambda_j-\tilde{x}_{io}=(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j+\tilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j)-(x_{io}+\tilde{\varepsilon}_i a_{io})=$$
$$(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j-x_{io})+\tilde{\varepsilon}_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j-a_{io})$$

در این صورت:

$$\tilde{d}_i \sim N\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j-x_{io},\bar{\sigma}^2(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j-a_{io})^2\right)$$

بنابراین محدودیت‌های نامبرده به‌صورت زیر قطعی می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j-\varphi^{-1}(\alpha)\bar{\sigma}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j-a_{io}\right| \le x_{io}$$

اکنون محدودیت $P(\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_{rj}\lambda_j \geq y_{rh}) \geq 1-\alpha$ را در نظر بگیرید. با معرفی $\tilde{k}_r = \sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_{rj}\lambda_j - y_{rh}$ داریم:

$$\tilde{k}_r = \sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_{rj}\lambda_j - y_{rh} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \tilde{\zeta}_r \sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j - y_{rh} =$$

$$(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - y_{rh}) + \tilde{\zeta}_r \sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j$$

در این صورت:

$$\tilde{k}_i \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - y_{rh}, \bar{\delta}^2 (\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j)^2\right)$$

بنابراین محدودیت‌های نامبرده به‌صورت زیر قطعی می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\delta}\left|\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j\right| \geq y_{rh}$$

لذا با توجه به مثبت بودن مقادیر b_{rj}، مدل تصادفی (۱۲) برای محاسبه ARE_o به‌صورت قطعی زیر خواهد بود:

(۱۹)

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh} \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\sigma}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j - a_{io}\right| \leq x_{io}, \quad i = 1,2,\dots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\delta}(\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j) \geq y_{rh}, \qquad r = 1,2,\dots,s, \\
&\qquad \lambda_j \geq 0,\ y_{rh} \geq 0, \qquad r = 1,2,\dots,s, \quad j = 1,2,\dots,n.
\end{aligned}$$

مدل فوق به دلیل وجود عبارت قدرمطلق، مدلی غیرخطی است که می‌توان آن را با به‌صورت خطی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh} \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\sigma}(p_i^+ + p_i^-) \le x_{io}, && i=1,2,\dots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\delta}(\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\lambda_j) \ge y_{rh}, && r=1,2,\dots,s, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j - a_{io} = p_i^+ - p_i^-, && i=1,2,\dots,m, \\
&\qquad p_i^+, p_i^-, \lambda_j \ge 0,\ y_{rh} \ge 0,\ i=1,2,\dots,m,\ r=1,2,\dots,s,\ j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

بعد از محاسبه y_{rh}^* از مدل (۲۰)، مقدار ARE_o از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$ARE_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh}^*}{\sum_{r=1}^{s} q_r \tilde{y}_{ro}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} q_r y_{rh}^*}{(\sum_{r=1}^{s} q_r y_{ro}) + \varphi^{-1}(\alpha)(\sum_{r=1}^{s} q_r b_{ro})} \tag{۲۱}$$

درواقع رابطه (۲۱)، مقدار ARE_o را از تقسیم مقدار بهینه تابع هدف مدل (۲۰) بر مقدار تصادفی درآمد واحد تحت بررسی در سطح α، به دست می‌آورد. در ادامه به بررسی ویژگی‌های مدل فوق می‌پردازیم:

تعریف ۴- واحد O یک اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد است هرگاه $ARE_o = ۱$.

قضیه ۵- مدل (۲۰) به ازای هر α شدنی است.

اثبات: قرار دهید

$$\lambda_j = 0 \ \ (j \ne o),\ \ \lambda_o = 1,\ \ p_i^+ = p_i^- = 0,\ \ y_{rh} = y_{rj} + \varphi^{-1}(\alpha)\bar{\sigma} b_{rj} \ \ r = 1,2,\dots,s$$

در این صورت این جواب در همه محدودیت‌های مدل (۲۰) صدق خواهد کرد.■

بنابراین اگر ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها تصادفی باشند و فضای امکان تولید نیز محدب با بازده به مقیاس متغیر باشد آنگاه برای محاسبه ARE_o و $OSSR_o$ در سطح α ابتدا مدل (۲۰) را اجرا کرده و سپس به کمک رابطه (۲۱) مقدار ARE_o را به دست می‌آوریم. در این حالت، برای محاسبه $OSSR_o$ در بازده به مقیاس متغیر، می‌توان از ترکیب محدب نقطه مرجع DMU_o با وزن‌های $\lambda_j^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^*$ استفاده کرد که در آن $\lambda_j^*\ (j=1,2,...,n)$ مقادیر بهینه مدل (۲۰) می‌باشند. مقدار ARE_o در رابطه (۲۱) هر مقداری می‌تواند باشد و لزوماً کوچک‌تر از یک نخواهد بود بااین‌حال اگر $ARE_o = 1$ باشد واحد تحت بررسی، اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد خواهد بود و تحت هر α، هر چه مقدار ARE_o بیشتر باشد واحد تحت ارزیابی ازنظر متوسط کارایی درآمد رتبه بهتری خواهد داشت.

یافته‌ها

در این بخش، مدل پیشنهادی را برای ارزیابی عملکرد دوازده منطقه پستی در ایران به کار می‌گیریم. برای این منظور داده‌های مربوط به مناطق پستی با یک ورودی و سه خروجی به‌صورت زیر استخراج شد:

x_1: هزینه‌های پرسنلی و غیرپرسنلی

y_1 : تعداد مرسولات عادی، پیشتاز، سفارشی و ویژه پذیرفته‌شده

y_2 : تعداد مرسولات سرویس الکترونیک

y_3 : خدمات فروش

داده‌های موردنظر برای دوازده منطقه پستی در یک دوره ۳۶ ماهه و در فاصله سال‌های ۲۰۱۶ تا ۲۰۱۸ از سامانه گزارش‌های مدیریتی شرکت پست جمهوری اسلامی ایران و با همکاری مرکز برنامه‌وبودجه شرکت ملی پست جمهوری اسلامی ایران جمع‌آوری‌شده است. این اطلاعات بعد از میانگین‌گیری در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. میانگین داده‌ها در سال‌های ۲۰۱٦–۲۰۱۸

مراکز پستی	x_1	y_1	y_2	y_3
استان اصفهان	۶۵۰	۷۶۸۸۸۹	۱۰۵۵۳۶	۳۴۸۷۵۴
استان زنجان	۱۶۲	۲۹۷۴۲۱	۲۰۰۹۶	۸۳۳۷۴
استان قزوین	۱۹۴	۳۸۹۸۳۹	۲۷۶۴۶	۱۲۸۴۴۳
استان گیلان	۵۹۹	۴۴۶۰۹۴	۲۵۹۳۵۴	۶۸۷۰۵
استان مازندران	۵۳۹	۷۶۷۲۶۱	۵۵۲۸۳۵	۲۷۲۷۹۰
استان البرز	۴۲۰	۷۳۱۵۶۷	۶۹۸۶۰	۱۵۰۲۶۶
منطقه ۱۱ پستی تهران	۳۶۸	۳۸۶۱۲۹۶	۵۷۳۶۴	۲۶۲۵۳۵
منطقه ۱۳ پستی تهران	۴۱۲	۹۷۵۳۵۵	۴۱۳۵۳۷	۷۷۰۲۸۳
منطقه ۱۴ پستی تهران	۵۰۱	۱۸۴۹۵۸۸	۴۵۶۰۷	۲۶۶۹۴۳
منطقه ۱۶ پستی تهران	۳۹۱	۴۸۲۵۶۳	۶۱۸۰۴	۱۲۰۱۷۸
منطقه ۱۸ پستی تهران	۳۸۰	۲۳۰۲۸۱	۸۷۳۸۵	۴۷۸۹۴
استان قم	۱۹۵	۳۹۲۵۲۳	۱۱۳۴۷	۶۶۴۰۷

با توجه به یکسان‌بودن قیمت‌های خدمات برای تمامی مناطق پستی، قیمت‌های خروجی واحدها یکسان بوده و از طریق میانگین‌گیری قیمت‌های این سه سال به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند:

q_1: میانگین قیمت مرسولات عادی- ویژه به ازای هر ترافیک

q_2: میانگین قیمت مرسولات سرویس الکترونیک به ازای هر ترافیک

q_3: میانگین قیمت حاصل از خدمات فروش به ازای هر ترافیک

با توجه به عدم‌تغییر محسوس قیمت‌ها در طول سه سال، مقادیر قیمت‌ها برای سه سال به‌صورت قطعی فرض شده‌اند.

ارزیابی واحدهای پستی با رابطه‌های (۷)، (۲۰) و (۲۱) و توسط برنامه *GAMS* انجام شد و نتایج آن به‌صورت جدول ۲ به دست آمد.

جدول ۲. مقادیر متوسط کارایی درآمد واحدها

مراکز پستی	مقادیر ARE در حالت قطعی با تکنولوژی پوسته دسترسی‌پذیری آزاد	α			
		۰/۵	۰/۳۸۲	۰/۲۷٤	۰/۱۱۵
استان اصفهان	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۲۳
استان زنجان	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۰۳
استان قزوین	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۴	۰/۱۲
استان گیلان	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۰۶
استان مازندران	۰/۲۳	۰/۲۳	۰/۲۴	۰/۳۰	۰/۲۸
استان البرز	۰/۱۹	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۲۹	۰/۴۲
منطقه ۱۱ پستی تهران	۱	۱	۱	۱,۱۳	/۷۰
منطقه ۱۳ پستی تهران	۰/۳۸	۰/۳۸	۰/۴۱	۰/۵۳	۰/۶۵
منطقه ۱۴ پستی تهران	۰/۳۷	۰/۳۷	۰/۴۳	۰/۶۰	۱
منطقه ۱۶ پستی تهران	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۸	۰/۱۹
منطقه ۱۸ پستی تهران	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۰۸
استان قم	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۲۱	۰/۲۷	۰/۳۱

اگر داده‌های جدول ۱ به‌عنوان داده‌های قطعی مراکز پستی در نظر گرفته و مقادیر متوسط کارایی درآمد مراکز پستی در حالت نامحدب و با تکنولوژی پوسته دسترسی‌پذیری آزاد محاسبه شوند آنگاه مقادیر ستون دوم جدول ۲ برای واحدهای پستی ایجاد می‌شوند. همان‌طور که در این ستون مشاهده می‌شود، تنها واحد پستی منطقه ۱۱ تهران که دارای مقدار متوسط کارایی درآمد برابر با یک هست به‌عنوان اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد شناخته می‌شود و بقیه واحدهای پستی اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد نیستند و واحد منطقه ۱۱ تهران به‌عنوان اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد مرجع برای همه واحدها انتخاب می‌شود. علاوه بر این هر واحدی که دارای متوسط کارایی درآمد بالاتری نسبت به بقیه واحدها باشد ازلحاظ کارایی متوسط کارایی درآمد رتبه بالاتری خواهد داشت و بنابراین بعد از واحد منطقه ۱۱ تهران، واحد منطقه ۱۳ تهران که بالاترین مقدار متوسط کارایی درآمد را در بین دیگر واحدها دارد در

رتبه دوم قرار می‌گیرد. همچنین اگر در این حالت، واحدها را ازلحاظ بهره‌ورترین اندازه مقیاس بودن مقایسه کنیم (رابطه (۱۰)) به این نتیجه می‌رسیم که واحدهای پستی استان مازندران، مناطق ۱۱ و ۱۳ تهران هر سه بهره‌ورترین اندازه مقیاس هستند این در حالی است که واحد پستی مازندران و منطقه ۱۳، اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد نیستند و همان‌طور که در قضیه ۳ نشان داده شد بهره‌ورترین اندازه مقیاس بودن یک واحد شرط لازم و نه کافی برای اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد بودن یک واحد است.

اکنون اگر بخواهیم به ارزیابی واحدهای پستی در فضای محدب بپردازیم و برای دقت بیشتر در ارزیابی، خطاهای اندازه‌گیری ورودی و خروجی‌های واحدها را نیز در طول این سه سال در نظر بگیریم از مدل تصادفی (۲۰) با ورودی و خروجی‌های تصادفی استفاده می‌شود. برای این منظور فرض می‌شود که داده‌های مراکز پستی دارای توزیعی نرمال هستند. مقادیر میانگین این واحدها همان مقادیر جدول ۱ هستند و مقادیر انحراف معیار واحدها نیز از طریق محاسبه انحرافات از معیار داده‌های این سه سال در نظر گرفته می‌شوند. با فرض یکسان بودن خطاها در ورودی‌ها و خروجی‌های همه واحدها و همچنین عدم همبستگی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها، از مدل (۲۰) استفاده‌شده و نتایج حاصل از این مدل برای سه مقدار α در جدول ۲ آمده است.

اگر $\alpha=$ ۰/۱۱۵ در نظر گرفته شود آنگاه مقادیر متوسط کارایی درآمد واحدها به‌صورت ستون سوم جدول ۲ خواهند بود. همان‌طور که در این ستون مشاهده می‌شود، تنها واحد پستی منطقه ۱۴ تهران دارای متوسط کارایی درآمد برابر یک است و لذا در این سطح از α، فقط این واحد اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد است و مرجع اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد سایر واحدها نیز همین واحد پستی است. اگر $\alpha=$ ۰/۲۷۴ در نظر گرفته شود آنگاه هیچ‌یک از واحدهای پستی اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد نخواهند بود؛ زیرا مقدار متوسط کارایی درآمد هیچ‌یک از

واحدها برابر یک نیست. در این سطح از α، مقدار اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد همه واحدها به‌صورت ذیل است:

$$(x_1 = ۳۸۶/۹۱,\ \ y_1 = ۳۵۱۹۰۳۱/۶۹,\ \ y_2 = ۱۱۲۱۷۳/۳۴,\ \ y_3 = ۲۶۳۶۶۹/۴۱)$$

این واحد، ترکیب محدبی از واحدهای پستی مازندران و منطقه ۱۱ تهران است.

اگر $\alpha = ۰/۳۸۲$ باشد، آنگاه واحد پستی منطقه ۱۱ تهران دارای متوسط کارایی درآمد برابر یک خواهد شد و تنها اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد مرجع همه واحدها همین واحد پستی خواهد بود و سرانجام اگر $\alpha = ۰/۵$ باشد نیز همانند حالت $\alpha = ۰/۳۸۲$ تنها واحد اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد، واحد پستی منطقه ۱۱ تهران است که مرجع اندازه مقیاس بهینه بر اساس بیشینه‌سازی درآمد سایر واحدها نیز قرار گرفته است. درواقع وقتی $\alpha = ۰/۵$ است مدل (۲۰) با مدل (۱۱) نتایج یکسانی خواهند داشت. به‌عبارت‌دیگر، اگر فضا را محدب و داده‌های واحدهای پستی را به‌صورت قطعی مانند جدول ۱ در نظر بگیریم همان نتایج ستون آخر جدول ۲ را برای واحدهای پستی خواهیم داشت؛ زیرا در سطح $\alpha = ۰/۵$ تنها میانگین واحدها مورداستفاده قرار می‌گیرد. علاوه بر این، نتایج ستون آخر با نتایج ستون دوم که حالت نامحدب پوسته دسترسی‌پذیری آزاد هست برابر شده‌اند که این مسئله به خاطر هم‌ارزی مدل‌های (۷) و (۱۱) است که در قضیه ۴ نشان داده شد. نکته آخر در مورد نتایج ارائه‌شده در جدول ۲ این است که در هر سطحی از α، واحدی که مقدار متوسط کارایی درآمد بیشتری داشته باشد ازلحاظ کارایی متوسط کارایی درآمد در رتبه بهتری نسبت به سایر واحدها قرار دارد. به‌منظور بررسی اعتبار خارجی مدل، نتایج مدل تصادفی به ازای αهای متفاوت با مدل قطعی مقایسه شد که نشان می‌دهد در نظر گرفتن داده‌های تصادفی و دربرگیری αهای متفاوت بر نمرات کارایی تأثیر دارند.

برای رسیدگی اعتبارسنجی داخلی و حساسیت واحدها به هر یک از مقادیر خروجی، مقادیر کارایی واحدها با خروجی‌های انتخاب‌شده محاسبه و به‌صورت جدول ۳ به دست آورده شد.

همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، مقادیر کارایی اکثر واحدها با حذف بعضی خروجی‌ها تغییر چندانی ندارند اما حذف خروجی اول که تأثیر زیادی در کارایی و درآمدزایی واحدهای پستی دارد به میزان قابل‌توجهی کارایی واحدها را تحت تأثیر قرار داده است. به‌عنوان‌مثال واحد پستی منطقه ۱۱ تهران که در اغلب حالات بررسی‌شده دارای کارایی برابر یک بوده با حذف متغیر خروجی اول به یک واحد پستی ناکارا تبدیل شده است.

جدول ۳. متوسط کارایی درآمد با ترکیبات متفاوت ورودی و خروجی در سطح $\alpha = ۰/۵$

مراکز پستی	x_1, y_1	x_1, y_1, y_2	x_1, y_1, y_3	x_1, y_2, y_3	x_1, y_1, y_2, y_3
استان اصفهان	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۲۲	۰/۱۴
استان زنجان	۰/۱۷	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۲۰
استان قزوین	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۲۱	۰/۲۵	۰/۲۲
استان گیلان	۰/۰۷	۰/۱۱	۰/۰۷	۰/۲۵	۰/۱۱
استان مازندران	۰/۱۴	۰/۲۲	۰/۱۵	۰/۶۴	۰/۲۳
استان البرز	۰/۱۷	۰/۱۸	۰/۱۸	۰/۱۸	۰/۱۹
منطقه ۱۱ پستی تهران	۱	۱	۱	۰/۲۷	۱
منطقه ۱۳ پستی تهران	۰/۲۳	۰/۳۰	۰/۳۰	۱	۰/۳۸
منطقه ۱۴ پستی تهران	۰/۳۵	۰/۳۵	۰/۳۶	۰/۱۹	۰/۳۷
منطقه ۱۶ پستی تهران	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۱۳	۰/۱۶	۰/۱۴
منطقه ۱۸ پستی تهران	۰/۰۶	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۱۵	۰/۰۸
استان قم	۰/۱۹	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۱۲	۰/۲۰

بحث و نتیجه‌گیری

در بسیاری از نمونه‌های واقعی، به‌خصوص زمانی که قیمت‌های خروجی‌های واحدها مشخص باشند، ارزیابی کارایی درآمد واحدها بیشتر از ارزیابی کارایی هزینه واحدها موردتوجه قرار دارد. ازاین‌رو، در این مقاله مفاهیم متوسط کارایی هزینه و اندازه مقیاس بهینه که در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای هزینه واحدها ارائه شده‌اند برای حالت درآمد توسعه داده‌شده و مفاهیم متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه بر اساس

بیشینه‌سازی درآمد تعریف شدند. نشان داده شد که چگونه می‌توان مقادیر متوسط کارایی درآمد را به‌عنوان یک اندازه کارایی بسیار ارزشمند و دقیق‌تر از اندازه کارایی درآمد در فضاهای محدب و نامحدب و بدون هیچ فرضی در مورد بازده به مقیاس محاسبه کرد. همچنین با فرض تصادفی بودن متغیرهای ورودی و خروجی و به‌کارگیری مدل محاسبه متوسط کارایی درآمد با محدودیت‌های احتمالی، یک مدل قطعی درجه دوم برای محاسبه متوسط کارایی درآمد ارائه شد که با فرض ناهمبسته بودن متغیرها به یک مدل خطی تبدیل‌شده به‌طوری‌که به کمک این مدل خطی قادر خواهیم بود مقادیر متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه **بر** اساس بیشینه‌سازی درآمد واحدهای تصادفی را تعیین کرده و به ارزیابی آن‌ها بپردازیم. در پایان مدل‌های پیشنهادی در یک نمونه واقعی و برای ارزیابی متوسط کارایی درآمد ده واحد پستی به کار گرفته شد و در این نمونه دیده شد که مدل‌های پیشنهادی ضمن ارائه یک ارزیابی دقیق‌تر نسبت به کارایی درآمد، بهترین اندازه مقیاس درآمدی را به‌عنوان واحد مرجع واحدهای ناکارا معرفی می‌کنند.

توسعه روش پیشنهادی برای موقعیت‌هایی که عوامل نامطلوب و تصادفی حضور دارند موضوع جالبی برای تحقیقات آتی به نظر می‌رسد. به‌علاوه تخمین بهره‌ورترین اندازه مقیاس در حضور شاخص‌های فازی و تصادفی به‌عنوان مبحثی برای بررسی بیشتر مطرح می‌شود. با توجه به محدودیت‌های موجود، روش معرفی‌شده در این مقاله برای ارزیابی کارایی و تخمین بهره‌ورترین اندازه مقیاس دوازده منطقه پستی در ایران استفاده شد. به‌کارگیری این روش برای ارزیابی تمامی مراکز پستی ایران و همچنین به‌کارگیری آن در صنعت بانکداری را می‌توان به‌عنوان بررسی‌های آتی در نظر گرفت.

تعارض منافع

تعارض منافع نداریم.

سپاسگزاری

از سردبیر، هیئت تحریریه و داوران محترم به خاطر صرف وقت در بررسی مقاله و پیشنهادهای ارزنده تقدیر و تشکر می‌شود.

ORCID

Leila Parhizkar Miyandehi
Alireza Amirteimoori **https://orcid.org/0000-0003-4160-8509**
Sohrab Kordrostami **https://orcid.org/0000-0003-0081-8008**
Mansour Soufi **https://orcid.org/**

References

Aigner, D., Lovell, C. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of econometrics*, *6*(1), 21-37.

Assani, S., Jiang, J., Assani, A., & Yang, F. (2019). Estimating and decomposing most productive scale size in parallel DEA networks with shared inputs: A case of China's Five-Year Plans. arXiv preprint arXiv:1910.03421.

Banker, R. D., & Thrall, R. M. (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis. *European Journal of operational research*, *62*(1), 74-84.

Baumol, W. J., Panzar, J. C., & Willig, R. D. (1983). Contestable markets: An uprising in the theory of industry structure: Reply. *The American Economic Review*, *73*(3), 491-496.

Bhatia, A., & Mahendru, M. (2018). Assessment of Revenue Efficiency and Return to Scale of Indian Scheduled Commercial Banks. *Assessment*, *8*(4).

Cesaroni, G., & Giovannola, D. (2015). Average-cost efficiency and optimal scale sizes in non-parametric analysis. *European Journal of Operational Research*, *242*(1), 121-133.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1963). Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints. *Operations research*, *11*(1), 18-39.

Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, *2*(6), 429-444

Cooper, W. W., Huang, Z., Lelas, V., Li, S. X., & Olesen, O. B. (1998). Chance constrained programming formulations for stochastic characterizations of efficiency and dominance in DEA. *Journal of productivity analysis*, *9*(1), 53-79.

Färe, R., & Grosskopf, S. (1985). A nonparametric cost approach to scale efficiency. *The Scandinavian Journal of Economics*, 594-604.

Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, *120*(3), 253-281.

Førsund, F. R., & Hjalmarsson, L. (2004). Are all scales optimal in DEA? Theory and empirical evidence. *Journal of Productivity Analysis*, *21*(1), 25-48.

Frisch, R. (1965). Theory of production. *Theory of production*.

Gong, B. H., & Sickles, R. C. (1992). Finite sample evidence on the performance of stochastic frontiers and data envelopment analysis using panel data. *Journal of Econometrics*, *51*(1-2), 259-284.

Haghighatpisheh, H., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., & Lotfi, F. H. (2019). Optimal scale sizes in input–output allocative data envelopment analysis models. *Annals of Operations Research*, 1-22.

Huang, Z., & Li, S. X. (2001). Stochastic DEA models with different types of input-output disturbances. *Journal of Productivity Analysis*, *15*(2), 95-113.

Jahani Sayyad Noveiri, M., Kordrostami, S., & Amirteimoori, A. (2021). Sustainability Assessment and Most Productive Scale Size: a Stochastic DEA Approach with Dual Frontiers. *Environmental Modeling & Assessment*, 26(5), 723-735.

Kao, C., & Liu, S. T. (2019). Stochastic efficiency measures for production units with correlated data. *European Journal of Operational Research*, 273(1), 278-287.

Khanjani Shiraz, R. K., Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Fukuyama, H. (2020). Chance-constrained cost efficiency in data envelopment analysis model with random inputs and outputs. *Operational Research*, *20*(3), 1863-1898.

Land, K. C., Lovell, C. K., & Thore, S. (1993). Chance- constrained data envelopment analysis. *Managerial and decision economics*, *14*(6), 541-554.

Liu, W., Wang, Y. M., & Lyu, S. (2017). The upper and lower bound evaluation based on the quantile efficiency in stochastic data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications*, 85, 14-24.

Mehdizadeh, S., Amirteimoori, A., Charles, V., Behzadi, M. H., & Kordrostami, S. (2021). Measuring the efficiency of two-stage network processes: A satisficing DEA approach. *Journal of the Operational Research Society*, *72*(2), 354-366.

Mitropoulos, P., Zervopoulos, P. D., & Mitropoulos, I. (2020). Measuring performance in the presence of noisy data with targeted desirable levels: evidence from healthcare units. *Annals of Operations Research*, 294(1), 537-566.

Piri, M., Lotfi, F. H., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Behzadi, M. H. (2018). Evaluating decision making units with stochastic data by the multiplier model in DEA. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 17(5), 385-400.

Podinovski, V. (2004). Efficiency and global scale characteristics on the “No free lunch” assumption only. *Journal of Productivity Analysis*, *22*(3), 227-257.

Puri, J., & Yadav, S. P. (2016). A fully fuzzy DEA approach for cost and revenue efficiency measurements in the presence of undesirable outputs and its application to the banking sector in India. *International Journal of Fuzzy Systems*, 18(2), 212-226.

Ruggiero, J. (2004). Data envelopment analysis with stochastic data. *Journal of the Operational Research Society*, *55*(9), 1008-1012.

Sahoo, B. K., Mehdiloozad, M., & Tone, K. (2014). Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach. *European Journal of Operational Research*, *237*(3), 921-931.

Sueyoshi, T. (1999). DEA duality on returns to scale (RTS) in production and cost analyses: an occurrence of multiple solutions and differences between production-based and cost-based RTS estimates. *Management Science*, *45*(11), 1593-1608.

.

استناد به این مقاله: پرهیزکار میاندهی، لیلا.، امیرتیموری، علیرضا.، کردرستمی، سهراب.، صوفی، منصور. (۱۴۰۱). متوسط کارایی درآمد و اندازه مقیاس بهینه در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی: مطالعه موردی مراکز پستی، *فصلنامه مطالعات مدیریت صنعتی*، ۲۰(۶۶)، ۷۳-۱۱۰. . .

.DOI: 10.22054/jims.2022.62190.2677